

**Examen de Matemáticas II**

1. [2 puntos, 1 punto por apartado] Contesta a los siguientes apartados sobre límites:

a) Calcular el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} \right)^{kx-1} = e^3$

b) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x}$

2. [1 punto] ¿Qué condición debe cumplir m para que la ecuación $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$ tenga una solución en el intervalo $(0, 2)$?

3. [2 puntos, 1 punto por apartado] Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

a) $y = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$

b) $y = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)$

4. [2 puntos, 1 punto por apartado] Considera, para distintos valores de b , la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ b(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de b es f continua? ¿Para qué valores de b es f derivable?

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

5. [3 puntos, 1 punto por apartado] Dada la función $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$, se pide:

a) Dominio y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Máximos y mínimos relativos (ambas coordenadas).

c) Intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Soluciones

1. Contesta a los siguientes apartados sobre límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} \right)^{kx-1} = e^3 \text{ [Indeterminación } 1^\infty] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(kx-1) \left(\frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} - 1 \right) \right] = 3.$$

Calculemos pues este último límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(kx-1) \left(\frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} - 1 \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(kx-1) \left(\frac{3x-1}{2x^2 + 1} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(kx-1)(3x-1)}{2x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3kx^2 - kx - 3x + 1}{2x^2 + 1} = \frac{3k}{2}. \text{ Por tanto: } \frac{3k}{2} = 3 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2. \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right]. \text{ Podemos aplicar la regla de L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}} - \frac{-\cos x}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2. ¿Qué condición debe cumplir m para que la ecuación $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$ tenga una solución en el intervalo $(0, 2)$?

Sea la función $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$, que es claramente continua en todo \mathbb{R} por ser polinómica. Además $f(0) = -6 < 0$ y $f(2) = 8 + 4 + 2m - 6 = 2m + 6$. Por el teorema de los ceros de Bolzano, si es $f(2) = 2m + 6 > 0$, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, tal que $c^3 + c^2 + mc - 6 = 0$. Por tanto la condición que se debe cumplir es que $2m + 6 > 0 \Rightarrow 2m > -6 \Rightarrow m > -3$.

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

$$a) y = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$$

$$y' = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{x \ln x - 2x + 2\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} = \frac{x \ln x - 2x + 2x}{x\sqrt{x}} = \frac{x \ln x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$b) y = \ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^x} \right). \text{ Dos formas:}$$

$$\begin{aligned} i) y' &= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}} \cdot \frac{\cos x \cdot e^x - \operatorname{sen} x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)}{(e^x)^2} = \frac{e^{2x} (\cos x - \operatorname{sen} x)}{e^{2x} \operatorname{sen} x} = \\ &= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x - 1 \end{aligned}$$

$$ii) y = \ln(\operatorname{sen} x) - \ln e^x = \ln(\operatorname{sen} x) - x \Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x - 1 = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 1 = \operatorname{cotg} x - 1$$

4. Considera, para distintos valores de b , la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ b(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de b es f continua? ¿Para qué valores de b es f derivable?

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$, f es continua sea quien sea el valor de b .

Por otro lado, para que f sea derivable, lo ha de ser en $x = 2$, y para ello la derivada por la izquierda en 2, ha de ser igual que la derivada por la derecha en 2, obteniendo por tanto que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x < 2: f'(x) = 2x \Rightarrow f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 4 \\ \text{Si } x > 2: f'(x) = b \Rightarrow f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow b = 4.$$

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

$$y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \Rightarrow y - 0 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 8$$

5. $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$

La función la podemos escribir así: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + 1}{x-2} = \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

f no tiene asíntotas horizontales porque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} = \pm\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$, $x = 2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 2x} = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 7}{x-2} = -3.$$

Por tanto, $y = x - 3$ es una asíntota oblicua.

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2 - 5x + 7) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2 - 4x + 3)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

Obsérvese que la segunda derivada nunca se anula pues $\frac{2}{(x-2)^3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, por tanto f no

puede tener puntos de inflexión. Estudiemos la monotonía y la curvatura.

| | | | | | | | |
|---------------|--------------------|------------------------|------------------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, 3)$ | $(3, +\infty)$ | | $(-\infty, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| signo de f' | + | - | - | + | signo de f'' | - | + |
| monotonía | $\uparrow\uparrow$ | $\downarrow\downarrow$ | $\downarrow\downarrow$ | $\uparrow\uparrow$ | curvatura | \cap | \cup |

De lo anterior se deduce que:

- f es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$. Además, tiene un máximo relativo en el punto $(1, -3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 1)$
- f es convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, +\infty)$. Además, como ya se ha comentado, carece de puntos de inflexión.