1. Calcular razonadamente los siguientes límites indicando en cada momento las indeterminaciones existentes:

   a) **[1 punto]** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

   b) **[1 punto]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$

2. **[2 puntos]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\cos x-1} & \text{si} \quad x<0\\ -x^2+2x-2 & \text{si} \quad 0\le x<2\\ \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$, estudiar su continuidad en los puntos $x=0$ y $x=2$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

3. **[2 puntos]** Explica con detalle el uso que se ha de hacer del teorema Bolzano para encontrar un intervalo <u>de longitud 1</u> en el que la ecuación $e^{x}=x+2$ tenga una solución. ¿Cuál es dicho intervalo?

4. **[2 puntos]** Sea la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

   a) Halla los valores de a para los que f es continua en el punto $x=1$.

   b) Para los valores hallados en el apartado anterior, ¿es f derivable en $x=1$?

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$, se pide:

   a) **[1 punto]** Calcular la imagen de f y la derivada de f en $x=-1$, o sea, hallar $f(-1)$ y $f'(-1)$.

   b) **[1 punto]** Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de la función f que sea paralela a la recta $y=-3x+1$.

   Nota. *Recuerda que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.*

Soluciones

1. Calcular razonadamente los siguientes límites indicando en cada momento las indeterminaciones existentes:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\ \text{INDET}\right]=e^{L}$, donde $L=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{x+1}-1\right)\right]$. Calculemos este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{x+1}-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\cos x-x-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-x-1}{x^2+x}\right)=\left[\frac{0}{0}\ \text{INDET}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x-1}{2x+1}\right)=-1.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$. **Nota**: en (1) se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}=\left[\frac{2}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 0^{-}\\ +\infty & \text{si} \quad x\to 0^{+}\end{cases}$.

2. **[2 puntos]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\cos x-1} & \text{si} \quad x<0\\ -x^2+2x-2 & \text{si} \quad 0\le x<2\\ \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$, estudiar su continuidad en los puntos $x=0$ y $x=2$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

Continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{\cos x-1}=\left[\frac{0}{0}\ \text{INDET}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-\operatorname{sen} x}=\left[\frac{0}{0}\ \text{INDET}\right]\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{-\cos x}=-2.$$

Nota: en (1) y en (2) se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+2x-2\right)=0+0-2=-2.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)=-2=f(0)$, con lo que f es continua en $x=0$.

Continuidad en $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+2x-2\right)=-4+4-2=-2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\ \text{INDET}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 2}\left(2x^2-2x\right)=8-4=4.$$

Nota. En (1) se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital.

Puesto que los límites laterales son distintos, no existe el $\lim_{x\to 2} f(x)$, con lo que f no es continua en $x=2$. En este punto hay una discontinuidad de salto finito.

El hecho de que no exista la imagen de la función en $x=2$ no influye en el razonamiento anterior porque, al ser los límites laterales finitos y distintos, la existencia o no de $f(2)$ no cambia el que f tenga una discontinuidad de salto finito en $x=2$.

3. **[2 puntos]** Explica con detalle el uso que se ha de hacer del teorema Bolzano para encontrar un intervalo <u>de longitud 1</u> en el que la ecuación $e^x = x+2$ tenga una solución. ¿Cuál es dicho intervalo?

Consideremos la función $f(x) = e^x - x - 2$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular lo es en cualquier intervalo cerrado contenido en $\mathbb{R}$.

Además, $f(1) = e - 1 - 2 = e - 3 < 0$ y $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano, existe $c \in (1,2)$ tal que $f'(c) = 0 \Rightarrow e^c - c - 2 = 0 \Rightarrow e^c = c+2$. Por tanto, en el intervalo $(1,2)$ existe una solución de la ecuación $e^x = x+2$, como queríamos demostrar.

4. **[2 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Halla los valores de a para los que f es continua en el punto $x = 1$.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, ¿es f derivable en $x = 1$?

a) Para que f sea continua en $x = 1$ se ha de cumplir que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, es decir, $3 - a = \dfrac{2}{a}$. Resolviendo la ecuación anterior: $3a - a^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$. Por tanto, para los valores de a hallados anteriormente, la función es continua en $x = 1$.

b) La función derivada de f es $f'(x) = \begin{cases} -2ax & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Si $a = 1$, se tiene que $f'(1^-) = -2$ y $f'(1^+) = -2$. De aquí se deduce que, en este caso, f es derivable en el punto $x = 1$, ya que las derivadas laterales coinciden. Además, $f'(1) = -2$.

Si $a = 2$, se tiene que $f'(1^-) = -4$ y $f'(1^+) = -1$.En este caso, al no coincidir las derivadas laterales, f no es derivable en el punto $x = 1$.

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular la imagen de f y la derivada de f en $x = -1$, o sea, hallar $f(-1)$ y $f'(-1)$.

b) **[1 punto]** Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de la función f que sea paralela a la recta $y = -3x + 1$.

a) $f(-1) = \dfrac{(-1)^2}{-1+2} = \dfrac{1}{1} = 1$. La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$.

Entonces $f'(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 4 \cdot (-1)}{(-1+2)^2} = \dfrac{1-4}{1} = -3$.

b) La pendiente de la recta $y = -3x + 1$ es $m = -3$. Por tanto, la recta tangente también ha de tener la misma pendiente, y ya hemos visto en el apartado anterior que esto ocurre para $x = -1$. Por tanto, una recta tangente a la gráfica de la función que sea paralela a la recta $y = -3x + 1$ es:

$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - 1 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 2$.