EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023-2024

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(4)
Convocatoria:	

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Criterios de calificación

A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.

B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.

C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.

D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).

E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.

F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.

G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.

H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)

I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.

K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.

L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.

M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.

N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Se considera la función $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}\ , & x\leq 0 \\ \dfrac{ax}{e^x-1}+2\ , & x>0 \end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=0$. 1.75 ptos

b) Para los valores $a=1$ y $b=-2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x=-1$ 0.75 ptos

Solución:
Analizamos la continuidad en x=0.

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{e^x-1}+2=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax+2(e^x-1)}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}\,L'H.}{\cong}\dfrac{a+2e^x}{e^x}=2+a \end{cases}$$

Para que sea continua en x=0, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\Rightarrow 2+a=3\Rightarrow a=\ 1.$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$, mirando que ocurre con las derivadas laterales

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(2x-b)(x^2+3)-2x(x^2-bx+9)}{(x^2+3)^2} & x<0 \\ \dfrac{-(e^x-1)+xe^x}{(e^x-1)^2} & x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2} & x<0 \\ \dfrac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2} & x>0 \end{cases}$$

Por tanto, $f'(0)^-=\frac{-b}{3}$ y

$$f(0)^+=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}\,L'H.}{\cong}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^x-xe^x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}\,L'H.}{\cong}\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2e^x}=\frac{-1}{2}\Rightarrow$$

Por tanto para que sea derivable en x=0, $\frac{-b}{3}=\frac{-1}{2}$, entonces $b=\frac{3}{2}$.

Para que la función se continua y derivable en x=0, $a=\ 1$ y $b=\frac{3}{2}$.

b) Ahora $a=1$ y $b=-2$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+9}{x^2+3} & x\le 0\\ \dfrac{x}{e^x-1}+2 & x>0\end{cases}$$

Recta tangente en x=-1, $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

$$f(-1)=\frac{1-2+9}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$si\ x<0, f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+3)-2x(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2-12x+6}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{-2+12+6}{16}=1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en x=-1 es

$$\boxed{y-2=x+1;\quad y=x+3}$$

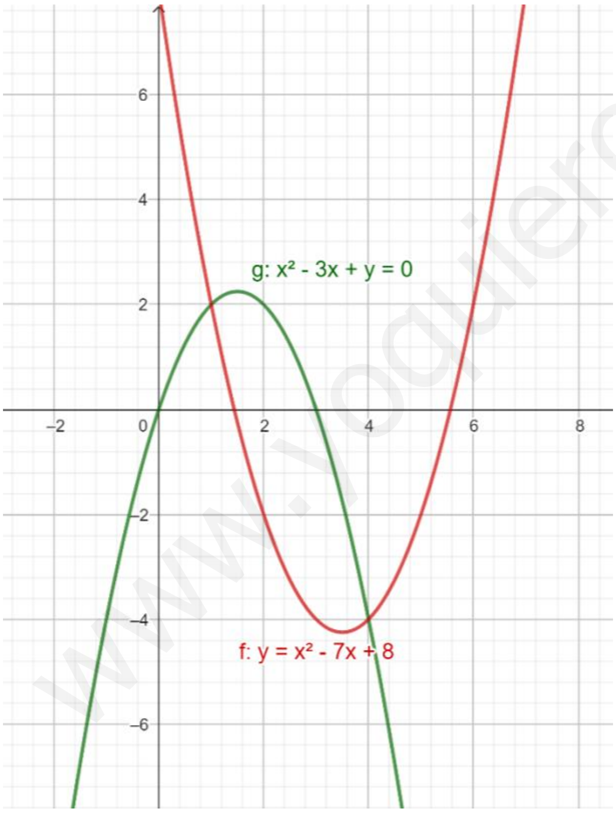
1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3-x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 ptos

Solución:

Representación de las parábolas:

$$y = x(3-x) = -x^2 + 3x \rightarrow \begin{cases} Vértice: \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) \\ Cortes\ con\ los\ Ejes: OX\ (0,0)(3,0) \\ OY\ (0,0) \end{cases}$$

$$y = x^2 - 7x + 8 \rightarrow \begin{cases} Vértice: \left(\frac{7}{2}, \frac{-17}{4}\right) \\ Cortes\ con\ los\ Ejes: OX\ \left(\frac{7-\sqrt{17}}{2}, 0\right), \left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}, 0\right) \\ OY\ (0,8) \end{cases}$$



Para poder calcular el área de la zona ajardinada hay que buscar los puntos de corte entre las dos funciones

$$x(3-x) = x^2 - 7x + 8; \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4\,, x = 1$$

Por tanto, el área de la zona ajardinada se calcula resolviendo la siguiente integral

$$\int_1^4 x(3-x)-(x^2-7x+8)dx$$
$$= \int_1^4 -2x^2+10x-8\,dx = \frac{-2}{3}x^3+5x^2-8x\Big]_1^4$$
$$= \left[\frac{-2}{3}64+5\cdot 16-32\right]-\left[\frac{-2}{3}+5-8\right] = 9\,m^2.$$

El área de la zona ajardinada es de $9\ m^2$. Además, como el coste por m^2 es de 65 €, el coste de construcción sería de $65\cdot 9 = 585€$.

El presupuesto de construcción de la base metálica de la estatua es de 585€.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón(o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

Solución:

Definimos las variables:

x = dinero que aporta Aythami (€)
y = dinero que aporta Besay (€)
z = dinero que aporta Chamaida (€)

- La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5}$
- La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay : $x - z = 2y$
- El doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami: $2(y + z) = x + 2$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5(x+y) = 11(x-y) \\ x - z = 2y \\ -x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 16y = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad (si\ 2^aF + 3^aF) \quad z = 2,$$

Sustituyendo este resultado en la primera y segunda fila obtenemos que:

$$\begin{cases} 6x - 16y = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases} (\ si\ 1^aF - 6 \cdot 2^aF) \ \ -4y = -12; \ \ y = 3; \ \ x = 8$$

Por tanto, las cantidades aportadas para la merienda por cada uno son: Aythami 8 €, Besay 3€ y Chamaida 2€.

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores que tome el parámetro k. 1.25 ptos

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación $X \cdot M_1 + X \cdot {M_1}^T = B$. 1.25 ptos

Solución:

a) El rango máximo de M_k es 3 y eso ocurre si y sólo si $|M_k| \neq 0$. Calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 - k^2(2k-3) = k^2(-k+3) = 0 \Leftrightarrow k = 3;\ \ k = 0.$$

Los casos son:

- Si $k \neq 0\ y\ k \neq 3$, $|M_k| \neq 0$ y por tanto $rang(M_k) = 3$.
- Si $k = 0$,

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene dos filas o columnas nulas, entonces $rang(M_0) = 1$.

- Si $k = 3$,

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.\ rang(M_3) = 2$

b) Si k=1 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X(M_1 + M_1^T) = B;\quad X = B \cdot (M_1 + M_1^T)^{-1}$$

$$M_1 + M_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $M_1 + M_1^T = 2I_3$, su inversa será $(M_1 + M_1^T)^{-1} = \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Finalmente,

$$X = B \cdot (M_1 + M_1^T)^{-1} = B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1: \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}, \qquad r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P(0, \frac{1}{2}, 0)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1. 1.5 ptos

Solución:

a) Para estudiar la posición relativa de las rectas lo que haremos es calcular los vectores directores y un punto de cada recta:

$$\vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{7i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = (7,7,7) \equiv (1,1,1)$$

Para localizar un punto en la recta r_1, hacemos z=0:

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 7y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1,1,0)$$

En el caso de la recta r_2:

$$\vec{v}_{r_2} = (-2,1,-2) \ y \ Q(1,0,1)$$

El vector $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}(1-1, 0-1, 1-0)$; $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}(0,-1,1)$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los tres vectores.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - 2 = 3 \neq 0$$

$\mathrm{rang} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$, por lo que **las rectas se cruzan**.

b) Ahora estamos interesados en calcular una recta con dirección perpendicular a ambas rectas, por lo que dicha recta tendrá por vector director el vector resultante del producto vectorial de los vectores directores:

$$\vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{7i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = (7,7,7) \equiv (1,1,1) \text{ y } \vec{v}_{r_2} = (-2,1,-2)$$

Por tanto,

$$\vec{v}_s = \vec{v}_{r_1} x \vec{v}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{k} = (-3,0,3) \equiv (-1,0,1)$$

La recta buscada, en paramétrica, será:

$$s:\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para averiguar el punto de corte:

$$r_1:\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda - 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 2(\lambda) + 2 = 0 \\ 2(-\lambda) + \dfrac{1}{2} - 3(\lambda) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda - \dfrac{3}{2} + 2\lambda + 2 = 0 \\ -2\lambda + \dfrac{1}{2} - 3\lambda - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ -5\lambda = \dfrac{5}{2} \end{cases}, con\ lo\ que\ \lambda = -\frac{1}{2}$$

El punto de corte de la recta s con la recta $\boldsymbol{r_1}$ será:

$$\boldsymbol{A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

3B. Responder a las siguientes cuestiones

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}\,| = 2,\ |\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ 0.75 ptos

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes: 1.75 ptos

$$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0\ , \quad r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman.

Solución:

a) Para comprobar si esto es posible y, dado que nos dan el valor del producto escalar, vamos a estudiar la fórmula del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{u,v})$$

En este caso, $8 = 2 \cdot 3 \cdot \cos(\widehat{u,v}) \Rightarrow 8 = 6 \cdot cos(\widehat{u,v}) \Rightarrow cos(\widehat{u,v}) = \frac{8}{6} = 1.33 > 1$

No es posible que existan dos vectores que cumplan las condiciones anteriores pues el coseno del ángulo que forman tendría que ser mayor que 1, lo que es imposible.

b) Como son secantes, vamos a calcular el punto de corte.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (-5,-5,5) = (-1,-1,1)$$

Calculamos un punto sobre la recta, para ello hacemos $z = 0$

$$r: \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -5y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P(-1,-2,0)$$

En paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

sustituimos esta recta en el plano para averiguar el punto de corte:

$$x + 3y + 2z - 3 = -1 - \lambda + 3(-2 - \lambda) + 2\lambda + 3 = 0$$

$$-1 - \lambda - 6 - 3\lambda + 2\lambda + 3 = -4 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda = -2$$

Y, por tanto, la recta y el plano son secantes.

Averiguamos el punto de corte:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (-5,-5,5) = (-1,-1,1)$$

Calculamos un punto sobre la recta, para ello hacemos $z = 0$

$$r: \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -5y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P(-1,-2,0)$$

En paramétrica:

$$r:\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

sustituimos esta recta en el plano para averiguar el punto de corte:

$$x + 3y + 2z - 3 = -1 - \lambda + 3(-2 - \lambda) + 2\lambda + 3 = 0$$

$$-1 - \lambda - 6 - 3\lambda + 2\lambda + 3 = -4 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda = -2$$

Punto de corte de la recta y el plano:

$$\boldsymbol{Q(1, 0, -2)}$$

El ángulo que forman la recta y el plano vendrá dado por la ecuación siguiente:

$$\vec{n}_\pi = (1,3,2), \vec{v}_r = (1,1,-1)$$

$$\boldsymbol{\alpha = arsen\left(\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right)} \textbf{=arcsen}\left(\frac{|1+3-2|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+9+4}}\right)\textbf{=arcsen}\left(\frac{2}{6.4807}\right) = \boldsymbol{17.97° = 17°\ 58'\ 31.44''}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

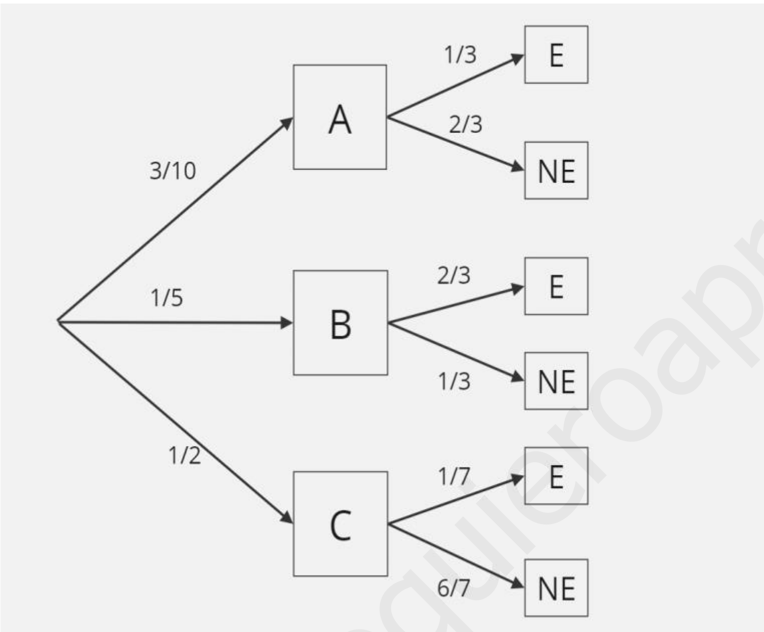
4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca B es 2/3 y que la produzca C es 1/7.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 ptos

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 ptos

Solución:

a)



A= inocular el virus A

B= inocular el virus B

C= inocular el virus C

E= produzca la enfermedad

NE= no produzca la enfermedad

Teorema de la probabilidad total

$$P(E) = P(A)P\left({}^{E}/_{A}\right) + P(B)P\left({}^{E}/_{B}\right) + P(C)P\left({}^{E}/_{C}\right) = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{32}{105} \approx 0.3048$$

La probabilidad de que el virus inoculado produzca la enfermedad es de 0.3048

b) Teorema de Bayes

$$P(C/NE) = \frac{P(C)\,P(NE/C)}{P(NE)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{73}{105}} = \frac{45}{73} \approx 0.6164$$

La probabilidad de que el virus inoculado sea el C sabiendo que no se ha producido la enfermedad es 0.6164

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis. 1.25 ptos
b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, será seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 ptos
c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 ptos

Solución:

a) Se define la variable *X* = "número de penaltis marcados"

Tiros a puerta son pruebas independientes

Éxito: "marcar el penalti" p = 3/5=0.6, q = 0.4

$$X \sim B(70{,}0.6)$$

Además como, $np = 42 > 5$ y $nq = 28 > 5$ se puede aproximar con la normal

$$N(np, \sqrt{npq}) = N(42{,}4.1)$$

$$P(40 < X < 45) = P(X < 45) - P(X \le 40) = P\left(Z < \frac{45-42}{4.1}\right) - P\left(Z \le \frac{40-42}{4.1}\right)$$
$$= P(Z < 0.73) - P(Z \le -0.49) = P(Z < 0.73) - \left(1 - P(Z < 0.49)\right)$$
$$= 0.7673 - (1 - 0.6879) = 0.4522$$

La probabilidad de que marque entre 40 y 45 penaltis es de 0.4522

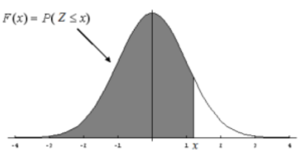
b) $P(X > 35) = P\left(Z > \frac{35-42}{4.1}\right) = P(Z > -1.71) = P(Z \le 1.71) = 0.9564$

La probabilidad ha salido mayor que el 90% (0.9564) por lo tanto el jugador será seleccionado

c) n=450

$$n \cdot p = 450 \cdot 0.6 = 270$$

El número esperado de penaltis marcados en sus entrenamientos es de 270 penaltis



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767