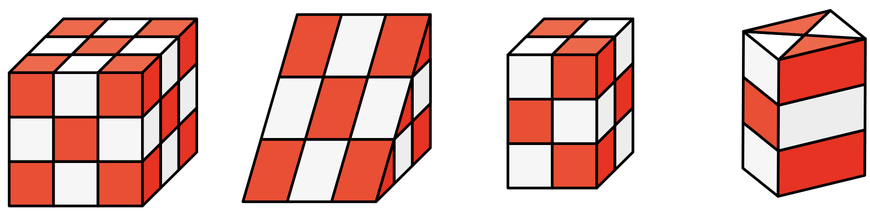
14 MEDIDA DEL VOLUMEN

Página 284

¿Qué es medir el volumen?

1 **¿Cuántas unidades cúbicas ocupa cada una de estas figuras?**

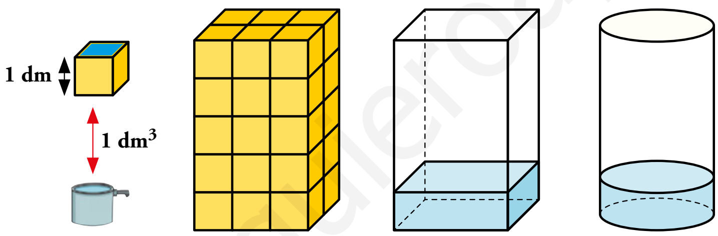


A: $3^3 = 27$ u^3 B: $27 : 2 = 13,5$ u^3 C: $4 \cdot 3 = 12$ u^3 D: $12 : 2 = 6$ u^3

Página 285

Distintas formas de calcular volúmenes

2 **Imagina ahora que tienes un cacillo en el que cabe la misma cantidad de agua que en una unidad cúbica de un decímetro de arista y observa los dos prismas y el cilindro que tienes a continuación:**



a) ¿Cuántos cacillos de agua se han vertido en el segundo prisma, para que el agua alcance un centímetro de altura? ¿Cuántos cacillos caben en total?

b) Sabiendo que la base del cilindro tiene la misma superficie que la del prisma, ¿cuántos cacillos habría que verter en él para que el agua alcance un centímetro de altura? ¿Y para llenarlo?

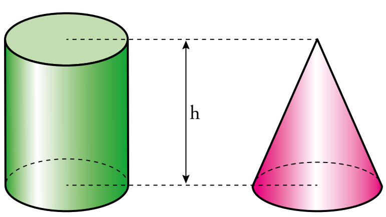
a) Se han vertido 6 cacillos. Caben 30 cacillos en total.

b) Como las bases tienen la misma superficie, por el principio de Cavalieri, sus volúmenes coinciden. Por tanto, la solución es la misma que la del apartado anterior.

3 **En el tomo XII de los elementos, aparece, entre otras, la siguiente proposición:**

Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.

Sabiendo que el volumen del siguiente cilindro es de 45 u^3, ¿cuál es el volumen del cono que le acompaña?



$V = 45$ u^3 $V = ¿?$

$V_{\text{CONO}} = \dfrac{45}{3} = 15$ u^3

1 UNIDADES DE VOLUMEN

Página 286

Para practicar

1 **Expresa en metros cúbicos.**

a) **2 dam^3 123 m^3 52 dm^3**

b) **29 320 000 cm^3**

c) **(435 cm^3 425 mm^3) · 500 000**

d) **37 hm^3 12 dam^3 325 m^3 402 dm^3**

a) 2 000 m^3 + 123 m^3 + 0,052 m^3 = 2 123,052 m^3

b) 29,32 m^3

c) 217 500 000 cm^3 + 212 500 000 mm^3 = 217,5 m^3 + 0,2125 m^3 = 217,7125 m^3

d) 37 000 000 m^3 + 12 000 m^3 + 325 m^3 + 0,402 m^3 = 37 012 325,4 m^3

2 **Pasa a forma compleja.**

a) **35 297 853 cm^3**

b) **(4 253 hm^3) · 2 000**

c) **0,00030124 dm^3**

d) **34,5832 hm^3**

a) 35 m^3 297 dm^3 853 cm^3

b) (4 km^3 253 hm^3) · 2 000 = 8 506 km^3

c) 301,24 mm^3

d) 34 hm^3 583 dam^3 200 m^3

Página 287

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno.**

	m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
			kL	hL	daL	L	dL	cL	mL				
7,4 L													→ **… cm^3**
25 hL													→ **… m^3**
75 cm^3													→ **… cL**
0,047 m^3													→ **… L**

	m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
			kL	hL	daL	L	dL	cL	mL				
7,4 L						7	4						→ 7 400 cm^3
25 hL			2	5									→ 2,5 m^3
75 cm^3								7	5				→ 7,5 cL
0,047 m^3					4	7							→ 47 L

Para practicar

3 **Cuál sería la unidad adecuada para expresar:**

a) La capacidad de un bote de champú.

b) La capacidad del maletero de un coche.

c) El agua que contiene un embalse.

a) Mililitros

b) Litros

c) Hectómetros cúbicos

4 **Expresa en litros.**

a) 125 m^3 705 dm^3 500 cm^3

b) 590 000 mm^3

c) 0,000317 dam^3

d) 2 700 mm^3

a) 125 705,5 L

b) 0,59 L

c) 317 L

d) 0,0027 L

5 **Copia y completa.**

a) 2 560 L = … m^3

b) 370 cL = … cm^3

c) 520 cL = … dm^3

d) 4,8 mL = … cm^3

e) 0,55 L = … cm^3

f) 1 780 hL = … m^3

a) 2 560 L = 2,56 m^3

b) 370 cL = 3 700 cm^3

c) 520 cL = 5,2 dm^3

d) 4,8 mL = 4,8 m^3

e) 0,55 L = 550 cm^3

f) 1 780 hL = 178 m^3

6 **Si ayer cayeron 120 litros por m^2, ¿a cuántos milímetros de altura corresponden? ¿Cuántos litros por m^2 habrán caído si se alcanzan 48 mm de altura?**

120 L por m^2 corresponden a 120 mm de altura.

Para alcanzar los 48 mm de altura tienen que haber caído 48 L por m^2.

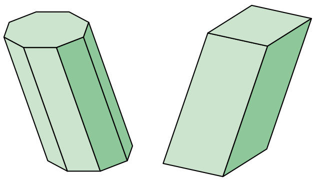
2 ▸ PRINCIPIO CAVALIERI

Página 288

Para practicar

1 **¿Verdadero o falso?**

Los volúmenes de estos cuerpos geométricos:



a) Son iguales, porque tienen la misma altura.

b) No son iguales, porque sus bases son polígonos distintos.

c) Son iguales, porque sus bases tienen la misma área.

d) Son iguales, porque tienen la misma altura y las secciones paralelas a sus bases tienen la misma área.

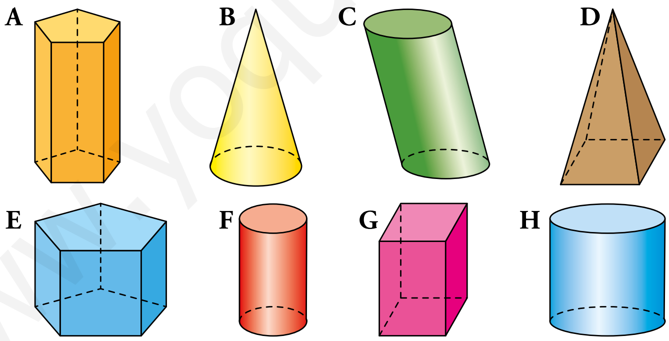
a) Falso.

b) Falso.

c) Falso.

d) Verdadero.

2 **La mitad de estas figuras tienen la misma área en la base y la otra mitad, como puedes observar, la misma altura.**



Empareja las que tienen el mismo volumen.

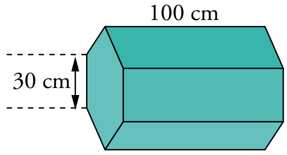
A y C, B y D, E y H, F y G.

3 ▶ VOLUMEN DEL PRISMA Y DEL CILINDRO

Página 289

Para fijar ideas

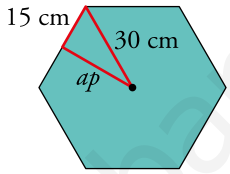
Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Halla el volumen de un prisma hexagonal regular con 1 m de arista lateral y 30 cm de arista en la base.**

En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales.

Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.



$\boldsymbol{ap = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26}$ **cm**

$$\boldsymbol{A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\ldots \cdot \ldots \cdot 26}{2} = \ldots \text{ cm}^2}$$

$$\boldsymbol{V_{PRISMA} = A_{BASE} \cdot \text{Altura} = \ldots \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}}$$

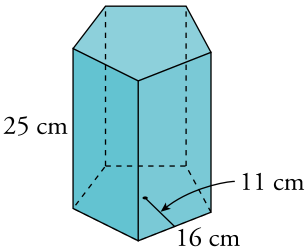
$$A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

$$V_{PRISMA} = A_{BASE} \cdot \text{Altura} = 2\,340 \cdot 100 = 234\,000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

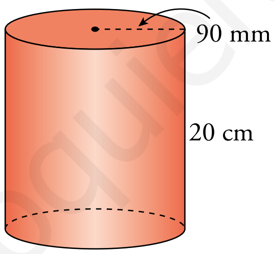
Para practicar

1 **Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.**

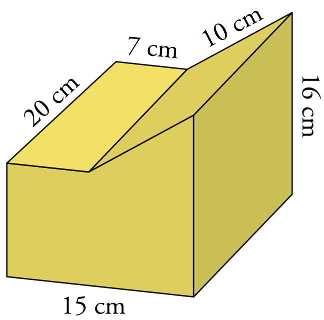
a)



b)



c)



a) $V = \frac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} \cdot 25 = 11\,000 \text{ cm}^3 = 11 \text{ dm}^3 = 11 \text{ L}$

b) $V = \pi \cdot 9^2 \cdot 20 = 5\,086{,}8 \text{ cm}^3 = 5{,}0868 \text{ dm}^3 = 5{,}0868 \text{ L}$

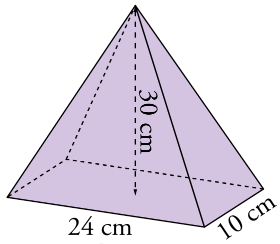
c) $V = 15 \cdot 20 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 20 \cdot 6}{2} = 3\,000 + 480 = 3\,480 \text{ cm}^3 = 3{,}48 \text{ L}$

4 ▶ VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE Y DEL TRONCO DE PIRÁMIDE

Página 290

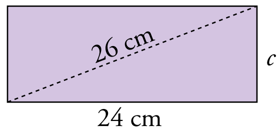
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Una pirámide de 30 cm de altura tiene una base rectangular de 24 cm de largo y 26 cm de diagonal. Halla su volumen.**

El lado (ancho) del rectángulo mide:



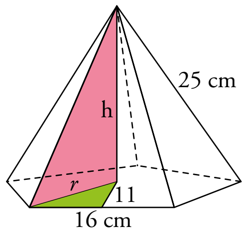
$$c = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \ldots \cdot 10 = \ldots \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot 30 = 2\,400 \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{BASE}} = 24 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot 240 \cdot 30 = 2\,400 \text{ cm}^3$$

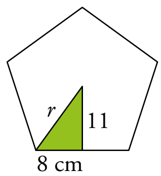


2 **Calcula el volumen de una pirámide pentagonal regular con los siguientes datos:**

- **Lado de la base → 16 cm**
- **Apotema de la base → 11 cm**
- **Arista lateral → 25 cm**

Calculamos, primero, el radio y después la altura de la pirámide:

$$r^2 = 11^2 + 8^2 = 185 \qquad h = \sqrt{25^2 - r^2} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}$$



$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\ldots \cdot 5 \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \ldots = 3\,080 \text{ cm}^3$$

$$h = \sqrt{25^2 - r^2} = \sqrt{440} \approx 21 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} = 440 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot 440 \cdot 21 = 3\,080 \text{ cm}^3$$

Para practicar

1 **La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de su base mide 230 m y su altura es de 146 m. Halla su volumen en hm^3.**

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 \approx 2\,574\,467 \text{ m}^3 \approx 2{,}574 \text{ hm}^3$$

2 **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de 80 cm de altura y 30 cm de lado en la base.**

En un hexágono regular, r = L.

$$ap = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} \approx 26 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{180 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

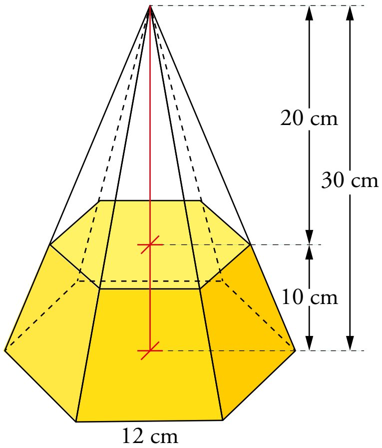
$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\,340 \cdot 80 = 62\,400 \text{ cm}^3 = 62{,}4 \text{ dm}^3 = 62{,}4 \text{ L}$$

Página 291

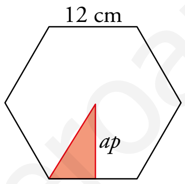
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Una pirámide hexagonal regular de 12 cm de lado en la base y 30 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y a 10 cm de la misma. Calcula el volumen del tronco de pirámide resultante.**



Calculamos la apotema y el área de la base:



$$ap = \sqrt{12^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{12 \cdot 6 \cdot \ldots}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2$$

La razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la grande es: $\frac{20}{30} = \frac{\ldots}{\ldots}$

La razón de los volúmenes es: $\left(\frac{\ldots}{\ldots}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot 30 = 3\,744 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{\ldots}{27} \cdot \ldots \approx 1\,110 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 3744 - \ldots = 2\,634 \text{ cm}^3$$

$$ap = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 10{,}4}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2$$

La razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la grande es: $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

La razón de los volúmenes es: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 10{,}4 \cdot 6}{2} \cdot 30 = 3\,744 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{8}{27} \cdot 3\,744 \approx 1\,110 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 3\,744 - 1\,110 = 2\,634 \text{ cm}^3$$

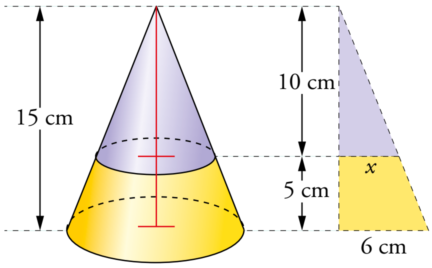
5 ▶ VOLUMEN DEL CONO Y DEL TRONCO DE CONO

Página 292

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Un cono recto con 6 cm de radio en la base y 15 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y a 5 cm de la misma. Calcula el volumen del cono grande, del cono pequeño surgido del corte y del tronco de cono restante.**



El cono grande y el pequeño son semejantes. Calculamos el radio, *x*, de la base del pequeño:

$$\frac{15}{6} = \frac{\dots}{x} \rightarrow x = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots = 565{,}2 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots \approx 167{,}5 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dots - \dots = 397{,}7 \text{ cm}^3$$

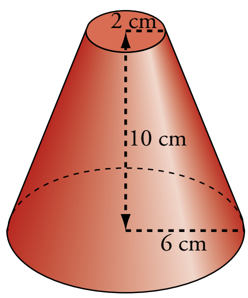
$$\frac{15}{6} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 6}{15} = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}2 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 \approx 167{,}5 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 565{,}2 - 167{,}5 = 397{,}7 \text{ cm}^3$$

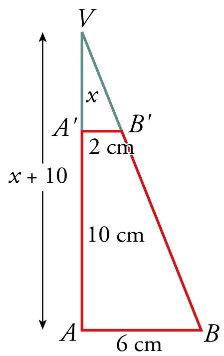
2 **Halla el volumen de un tronco de cono de 10 cm de altura cuyas bases tienen radios de 6 cm y 2 cm.**



La semejanza de los triángulos *VAB* y *VA'B'* nos permitirá hallar la altura de los dos conos:

$$\frac{x+10}{6} = \frac{x}{2} \rightarrow 2x + 20 = 6x \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

Por tanto, la altura del cono grande es 15 cm, y la del cono pequeño, 5 cm.



$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots \approx 544 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \approx 544 \text{ cm}^3$$

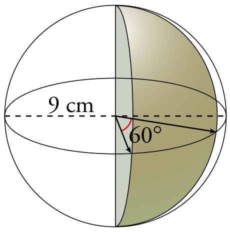
6 ▶ VOLUMEN DE LA ESFERA

Página 293

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Se introduce un balón de 30 cm de diámetro en un barreño lleno de agua, y se recoge el líquido desalojado. ¿Cuántos litros se han recogido?**



El volumen de agua desalojada coincide con el volumen de una esfera de radio 15 cm:

$$\mathbf{V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^3 = \ldots\ cm^3 \rightarrow \ldots\ cm^3 : 1\,000 = 14{,}13\ litros}$$

$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = 14\,130\ \text{cm}^3 \longrightarrow 14\,130\ \text{cm}^3 : 1\,000 = 14{,}13$ litros

2 **Halla el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.**

A una cuña de 60° le corresponde $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ del volumen de la esfera:

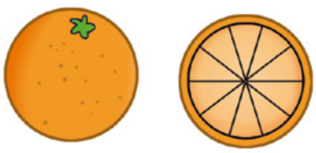
$$\mathbf{V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^3 \approx \ldots\ cm^3 \rightarrow V_{\text{CUÑA ESFÉRICA}} = \frac{1}{6} \cdot \ldots \approx 509\ cm^3}$$

$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \approx 3\,052\ \text{cm}^3 \longrightarrow V_{\text{CUÑA ESFÉRICA}} = \frac{1}{6} \cdot 3\,052 \approx 509\ \text{cm}^3$

Página 294

Para practicar

1 **Calcula el volumen de cada uno de los 10 gajos de una naranja cuyo diámetro es de 12 cm, sabiendo que su cáscara tiene 0,8 cm de grosor.**



El volumen de cada gajo es el de una cuña esférica de 36° correspondiente a una esfera de 12 : 2 – 0,8 = 5,2 cm de radio.

$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}2^3 = 58{,}87\ \text{cm}^3$

El volumen de cada gajo es 0,05887 L.

2 **¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?**

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{BOLA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2,5^3 = 65,42 \text{ mm}^3 \\ V_{\text{CABLE}} = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 3 \approx 58\,875 \text{ mm}^3 \end{array}\right\} \text{Se pueden hacer, aproximadamente, } \dfrac{58\,875}{65,42} = 900 \text{ bolas.}$$

3 **Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m³, calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.**

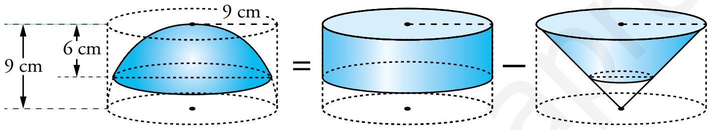
$$V = \frac{4}{3}\pi\, 20^3 - \frac{4}{3}\pi\, 19^3 = 4\,776{,}99 \text{ cm}^3$$

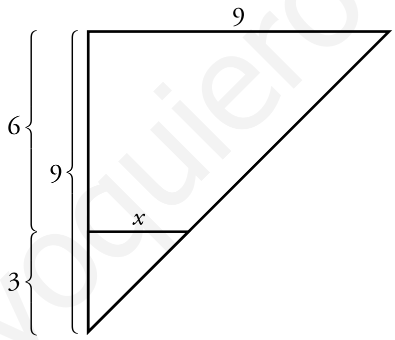
$$\left.\begin{array}{rcl} 7\,850 \text{ kg} & \rightarrow & 10^6 \\ x & \rightarrow & 4\,776,99 \end{array}\right\} \rightarrow x = 37{,}49 \text{ kg}$$

La esfera hueca pesará 37,49 kg.

4 **Calcula el volumen de un casquete esférico de 6 cm de alto, perteneciente a una esfera de 18 cm de diámetro.**

Observa:





$r = 9$ cm

$x = 3$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot r^2 \cdot 6 = \pi \cdot 9^2 \cdot 6 \approx 1\,526 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1/3 \cdot \pi \cdot 9^3 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \approx 735 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} \approx 791 \text{ cm}^3$

Página 295

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Unidades de volumen. Operaciones

1 **Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:**

a) $0{,}025\ hm^3$ **b)** $459\ hm^3$
c) $45\,214\ dm^3$ **d)** $0{,}015\ km^3$
e) $23\ dam^3$ **f)** 58 000 L

a) $25\,000\ m^3$ b) $459\,000\,000\ m^3$
c) $45{,}214\ m^3$ d) $15\,000\,000\ m^3$
e) $23\,000\ m^3$ f) $58\ m^3$

2 **Transforma en litros.**

a) $400\,000\ hm^3$ **b)** $0{,}000047\ hm^3$
c) $6\ dam^3\ 318\ m^3$ **d)** $8\,562\ m^3\ 1\,749\ cm^3$
e) 14 350 dL **f)** 0,32 hL

a) 400 000 000 000 000 litros b) 47 000 litros
c) 6 318 000 litros d) 8 562 001,749 litros
e) 1 435 litros f) 32 litros

3 **Copia y completa en tu cuaderno las igualdades siguientes:**

a) $0{,}0037\ km^3 = \ldots\ m^3$ **b)** $0{,}36\ hm^3 = \ldots\ dm^3$
c) $1{,}8342\ dam^3 = \ldots\ m^3 = \ldots\ dm^3$ **d)** $0{,}0007\ m^3 = \ldots\ dm^3 = \ldots\ cm^3$
e) $15\ hm^3\ 13\ dam^3\ 432\ m^3 = \ldots\ m^3$ **f)** $15\ hm^3\ 13\ dam^3\ 432\ m^3 = \ldots$ L

a) $3\,700\,000\ m^3$ b) $360\,000\,000\ dm^3$
c) $1\,834{,}2\ m^3 = 1\,834\,200\ dm^3$ d) $0{,}7\ dm^3 = 700\ cm^3$
e) $15\,013\,432\ m^3$ f) 15 013 432 000 litros

4 **Expresa estas cantidades en forma compleja:**

a) $45\,125\,145\ dm^3$ **b)** $0{,}45124568\ km^3$
c) $451{,}14521\ dm^3$ **d)** $183\,000\ dam^3$
e) $527\,002\,045\ m^3$ **f)** $183\,070\,693\,002\ cm^3$

a) $45\ dam^3\ 125\ m^3\ 145\ dm^3$ b) $451\ hm^3\ 245\ dam^3\ 680\ m^3$
c) $451\ dm^3\ 145\ cm^3\ 210\ mm^3$ d) $183\ hm^3$
e) $527\ hm^3\ 2\ dam^3\ 45\ m^3$ f) $183\ dam^3\ 70\ m^3\ 693\ dm^3\ 2\ cm^3$

5 **Copia y completa en tu cuaderno las siguientes igualdades:**

a) $1\ hm^3 = \ldots$ hL **b)** $1\ dam^3 = \ldots$ daL **c)** $1\ m^3 = \ldots$ L
d) $1\ dm^3 = \ldots$ dL **e)** $1\ cm^3 = \ldots$ cL **f)** $1\ mm^3 = \ldots$ mL

a) 10^7 hL b) 10^5 daL c) 10^3 L
d) 10 dL e) 10^{-1} cL f) 10^{-3} mL

6 **Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado en hectolitros. Para ello, pasa a forma incompleja, expresa todas las cantidades en las mismas unidades y realiza los cálculos.**

a) $0,34 \text{ dam}^3 + 84 \text{ m}^3 + 1\,284 \text{ m}^3$

b) $0,00035 \text{ km}^3 + 0,45 \text{ hm}^3 + 65 \text{ dam}^3$

c) $0,541 \text{ dam}^3 - 421 \text{ m}^3\ 300 \text{ dm}^3$

d) $4\,500 \text{ m}^3 : 25$

e) $24 \text{ hm}^3\ 123 \text{ dam}^3\ 128 \text{ m}^3 : 40$

f) $568 \text{ kL} - 0,508 \text{ dam}^3$

a) $340 + 84 + 1\,284 = 1\,708 \text{ m}^3 \rightarrow 17\,080 \text{ hL}$

b) $350 + 450 + 65 = 865 \text{ dam}^3 \rightarrow 8\,650\,000 \text{ hL}$

c) $541 - 421,3 = 119,7 \text{ m}^3 \rightarrow 1\,197 \text{ hL}$

d) $180 \text{ m}^3 \rightarrow 1\,800 \text{ hL}$

e) $603\,078,2 \text{ m}^3 \rightarrow 6\,030\,782 \text{ hL}$

f) $60\,000\ l \rightarrow 600 \text{ hL}$

7 **Para cada uno de estos recipientes que se citan a continuación, se dan tres volúmenes. Solo uno de ellos es razonable. Di, en cada caso, cuál es.**

a) Volumen de un pantano:

71 hm³ **387 000 L** **4 000 000 000 cm³**

b) Un depósito de agua en una vivienda:

2 dam³ **0,8 m³** **45 000 L**

c) Un vaso normal:

2 dm³ **0,2 dm³** **0,02 dm³**

d) Una cucharada de café:

3 dL **3 cm³** **3 mm³**

a) 71 hm^3

b) $0,8 \text{ m}^3$

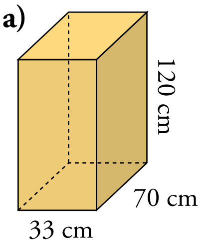
c) $0,2 \text{ dm}^3$

d) 3 cm^3

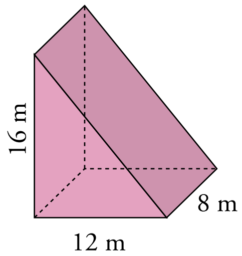
Cálculo de volúmenes

8 **Calcula el volumen de cada uno de estos poliedros. Expresa todos los volúmenes en litros.**

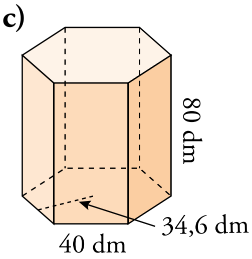
a)



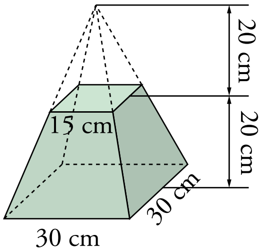
b)



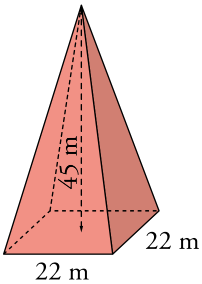
c)



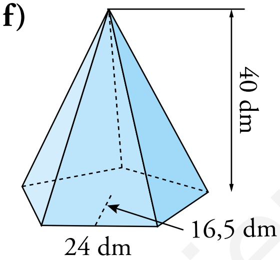
d)



e)



f)



a) $V = 33 \cdot 70 \cdot 120 = 277\,200 \text{ cm}^3 = 277{,}2 \text{ L}$

b) $V = \dfrac{12 \cdot 8 \cdot 16}{2} = 768 \text{ m}^3 = 768\,000 \text{ L}$

c) $V = \dfrac{6 \cdot 40 \cdot 34{,}6}{2} \cdot 80 = 332\,160 \text{ dm}^3 = 332\,160 \text{ L}$

d) $V = \dfrac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 40 - \dfrac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 20 = 12\,000 - 1\,500 = 10\,500 \text{ cm}^3 = 10{,}5 \text{ L}$

e) $V = \dfrac{1}{3} \cdot 22^2 \cdot 45 = 7\,260 \text{ m}^3 = 7\,260\,000 \text{ L}$

f) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 24 \cdot 16{,}5}{2} \cdot 40 = 13\,200 \text{ dm}^3 = 13\,200 \text{ L}$

9 **Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 dm × 15 dm × 8 dm.**

$V = 1\,080 \text{ dm}^3 = 1{,}08 \text{ m}^3$

10 **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm. La altura del prisma es de 2 dm. Halla su volumen.**

$V = \dfrac{12 \cdot 15}{2} \cdot 20 = 1\,800 \text{ cm}^3 = 1{,}8 \text{ dm}^3 = 1{,}8 \text{ L}$

Página 296

11 **¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?**

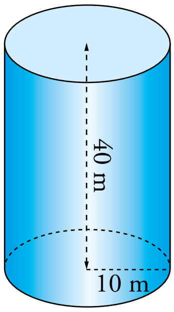
$V = 3\,375 \text{ cm}^3 = 3{,}375 \text{ dm}^3 = 3{,}375 \text{ L}$

12 **Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm. Su altura es de 1,2 m. Halla su volumen.**

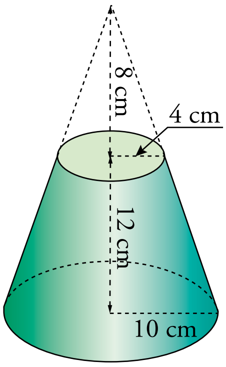
$V = \dfrac{40 \cdot 28}{2} \cdot 12 = 6\,720 \text{ dm}^3 = 6{,}720 \text{ m}^3$

13 **Calcula el volumen y exprésalo en litros.**

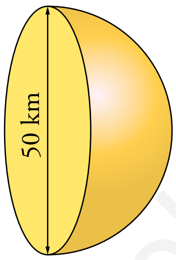
a)



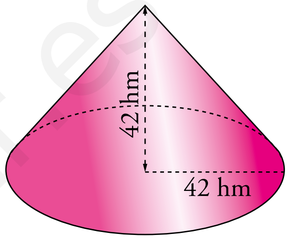
b)



c)



d)



a) $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 12\,560 \text{ m}^3 = 12\,560\,000 \text{ L}$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 20 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 1\,959{,}36 \text{ cm}^3 = 1{,}95936 \text{ L}$

c) $V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 32\,708{,}33 \text{ km}^3 = 32\,708\,330\,000\,000\,000 \text{ L}$

d) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 42^2 \cdot 42 = 77\,545{,}44 \text{ hm}^3 = 77\,545\,440\,000\,000 \text{ L}$

14 **Halla el volumen de:**

a) Un cilindro de 10 cm de radio y 20 cm de altura.

b) Una esfera de 12 cm de diámetro.

c) Un disco cilíndrico de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

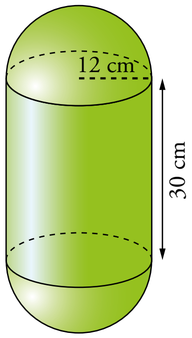
a) $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280 \text{ cm}^3 = 6{,}280 \text{ dm}^3 = 6{,}28 \text{ L}$

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi\, 12^3 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

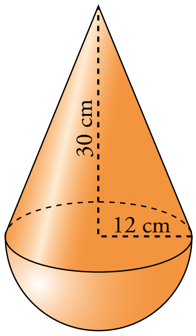
c) $V = \dfrac{1}{3}\pi\, 6^2 \cdot 1{,}5 = 56{,}52 \text{ dm}^3$

15 **Calcula el volumen y exprésalo en litros.**

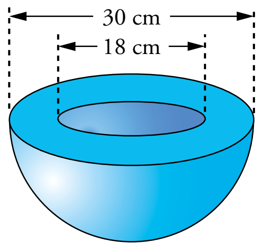
a)



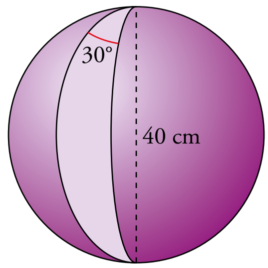
b)



c)



d)



a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 + \pi \cdot 12^2 \cdot 30 = 20\,799{,}36 \text{ cm}^3 = 20{,}79936 \text{ L}$

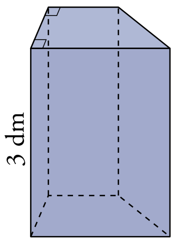
b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 8\,138{,}88 \text{ cm}^3 = 8{,}13888 \text{ L}$

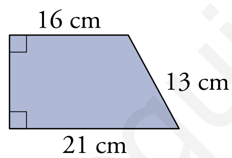
c) $V = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3}{2} = \dfrac{11\,077{,}92}{2} = 5\,538{,}96 \text{ cm}^3 = 5{,}53896 \text{ L}$

d) $V = \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 = 30\,702{,}2 \text{ cm}^3 = 30{,}7022 \text{ L}$

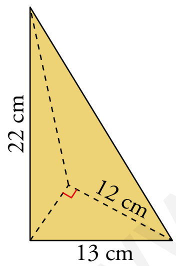
16 **Halla el volumen del prisma y de la pirámide. Deberás calcular, primero, algún dato que falta.**

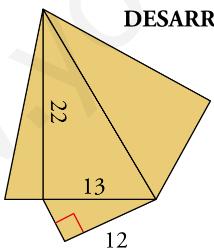
a)





b)



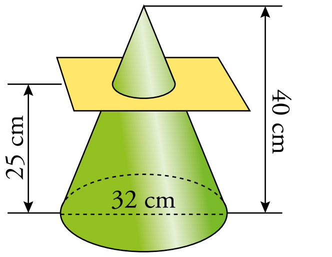


a) $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\sqrt{144} \cdot (16 + 21)}{2} = 222 \text{ cm}^2$

$V = 222 \cdot 30 = 6\,660 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{12 \cdot 5}{2} \cdot 22 = 220 \text{ cm}^3$

17 **Calcula el volumen de los dos cuerpos geométricos que se generan al cortar un cono por un plano como se muestra en el dibujo.**

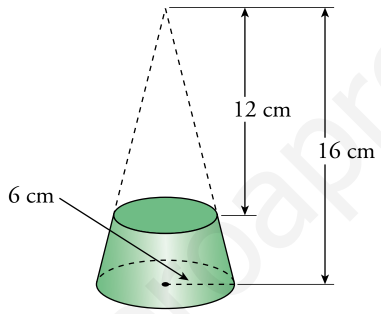


$$\frac{40}{16} = \frac{15}{x} \rightarrow x = 6$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 565{,}2 \text{ cm}^3$$

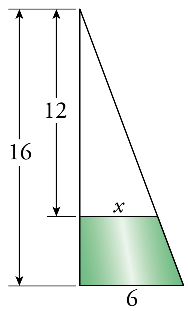
$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16^2 \cdot 40 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 10\,152{,}67 \text{ cm}^3$$

18 **Halla el volumen de este tronco de cono.**



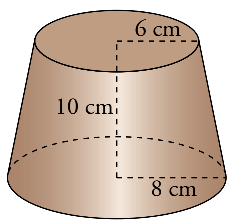
$$\frac{x}{12} = \frac{6}{16} \rightarrow x = 4{,}5$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 12 = 348{,}54 \text{ cm}^3$$

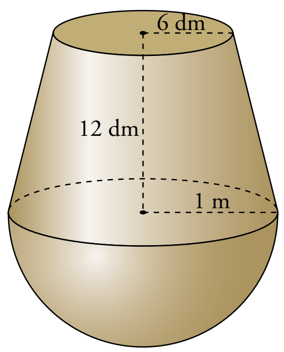


19 **Halla el volumen de estos cuerpos de revolución. Deberás calcular, primero, algún dato que falta.**

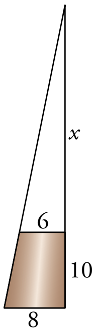
a)



b)



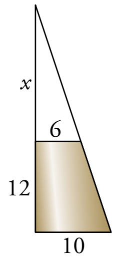
a)



$$\frac{10+x}{8}=\frac{x}{6} \rightarrow x=30$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 40 \cdot 8^2-\frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 30 \cdot 6^2=1\,549{,}1 \text{ cm}^3$$

b)



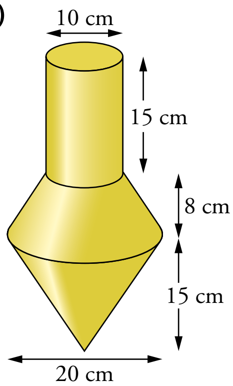
$$\frac{x+12}{10}=\frac{x}{6} \rightarrow x=18$$

$$V=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot \pi \cdot 10^3+\frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30-\frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 18=4\,555 \text{ dm}^3$$

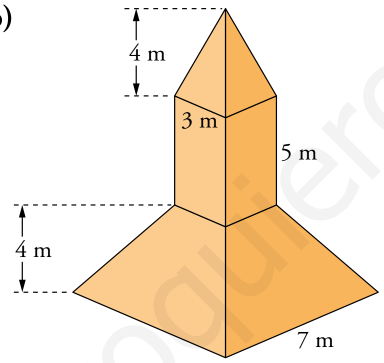
Página 297

20 **Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.**

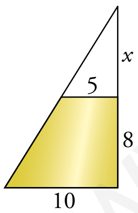
a)



b)



a)



$V_{\text{CILINDRO}}=\pi \cdot 5^2 \cdot 15=1\,177{,}5 \text{ cm}^2$

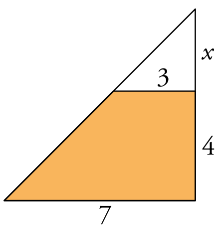
$\dfrac{x+8}{10}=\dfrac{x}{5} \rightarrow x=8$

$V_{\text{TRONCO}}=\dfrac{1}{3}\cdot \pi \cdot (10^2 \cdot 16-5^2 \cdot 8)=1\,465{,}3 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO}}=\dfrac{1}{3}\cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 15=1\,570 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}}=4\,212{,}8 \text{ cm}^3$

b)



$V_{\text{PIRÁMIDE}}=\dfrac{1}{3}\cdot 3^2 \cdot 4=12 \text{ m}^3$

$V_{\text{PARALELEPÍPEDO}}=3 \cdot 3 \cdot 5=45 \text{ m}^3$

$\dfrac{x}{3}=\dfrac{x+4}{7} \rightarrow x=3$

$V_{\text{TRONCO}}=\dfrac{1}{3}\cdot 7^2 \cdot 7-\dfrac{1}{3}\cdot 3^2 \cdot 3=105{,}33 \text{ m}^3$

$V_{\text{TOTAL}}=162{,}3 \text{ m}^3$

Resuelve problemas

21 **¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con 0,03 dam³?**

$0{,}03\ \text{dam}^3 = 30\,000\ \text{dm}^3 = 30\,000\ \text{L}$

$30\,000 : 0{,}75 = 40\,000$

Se podrán llenar 40 000 botellas de 3/4 de litro.

22 **Un pantano tiene una capacidad de 0,19 km³. Si ahora está al 28 % de su capacidad, ¿cuántos litros de agua contiene?**

$28\,\%$ de $0{,}19\ \text{km}^3 = 0{,}0532\ \text{km}^3 = 53\,200\,000\,000\ \text{L}$

Contiene 53 200 000 000 L de agua.

23 **La cuenca fluvial cuyas aguas llegan a un pantano es de 62 km². En las últimas lluvias han caído 27 L por metro cuadrado. Del agua caída, se recoge en el pantano un 43 %. ¿Cuántos hectómetros cúbicos se han recogido en el pantano como consecuencia de las lluvias?**

$62\,000\,000\ \text{m}^2 \to 1{,}674 \cdot 10^9\ \text{L} = 1{,}674 \cdot 10^9\ \text{dm}^3$

$1{,}674 \cdot 10^6\ \text{m}^3$ en total, calculamos el 43 %:

$1{,}674 \cdot 10^6 \cdot 0{,}43 = 719\,820\ \text{m}^3$

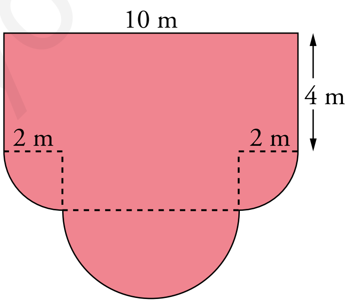
Han recogido $0{,}71982\ \text{hm}^3$.

24 **Un depósito vacío pesa 27 kg, y lleno de aceite, 625,5 kg. ¿Cuántos litros de aceite contiene? La densidad de ese aceite es 0,95 kg/dm³.**

$$\frac{625{,}5 - 27}{0{,}95} = 630\ \text{dm}^3 = 630\ \text{L}$$

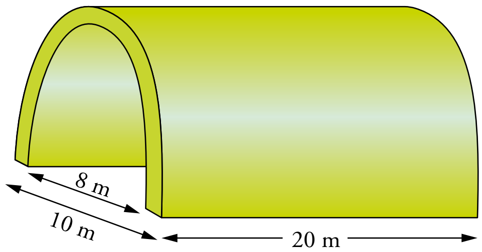
Contiene 630 L de aceite.

25 **Halla el volumen de una habitación de 2,8 m de altura, cuya planta tiene esta forma y dimensiones:**



$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PARALELOGRAMO GRANDE}} = 4 \cdot 10 \cdot 2{,}8 = 112\ \text{m}^3 \\ V_{\text{SEMICÍRCULO}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}8 = 39{,}6\ \text{m}^3 \\ V_{\text{PARALELOGRAMO PEQUEÑO}} = 2 \cdot 6 \cdot 2{,}8 = 33{,}6\ \text{m}^3 \\ V_{1/2\ \text{CIRCUNFERENCIA}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \cdot 2{,}8 = 17{,}6\ \text{m}^3 \end{array}\right\} V_{\text{TOTAL}} = 202{,}8\ \text{m}^3$$

26 Calcula el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer este túnel:



$V = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 20 - \pi \cdot 4^2 \cdot 20}{2} = 282{,}6 \text{ m}^3$

27 Halla el volumen de una habitación con forma de ortoedro de dimensiones 6 m × 3,8 m × 2,6 m. ¿Cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la habitación suponiendo que gastas 80 L de agua en cada ducha?

$V = 6 \cdot 3{,}8 \cdot 2{,}6 = 59{,}28 \text{ m}^3 = 59\,280 \text{ L}$

$59\,280 : 80 = 741$

Podrías darte 741 duchas.

28 Un sótano cuya superficie es de 208 m² se ha inundado. El agua llega a 1,65 m de altura. Se extrae el agua con una bomba que saca 6 hL por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarlo?

$208 \cdot 1{,}65 = 343{,}2 \text{ m}^3$ hay en el sótano.

$\dfrac{3\,432 \text{ hL}}{6 \text{ hL/min}} = 572 \text{ min} = 9{,}5\overset{\frown}{3} \text{ horas} = 9 \text{ h } 32 \text{ min}$

Se tardará en vaciarlo 9 horas y 32 minutos.

29 Con una barra cilíndrica de oro de 15 cm de larga y 5 mm de diámetro se fabrica un hilo de 1/4 mm de diámetro. ¿Cuál es la longitud del hilo?

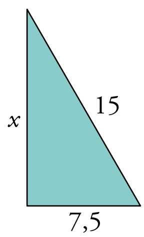
$V_{\text{BARRA}} = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 150 = 2\,943{,}75 \text{ mm}^3$

Dividiéndolo entre la superficie de una circunferencia de 0,25 mm de diámetro nos dará la longitud del hilo:

$2\,943{,}75 : (\pi \cdot 0{,}125^2) = 60\,000 \text{ mm} = 60 \text{ m}$

La longitud del hilo es 60 m.

30 Una columna de basalto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 15 cm. La altura de la columna es de 2,95 m. Halla su peso sabiendo que 1 m³ de basalto pesa 2 845 kg.



$x \approx 13 \qquad V_{\text{COLUMNA}} = \dfrac{15 \cdot 6}{2} \cdot 13 \cdot 295 = 172{,}575 \text{ cm}^3$

$$\left.\begin{array}{lcl} 1 \text{ m}^3 & \rightarrow & 2\,845 \text{ kg} \\ 0,172575 \text{ m}^3 & \rightarrow & x \text{ kg} \end{array}\right\} \; x = 491 \text{ kg}$$

La columna pesará 491 kg.

31 **Para medir el volumen de una piedra pequeña, hacemos lo siguiente: llenamos un vaso cilíndrico hasta la mitad, sumergimos la piedra y comprobamos que el nivel ha subido 22 mm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?**

DATOS DEL VASO

Diámetro exterior: 9 cm

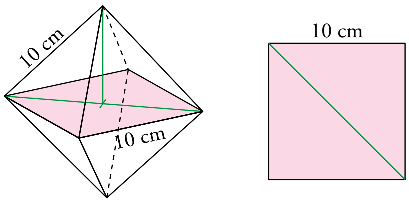
Diámetro interior: 8,4 cm

Altura: 15 cm

Usa solo los datos que necesites.

$V = \left(\dfrac{8,4}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2,2 = 121,86 \text{ cm}^3$ es el volumen de la piedra.

32 **Calcula el volumen de un octaedro regular de 10 cm de arista.**

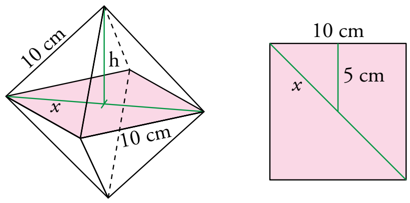


$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h}$

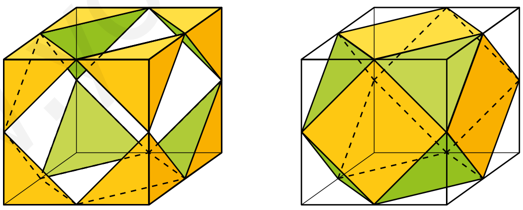
$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$

$\text{h} = \sqrt{10^2 - 7,07^2} = 7,07 \text{ cm}$

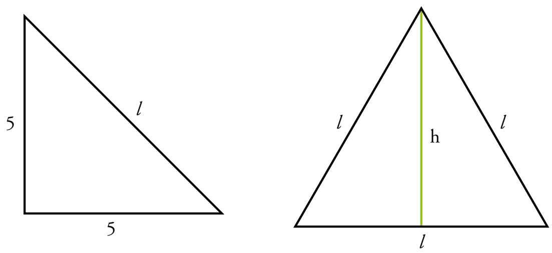
$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7,07 = 471,3 \text{ cm}^3$



33 **A un cubo de arista 10 cm, se le cortan las esquinas como se muestra a continuación. Calcula el volumen del poliedro resultante.**



Calculamos el volumen de la pirámide naranja cuya base un triángulo equilátero. Buscamos su lado, l, y su altura, h:

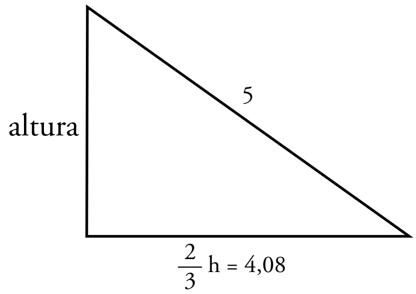


$l = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$

$\text{h}^2 = l^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \text{h} = 6,12 \text{ cm}$

$\text{Área de la base} = \dfrac{7,07 \cdot 6,12}{2} = 21,6 \text{ cm}^2$

Calculamos ahora la altura de la pirámide:



altura = $\sqrt{5^2 - 4,08^2}$ = 2,89 cm

$$V = \frac{\text{Área de la base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{2,16 \cdot \text{altura}}{3} = \frac{2,16 \cdot 2,89}{3} = 20,8 \text{ cm}^3$$

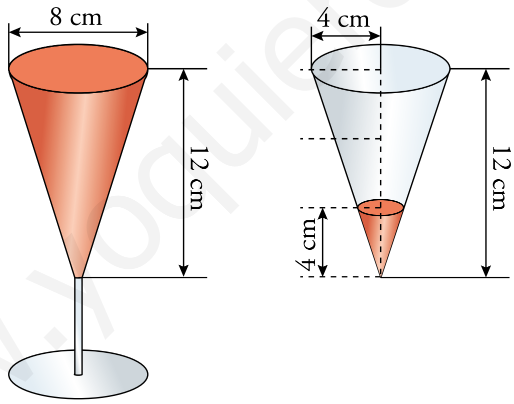
Con cada dos esquinas naranjas del dibujo de la izquierda podemos obtener un cubo de lado 5 cm, entonces:

$$V_{\text{POLIEDRO}} = V_{\text{CUBO}} - 8 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 10^3 - 8 \cdot 20,8 = 833,6 \text{ cm}^3$$

Página 298

34 Problema resuelto.

35 **Ana se ha sentado en una terraza y ha pedido un batido de fresa que le sirven en una copa como la que ves en la ilustración. Tras beber varios sorbos, comprueba que el nivel ha bajado a la tercera parte. ¿Qué fracción del batido le queda?**



Sugerencias:

a) Puedes calcular el volumen del batido inicial, el del batido final y dividir.

b) También puedes seguir el procedimiento empleado en el problema resuelto anterior.

a) $V_{\text{INICIAL}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 200,96 \text{ cm}^3$

Radio del batido que queda:

$\frac{4}{12} = \frac{x}{4} \to x = 1,33$

$V_{\text{FINAL}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot 4 = 7,41 \text{ cm}^3$

Dividiendo ambos volúmenes:

$\frac{7,41}{200,96} = 0,037 = \frac{37}{1000}$

b) razón de semejanza = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \to$ razón de sus volúmenes = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = 0,037 \to \frac{37}{1000}$

36 **Lucas quiere construir una pared de 7,5 m por 5,6 m y un grosor de 30 cm. ¿Cuántos ladrillos de 15 cm × 10 cm × 6 cm necesitará si el cemento ocupa un 15 % del volumen?**

$V_{\text{PARED}} = 12{,}6 \text{ m}^3 \rightarrow$ el 15 % es $1{,}89 \text{ m}^3$

Tenemos que rellenar de ladrillo $10{,}71 \text{ m}^3$

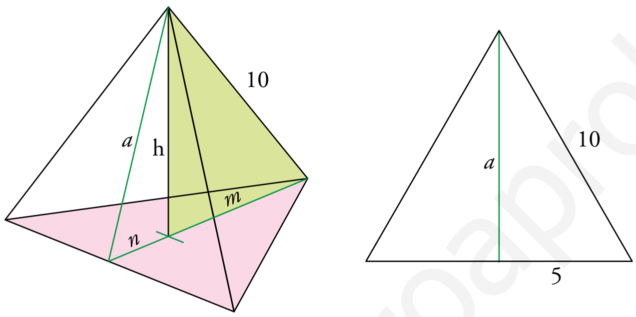
$V_{\text{LADRILLO}} = 900 \text{ cm}^3 = 0{,}9 \text{ dm}^3 = 0{,}0009 \text{ m}^3$

Necesitaremos $\dfrac{10{,}71}{0{,}0009} = 11\,900$ ladrillos.

Interpreta, describe, exprésate

37 **Explica, paso a paso, el proceso que se expone a continuación para calcular el volumen de un tetraedro regular de 10 cm de arista.**

- **La figura:**



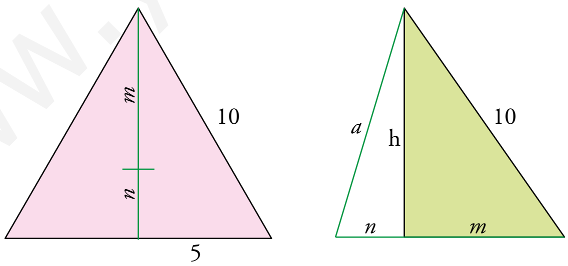
- **Calculamos** ***a*:**

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}7 \text{ cm}$$

- **Calculamos el área de la base:**

$$A_{\text{BASE}} = \frac{10 \cdot a}{2} = \frac{10 \cdot 8{,}7}{2} = 43{,}5 \text{ cm}^2$$

- **Calculamos** ***m*** **y h:**



$$a = m + n$$

$$m = \frac{2}{3} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot 8{,}7 = 5{,}8 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{10^2 - m^2} = \sqrt{10^2 - 5{,}8^2} \approx 8{,}1 \text{ cm}$$

- **Calculamos el volumen del tetraedro:**

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot h =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 43{,}5 \cdot 8{,}1 = 117{,}45 \text{ cm}^3$$

Primero calculamos *a,* la apotema de todos sus lados y altura de la base, para poder calcular el área de la base.

Luego vemos dónde cae la altura de la base, dividiendo la apotema de la base en dos segmentos m y n.

Como se trata de un tetraedro regular, la apotema queda partida en $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$.

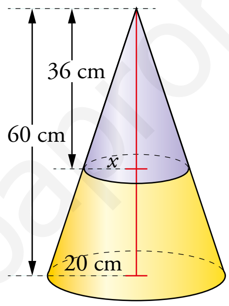
Finalmente, ya podemos calcular la altura del tetraedro y, con ella, su volumen.

Página 299

38 **A continuación, se presenta un problema con dos resoluciones diferentes. Analízalas y describe sus diferencias.**

Un cono de revolución, de 60 cm de altura y 20 cm de radio en la base, se corta por un plano paralelo a la base que dista 36 cm del vértice. Calcula el volumen de tronco de cono que queda por debajo del corte.

Resolución A



$$\frac{60}{20} = \frac{36}{x} \rightarrow x = \frac{36 \cdot 20}{60} = 12$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 60 \approx 25\,120 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 36 \approx 5\,426 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 25\,120 - 5\,426 = 19\,694 \text{ cm}^3$$

Resolución B

Razón de semejanza entre los conos: $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

Relación entre los volúmenes: $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 60 \approx 25\,120 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{27}{125} \cdot 25\,120 = 5\,426 \text{ cm}^3$$

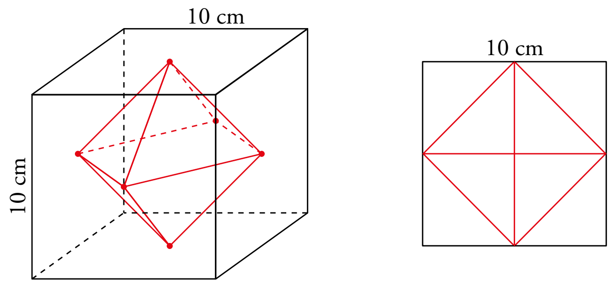
$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 25\,120 - 5\,426 = 19\,694 \text{ cm}^3$$

Resolución A: calculamos el radio del cono pequeño para encontrar el volumen del cono menor.

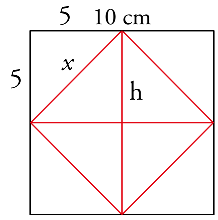
Resolución B: usamos la proporción entre los dos conos para comparar sus volúmenes y encontrar el volumen del cono menor, a partir del cono mayor.

Problemas «+»

39 **Calcula el volumen del octaedro regular cuyos vértices coinciden con los centros de las caras de un cubo de 10 cm de arista.**



$$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07$$

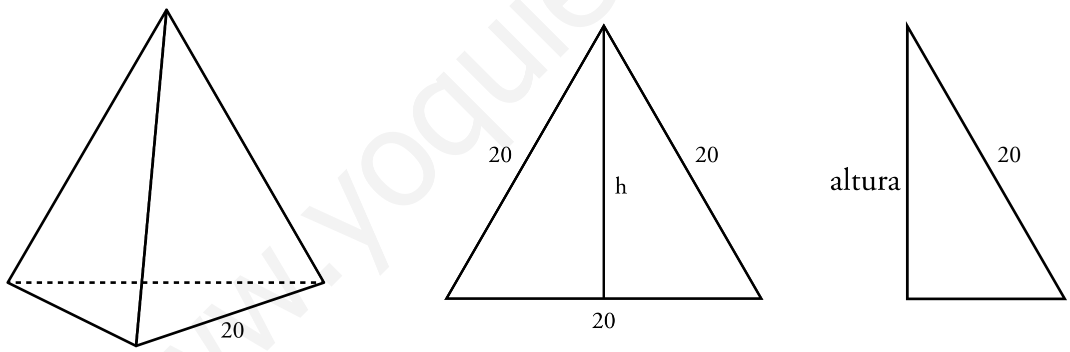


Calculamos el volumen del octaedro a partir de las dos pirámides que lo conforman.

$$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \text{h} = 2 \cdot \frac{50}{3} \cdot 5 = 166{,}\widehat{6} \text{ cm}^3$$

40 **Calcula el volumen de un tetraedro regular de 20 cm de arista.**



$$\text{h} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32 \text{ cm}$$

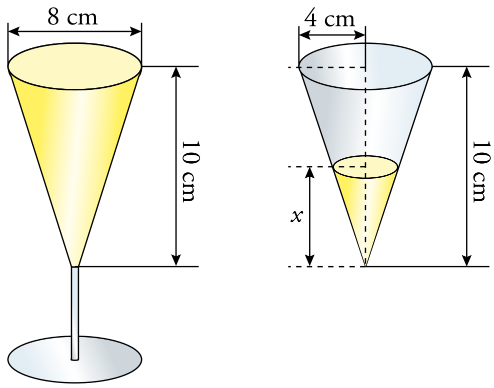
$$\text{Área de la base} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}2 \text{ m}^2$$

Altura del tetraedro:

$$\text{altura} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 17{,}32\right)^2} = \sqrt{20^2 - (11{,}55)^2} = 16{,}66 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 173{,}2 \cdot 16{,}66 = 961{,}8 \text{ cm}^3$$

41 **Un vaso cónico, de 8 cm de diámetro en la parte más ancha y 10 cm de altura, contenía zumo de naranja y se ha vaciado quedando un resto equivalente a la octava parte de su volumen. ¿Qué altura alcanza el líquido que queda?**

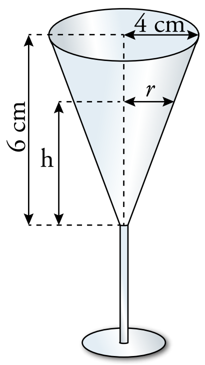


Como la razón de los volúmenes es $\frac{1}{8}$ podemos afirmar que la razón de las alturas es $\frac{1}{2}$, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Por tanto, la altura de lo que queda es la mitad.

El líquido que queda alcanza los 5 cm de altura.

42 **Una copa cónica de 8 cm de diámetro en la parte más ancha y 6 cm de altura se llena hasta la mitad de su volumen. ¿Qué altura alcanza el líquido?**

$V_{\text{COPA}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 100{,}48 \text{ cm}^3 \rightarrow$ La mitad de su volumen es 50,24 cm^3.



Por semejanza de triángulos:

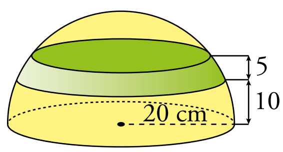
$\frac{4}{6} = \frac{r}{h} \rightarrow h = \frac{6r}{4} = \frac{3r}{2}$

$V_{\text{EN LA COPA}} = 50{,}24 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \frac{3r}{2} \rightarrow r^3 = \frac{50{,}24 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\pi} \approx 32 \rightarrow r = \sqrt[3]{32}$

$r = 3{,}17$ cm

$h = \frac{3r}{2} \approx 4{,}76$ cm

43 **Calcula el volumen de esta zona esférica:**



$V_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi \cdot 20^2 \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (15^3 - 10^3) \approx 3\,794{,}17 \text{ cm}^3$

44 **Al posar sobre el agua de un barreño una pelota de 24 cm de diámetro, comprobamos que se hunde 4 cm. ¿Qué porcentaje del volumen de la pelota queda sumergido bajo la superficie del agua del barreño?**

$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 7\,234{,}56 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot R^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 12^2 \cdot 4 \approx 1\,808{,}64 \text{ m}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 \approx 1\,272{,}9 \text{ cm}^3$

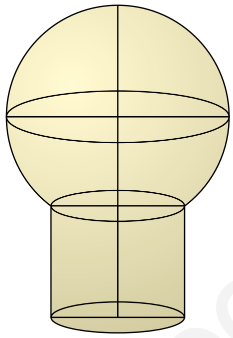
$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = 1\,808{,}64 - 1\,272{,}9 \approx 535{,}74 \text{ cm}^3$

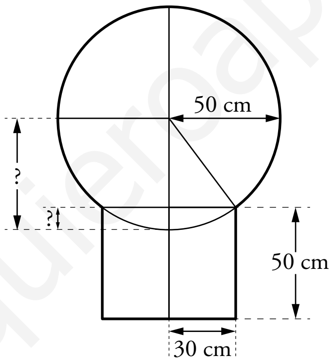
$\frac{535{,}74 \text{ cm}^3}{7\,238{,}23 \text{ cm}^3} \approx 7{,}4\,\%$

Queda sumergido el 7,4 % de la pelota.

45 **Una esfera de 50 cm de radio se corta por un plano horizontal que deja una sección de 30 cm de radio. Tras suprimir el casquete esférico que queda debajo de la sección, se le adosa un cilindro de 50 cm de altura y cuya base superior coincide con la sección señalada en la esfera.**

Calcula el volumen del cuerpo resultante.





Calculamos primero el volumen de la esfera quitando el casquete inferior:

$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 50^3 \approx 523\,333 \text{ cm}^3$

$x = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \rightarrow$ La altura del casquete es de $50 - 40 = 10$ cm.

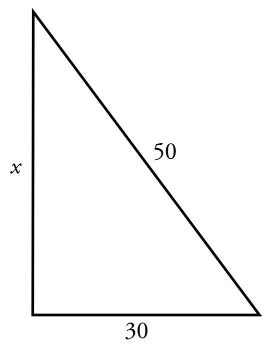
$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot R^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 50^2 \cdot 10 \approx 78\,500 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 50^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^3 \approx 63\,846{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} \approx 14\,653{,}4 \text{ cm}^3$

$V_{\text{ESFERA}} - V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = 523\,333 - 14\,653{,}4 = 508\,679{,}6 \text{ cm}^3$



Calculamos ahora el volumen del cilindro sobre el que se adosa la esfera:

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 141\,300 \text{ cm}^3$

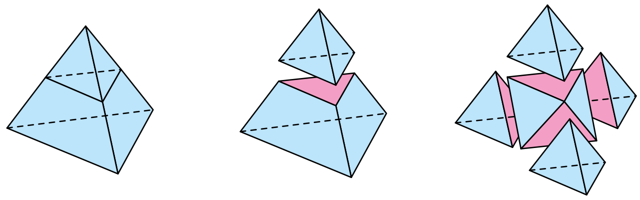
$V_{\text{CUERPO RESULTANTE}} = 508\,679{,}6 + 141\,300 = 649\,979{,}6 \text{ cm}^3$

Página 300

INVESTIGA

¿Sabías que?

Cortando las cuatro esquinas de un tetraedro regular, por planos que pasen por la mitad de las aristas, se obtiene otro poliedro regular. ¿Qué poliedro es?



Se obtiene un octaedro regular.

Página 301

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Echa cuentas

Un rico mercader decidió repartir entre sus numerosas hijas una gran bolsa llena de monedas de oro.

- **A la mayor le dio una moneda, más 1/11 del resto.**
- **A la segunda, dos monedas más 1/11 del resto.**
- **A la tercera, tres monedas más 1/11 del resto.**
- **Así sucesivamente hasta la más pequeña.**

Y resultó que todas recibieron la misma cantidad de monedas. ¿Cuántas eran las hijas y cuántas fueron las monedas repartidas?

Llamamos x al número de monedas.

HIJA	SE LLEVA	QUEDAN
PRIMERA	$1 + \frac{x-1}{11}$	$x - \left(1 + \frac{x-1}{11}\right) = \frac{10x-10}{11}$
SEGUNDA	$2 + \frac{1}{11}\left(\frac{10x-10}{11} - 2\right) = \frac{10x+210}{121}$	

Las dos reciben el mismo número de monedas:

$$1 + \frac{x-1}{11} = \frac{10x-210}{121} \to \frac{110+11x}{121} = \frac{(210+10x)}{121} \to x = 100$$

La primera recibe $1 + \frac{100-1}{11} = 1 + \frac{99}{11} = 10$ y quedan 90.

La segunda recibe $2 + \frac{90-2}{11} = 2 + 8 = 10$ y quedan 80.

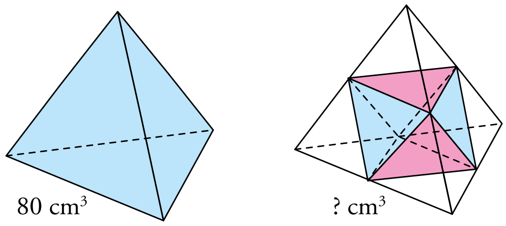
La tercera recibe $3 + \frac{80-3}{11} = 3 + 7 = 10$ y quedan 70.

Y, así, hasta la décima, que recibe las 10 últimas monedas.

Eran 10 hijas y 100 las monedas repartidas.

Imagina en el espacio y calcula

El volumen de un tetraedro regular es de 80 cm³. ¿Cuál es el volumen del poliedro que queda tras cortarle las cuatro esquinas como se ha hecho al final de la página anterior? ¿Puedes resolverlo de cabeza?



Cada una de las esquinas cortada es un tetraedro regular de arista mitad de la arista del tetraedro original. Por tanto, ambas figuras son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

La razón de los volúmenes es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

El volumen de cada esquina es $80 : 8 = 10$ cm³.

El volumen del octaedro restante es $80 - 10 \cdot 4 = 40$ cm³.

AUTOEVALUACIÓN

1 Transforma en metros cúbicos estas cantidades:

a) 450 dam^3 **b) 35 840 dm^3**

c) 500 hL **d) 30 000 L**

a) 450 000 m^3 b) 35,84 m^3

c) 50 m^3 d) 30 m^3

2 Expresa en forma compleja.

a) 75 427 038 m^3

b) 32,14962 dm^3

c) 0,0000084 km^3

d) 832 000 dam^3

a) 75 hm^3 427 dam^3 38 m^3

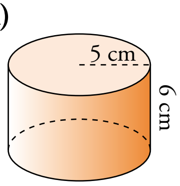
b) 32 dm^3 149 cm^3 620 mm^3

c) 8 dam^3 400 m^3

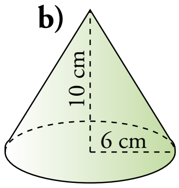
d) 832 hm^3

3 Halla el volumen de estos cuerpos de revolución.

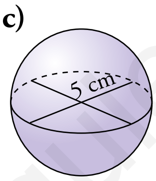
a)



b)



c)



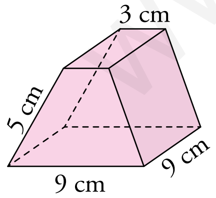
a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 471$ cm^3

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 376{,}8$ cm^3

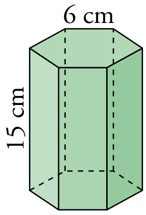
c) $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523{,}3$ cm^3

4 Calcula el volumen de estos poliedros.

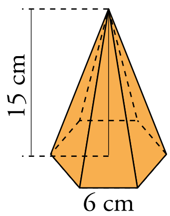
a)



b)



c)



a) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

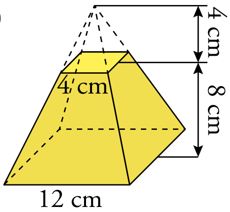
$V = \dfrac{3 + 9}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 216$ cm^3

b) $V = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 15 = 1\,404$ cm^3

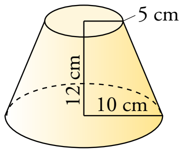
c) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 15 = 468$ cm^3

5 **Halla el volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono.**

a)



b)



a) $V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12 = 576 \text{ cm}^3$

$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = 72 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 576 - 72 = 504 \text{ cm}^3$

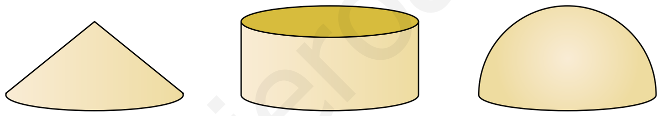
b) $\dfrac{x + 12}{10} = \dfrac{x}{5} \rightarrow x = 12$

La altura del cono grande es 24 cm, y la del cono pequeño, 12 cm.

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO GRANDE}} =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 24 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 2\,512 - 314 = 2\,198 \text{ cm}^3$

6 **Aquí tienes tres de los quesos que ha hecho Martina con la leche de su granja. Los tres se apoyan en bases idénticas y tienen la misma altura. ¿Cuánto pesará el tercero?**

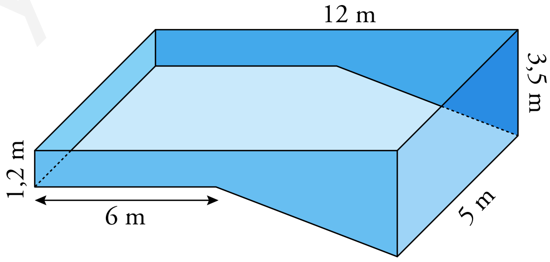


0,5 kg **1,5 kg** **¿? kg**

$V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{CONO}} = V_{\text{CASQUETE}} \rightarrow 1{,}5 - 0{,}5 = 1$

Pesará 1 kg.

7 **a) ¿Cuál es la capacidad de esta piscina?**



b) La piscina se empieza a llenar con un grifo que vierte 120 litros por minuto. Al cabo de 9 horas, se cierra. ¿A qué distancia del borde quedará el agua?

a) $V = 6 \cdot 5 \cdot 1{,}2 + \dfrac{3{,}5 + 1{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 36 + 70{,}5 = 106{,}5 \text{ m}^3 = 106\,500 \text{ L}$

b) $120 \cdot 60 \cdot 9 = 64\,800$ L ha vertido el grifo durante las horas que ha estado abierto.

$V_{\text{PARTE HONDA}} = \dfrac{6 \cdot (3{,}5 - 1{,}2) \cdot 5}{2} = 34{,}5 \text{ m}^3 = 34\,500 \text{ L}$

Con el agua que queda, que son $64\,800 - 34\,500 = 30\,300$ L $= 30{,}3$ m^3 llegará el agua hasta:

$30{,}3 = 12 \cdot 5 \cdot x \rightarrow x = 0{,}505$

Por lo que el agua queda a $1{,}2 - 0{,}505 = 0{,}695$ m del borde.

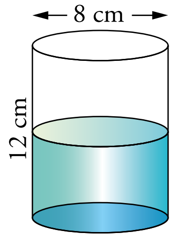
8 **El interior de este vaso mide 8 cm de diámetro y 12 cm de altura.**

Está medio lleno de agua.

Se echan dentro 20 canicas de 3 cm de diámetro.

a) ¿Se derramará el agua? Si no, ¿a qué altura llegará?

b) ¿Y si echamos 22 canicas?



a) Volumen de las 20 canicas: $V = 20 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 \approx 282{,}6 \text{ cm}^3$

Volumen que ocupa el agua: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \approx 301{,}44 \text{ cm}^3$

Volumen del vaso sin agua: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 \approx 602{,}88 \text{ cm}^3$

Restamos al volumen del vaso el que ocupa el agua y las canicas:

$602{,}88 - 301{,}44 - 282{,}6 = 18{,}84 \text{ cm}^3$

El agua no se derramará porque al introducir las canicas quedan todavía por llenar $18{,}84 \text{ cm}^3$.

Calculamos ahora qué altura alcanzará el agua:

$584{,}04 = \pi \cdot 4^2 \cdot a \to a = \dfrac{584{,}04}{\pi \cdot 4^2} = 11{,}625 \text{ cm}$

Una vez las canicas estén dentro, el agua subirá hasta 11,625 cm.

b) Volumen de las 22 canicas: $V = 22 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 \approx 310{,}86 \text{ cm}^3$

El volumen del agua y de las canicas sería de $301{,}44 + 310{,}86 = 612{,}3 \text{ cm}^3$, por lo que se derramaría el agua.