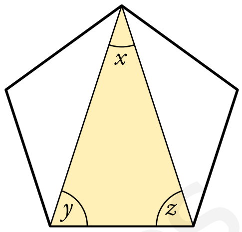
12 SEMEJANZA

Página 234

El proceso deductivo

1 **Calcula la medida de los ángulos del triángulo coloreado en la figura.**



$x = \frac{A}{3} = \frac{108°}{3} = 36°$

$180° - 36° = 144°$

$y = z = \frac{144°}{2} = 72°$

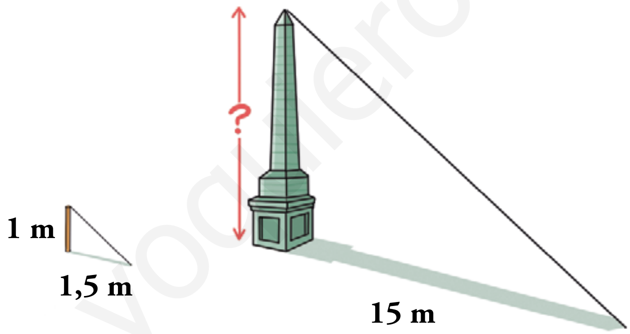
2 **¿Cuánto medirán los ángulos mencionados más arriba en un pentágono cuyos lados midan la mitad los del anterior?**

Medirán lo mismo.

Página 235

Una aplicación del teorema de Tales

3 **El palo, que mide un metro, arroja una sombra de metro y medio. En ese momento el obelisco de la plaza arroja una sombra de 15 metros. ¿Cuál es la altura del obelisco?**



$\frac{1}{1,5} = \frac{x}{15} \rightarrow x = 10$

El obelisco mide 10 metros.

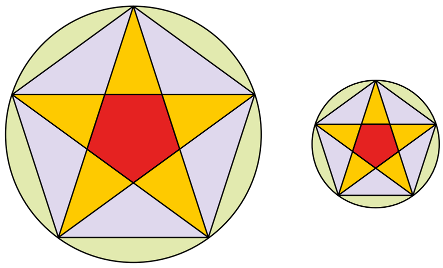
Formas y tamaños

4 **Observa las dos figuras de la derecha y contesta.**

a) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

b) ¿Qué puedes decir de dos distancias correspondientes de la una y la otra?

c) ¿Y de dos ángulos correspondientes?



a) Se parecen en la forma y el color y se diferencian en el tamaño.

b) Que las distancias son semejantes.

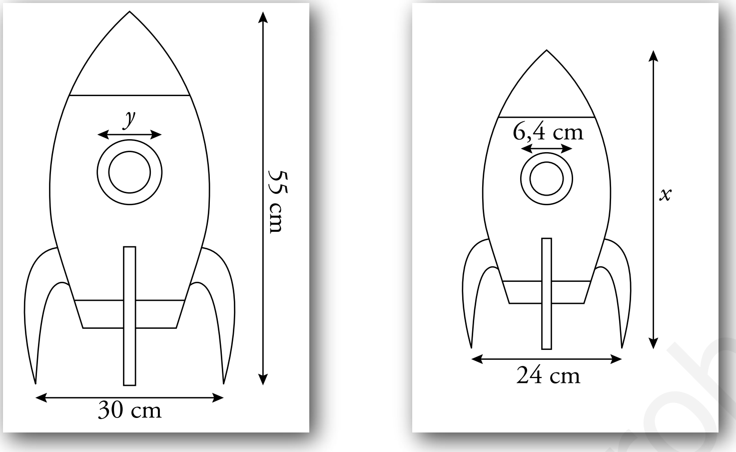
c) Los ángulos correspondientes son iguales.

1 FIGURAS SEMEJANTES

Página 237

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno.**



Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha.

a) ¿Cuál ha sido la reducción?

b) ¿Cuánto mide la altura x de la figura reducida?

c) ¿Cuánto mide el diámetro de la ventana en la figura inicial?

d) Las fotocopiadoras expresan la reducción en forma de porcentaje. ¿Cuál es ese porcentaje en este caso?

a) Calculamos el factor de reducción, es decir, la razón de semejanza entre la figura reducida y la original. ¿Por cuánto hay que multiplicar cada segmento de la primera figura para obtener el correspondiente de la segunda?

$$30 \cdot r = 24 \;\rightarrow\; r = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

El cociente obtenido (r = 0,…) es la razón de semejanza que transforma la primera figura en la segunda.

b) Conociendo la reducción, r, calculamos la altura x:

$$55 \cdot r = x \;\rightarrow\; x = 55 \cdot 0{,}\dots = \dots \text{ cm}$$

c) Siguiendo el mismo criterio, calculamos el diámetro, y, pero teniendo en cuenta que pertenece a la primera figura y ahora conocemos su valor reducido.

$$y \cdot r = 6{,}4 \;\rightarrow\; y = \frac{6{,}4}{0{,}\dots} = \dots \text{ cm}$$

d) Tenemos la razón de semejanza en forma decimal. Pasamos ese decimal a forma porcentual:

$$r = 0{,}\dots = \frac{\dots}{100} \;\rightarrow\; \dots\,\%$$

a) $30 \cdot r = 24 \rightarrow r = \dfrac{24}{30} = 0{,}8$

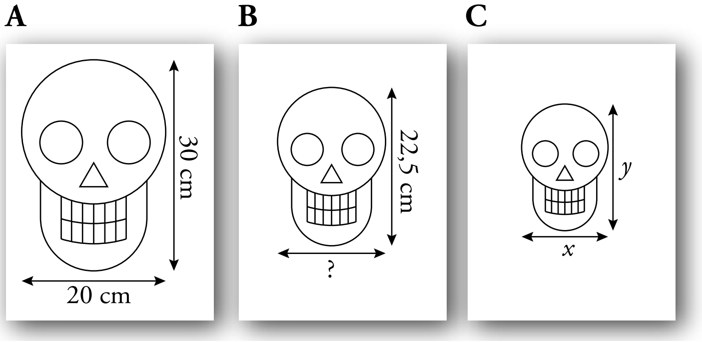
b) $55 \cdot r = x \rightarrow x = 55 \cdot 0{,}8 = 44$ cm

c) $y \cdot r = 6{,}4 \rightarrow \dfrac{6{,}4}{0{,}8} = 8$ cm

d) $r = 0{,}8 = \dfrac{8}{100} \rightarrow 8\,\%$

Para practicar

1 **Las dos figuras de la derecha, B y C, son reducciones que se han hecho en una fotocopiadora sobre la figura de la izquierda, A.**



a) ¿Qué reducción se ha aplicado a la página central?

Exprésala en forma decimal y en tanto por ciento.

b) ¿Cuánto mide el ancho de la imagen de la hoja central?

c) Calcula los valores de x e y sabiendo que se ha hecho la reducción al 60 %.

a) $\dfrac{22{,}5}{30} = 0{,}75$. Se ha aplicado una reducción del 75 %.

b) 75 % de 20 = 15. El ancho de la calavera central es de 15 cm.

c) y = 60 % de 30 = 18 cm

x = 60 % de 20 = 12 cm

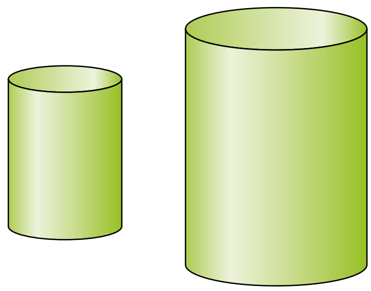
Página 238

Para fijar ideas

2 **Copia y completa en tu cuaderno.**

Una empresa de transportes tiene en su base logística dos depósitos cilíndricos para almacenaje de combustible.

Ambos son semejantes y la altura de uno es 1,6 veces la del otro.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

$$\text{Altura}_{\text{GRANDE}} = r \cdot \text{Altura}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow r = \ldots$$

b) Para pintar el menor, se han gastado 12,5 kg de pintura. ¿Cuántos kilos se necesitarán para pintar el grande?

$$\text{kg}_{\text{GRANDE}} = r^2 \cdot \text{kg}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{kg}_{\text{GRANDE}} = (\ldots)^2 \cdot 12{,}5 = \ldots \text{ kg}$$

c) En el pequeño caben 3 750 litros de gasoil. ¿Cuántos litros caben en el grande?

$$\text{L}_{\text{GRANDE}} = r^3 \cdot \text{L}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{L}_{\text{GRANDE}} = (\ldots)^3 \cdot \ldots = \ldots \text{ L}$$

a) $\text{Altura}_{\text{GRANDE}} = r \cdot \text{Altura}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow r = 1{,}6$

b) $\text{kg}_{\text{GRANDE}} = r^2 \cdot \text{kg}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{kg}_{\text{GRANDE}} = (1{,}6)^2 \cdot 12{,}5 = 32$ kg

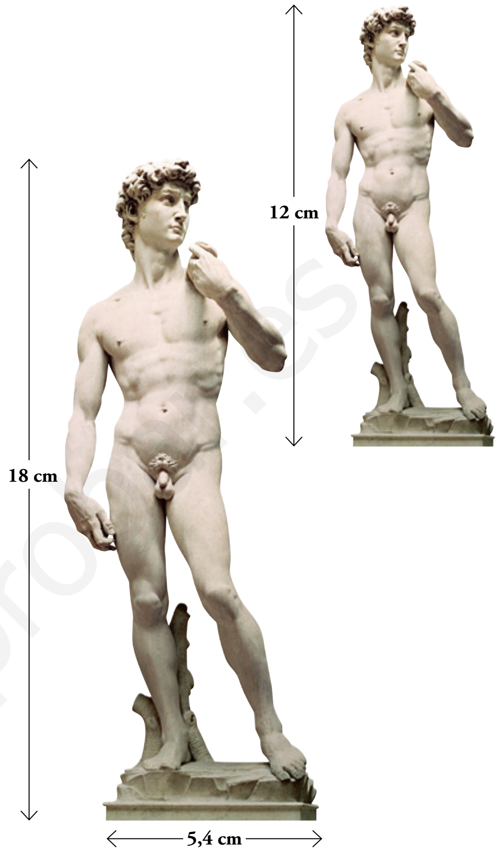
c) $\text{L}_{\text{GRANDE}} = r^3 \cdot \text{L}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{L}_{\text{GRANDE}} = (1{,}6)^3 \cdot 3\,750 = 15\,360$ L

Página 239

Para fijar ideas

3 **Copia, completa y comprueba que llegas a los resultados que aparecen.**

En una pequeña tienda de Florencia venden reproducciones del *David,* de Miguel Ángel. Las hay de dos tamaños: de 18 cm y de 12 cm de altura.



a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza entre la estatua grande y la pequeña?

Las figuras son semejantes porque tienen la misma …, es decir, solo difieren en el…

La razón de semejanza, r, entre la grande y la pequeña:

$$r = \frac{\dots}{\dots} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

b) El pedestal de la figura mayor tiene una anchura de 5,4 cm. ¿Cuál es la anchura del pedestal de la pequeña?

La anchura, a, del pedestal de la pequeña:

$$a \cdot r = 5{,}4 \rightarrow a = \frac{\dots}{\dots} = \dots \text{ cm}$$

c) Si el pedestal de la estatua original tiene una anchura de 1,55 m, ¿qué altura tiene la estatua?

La altura, h, de la estatua:

$$\frac{\dots}{5{,}4} = \frac{h}{\dots} \rightarrow h = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} = 516{,}66 \text{ cm} \approx 517 \text{ cm} = \dots \text{ m}$$

d) Si para envolver la pequeña utilizamos un pliego de papel de 4 dm², ¿cuál será la superficie del pliego necesario para envolver en las mismas condiciones la grande?

$$\text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO GRANDE}} = r^2 \cdot \text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO PEQUEÑO}}$$

$$\text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO GRANDE}} = \dots^2 \cdot 4 = 9 \text{ dm}^2$$

a) Las figuras son semejantes porque tienen la misma forma, es decir, solo difieren en el tamaño.

$$r = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

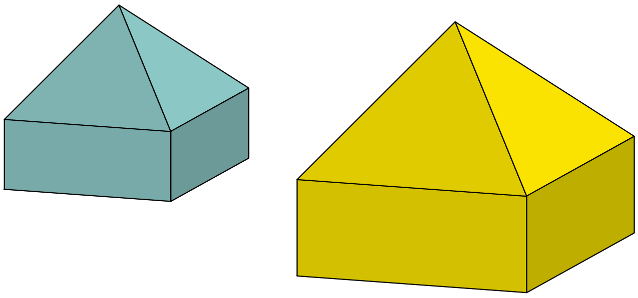
b) $a \cdot r = 5{,}4 \rightarrow a = \dfrac{5{,}4}{1{,}5} = 3{,}6$ cm

c) $\dfrac{155}{5{,}4} = \dfrac{h}{18} \rightarrow h = \dfrac{155 \cdot 18}{5{,}4} = 516{,}66 \text{ cm} \approx 517 \text{ cm} = 5{,}17 \text{ m}$

d) $\text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO GRANDE}} = 1{,}5^2 \cdot 4 = 9 \text{ dm}^2$

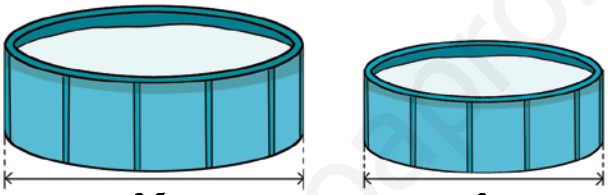
Para practicar

2 **Estas dos casitas de cartulina, construidas en el taller de pretecnología, son semejantes.**
La razón de semejanza es 1,5.
Para fabricar la pequeña, se han necesitado 7,2 dm^2 de cartulina, y su volumen es 6,4 L.
¿Cuánta cartulina lleva la grande y qué volumen tiene?



La grande lleva $7{,}2 \cdot 1{,}5^2 = 16{,}2$ dm^2 de cartulina y tiene un volumen de $6{,}4 \cdot 1{,}5^3 = 21{,}6$ L.

3 **Estas dos piscinas son semejantes.**



a) ¿Cuál es la razón de semejanza?
b) Si la pequeña tiene 120 cm de profundidad, ¿cuál es la profundidad de la grande?
c) La lona impermeable de la pequeña costó 50 €. ¿Cuánto costará la lona de la grande?
d) Llenar de agua la pequeña cuesta 23 €. ¿Cuánto costará llenar la grande?

a) $r = \dfrac{2{,}5}{2} = 1{,}25$

b) La profundidad de la grande es $120 \cdot 1{,}25 = 150$ cm.

c) La lona de la grande costará $50 \cdot 1{,}25^2 = 78{,}12$ €.

d) Llenar la grande costará $23 \cdot 1{,}25^3 = 44{,}92$ €.

2 PLANOS, MAPAS Y MAQUETAS

Página 241

Para practicar

1 **Tomando medidas sobre el mapa de la página anterior y teniendo en cuenta la escala. Calcula:**

a) La distancia entre Las Palmas y Puerto del Rosario.

b) El tiempo que tarda un ferri, a 20 nudos, en ir de Las Palmas a Santa Cruz de Tenerife.

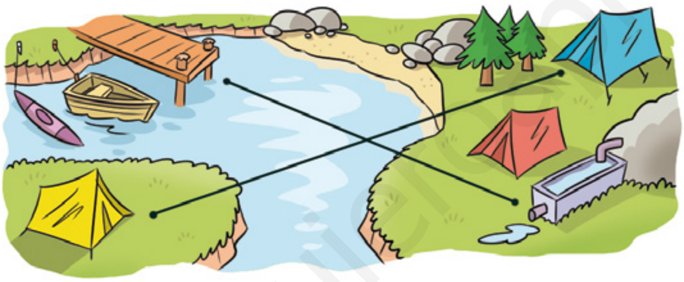
Cada nudo equivale a 1,852 km/h.

a) Distancia sobre el mapa = 4 cm → Distancia real = 4 · 4 000 000 cm = 160 km

b) Distancia sobre el mapa = 2,2 cm → Distancia real = 2,2 · 4 000 000 cm = 88 km

$$t = \frac{e}{v} = \frac{88}{20 \cdot 1{,}852} = 2{,}4 \text{ h} = 2 \text{ horas } 24 \text{ minutos}$$

2 **Sabiendo que la distancia que separa en la realidad el embarcadero de la fuente es 136 m, halla su escala y calcula la distancia entre la tienda azul y la amarilla.**

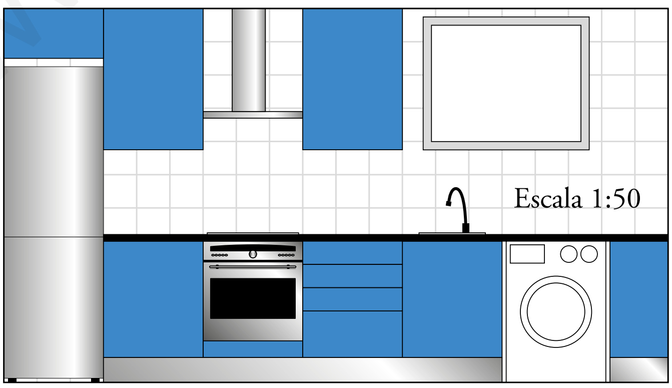


$$\text{Escala} = \frac{4}{13\,600}$$

$$\frac{4}{13\,600} = \frac{5{,}5}{d} \rightarrow d = \frac{13\,600 \cdot 5{,}5}{4} = 18\,700 \text{ cm} = 187 \text{ m}$$

La distancia entre la tienda azul y la amarilla es de 187 metros.

3 **Este es el plano de la pared de una cocina.**



Calcula:

a) Sus dimensiones (largo y ancho).

b) La superficie de la ventana.

c) La distancia entre los fogones y la campana.

d) Las dimensiones del frigorífico.

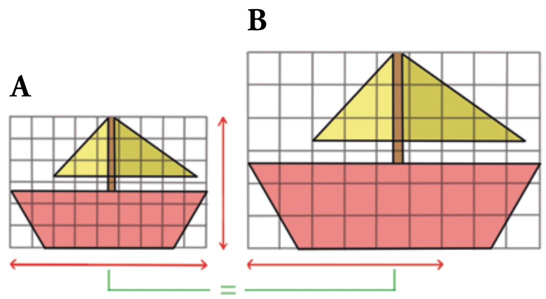
a) Largo de la cocina: 8,8 cm · 50 = 440 cm = 4,4 m
   Ancho de la cocina: 5 cm · 50 = 250 cm = 2,5 m
b) Superficie en el plano de la ventana: $2,2 \cdot 1,8 = 4$ cm^2
   Superficie real de la ventana: $4 \cdot 50^2 = 10\,000$ cm^2 = 1 m^2
c) Distancia en el plano entre los fogones y la campana: 1,5 cm
   Distancia real entre los fogones y la campana: 1,5 · 50 = 75 cm
d) Alto del frigorífico: 4,1 cm · 50 = 205 cm
   Ancho del frigorífico: 1,3 cm · 50 = 65 cm

3 CÓMO CONSTRUIR FIGURAS SEMEJANTES

Página 242

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno.**



¿Qué ampliación ha sufrido la figura A para obtener la figura B?

Tomando como unidad la cuadrícula de B:

$$\left.\begin{matrix}\textbf{Alto de B} \to \dots & \textbf{Ancho de B} \to \dots \\ \textbf{Alto de A} \to \dots & \textbf{Ancho de A} \to \dots\end{matrix}\right\} \to r = \frac{6}{\dots} = \frac{\dots}{6} = \frac{\dots}{2} = \dots$$

Cada distancia de A ha quedado multiplicada por: $r = \dots$

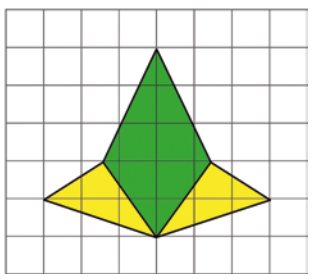
$$\left.\begin{matrix}\text{Alto de B} \to 4 & \text{Ancho de B} \to 6 \\ \text{Alto de A} \to 6 & \text{Ancho de A} \to 9\end{matrix}\right\} \to r = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Cada distancia de A ha quedado multiplicada por: $r = 1{,}5$

Página 243

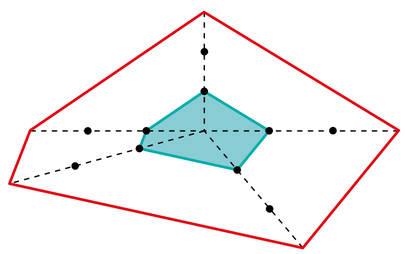
Para practicar

1 **Dibuja en tu cuaderno una figura como esta y amplíala al doble de tamaño mediante el método de la proyección.**

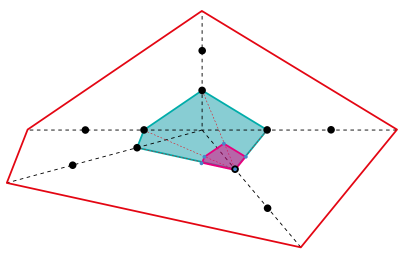


Respuesta abierta.

2 **Dibuja en tu cuaderno un pentágono irregular. Redúcelo a su tercera parte proyectando desde un punto interior. Vuelve a hacerlo tomando como punto de proyección uno de los vértices.**



El dibujo a escala 1/3 queda pegado al vértice que se elige como proyección. Respuesta abierta; por ejemplo:



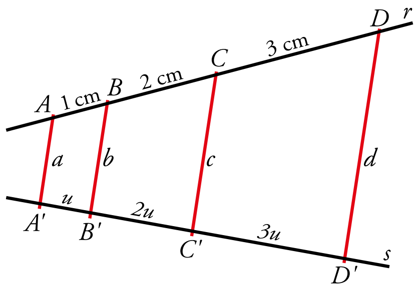
4 ▶ TEOREMA DE TALES

Página 244

Para fijar ideas

1 **Traza dos rectas cualesquiera, *r* y *s*. Señala en *r* cuatro puntos, *A*, *B*, *C* y *D*, de modo que:**

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm} \qquad \overline{BC} = 2 \text{ cm} \qquad \overline{CD} = 3 \text{ cm}$$



Traza cuatro rectas paralelas, *a*, *b*, *c* y *d*, que pasen por *A*, *B*, *C* y *D*. Llama *A'*, *B'*, *C'* y *D'* a los puntos en que estas rectas cortan a *s*.

Comprueba que $\overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'} = 3 \cdot \overline{A'B'}$.

Se comprueba.

2 **Copia y completa en tu cuaderno para calcular *x*.**

Primero comprueba que las rectas *a*, *b* y *c* del dibujo son paralelas.

Escribe una proporción con los segmentos determinados en las rectas *r* y *s*, y calcula *x*.

$$\frac{1}{\ldots} = \frac{\ldots}{x} \rightarrow x = \frac{\ldots \cdot \ldots}{1} = \ldots$$

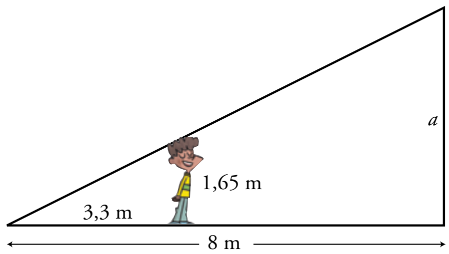
$$\frac{1}{1{,}6} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{1{,}6 \cdot 2}{1} = 3{,}2 \text{ cm}$$

Página 245

Para fijar ideas

3 **Copia en tu cuaderno y comprueba.**

a) El salón de la casa de Jaime es abuhardillado. Para medir la altura de la pared, Jaime se coloca como se ve en el dibujo. Teniendo en cuenta las medidas, calcula la altura máxima del salón.

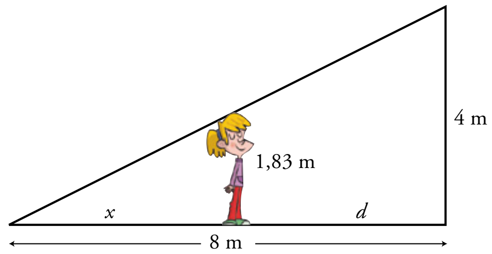


Llamamos *a* a la altura máxima del salón de Jaime.

Como son dos triángulos en posición de Tales, son semejantes. Por tanto:

$$\frac{1{,}65}{\ldots} = \frac{a}{\ldots} \rightarrow a = \frac{165 \cdot \ldots}{\ldots} = 4 \text{ m}$$

b) Raquel, que mide 1,83 m, va a visitar a su amigo Jaime. ¿A qué distancia, *d*, de la pared debe colocarse para tocar el techo con la cabeza?



Vemos que en el triángulo mayor, un lado, 8 m, es el doble de otro, 4 m.

Como los triángulos son semejantes:

$$\boldsymbol{x = 2 \cdot \ldots = \ldots \text{ m} \rightarrow d = 8 - x = \ldots - \ldots = 4{,}34 \text{ m}}$$

a) $\dfrac{1{,}65}{3{,}3} = \dfrac{a}{8} \rightarrow a = \dfrac{1{,}65 \cdot 8}{3{,}3} = 4 \text{ m}$

b) $x = 2 \cdot 1{,}83 = 3{,}66 \text{ m} \rightarrow d = 8 - x = 8 - 3{,}66 = 4{,}34 \text{ m}$

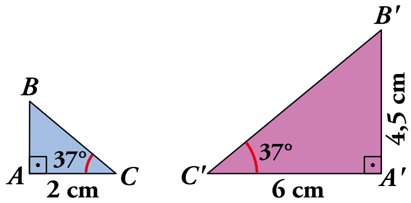
5 ▸ SEMEJANZA ENTRE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Página 246

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 Observa los triángulos.



a) ¿Son semejantes?

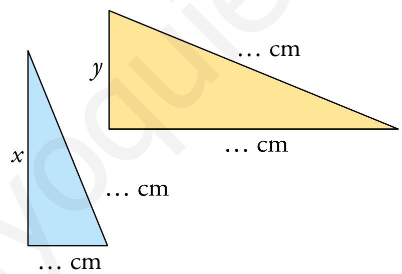
Los dos triángulos son semejantes porque son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual.

b) Calcula el cateto AB.

$$\frac{\overline{AB}}{\ldots} = \frac{2}{\ldots} \to \overline{AB} = \frac{2 \cdot \ldots}{\ldots} = 1{,}5 \text{ cm}$$

b) $\dfrac{\overline{AB}}{4{,}5} = \dfrac{2}{6} \to \overline{AB} = \dfrac{2 \cdot 4{,}5}{6} = 1{,}5 \text{ cm}$

2 En un triángulo rectángulo, el cateto menor mide 10 cm, y la hipotenusa, 26 cm. En otro triángulo rectángulo, el cateto mayor mide 36 cm, y la hipotenusa, 39 cm. ¿Son semejantes?



Antes de comenzar, ponemos los datos en un dibujo.

Con el teorema de Pitágoras calculamos un cateto desconocido, por ejemplo x.

$$x = \sqrt{\ldots^2 - \ldots^2} = 24 \text{ cm}$$

Ahora comprobamos si los lados son proporcionales: hipotenusa es a cateto, como hipotenusa es a cateto. ¿Es cierta la igualdad?

$$¿\frac{26}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}? \to \text{Los triángulos … semejantes.}$$

$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ cm

$¿\dfrac{26}{24} = \dfrac{39}{36}? \to$ Los triángulos son semejantes.

Para practicar

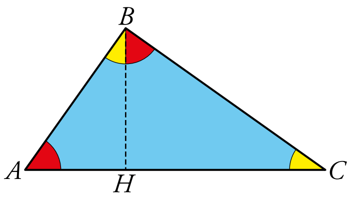
1 Si $\hat{A} = 33°$, $\hat{C} = 90°$, $\hat{B}' = 57°$ y $\hat{C}' = 90°$, explica por qué ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Los ángulos de un triángulo suman 180°, por lo que, en el triángulo ABC, $\hat{B} = 57°$. Así, ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo agudo igual y otro recto, y, por tanto, son semejantes.

2 Razona.

a) ¿Por qué son iguales los ángulos señalados del mismo color?

b) ¿Por qué los triángulos *ABC, AHB* y *BHC* son semejantes?



a) El ángulo B es rectángulo. $\rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} + \widehat{B}_{\text{ROJO}} = 90°$

En el triángulo ABC sabemos que sus ángulos suman 180°. $\rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Por tanto: $\widehat{A} + 90° + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 90°$

Si ahora nos fijamos en el triángulo rectángulo ABH:

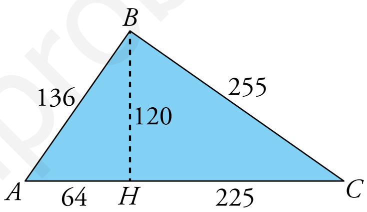
$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A} + \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} + 90° = 180° \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} = 90° \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 90° \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} = \widehat{C}$$

Y si nos fijamos en el triángulo rectángulo BHC:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{C} + \widehat{B}_{\text{ROJO}} + 90° = 180° \rightarrow \widehat{C} + \widehat{B}_{\text{ROJO}} = 90° \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 90° \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B}_{\text{ROJO}} = \widehat{A}$$

b) $ABC - ABH \rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = 2{,}125 = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BH}}$

$ABC - BHC \rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = 1{,}1\widehat{3} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{HC}}$

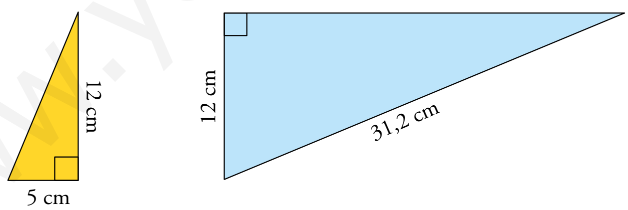


Como la semejanza es una relación de equivalencia y ABH es semejante a ABC, que es semejante a BHC, entonces ABH es semejante a BHC.

3 Explica por qué dos triángulos rectángulos isósceles son semejantes.

Si es rectángulo e isósceles, sus catetos son iguales y, por tanto, son triángulos semejantes.

4 Explica por qué estos dos triángulos son semejantes.



Aplicamos Pitágoras para calcular la hipotenusa en el triángulo pequeño:

$$a = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$$

Vemos si los triángulos tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales:

$$\frac{31{,}2}{13} = 2{,}4 = \frac{12}{5}$$

Efectivamente, así es. Por tanto, los triángulos son semejantes.

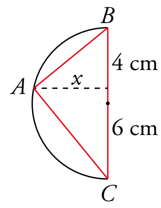
Página 247

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Calcula x aplicando el teorema de la altura.**

El triángulo ABC es rectángulo (está inscrito en una …). Aplicamos el teorema de la altura:



$$x^2 = \ldots \cdot \ldots = \ldots$$
$$x = \sqrt{\ldots} \approx 4{,}9 \text{ cm}$$

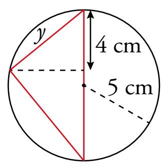
El triángulo ABC es rectángulo (está inscrito en una semicircunferencia).

Aplicamos el teorema de la altura:

$$x^2 = 6 \cdot 4 = 24$$
$$x = \sqrt{24} \approx 4{,}9 \text{ cm}$$

4 **Calcula y aplicando el teorema del cateto.**

Aplicamos el teorema del cateto teniendo en cuenta que la hipotenusa mide … cm:



$$y^2 = \ldots \cdot \ldots = \ldots$$
$$y = \sqrt{\ldots} \approx 6{,}3 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del cateto teniendo en cuenta que la hipotenusa mide 10 cm:

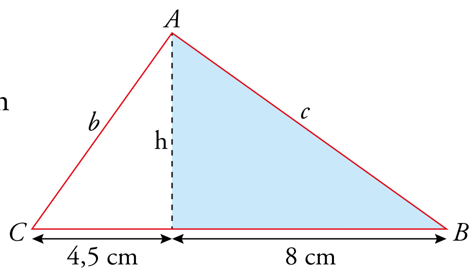
$$y^2 = 10 \cdot 4 = 40$$
$$y = \sqrt{40} \approx 6{,}3 \text{ cm}$$

Para practicar

5 **En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 8 cm y 4,5 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.**

$a = 4{,}5 + 8 = 12{,}5$ cm

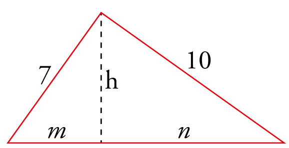
Por el teorema del cateto, $\begin{cases} b^2 = 12{,}5 \cdot 4{,}5 = 56{,}25 \;\rightarrow\; b = 7{,}5 \text{ cm} \\ c^2 = 12{,}5 \cdot 8 = 100 \;\rightarrow\; c = 10 \text{ cm} \end{cases}$



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:

$\text{h} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm

6 **Calcula las longitudes h, m y n en este triángulo rectángulo.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$m + n = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149} \approx 12{,}21$ cm

Aplicamos el teorema del cateto:

$7^2 = m \cdot (m + n) \;\rightarrow\; 49 = m \cdot 12{,}21 \;\rightarrow\; m = 49 : 12{,}21 \approx 4{,}01$ cm

$10^2 = n \cdot (m + n) \;\rightarrow\; 100 = n \cdot 12{,}21 \;\rightarrow\; n = 100 : 12{,}21 \approx 8{,}19$ cm

$\text{h} = \sqrt{10^2 - 8{,}19^2} = \sqrt{32{,}92} \approx 5{,}74$ cm

6 APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Página 248

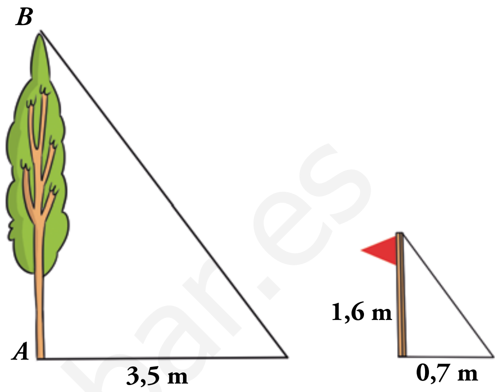
Para fijar ideas

1 **En la descripción anterior, calcula la altura del árbol sabiendo que:**

- **Longitud de la estaca = 1,6 m**
- **Sombra del árbol = 3,5 m**
- **Sombra de la estaca = 0,7 m**

$$\frac{\overline{AB}}{1{,}6} = \frac{\dots}{\dots} \to \overline{AB} = \frac{1{,}6 \cdot \dots}{\dots} = 8 \text{ m}$$

***Solución:* El árbol mide 8 m.**



$$\frac{\overline{AB}}{1{,}6} = \frac{3{,}5}{0{,}7} \to \overline{AB} = \frac{1{,}6 \cdot 3{,}5}{0{,}7} = 8$$

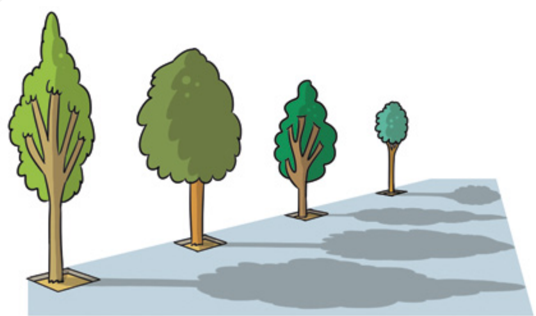
Para practicar

1 **Calcula la altura de una farola que proyecta una sombra de 1,90 m en el momento en que la marquesina del autobús, de 2,40 m de altura, proyecta una sombra de 96 cm.**

$$\frac{x}{240} = \frac{190}{96} \to x = \frac{240 \cdot 190}{96} = 225 \text{ cm}$$

La altura de la farola es de 2,25 metros.

2 **Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. Si el árbol pequeño mide 2,5 m, ¿cuánto miden los demás?**



$$\frac{2{,}5}{4} = \frac{x}{12} \to x = 7{,}5$$

$0{,}625 \cdot 8 = y \to y = 5$

$0{,}625 \cdot 6 = z \to z = 3{,}75$

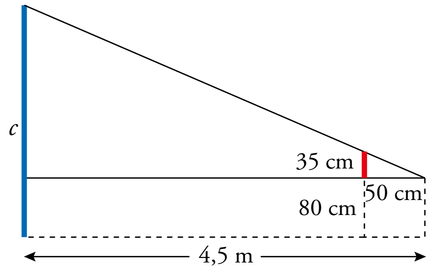
El primero mide 7,5 m, el segundo, 5 m y el tercero, 3,75 m.

Página 249

Para fijar ideas

2 **En la descripción anterior, calcula la altura de la casa sabiendo que:**

- **Longitud de la regla, b = 35 cm**
- **Distancia del borde de la mesa al pie de la regla, a = 50 cm**
- **Distancia del borde de la mesa a la casa, d = 4,5 m**
- **Altura de la mesa = 80 cm**



Expresamos todas las distancias en metros.

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{\dots}{\dots} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot \dots}{\dots} = \dots \text{ m}$$

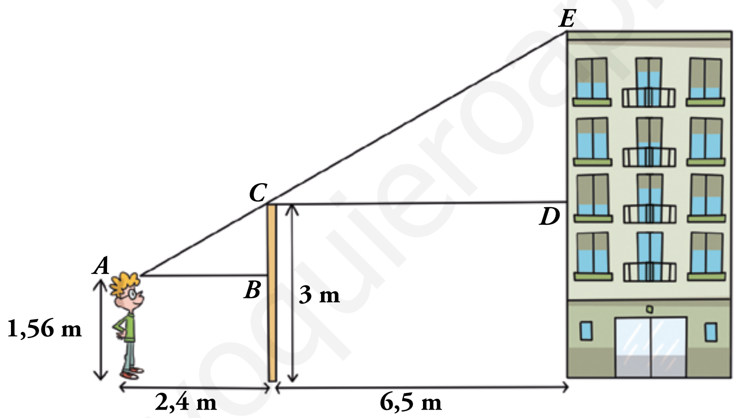
Solución: **La altura de la casa es de … + 80 = 3,95 m.**

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

Solución: La altura de la casa es de 3,15 + 80 = 3,95 m.

Para practicar

3 **Observa de qué ingenioso método se vale Ramón para averiguar la altura del edificio:**



Se sitúa de tal manera que la parte alta de la verja y la parte alta del edificio estén alineadas con sus ojos. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.

a) Explica por qué los triángulos ABC y CDE son semejantes.

b) Calcula $\overline{ED}$.

c) Calcula la altura del edificio.

a) Porque $\hat{A}$ del pequeño es igual que $\hat{C}$ del grande, y como son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual, son semejantes.

b) 3 – 1,56 = 1,44

$$\frac{\overline{ED}}{1,44} = \frac{6,5}{2,4} \rightarrow \overline{ED} = 3,9 \text{ m}$$

c) 3 + 3,9 = 6,9 m

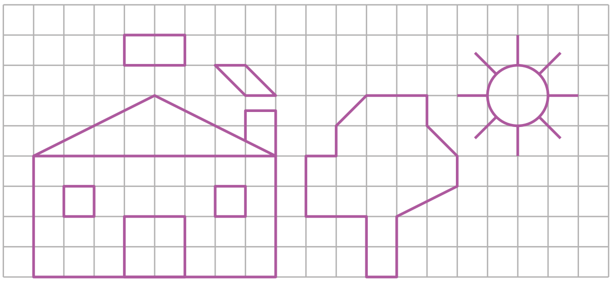
La altura del edificio es de 6,9 m.

Página 250

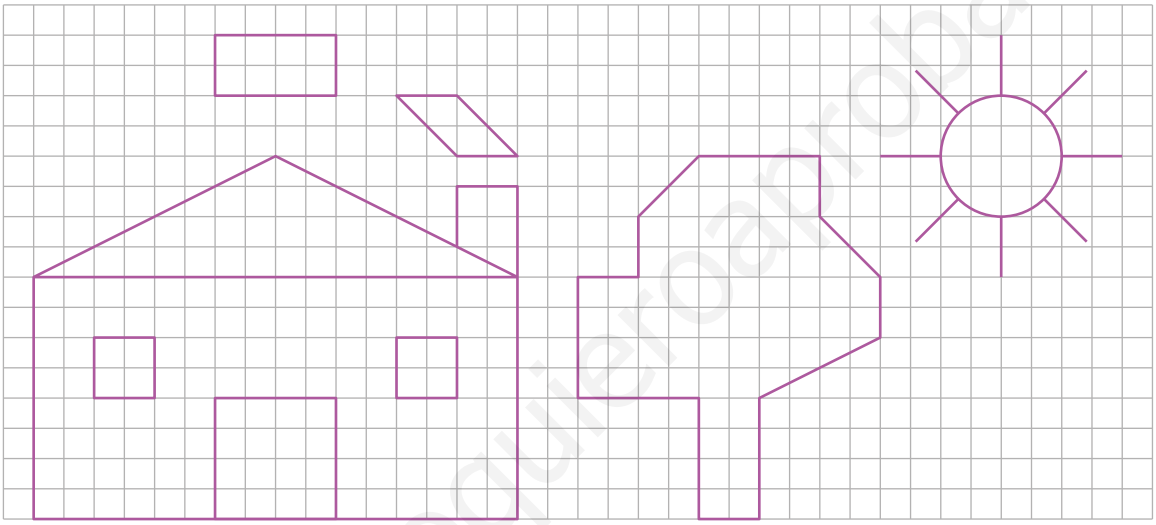
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Figuras semejantes

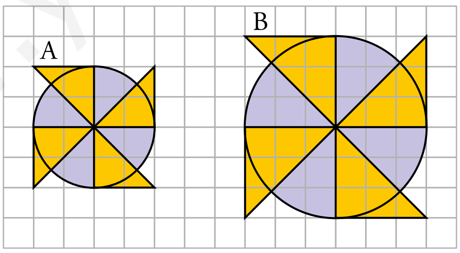
1 **Sobre una hoja de papel cuadriculado, realiza una copia del siguiente dibujo, pero al doble de su tamaño.**



Construcción:



2 **Estas dos figuras son semejantes.**



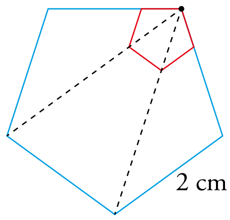
a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre B y A? Expresa el resultado con un número decimal.

b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre A y B? Expresa el resultado con una fracción.

a) Su razón de semejanza es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$.

b) Su razón de semejanza es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3 **Para construir un pentágono regular de 2 cm de lado, copiamos un pentágono regular cualquiera (figura roja), alargamos dos de sus lados consecutivos hasta 2 cm y completamos una figura semejante a la roja trazando rectas paralelas a sus lados. Prueba a hacerlo en tu cuaderno.**



Respuesta abierta.

4 **Calca en tu cuaderno el pentágono azul del ejercicio anterior y, procediendo de la misma manera, dibuja, con color negro, un pentágono regular de 3 cm de lado.**

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el pentágono negro y el azul?

b) ¿Y la razón de semejanza entre el azul y el negro?

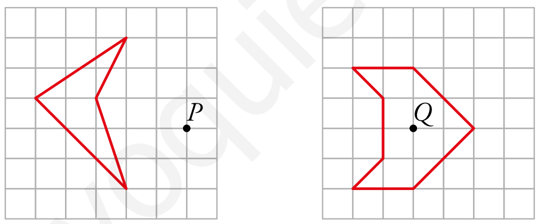
c) Expresa las razones de semejanza anteriores mediante porcentajes.

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $1{,}5$ y $0{,}\widehat{6}$

5 **Copia por separado estas figuras en tu cuaderno.**

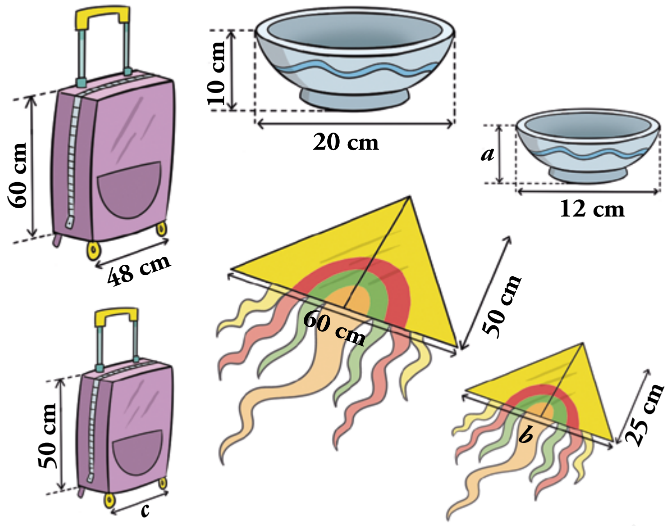


a) Amplía al doble la primera proyectándola desde el punto exterior *P*.

b) Amplía al triple la segunda proyectándola desde el punto interior *Q*.

Respuesta abierta.

6 **Suponiendo que en cada caso se trata de dos figuras semejantes, calcula la razón de semejanza entre la pequeña y la grande, halla las longitudes que faltan.**



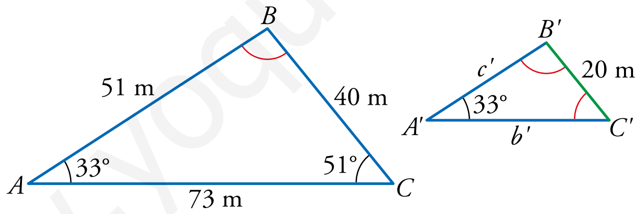
Cuenco: $r = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \rightarrow a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ cm

Cometa: $r = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \rightarrow b = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$ cm

Maleta: $r = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \rightarrow c = 48 \cdot \frac{5}{6} = 40$ cm

Semejanza de triángulos

7 **Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.**

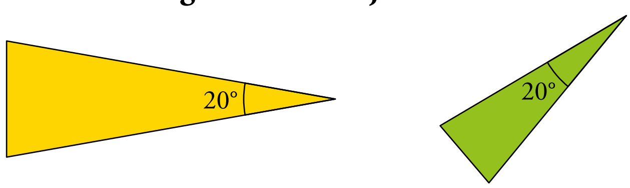


$\hat{B} = 180° - 51° - 33° = 96°$

$\hat{B}' = 96°$ $\qquad$ $b' = \frac{73}{2} = 36{,}5$ m

$\hat{C}' = 51°$ $\qquad$ $c' = \frac{51}{2} = 25{,}5$ m

8 **Explica por qué estos dos triángulos son semejantes.**



Por ser isósceles tiene los otros dos ángulos iguales y miden 80° cada uno.

Por tanto, tienen los mismos ángulos y los podemos colocar en posición de Tales.

Página 251

9 **Los lados de un triángulo miden 7,5 cm, 18 cm y 19,5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 5 cm.**

a) ¿Cuál es la razón de semejanza al pasar del primero al segundo?

b) ¿Cuánto medirán los otros dos lados del segundo triángulo?

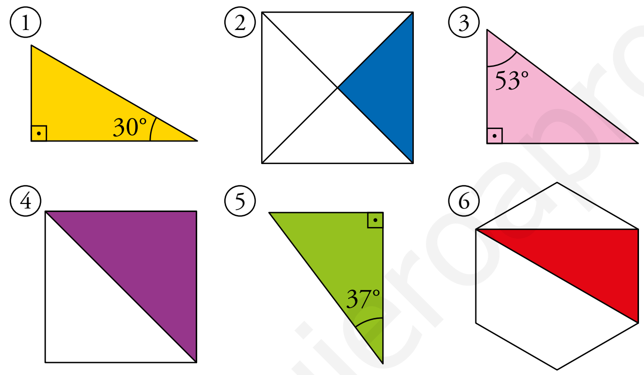
c) Sabiendo que el primer triángulo es rectángulo, ¿podemos asegurar que el segundo también lo será? Compruébalo aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos.

a) $r = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$

b) $18 \cdot \frac{2}{3} = 12$ cm y $19,5 \cdot \frac{2}{3} = 13$ cm

c) El segundo será rectángulo. Lo comprobamos: $5^2 + 12^2 = 13^2$

10 **Entre los siguientes triángulos rectángulos hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente los ángulos que faltan.**



Son semejantes:

1 y 6	2 y 4	3 y 5
(90°, 60°, 30°)	(90°, 45°, 45°)	(90°, 53°, 37°)

11 **¿Verdadero o falso?**

a) Si la razón de semejanza entre dos triángulos, T_1 y T_2, es 2/3, el mayor es T_1.

b) Dos triángulos con dos ángulos iguales son semejantes.

c) Dos triángulos con dos lados iguales son semejantes.

d) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.

e) La altura sobre la hipotenusa divide a un triángulo rectángulo en dos triángulos semejantes.

a) Falso. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$ el mayor es T_2.

b) Verdadero.

c) Falso. Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.

d) Verdadero.

e) Verdadero.

Aplicaciones de la semejanza

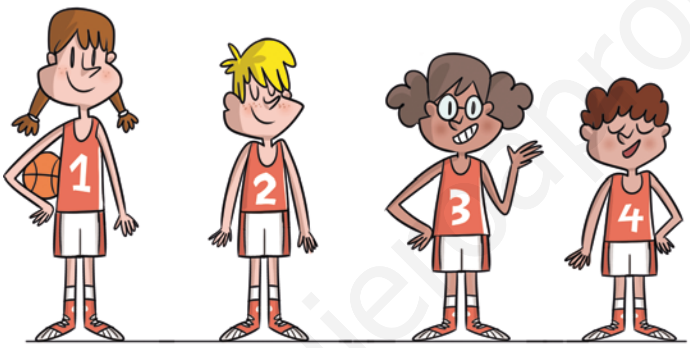
12 **La altura de la puerta de la casa mide 2 m. ¿Cuál es la altura de la casa? ¿Y la del árbol más pequeño?**

$\dfrac{1\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \dfrac{2{,}5\text{ cm}}{a} \rightarrow a = 5\text{ m}$

$\dfrac{1\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \dfrac{1{,}7\text{ cm}}{b} \rightarrow b = 3{,}4\text{ m}$

La casa tiene 5 metros de altura, y el árbol pequeño, 3,4 m.

13 **Si el más alto de estos jugadores mide 1,80 m, ¿cuánto miden los demás?**



$\dfrac{4{,}4\text{ cm}}{1{,}8\text{ m}} = \dfrac{4\text{ cm}}{a} \rightarrow a = 1{,}64\text{ m}$

$\dfrac{4{,}4\text{ cm}}{1{,}8\text{ m}} = \dfrac{3{,}8\text{ cm}}{b} \rightarrow b = 1{,}55\text{ m}$

$\dfrac{4{,}4\text{ cm}}{1{,}8\text{ m}} = \dfrac{3{,}5\text{ cm}}{c} \rightarrow c = 1{,}43\text{ m}$

Los jugadores miden, respectivamente, 1,80 m; 1,64 m; 1,55 m y 1,43 m.

14 **Un rectángulo tiene unas dimensiones de 10 cm por 15 cm. El lado menor de otro rectángulo semejante a él mide 12 cm. Calcula:**

a) La razón de semejanza para pasar del primer al segundo rectángulo.

b) El lado mayor del segundo.

c) Las áreas de ambos rectángulos.

a) Razón de semejanza = $\dfrac{12}{10} = 1{,}2$

b) $15 \cdot 1{,}2 = 18$ cm

c) El área del primero es 150 cm^2, y la del segundo, 216 cm^2.

15 **Para determinar que la altura de un eucalipto es de 11 m, Carlos ha medido la sombra de este (9,6 m) y la suya propia (1,44 m), ambas proyectadas por el sol a la misma hora. ¿Cuánto mide Carlos?**

$\frac{11}{9,6} = \frac{x}{1,44} \rightarrow x = 1,65$. Carlos mide 1,65 m.

16 **En la orilla del río Sena (París) hay una réplica a escala 1:4 de la Estatua de la Libertad, cuya altura es 11,5 m.**

Halla la altura de la estatua de Nueva York.

En Cenicero, un pueblo riojano, hay otra réplica de la Estatua de la Libertad de 1,2 m de altura. ¿Cuál es la escala de esta con respecto a la de Nueva York?

La estatua de Nueva York mide $11,5 \cdot 4 = 46$ m.

La escala entre la estatua de Cenicero y la de Nueva York es $\frac{1,2}{46} = \frac{3}{115}$; es decir, 3:115.

17 **Sobre la pantalla del sonar de un submarino se ve que un objeto se acerca a 1 cm por minuto. Si la imagen en la pantalla tiene una escala de 1:1 000 000, ¿a cuántos kilómetros por hora se mueve el objeto?**

1 cm por minuto son, en la realidad, 1 000 000 cm por minuto, o lo que es lo mismo, 10 km por minuto, que son $10 \cdot 60 = 600$ km por hora.

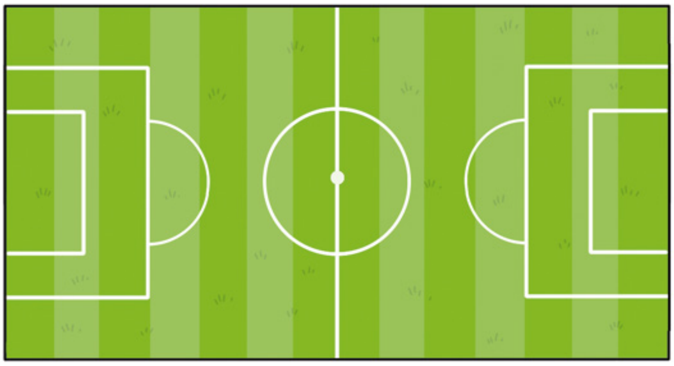
Página 252

Resuelve problemas

18 **Una pareja que va a comprar una casa consulta un callejero a escala 1:30 000. Miden sobre el plano la distancia de esta al metro y resulta ser de 2,3 cm. ¿Cuál es la distancia real?**

Distancia real: $30\,000 \cdot 2,3 = 69\,000$ cm $= 690$ m

19 **Averigua cuáles son las dimensiones reales de este campo de fútbol. Calcula la superficie del área de penalti (área grande) y la del círculo central.**



1:1 400

DIMENSIONES REALES DEL CAMPO

Largo del campo: $7{,}5 \cdot 1\,400 = 10\,500$ cm $= 105$ m

Ancho del campo: $4{,}7 \cdot 1\,400 = 6\,580$ cm $= 65{,}8$ m

SUPERFICIE ÁREA DE PENALTI

Área de penalti en la maqueta: $1 \cdot 2{,}6 = 2{,}6$ cm^2

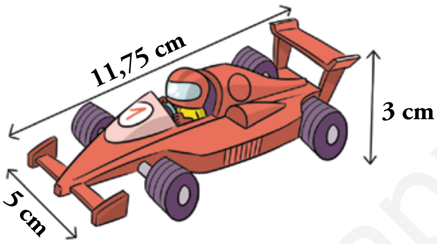
Área de penalti real: $2{,}6 \cdot 1\,400^2 = 5\,096\,000$ cm$^2 = 509{,}6$ m^2

SUPERFICIE ÁREA DEL CÍRCULO CENTRAL

Área del círculo central de la maqueta: $3{,}14 \cdot 0{,}65^2 = 1{,}32665$ cm^2

Área del círculo central real: $1{,}32665 \cdot 1\,400^2 = 2\,600\,234$ cm$^2 \approx 260$ m^2

20 **El coche teledirigido de Pablo es una reproducción a escala 1:40 de los de «Fórmula 1». Observa sobre el dibujo las dimensiones del coche de juguete y halla las dimensiones del coche real.**

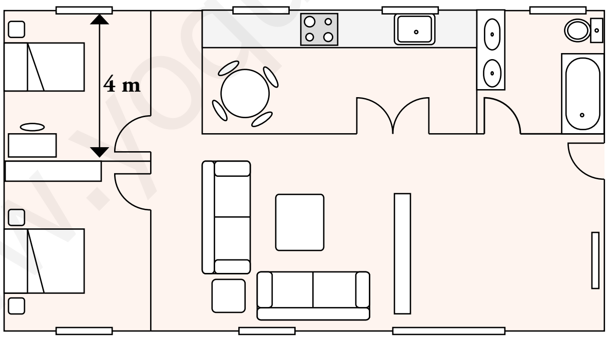


Largo: $11{,}75 \cdot 40 = 470$ cm $= 4{,}7$ m

Ancho: $5 \cdot 40 = 200$ cm $= 2$ m

Alto: $3 \cdot 40 = 120$ cm $= 1{,}2$ m

21 **Observa el plano del piso en el que vive Adela.**



a) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la vivienda sabiendo que la habitación de Adela, desde la ventana a la pared de enfrente, mide 4 metros?

b) Los padres de Adela han comprado una mesa de billar para el salón. Sus dimensiones son 2,5 m × 1,5 m. ¿Hay hueco para ponerla?

a) Escala: $\dfrac{\text{plano}}{\text{realidad}} = \dfrac{2\text{ cm}}{4\text{ m}} = \dfrac{2\text{ cm}}{400\text{ cm}} = \dfrac{1}{200}$

Medidas del piso en el plano:

Largo: 4,3 cm Ancho: 8 cm Superficie: $4{,}3 \cdot 8 = 34{,}4$ cm^2

Superficie real del piso:

$$34{,}4 \text{ cm}^2 \times 200^2 = 137{,}60 \text{ m}^2$$

La vivienda tiene 137,60 m^2.

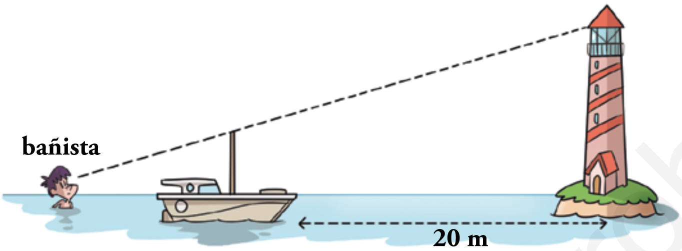
b) Como 1 m = 100 cm, la mesa tiene unas dimensiones de 250 cm × 150 cm.

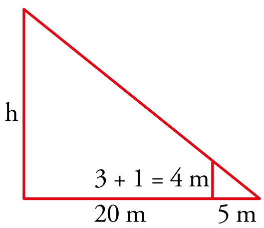
$\frac{250}{200}$ = 1,25 cm en el plano

$\frac{150}{200}$ = 0,75 cm en el plano

La mesa de billar se dibuja en el plano como un rectángulo de 1,25 cm × 0,75 cm. Vemos que cabe perfectamente en el salón al lado de la puerta de entrada.

22 **El bañista se encuentra a 5 m del barco. La borda del barco está a 1 m sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 m de la borda. El bañista ve alineados el extremo del mástil y el foco del faro. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra el foco del faro?**

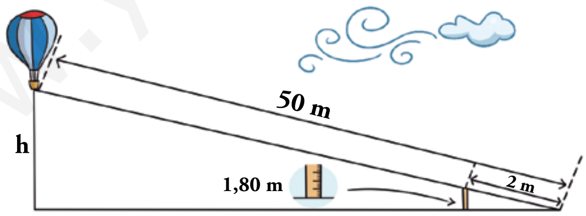




$$\frac{h}{25} = \frac{4}{5} \rightarrow h = \frac{4 \cdot 25}{5} = 20 \text{ m}$$

El foco del faro se encuentra a 20 m sobre el nivel del mar.

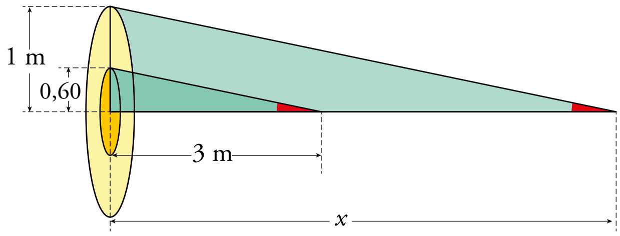
23 **Un globo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 m, se desplaza lateralmente empujado por el viento. Para calcular su altura en cada momento, se ha atado en la cuerda, a 2 m del punto de amarre, una cinta métrica que se desenrolla verticalmente hasta tocar el suelo. ¿A qué altura se encuentra el globo cuando la cinta se ha desplegado 1,80 m?**



$$\frac{1,80}{h} = \frac{2}{50} \rightarrow h = \frac{1,80 \cdot 50}{2} = 45 \text{ m}$$

El globo se encuentra a 45 metros del suelo.

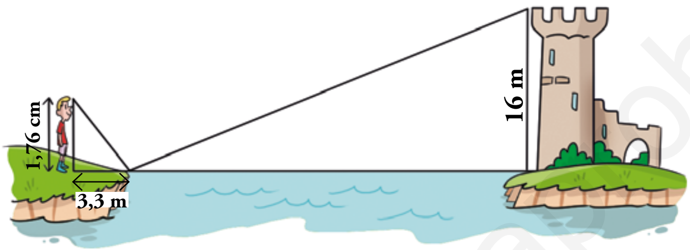
24 **Una linterna, a 3 m de una pared, ilumina sobre ella un círculo de 60 cm de radio. ¿A qué distancia de la pared se debe colocar para que el círculo iluminado tenga un metro de radio?**

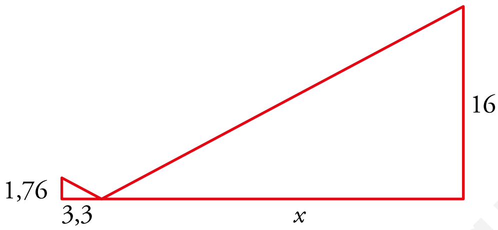


$$\frac{3}{0,6} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 5$$

Se debe colocar a 5 metros de distancia.

25 **Marcos ve las almenas de la torre reflejadas en el agua. Halla su distancia a la base de la torre a partir de los datos del dibujo.**





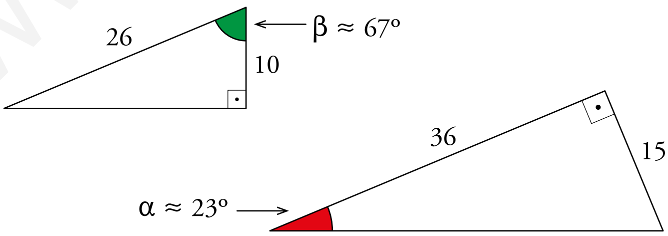
$$\frac{1,76}{16} = \frac{3,3}{x} \rightarrow x = \frac{3,3 \cdot 16}{1,76} = 30 \text{ m}$$

La distancia entre Marcos y la base de la torre es de 33,3 m.

Página 253

Interpreta, describe, exprésate

26 **Explica y justifica cada una de las respuestas que se presentan a la siguiente pregunta: ¿Son semejantes estos dos triángulos?**

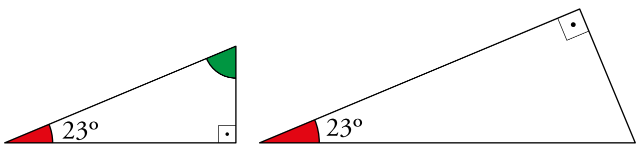


A **Llamando x al cateto desconocido en el triángulo menor:**

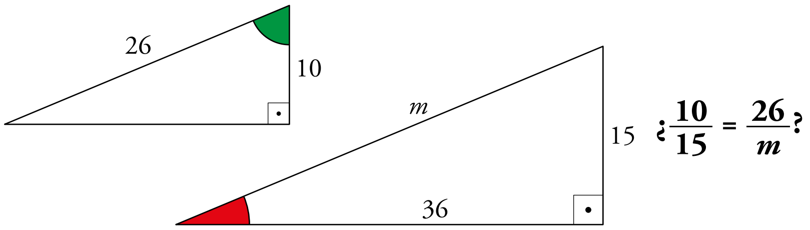
$$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \leftrightarrow ¿\frac{10}{24} = \frac{15}{36}?$$

$10 \cdot 36 = 360 = 24 \cdot 15 \rightarrow$ Son semejantes.

B **$90° - \beta = 90° - 67° = 23° \rightarrow$ Son semejantes.**



Ⓒ



$¿\dfrac{10}{15} = \dfrac{26}{m}?$

$m = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39$

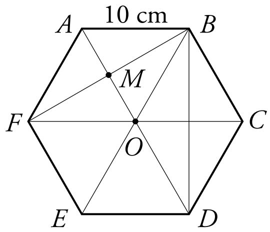
10 · 39 = 26 · 15 = 390 → Son semejantes.

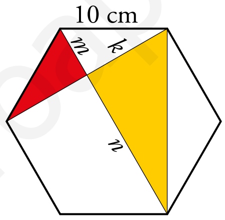
Ⓐ Se ha visto que son semejantes teniendo en cuenta que son triángulos rectángulos y que tienen lados proporcionales. Se ha comparado la proporción del cateto pequeño respecto al cateto grande.

Ⓑ Se ha visto que son semejantes teniendo en cuenta que son triángulos rectángulos y que tienen un ángulo igual, además del ángulo rectángulo. Por tanto, el tercer ángulo será igual forzosamente y son semejantes.

Ⓒ Se ha visto que son semejantes teniendo en cuenta que son triángulos rectángulos y que tienen lados proporcionales. Se ha comparado la proporción entre sus catetos pequeños respecto a la proporción entre sus hipotenusas.

27 **Observa dos construcciones sobre un hexágono regular de 10 cm de lado y explica:**





a) Por qué $\widehat{AFB} = 30°$; $\widehat{FBD} = 60°$; $\widehat{AMF} = 90°$.

b) Por qué los triángulos coloreados son semejantes.

c) Por qué $\overline{AD} = 20$ cm; $m = 5$ cm; $n = 15$ cm.

d) Por qué $k^2 = 5 \cdot 15 \rightarrow k = \sqrt{75}$

a) Al ser un hexágono regular, el triángulo $\widehat{BFD}$ es equilátero. → Sus ángulos son iguales y suman 180°. → $\widehat{FBD} = 60°$

$\overline{FB}$ parte al triángulo equilátero $\widehat{AFO}$ en dos triángulos iguales, y los ángulos de $\widehat{AFO}$ son de 60°. → $\widehat{AFB} = 30°$

$\overline{AO}$ corta perpendicularmente a $\overline{BF}$. → $\widehat{AMF} = 90°$

b) El triángulo rojo es igual a $\widehat{AMB}$ y, por el teorema de la altura, son semejantes.

c) El hexágono se divide en 3 triángulos iguales, todos ellos equiláteros de lado 10 cm.

$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = 10 + 10 = 20$ cm

$m = \dfrac{\overline{AO}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm

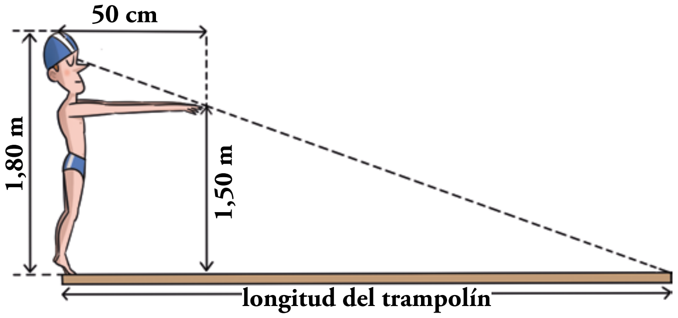
$n = \overline{OD} + \overline{OM} = 10 + 5 = 15$ cm

d) Si aplicamos el teorema de Pitágoras en $\widehat{AMB}$:

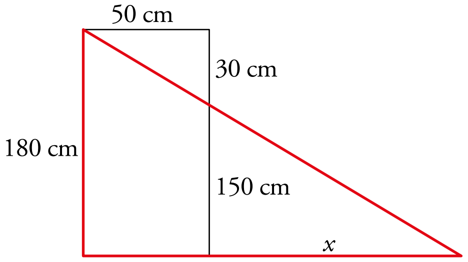
$k^2 + m^2 = 10^2 \rightarrow k^2 = 100 - 25 = 75 = 5 \cdot 15 \rightarrow k = \sqrt{75}$

Problemas «+»

28 **Calcula la longitud del trampolín teniendo en cuenta las medidas.**



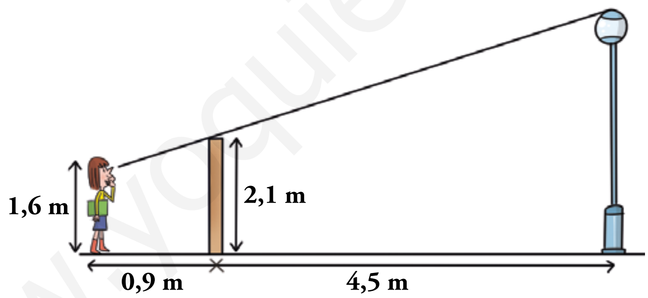
Llamando x a la distancia desde la proyección de las manos sobre el trampolín hasta el final de este, tenemos:

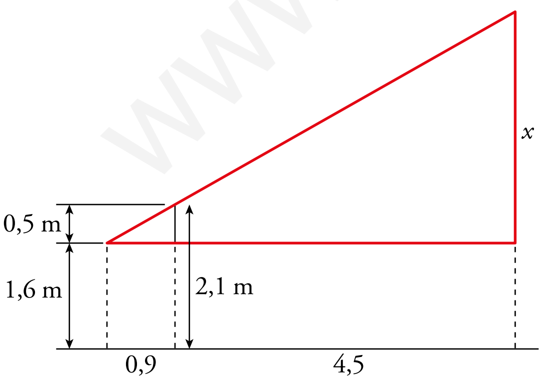


$$\frac{50}{x} = \frac{30}{150} \rightarrow x = 250 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ m}$$

Por tanto, el trampolín mide 2,5 + 0,5 = 3 metros.

29 **¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la farola, sabiendo que Paula lo ve alineado con el borde de la valla?**

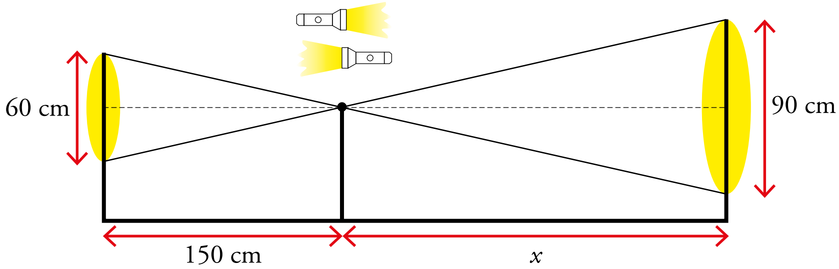




$$\frac{x}{0{,}5} = \frac{5{,}4}{0{,}9} \rightarrow x = 3$$

El extremo superior de la farola se encuentra a 3 + 1,6 = 4,6 m.

30 **Una linterna, a 1,5 m de una pared, ilumina sobre ella un círculo de 60 cm de diámetro. Y si se le da la vuelta, enfocando la pared opuesta de la habitación, el círculo iluminado tiene un diámetro de 90 cm. ¿Qué distancia separa las dos paredes?**



$\frac{150}{60} = \frac{x}{90} \to x = 225\ \text{cm}$

$225 + 150 = 375\ \text{cm} = 3,75\ \text{m}$

La distancia que separa las dos paredes es de 3,75 metros.

31 **El Titanic fue un barco británico que se hundió en 1912 durante su viaje inaugural. James Cameron construyó, para rodar la película *Titanic*, una réplica de unos 15 m de largo. El Titanic medía unos 270 m de largo, 30 m de ancho y 53 m de alto. Además, pesaba unas 46 000 toneladas.**

a) ¿A qué escala construyó James Cameron el barco?

b) ¿Cuánto medían el ancho y alto de la maqueta?

c) Si la maqueta se hubiera construido con los mismos materiales que el barco, ¿cuánto pesaría?

a) $\frac{15}{270} = \frac{1}{18} \to$ Lo construyó a escala 1:18.

b) Ancho de la maqueta $= \frac{30}{18} \approx 1,67$ m

Alto de la maqueta $= \frac{53}{18} \approx 2,94$ m

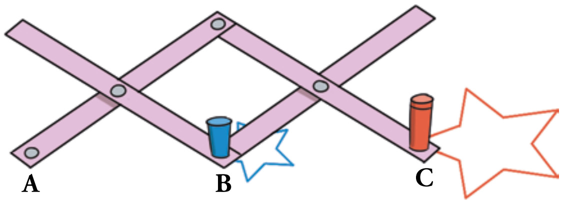
c) $46\,000 \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^3 = 7,8875$ toneladas $= 7\,887,5$ kg

Página 254

INVESTIGA

Ampliadoras con cuatro palos

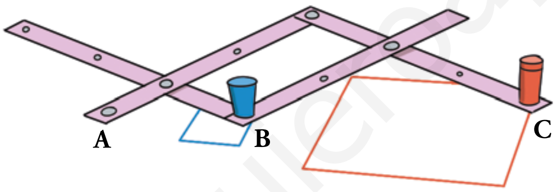
Con cuatro varillas (del material que quieras) convenientemente taladradas y unidas como se indica en la figura, se consigue un aparato con el que se pueden ampliar las figuras al doble de su tamaño.



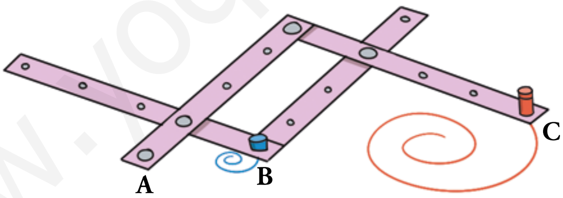
- **En A se sujeta a la mesa.**
- **En B hay un punzón que recorre la figura que se quiere reproducir.**
- **En C hay un lápiz que reproduce la figura al doble de su tamaño.**

Si hacemos en las varillas más taladros, se pueden conseguir ampliaciones diversas; es decir, semejanzas con razones distintas de 2. Por ejemplo:

- **Esta disposición sirve para ampliar el tamaño por 3.**

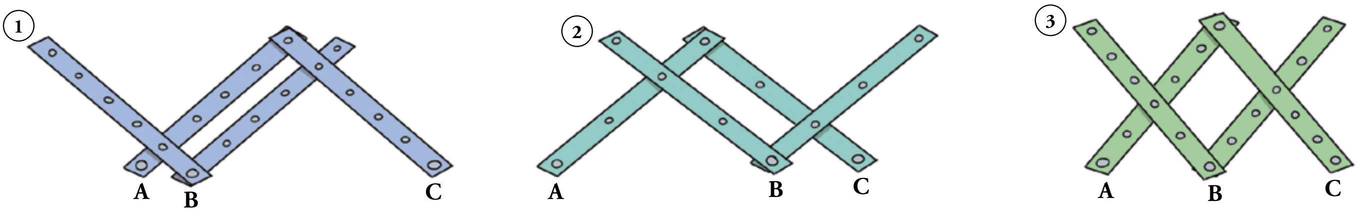


- **Y con esta otra hacemos una figura 4 veces mayor.**



Si en estos aparatos intercambiamos el punzón y el lápiz y, además, se coloca a la derecha la figura original, la copia quedará reducida. En este caso, si el aparato ampliaba al doble de tamaño, ahora reduce a la mitad; si era el triple, a un tercio…

A raíz de lo que hemos visto, ¿sabrías decir qué ampliaciones dan los siguientes aparatos?

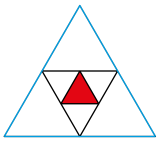


El aparato (1) amplía el tamaño multiplicando por 5. El aparato (2) amplía el tamaño multiplicando por 1,5. El aparato (3) multiplica los tamaños por 2,5.

Página 255

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

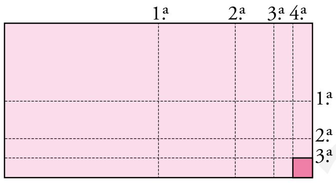
- **¿Qué fracción del triángulo grande se ha coloreado en rojo? ¿Cuál es la razón de semejanza entre estos dos triángulos?**



El triángulo rojo ocupa $\frac{1}{16}$ del triángulo grande.

La razón de semejanza entre ambos es $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

- **Una hoja de papel de regalo, con forma de rectángulo, tiene una superficie de 32 dm^2. Si la pliego por la mitad cuatro veces a lo largo y luego tres veces a lo ancho, obtengo un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del papel?**

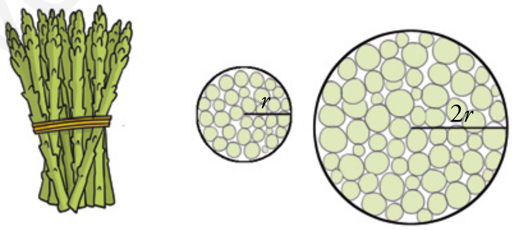


Llamando x al lado del cuadrado final, en centímetros, sus dimensiones son $16x$ y $8x$. Entonces:

$$16x \cdot 8x = 32 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow 16x = 8; \;\; 8x = 4$$

Por tanto, la hoja de papel mide 8 cm por 4 cm.

- **Una vendedora de espárragos cree duplicar la cantidad de cada manojo duplicando la longitud de la cuerda con la que los envuelve, pero se equivoca. Si la cuerda se duplica, ¿qué pasa con la cantidad de espárragos que contiene?**



La razón de las circunferencias es $\frac{1}{2}$ y, la de las áreas de los círculos, $\frac{1}{4}$.

Por tanto, doblando la longitud de la cuerda, el número de espárragos se multiplicará por 4.

- **Una alfombra de 2 m × 3 m está centrada en el suelo de una habitación rectangular y ocupa la cuarta parte del piso. Los bordes más largos de la alfombra quedan a un metro de la pared. ¿A qué distancia de la pared quedan los bordes más cortos?**

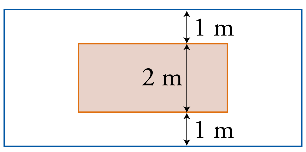
La superficie de la alfombra es de $2 \cdot 3 = 6$ m^2.

La superficie de la habitación es, pues, de 24 m^2.

La habitación tiene 4 m de ancho. Por tanto, su longitud es $24 : 4 = 6$ m.

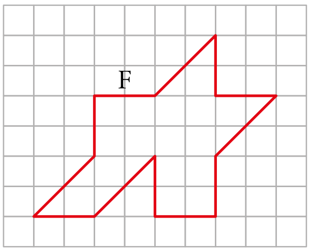
Largo de la habitación – largo de la alfombra = $6 - 3 = 3$ m

Los bordes están a 1,5 m de las paredes.



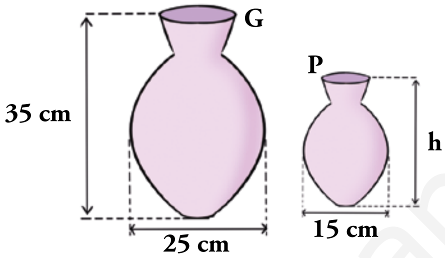
AUTOEVALUACIÓN

1 Dibuja dos figuras, A y B, semejantes a F, de forma que la razón de semejanza entre A y F sea 2, y entre B y F, 1/2.



Respuesta abierta.

2 Estos dos jarrones de cristal, G y P, son semejantes.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre P y G?

b) ¿Cuál es la altura, h, de P?

c) Si P, vacío, pesa 400 g, ¿en cuánto estimas el peso de G?

d) Si G tiene una capacidad de 16 litros, ¿cuántos litros caben en P?

a) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$

La razón de semejanza entre P y G es 0,6.

b) h = 35 · 0,6 = 21 cm

La altura es de 21 cm.

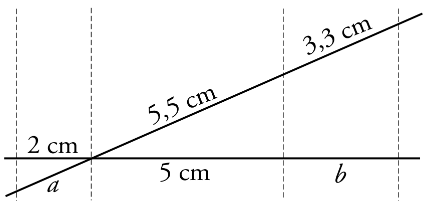
c) 400 : 0,6 = 666,7 g

El peso de G es de 666,7 g, aproximadamente.

d) 16 · 0,6 = 9,6

En P caben 9,6 litros.

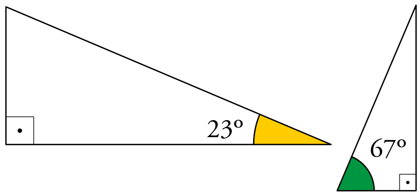
3 Observa y calcula *a* y *b*.



$\frac{a}{5,5} = \frac{2}{5} \rightarrow a = 2,2 \text{ cm}$

$\frac{b}{5} = \frac{3,3}{5,5} \rightarrow b = 3 \text{ cm}$

4 **Explica por qué son semejantes estos dos triángulos.**

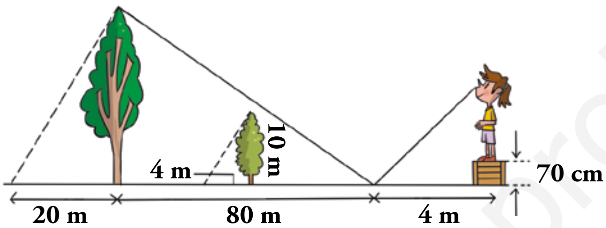


Los ángulos de un triángulo suman 180°, y como son rectángulos ambos tienen un lado de 90°: $90 + 23 + x = 180 \rightarrow x = 67$

El ángulo desconocido del primer triángulo mide 67°. Así, en el segundo triángulo rectángulo, su ángulo desconocido será de 23°.

Ambos triángulos tienen los tres ángulos iguales y, por tanto, son semejantes.

5 **Manuela se ha subido a una caja desde donde ve reflejada en un charco la copa de un árbol.**



Teniendo en cuenta las medidas, calcula:

a) La altura del árbol.

b) La altura de Manuela.

a) Calculamos la altura del árbol por semejanza de los triángulos *ABC* y *A'B'C'*:

$$\frac{h}{20} = \frac{10}{4} \rightarrow 4h = 200 \rightarrow h = 50$$

El árbol mide 50 metros de altura.

b) Como Manuela ve el árbol reflejado, los dos ángulos α son iguales y, por tanto, los triángulos *CBD* y *FED* son semejantes. Por tanto:

$$\frac{80}{4} = \frac{50}{x + 0{,}7} \rightarrow 80 \cdot (x + 0{,}7) = 200 \rightarrow x = 1{,}80$$

Manuela mide 1,80 metros de altura.