1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Contesta a los siguientes apartados sobre límites:

   a) Calcular el valor de k para que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{2x^2+1}\right)^{kx-1}=e^3$

   b) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$

2. **[1 punto]** ¿Qué condición debe cumplir m para que la ecuación $x^3+x^2+mx-6=0$ tenga una solución en el intervalo $(0,\ 2)$?

3. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

   a) $y=2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)$

   b) $y=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)$

4. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Considera, para distintos valores de b, la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ b(x-2) & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

   a) ¿Para qué valores de b es f continua? ¿Para qué valores de b es f derivable?

   b) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$.

5. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Dada la función $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$, se pide:

   a) Dominio y asíntotas.

   b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Máximos y mínimos relativos (ambas coordenadas).

   c) Intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Soluciones

1. Contesta a los siguientes apartados sobre límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}\right)^{kx-1}=e^3$ [Indeterminación 1^∞] $\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[(kx-1)\left(\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}-1\right)\right]=3$.

Calculemos pues este último límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(kx-1)\left(\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}-1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(kx-1)\left(\frac{3x-1}{2x^2+1}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(kx-1)(3x-1)}{2x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3kx^2-kx-3x+1}{2x^2+1}=\frac{3k}{2}$$. Por tanto: $\frac{3k}{2}=3\Rightarrow 3k=6\Rightarrow k=2$.

b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{x}=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]$. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}-\frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

2. ¿Qué condición debe cumplir m para que la ecuación $x^3+x^2+mx-6=0$ tenga una solución en el intervalo $(0,\,2)$?

Sea la función $f(x)=x^3+x^2+mx-6$, que es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica. Además $f(0)=-6<0$ y $f(2)=8+4+2m-6=2m+6$. Por el teorema de los ceros de Bolzano, si es $f(2)=2m+6>0$, existe $c\in(0,\,2)$ tal que $f(c)=0$, es decir, tal que $c^3+c^2+mc-6=0$. Por tanto la condición que se debe cumplir es que $2m+6>0\Rightarrow 2m>-6\Rightarrow m>-3$.

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

a) $y=2\sqrt{x}(\ln x-2)$

$$y'=2\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}=\frac{\ln x-2}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{x\ln x-2x+2\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}}=\frac{x\ln x-2x+2x}{x\sqrt{x}}=\frac{x\ln x}{x\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

b) $y=\ln\left(\frac{\operatorname{sen}x}{e^x}\right)$. Dos formas:

i) $$y'=\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}x}{e^x}}\cdot\frac{\cos x\cdot e^x-\operatorname{sen}x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^{2x}(\cos x-\operatorname{sen}x)}{e^{2x}\operatorname{sen}x}=$$

$$=\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}=\operatorname{cotg}x-1$$

ii) $y=\ln(\operatorname{sen}x)-\ln e^x=\ln(\operatorname{sen}x)-x\Rightarrow y'=\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x-1=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-1=\operatorname{cotg}x-1$

4. Considera, para distintos valores de b, la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ b(x-2) & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de b es f continua? ¿Para qué valores de b es f derivable?

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0$, f es continua sea quien sea el valor de b.

Por otro lado, para que f sea derivable, lo ha de ser en $x=2$, y para ello la derivada por la izquierda en 2, ha de ser igual que la derivada por la derecha en 2, obteniendo por tanto que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x<2:\ f'(x)=2x \Rightarrow f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=4 \\ \text{Si } x>2:\ f'(x)=b \Rightarrow f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=b \end{array}\right\} \Rightarrow f'_-(2)=f'_+(2)\Rightarrow b=4.$$

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-2$.

$$y-f(-2)=f'(-2)\big(x-(-2)\big)\Rightarrow y-0=-4(x+2)\Rightarrow y=-4x-8$$

5. $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

La función la podemos escribir así: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3x+6+1}{x-2}=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}\Rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}-\{2\}$

f no tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=\pm\infty$

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x\to 2^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 2^+ \end{cases}$, $x=2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-2x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x+7}{x-2}=-3$.

Por tanto, $y=x-3$ es una asíntota oblicua.

$$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-2)-\left(x^2-5x+7\right)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\ ;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-\left(x^2-4x+3\right)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(2x-4)(x-2)-2\left(x^2-4x+3\right)}{(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)^3}$$

Obsérvese que la segunda derivada nunca se anula pues $\dfrac{2}{(x-2)^3}\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$, por tanto f no puede tener puntos de inflexión. Estudiemos la monotonía y la curvatura.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
signo de f'	$+$	$-$	$-$	$+$
monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
signo de f''	$-$	$+$
curvatura	$\cap$	$\cup$

De lo anterior se deduce que:

- f es creciente en $(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 2)\cup(2, 3)$. Además, tiene un máximo relativo en el punto $(1,-3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3,1)$
- f es convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, +\infty)$. Además, como ya se ha comentado, carece de puntos de inflexión.