1. (2 p) Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$:
   a) Estudia su continuidad y derivabilidad.
   b) ¿Podemos afirmar que existe un extremo relativo en el intervalo $[0, 4]$ sin necesidad de calcularlo? ¿Puedo aplicar algún teorema para demostrarlo?

SOLUCIÓN:

2. (2 p) Dadas $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ para x > 0, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a cada curva en el punto P donde se cortan ambas gráficas, y demuestra que son perpendiculares.

SOLUCIÓN:

3. (2 p) Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, $se\ pide$::

   a) Justificar, usando el teorema adecuado que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas toman el mismo valor.
   b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) con pendiente mínima.

SOLUCIÓN:

4. (1,5 p) Determina los valores de a para que f(x) sea continua y estudia si para dicho valor es derivable:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & si\ x \leq 2 \\ \ln(x-1) & si\ x > 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

5. (1,25 p) Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-5}\right)^x =$

$b)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(cos3x)}{\ln(cos2x)} =$

$c)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x} =$

6. (1,25 p) La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$ donde t>0 es el tiempo de funcionamiento.
   a) Calcula hacía que valor tiende la potencia generada por la pila se deja en funcionamiento indefinidamente.
   b) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

SOLUCIÓN:

Soluciones

① $f(x) = 2x|4-x| = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si } 4-x \geq 0 \\ 2x(x-4) & \text{si } 4-x < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 8x-2x^2 & \text{si } x \leq 4 \\ 2x^2-8x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) Continuidad y derivabilidad:

$\underline{8x-2x^2 \quad , \quad 2x^2-8x}$

Continua 4 Continua
(polinómica) (polinómica)

$\boxed{\text{En } x=4}$

$\lim_{x\to 4^-} 8x-2x^2 = 0 = \lim_{x\to 4^+} 2x^2-8x = f(4)$

Es continua $\forall \mathbb{R}$.

Derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} 8-4x & \text{si } x \leq 4 \\ 4x-8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

$\underline{8-4x \quad , \quad 4x-8}$

Derivable 4 Derivable
(pol.) (pol.

$\boxed{\text{En } x=4}$

$f'(4^-) = -8 \neq f'(4^+) = 8$

Es derivable $\forall \mathbb{R} - \{4\}$

b) $f(x)$ es continua en $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$, $f(0)=f(4)=0$, mediante el Th. de Rolle podemos afirmar que existe al menos un $c \in (0,4)$ tal que $f'(c)=0$

2) $f(x) = \frac{2}{x}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x^2-3}$

Determinamos el punto P.

$$\frac{2}{x} = \sqrt{x^2-3} \rightarrow 2 = x\sqrt{x^2-3}$$
$$4 = x^2(x^2-3)$$
$$4 = x^4-3x^2$$
$$\boxed{x^4-3x^2-4=0}$$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm2}$ solo vale la solución positiva $(x>0)$

El punto $P(2,1)$:

- Recta tangente a $f(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

$$f'(2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)}$$

- Recta tangente a $g(x) \rightarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

$$g'(2) = 2$$

$$\boxed{y-1 = 2(x-2)}$$

Ambas rectas son perpendiculares dado que $f'(2) = -\frac{1}{g'(2)}$ $\rightarrow$ $\boxed{-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}}$

③ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ $\quad g(x) = 6x$

a) Si creamos la función $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ que es continua $\forall \mathbb{R}$ debemos buscar un punto c tal que $h(c) = f(c) - g(c) = 0$, por tanto vemos si cumple las hipótesis de Bolzano en el intervalo $[1, 10]$

$h(1) = -3 < 0$

$h(10) = 1239 > 0$ $\rightarrow$ $\exists\, c \in (1, 10)$ tal que $\boxed{h(c) = 0}$ y por tanto f y g toman el mismo valor.

b) Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

$m = f'(x) = 3x^2 + 6x \longrightarrow$ Esta es la función a minimizar

$m'(x) = 6x + 6 \rightarrow m' = 0 \rightarrow \boxed{x = -1}$

comprobamos que es un mínimo. $m''(x) = 6 > 0$ En $x = -1$ tenemos un mínimo

Punto tangencia: $(-1, 1)$

$m = f'(-1) = -3$ $\Longrightarrow \boxed{y - 1 = -3(x+1)}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+a-1 & x \leq 2 \\ \ln(x-1) & x > 2 \end{cases}$

Para que sea continua: $\underset{\text{continua (pol)}}{x^2+ax+a-1} \quad \underset{2}{,} \quad \underset{\text{continua, dom} = (1,\infty)}{\ln(x-1)}$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2+ax+a-1 = \lim_{x \to 2^+} \ln(x-1)$$

$$4+2a+a-1 = 0$$

$$3a = -3$$

$$\boxed{a = -1}$$

$f(x)$ es continua si $a = -1$

Comprobamos si es derivable:

$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & x \leq 2 \\ \ln(x-1) & x > 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & x > 2 \end{cases}$

A izquierda y derecha del 2 existe la derivada

En $x = 2$: $f'(2^-) = 3 \neq f'(2^+) = 1$

No es derivable en este punto

Derivable $\forall \mathbb{R} - \{2\}$

5

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-5}\right)^x \xrightarrow{1^\infty} = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{5}{x^2-5}} = e^0 = \boxed{1}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} \overset{\to 0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{sen} 3x\cdot 3}{\cos 3x}}{\frac{-\operatorname{sen} 2x\cdot 2}{\cos 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} 3x\cdot\cos 2x\cdot 3}{-\operatorname{sen} 2x\cdot\cos 3x\cdot 2} \overset{\to 0/0}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3(\cos 3x\cdot\cos 2x\cdot 3 - \operatorname{sen} 3x\,\operatorname{sen} 2x\cdot 2)}{2(\cos 2x\,\cos 3x\cdot 2 - \operatorname{sen} 2x\,\operatorname{sen} 3x\cdot 3)} = \boxed{\frac{9}{4}}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x} \overset{\to 0/0}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{4}+x-\cancel{4}+x}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(6) $P(t) = 25t\, e^{-t^2/4}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} 25t\, e^{-t^2/4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{25t}{e^{t^2/4}} = 0$

tiende a agotarse

b) $P'(t) = 25 e^{-t^2/4} - 25t \cdot \dfrac{2t}{4} e^{-t^2/4}$

$= 25 e^{-t^2/4} \left(1 - \dfrac{1}{2}t^2\right)$

$P'(t) = 0 \rightarrow 1 - \dfrac{t^2}{2} = 0 \qquad \boxed{t = \sqrt{2}\ u}$

$P(t) = 25 \cdot \sqrt{2}\, e^{-1/2} = \boxed{25\sqrt{\dfrac{2}{e}}}$

Comprobamos que $\sqrt{2}$ es un máximo:

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline \nearrow & \sqrt{2} & \searrow \end{array}$$

$x = \sqrt{2}$ es un máximo