



Examen de Matemáticas I

IMPORTANTE: Se recuerda que en algunos ejercicios hay que tener presentes alguna de las siguientes identidades:

$$\cotg x = \frac{1}{\tg x} = \frac{\cos x}{\sen x} ; \sec x = \frac{1}{\cos x} ; \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sen x}$$

1. [2 puntos] Demuestra que las siguientes identidades son ciertas:

a) $\frac{\cos x + \sen x}{\cos x - \sen x} - \frac{\cos x - \sen x}{\cos x + \sen x} = 2 \tg 2x$

b) $\frac{\tg x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \tg^2 x}{\cotg x}$

2. [2 puntos] Simplifica todo lo que puedas las expresiones siguientes:

a) $\frac{\sen \alpha + \cotg \alpha}{\tg \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}$

b) $2 \tg \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sen \alpha$

3. [3 puntos] Resuelve las siguientes ecuaciones y da las soluciones dentro del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ (primera vuelta).

a) $\tg x + 2 \sen x = 0$

b) $\sen x \cdot \tg x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

4. [1 punto] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones en el primer cuadrante.

$$\begin{cases} \sen x \cdot \sen y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x \cdot \sen y = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$



Soluciones

1. Identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} &= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} - \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \\
 &= \frac{\cos^2 x + 2 \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} - \frac{\cos^2 x - 2 \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \cos x \operatorname{sen} x + 2 \cos x \operatorname{sen} x}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = 2 \operatorname{tg} 2x
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg} x} = \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

2. Simplificar expresiones:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}} = \frac{(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha} = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha &= 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} - \operatorname{sen} \alpha = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha
 \end{aligned}$$

3. Ecuaciones trigonométricas

$$\text{a) } \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x (1 + 2 \cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ; x = 180^\circ \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ; x = 240^\circ \end{cases}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 6 \operatorname{sen}^2 x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow 6(1 - \cos^2 x) = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 - 6 \cos^2 x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow 6 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x - 6 = 0$$

El discriminante de la ecuación anterior es: $\sqrt{3}^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-6) = 3 + 144 = 147$. Por tanto:

$$\cos x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{147}}{12} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7^2 \cdot 3}}{12} = \frac{-\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{12} = \begin{cases} \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-8\sqrt{3}}{12} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Si $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $x = 30^\circ; x = 330^\circ$

Si $\cos x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$, entonces no existe solución para x pues $\frac{-2\sqrt{3}}{3} \cong -1,15 < -1$



4. Sistema de ecuaciones trigonométricas.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Dividiendo ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 45^\circ$$

www.yoquieroaprobar.es