1. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$, contesta a los siguientes apartados:

a) Halla su dominio y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**

b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

c) Haz una representación gráfica aproximada de la función utilizando los apartados anteriores (sin necesidad de tabla de valores). **(1 punto)**

2. Calcula los siguientes límites. **(4 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{3x}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x-2}{5}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{x^2-4}}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{3x^2-7}\right)^{6x}$

3. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-1} & si \quad x<-1\\ 2 & si \quad x=-1\\ x^2+2x & si \quad -1<x<2\\ ax-x^2 & si \quad x\geq 2\end{cases}$

a) Estudia la continuidad de f en $x=-1$. Caso de no ser continua di qué tipo de discontinuidad es, razonando la respuesta. **(1 punto)**

b) Halla razonadamente el valor de *a* para que f sea continua en $x=2$. **(1 punto)**

4. Utiliza el Teorema de Bolzano para hallar un intervalo de longitud a lo sumo 1 unidad, en el que la ecuación $2x^3-2x+1=0$ tenga una solución. **(1 punto)**

① $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

a) $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1$ ó $x=2$

$\Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

* Puntos de corte eje X:

$\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = 0 \Rightarrow x^2+x-6=0$

$(2 \notin \text{Dom} f)$

$\Rightarrow x = 2$ ó $x=-3$: $\cancel{(2,0)}$; $\underline{\underline{(-3,0)}}$

* Puntos de corte eje Y:

$x=0 \Rightarrow f(x) = 3$: $\underline{\underline{(0,3)}}$

b) * Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y=1}}$ (A.H.)

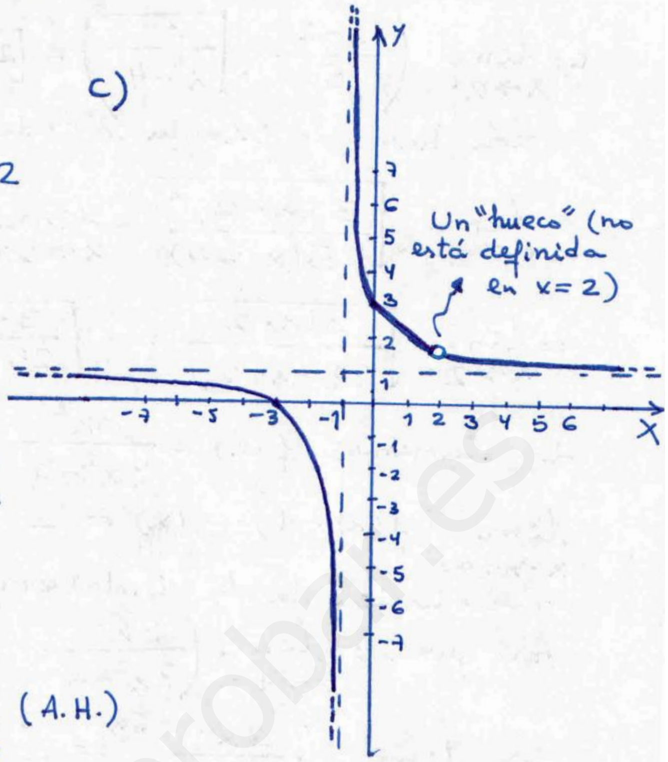
* Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+3}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to -1^- \\ +\infty & \text{si } x\to -1^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x=-1}}$ (A.V)

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow x = 2$ NO ES ASÍNTOTA VERTICAL.

c)



② a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2} - x^2\right) = [\text{INDET } \infty - \infty] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x^4+x^2}-x^2)(\sqrt{x^4+x^2}+x^2)}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+x^2-x^4}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2} = \left[\text{INDET } \dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2/x^2}{\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \dfrac{3x}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}} = (2+0)^{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x-2}{5} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{x^2-4}} \right) = \left[\text{INDET}: 0 \cdot \infty \right] =$ (para hacer la operación hay que introducir todo dentro del radical) $=$

$$= \lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x^2-4)}} = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x+2)(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)}{25(x+2)}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0}{25 \cdot 4}} = \underline{\underline{0}}$$

d) Llamemos $f(x) = \dfrac{3x^2}{3x^2-7}$ y $g(x) = 6x$. Entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 1) \cdot g(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)} = e^L$$

(resolución de la indeterminación del tipo 1^∞)

Así pues: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2}{3x^2-7} - 1 \right) \cdot 6x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{42x}{3x^2-7} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2-7} \right)^{6x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

3 a)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2}{-1-1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2+2x) = (-1)^2 + 2(-1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1 \neq 2 = f(-1)$: existe el límite cuando $x \to -1$, pero no es igual que la imagen de f en $x = -1$ $\Rightarrow$ f <u>NO ES CONTINUA en $x = -1$</u> ; DIS<u>CONTINUIDAD EVITABLE</u>.

b)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 2x) = 8 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (ax - x^2) = 2a - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{para que exista el límite}$$

cuando $x \to 2$, los laterales deben ser iguales:

$8 = 2a - 4 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \underline{a = 6}$. En este caso $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 8$ y f es continua en $x = 2$

4 La función $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en todo intervalo cerrado y acotado. Encontremos uno $[a, b]$ de longitud 1 en el que signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$:

$f(0) = 1$; $f(1) = 1$; $f(2) = 15$; $\underline{f(-1) = 1}$; $\underline{f(-2) = -11}$

Así pues, puede servir como solución el intervalo $\underline{\underline{(-2, -1)}}$