Ejercicios de VECTORES

1. Dados los puntos A(-1, 2, -3) y B(2, 0, -1) del espacio, se pide:
   a) Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.
   b) Determina el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.
   c) Obtén el punto medio entre A y B.
   d) Obtén un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$

2. Obtener las coordenadas del extremo del vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 5, 1)$ sabiendo que esta aplicado en el punto A(1, -2, 3).

3. Obtener las coordenadas del punto de aplicación del vector $\overrightarrow{AB} = (2, 5, -3)$ sabiendo que tiene su extremo en el punto B(-1,2, 6).

4. Averigua las coordenadas del punto B, sabiendo que M(3, 1, 5) es el punto medio del segmento AB y que A(4, -3, 2).

5. Dados los vectores $\vec{u} = (3,-2, 3)$ y $\vec{v} = (1,1, -2)$, calcula analítica:
   a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{u}-\vec{v}$ c) $2\vec{u}$ d) $-2\vec{v}$ e) $-2\vec{u}+3\vec{v}$

6. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3, 4)$, determina:
   a) El módulo de los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$
   b) El producto escalar de los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$
   c) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$
   d) Un vector ortogonal a $\vec{u}$
   e) Un vector ortonormal a $\vec{u}$

7. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, k, -1)\ y\ \vec{v} = (-1, 2, 3)$. Determina el valor de k para que los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ sean ortogonales.

8. Dados los siguientes vectores: $\vec{a} = -2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}$; $\vec{b} = 4\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+3\hat{k}$ y $\vec{c} = -\hat{\jmath}+4\hat{k}$. Determinar:
   a. $|\vec{a}-\vec{b}|$
   b. $\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$
   c. $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot 3\vec{c}$
   d. $-(4\vec{b}-3\vec{c})\times 2\vec{b}$
   e. El ángulo que forma $\vec{a}$ el vector con cada uno de los ejes coordenados.
   f. El ángulo entre los vectores: $3\vec{b}$ y $-2\vec{c}$

9. Calcula los cuatro puntos que dividen al segmento MN en cinco parte iguales, siendo M =(-4,9,-7) y N =(1,-1,8)

10. Determinar los valores del parámetro **a**, para los cuales forman base de $\mathbb{R}^3$ los vectores $(a, 1, -2)$, (1,a,2) y (2a,1,0)
    Sol. Para todo valor de a distinto de $1/2$ y de -1

11. En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores siguientes: $u = (1,2,-1)$, v = (3,-2,0) y w = (-7,10,-2)
    Prueba que son linealmente dependientes y encuentra la relación de dependencia.
    Sol. Basta comprobar que el determinante es nulo $2(1,2,-1)-3(3,-2,0)-(-7,10,-2)=(0,0,0)$

12. Sean los siguientes vectores de R^3 : $u=(1,\ 2,\ -1), \mathrm{v}=(1,-1,\ 1)$ y $\mathrm{w}=(2, 5\mathrm{a}, -3\mathrm{a})$

Determina el valor numérico del parámetro a para que sean linealmente dependientes y encuentra una relación de dependencia.

Sol. a = 2 $\quad 4(1,2,-1)-2(1,-1,1)+(2,10,-6)=(0,0,0)$

13. Dados los vectores $u=(1,2,3)$ y $\mathrm{v}=(1,-1,1)$, se pide:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) Escribe un vector w tal que u, v y w sean linealmente independientes.

c) Encuentra un vector t, tal que u, v y t sean linealmente dependientes.

Sol.

a) Son L.I. porque sus coordenadas no son proporcionales

b) Puede ser, por ejemplo, $\mathrm{w}=(0,0,1)$. Aplíquese primero el método de Gauss

c) Basta tomar una combinación lineal de los vectores dados.

14. Prueba que los vectores $a=(1,\ 1,-1), \mathrm{b}=(1,-1,1)$ y $\mathrm{c}=(1,1,1)$ son una base de R^3

Halla las componentes del vector $x=(-7,\ 9,\ 15)$ en esta base.

Sol. Como son tres vectores, basta probar que son l.i. (determinante ≠0) $\quad \mathrm{x}=-11.\mathrm{a}-8.\mathrm{b}+12\mathrm{c}$

15. Determina la expresión general de los vectores de R^3 que son combinación lineal de los vectores $(1,2,-1)$ y $((4,\ 1,\ 1)$

Sol. $(\alpha+4\beta,\ 2\alpha+\beta,\ -\alpha+\beta)$

16. Sean u y v tales que $\|\mathrm{u}\|=2,\ \|\mathrm{v}\|=1$ y que forman un ángulo de 45º. Calcula λ tal que $\mathrm{u}+\lambda\mathrm{v}$ sea perpendicular a u

Sol. $\lambda=-2\sqrt{2}$

17. Dados los vectores $\mathrm{v}=(2,5,-1)$ y $\mathrm{u}=(1,0,3)$, halla la proyección ortogonal de v sobre u.

Sol. $\mathrm{x}=\left(\frac{-1}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$

18. *E*l triángulo *ABC* es rectángulo en *A*, siendo *A*(3,0,-1) , *B*(6,-4,5) , *C*(5,3,*z*) **.** Calcúlese el valor de *z* y hállese el área del triángulo.

19. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1,1,0)$, $B(2,-1,0)$ y $C(2,4,0)$.

20. Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos A(1,1, 2) ,B(1,1, 4) y C(3,3,6) , hallar el área del mismo