

# Ecuaciones irracionales

*Ejercicios resueltos*

*Bachillerato 1º*

2023

Las ecuaciones irracionales son aquellas en la que la incógnita aparece bajo signos radicales.

Una de las técnicas para resolver es:

- Aislamos una de las raíces.
- Elevamos ambos lados de la ecuación al orden de nuestra raíz.
- Repetimos las acciones anteriores hasta obtener una ecuación sin raíces y solucionamos
- Debemos comprobar si las soluciones obtenidas son correctas.

---

1. **Resuelve la ecuación irracional  $x - \sqrt{2x - 4} = 6$ .**

*Solución:*

En primer lugar aislamos la raíz en uno de los miembros de la ecuación.

$$x - 6 = \sqrt{2x - 4}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$(x - 6) = (\sqrt{2x - 4})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 2x - 4$$

$$\text{Simplificando se tiene } x^2 - 12x + 36 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 14x + 40 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida.

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2} = \frac{14 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 4 \end{cases}$$

Para comprobar que nuestras soluciones son correctas, debemos sustituir los valores en la ecuación original

$$x = 10 \rightarrow 10 - 6 = 4 = \sqrt{2 \cdot 10 - 4} = \sqrt{16} \rightarrow 4 = 4 \text{ Solución válida}$$

$$x = 4 \rightarrow 4 - 6 = -2 \neq \sqrt{2 \cdot 4 - 4} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow -2 \neq 2 \text{ Solución no válida}$$

2. **Resolver  $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$**

*Solución:*

Aislamos una de las raíces de la ecuación.

$$\sqrt{2x - 1} = 6 - \sqrt{x + 4}$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al orden de nuestra raíz, en este caso al cuadrado.

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (6 - \sqrt{x+4})^2 \rightarrow 2x-1 = 36 + (x+4) - 12\sqrt{x+4}$$

Aislamos de nuevo la raíz de la ecuación:

$$12\sqrt{x+4} = 36 + x + 4 - 2x + 1 \rightarrow 12\sqrt{x+4} = 41 - x$$

Volvemos a elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación

$$(12\sqrt{x+4})^2 = (41-x)^2 \rightarrow 144(x+4) = 1681 + x^2 - 82x$$

$$x^2 - 226x + 1105 = 0 \rightarrow \text{Resolvemos la ecuación de segundo grado} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 225 \end{cases}$$

Para comprobar que nuestras soluciones son correctas, debemos sustituir los valores en la ecuación original

$$x = 5 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} \rightarrow \sqrt{9} + \sqrt{9} = 6 \rightarrow 6 = 6 \text{ Solución válida}$$

$$x = 221 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = 6 \rightarrow \sqrt{441} + \sqrt{225} = 36 \neq 6 \text{ Solución no válida}$$

### 3. Resolver $\sqrt[3]{x^2 - x + 6} - 2 = 0$

*Solución:*

$$\text{Aislamos la raíz en un miembro de la ecuación } \sqrt[3]{x^2 - x + 6} = 2$$

Como tenemos una raíz cúbica y la raíz ya está aislada elevamos al cubo ambos lados de la ecuación.

$$[\sqrt[3]{x^2 - x + 6}]^3 = 2^3 \rightarrow x^2 - x + 6 = 8 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \text{Resolvemos la ecuación de segundo grado} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$x = -1 \rightarrow \sqrt[3]{1^2 - (-1) + 6} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ Solución válida}$$

$$x = 2 \rightarrow \sqrt[3]{2^2 - 2 + 6} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ Solución válida}$$

### 4. Resolver $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x+1}$

*Solución:*

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado}} (\sqrt{x} + 1)^2 = (\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = x + 1$$

Simplificamos y resolvemos:

$$x + 2\sqrt{x} + 1 = x + 1$$

$2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0$  .La única solución:  $\boxed{x = 0}$ .

5. Resolver  $\sqrt{5x+4} = 2x+1$

*Solución:*

$$\sqrt{5x+4} = 2x+1 \rightarrow (\sqrt{5x+4})^2 = (2x+1)^2 \rightarrow 5x+4 = 4x^2+4x+1$$

Resolvemos la ecuación  $4x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-3}{4} \end{cases}$  .Comprobamos

las soluciones

$$x = 1 \rightarrow 3 = \sqrt{5 \cdot 1 + 4} = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ Solución válida}$$

$$x = \frac{-3}{4} \rightarrow \sqrt{5 \cdot \frac{-3}{4} + 4} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{2} = 2 \cdot \frac{-3}{4} + 1 \text{ Solución no válida}$$

6. Resolver  $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x}$

*Solución:*

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x}$$

Elevamos al cuadrado

$$\left[\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right]^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = x \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 0 .$$

Elevamos al cuadrado de nuevo:  $x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

La ecuación obtenida  $x^2 - 1 = 0$  tiene dos soluciones:  $x = 1$  y  $x = -1$  .

Sin embargo, sólo la positiva es solución de la ecuación irracional.

7. Resuelve:  $\sqrt{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}} = 2$

*Solución:*

Elevamos al cuadrado

$$\left[\sqrt{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}\right]^2 = [2]^2 \Rightarrow \sqrt{x+16}-\sqrt{x} = 4$$

Aislamos y elevamos al cuadrado otra vez

$$\sqrt{x+16} = \sqrt{x} + 4 \Rightarrow (\sqrt{x+16})^2 = (\sqrt{x} + 4)^2 \Rightarrow$$

$$x + 16 = x + 16 + 8\sqrt{x}$$

Simplificamos

$$0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{\sqrt{0+16}-\sqrt{0}} = 2 \text{ Solución válida}$$

8. **Resuelve:**  $\frac{x}{x+4} + \frac{2}{\sqrt{x+4}} = \frac{5}{4}$

*Solución:*

Racionalizamos e 2º término multiplicando la expresión  $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}$ :

$$\frac{x}{x+4} + \frac{2}{\sqrt{x+4}} \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{x+4} + \frac{2\sqrt{x+4}}{x+4} = \frac{5}{4}$$

Operamos sobre la ecuación sumando  $\frac{x+2\sqrt{x+4}}{x+4} = \frac{5}{4}$

Quitamos denominadores

$$4(x + 2\sqrt{x+4}) = 5(x+4)$$

$$4x + 8\sqrt{x+4} = 5x + 20 \rightarrow 8\sqrt{x+4} = x + 20$$

Elevamos al cuadrado

$$(8\sqrt{x+4})^2 = (x+20)^2 \Rightarrow 64(x+4) = x^2 + 400 + 40x$$

Operamos

$$64x + 256 = x^2 + 400 + 40x \Rightarrow x^2 - 24x + 144 = 0$$

Resolvemos ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{2} = 12$$

Comprobamos

$$x = 12 \rightarrow \frac{12}{12+4} + \frac{2}{\sqrt{12+4}} = \frac{12}{16} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \text{ Solución válida}$$

9. **Resuelve:**  $\sqrt{5a+x} + \sqrt{5a-x} = \frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$

*Solución:*

Quitamos el denominador del 2º término multiplicando la expresión en cada lado por  $\sqrt{5a+x}$ :

$$(\sqrt{5a+x} + \sqrt{5a-x})\sqrt{5a+x} = \frac{12a}{\sqrt{5a+x}}\sqrt{5a+x}$$

$$(\sqrt{5a+x})^2 + (\sqrt{5a-x})(\sqrt{5a+x}) = 12a$$

$$5a+x + \sqrt{25a^2-x^2} = 12a$$

Ahora, despejamos el término con raíz cuadrada y elevamos

$$\sqrt{25a^2-x^2} = 7a-x \Rightarrow [\sqrt{25a^2-x^2}]^2 = (7a-x)^2$$

Operando sobre la igualdad:

$$25a^2-x^2 = 49a^2+x^2-14ax \rightarrow 2x^2-14ax+24a^2=0 \rightarrow x^2-7ax+12a^2=0$$

Resolvemos

$$x = \frac{-(-7a) \pm \sqrt{(-7a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12a^2}}{2} = \frac{7a \pm \sqrt{49a^2 - 48a^2}}{2} = \frac{7a \pm \sqrt{a^2}}{2} = \frac{7a \pm a}{2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4a \\ x = 3a \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$x = 4a \rightarrow \sqrt{5a+4a} + \sqrt{5a-4a} = \sqrt{9a} + \sqrt{a} = 4\sqrt{a} = \frac{12a}{\sqrt{9a}} = \frac{12a}{3\sqrt{a}} = \frac{4a}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{a} = 4\sqrt{a} \text{ Solución válida}$$

$$x = 3a \rightarrow \sqrt{5a+3a} + \sqrt{5a-3a} = \sqrt{8a} + \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a} + \sqrt{2a} = 3\sqrt{2a} = \frac{12a}{\sqrt{5a+3a}} = \frac{12a}{\sqrt{8a}} = \frac{12a}{2\sqrt{2a}} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} = \frac{12a\sqrt{2a}}{4a} = 3\sqrt{2a} \text{ Solución válida}$$

10. **Resuelve:** 
$$\begin{cases} 2 + \sqrt{x+y} = x+1 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

*Solución:*

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{x+y} = x+1 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = x-1 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x+y})^2 = (x-1)^2 \\ y = 2x-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 2x-5 \end{cases}$$

$$x + 2x - 5 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 1 \\ x = 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

11. **Resuelve:** 
$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \end{cases}$$

*Solución:*

Según la ecuación 2, si un producto es igual a cero, uno de sus factores o los dos son iguales a cero, por tanto:

$$x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0$$

$\Rightarrow x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$  solución no válida ya que  $0 - y + \sqrt{0 - 4y^2} = 2$  tendría la raíz de un negativo

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow (x-2y)(x+2y) = 0 \begin{cases} x = 2y \\ x = -2y \end{cases}$$

■ Caso 1:  $x = 2y$

Sustituyo el valor de  $x = 2y$ , en la ecuación (1)  $x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2$

$$2y - y + \sqrt{(2y)^2 - 4y^2} = 2 \Rightarrow [y = 2] \rightarrow [x = 4]$$

■ Caso 2:  $x = -2y$

Sustituyo el valor de  $x = -2y$ , en la ecuación (1)  $x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2$

$$-2y - y + \sqrt{(-2y)^2 - 4y^2} = 2 \Rightarrow -3y = 2 \Rightarrow [y = \frac{-3}{2}] \rightarrow [x = -3] \text{ No válida}$$

12. Resolver 
$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2x + 3\sqrt{y}} &= 4 \\ \sqrt{8x - 2\sqrt{y}} &= 6 \end{aligned} \right\}$$

*Solución:*

Elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad de la primera ecuación

$$[\sqrt{2x + 3\sqrt{y}}]^2 = 4^2 \rightarrow 2x + 3\sqrt{y} = 16$$

Elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad de la segunda ecuación

$$[\sqrt{8x - 2\sqrt{y}}]^2 = 6^2 \rightarrow 8x - 2\sqrt{y} = 36$$

Tendremos ahora el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3\sqrt{y} &= 16 \\ 8x - 2\sqrt{y} &= 36 \end{aligned} \right\}$$

Intentamos método de reducción como si las incógnitas fueran  $x$  e  $\sqrt{y}$ . multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3\sqrt{y} &= 16 \\ 8x - 2\sqrt{y} &= 36 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4x + 6\sqrt{y} &= 32 \\ 24x - 6\sqrt{y} &= 108 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Sumamos y queda } 28x = 140 \rightarrow [x = \frac{140}{28} = 5].$$

Con ese valor de  $x$  sustituyo para hallar  $y$ .

$$2 \cdot 5 + 3\sqrt{y} = 16; 10 + 3\sqrt{y} = 16 \rightarrow [y = \frac{6}{3} = 2]$$