1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcular razonadamente los siguientes límites indicando en cada momento las indeterminaciones existentes:

   a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

   b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}$

2. **[1 punto]** Estudiar de manera razonada la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{\cos x-1} & \text{si } x<0\\ -x^2+2e^x-4 & \text{si } 0\le x<2\\ \frac{x^2-4}{\ln(x-1)} & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

   en los puntos $x=0$ y $x=2$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

3. **[2 puntos]** Explica con detalle el uso que se ha de hacer del teorema Bolzano para encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $4e^{x+1}=x^2-1$ tenga una solución. ¿Cuál es dicho intervalo?

4. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

   a) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$

   b) $y=\ln\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}\right)$

5. **[3 puntos]** Se sabe que la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+bx+1 & \text{si } x\le 1\\ ax^2-5x+2a & \text{si } x>1\end{cases}$ es derivable. Determina, explicando bien el procedimiento que sigues, los valores de a y b. Hallar la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

Soluciones

1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcular <u>razonadamente</u> los siguientes límites indicando en cada momento las indeterminaciones existentes:

a) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\left[\text{Indet. } \infty-\infty\right]=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\text{Indet. }\frac{0}{0}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\text{Indet. }\frac{0}{0}\right]\overset{(2)}{=}\lim_{x\to1}\frac{-1}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}$$. En (1) y (2): L'Hôpital.

b) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}=\left[\text{Indet } 1^{\infty}\right]$$. Llamemos $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ y $g(x)=\frac{x+1}{x^2}$. Entonces:

$$\lim_{x\to0}\left[g(x)\left(f(x)-1\right)\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{x+1}{x^2}\cdot\left(\frac{e^x}{x+1}-1\right)\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{x+1}}{x^2}\cdot\left(\frac{e^x-x-1}{\cancel{x+1}}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\left[\text{Indet. }\frac{0}{0}\right]\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\left[\text{Indet. }\frac{0}{0}\right]\overset{(2)}{=}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$. Por tanto, $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}=e^{1/2}=\sqrt{e}$. En (1) y (2): L'Hôpital.

2. **[1 punto]** Estudiar <u>de manera razonada</u> la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\cos x-1} & \text{si } x<0\\ -x^2+2e^x-4 & \text{si } 0\le x<2\\ \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)} & \text{si } x\ge 2\end{cases}$ en los puntos $x=0$ y $x=2$. En los casos que no sea continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

Empecemos por el punto $x=0$. Para ello calcularemos los límites laterales en este punto.

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{\cos x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{-\operatorname{sen} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{2}{-\cos x}=\frac{2}{-1}=-2$ (hemos usado dos veces la regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación "cero partido por cero").

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-x^2+2e^x-4\right)=-2$.

Como los límites laterales coinciden, existe el límite y vale -2. Además $\lim_{x\to0}f(x)=-2=f(0)$. Por tanto, f es continua en el punto $x=0$.

Estudiemos ahora lo que ocurre en el punto $x=2$. Al igual que antes, calculemos los límites laterales.

$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(-x^2+2e^x-4\right)=2e^2-8\cong 6,78$; $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2^+}\frac{2x}{1/(x-1)}=4$.

(en este último límite también hemos hecho uso de la regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación). Como los límites laterales son finitos pero distintos, no existe el límite de la función en el punto $x=2$. Por tanto, f no es continua en $x=2$. En este punto hay una discontinuidad de salto finito.

3. **[2 puntos]** Explica con detalle el uso que se ha de hacer del teorema Bolzano para encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $4e^{x+1}=x^2-1$ tenga una solución. ¿Cuál es dicho intervalo?

Tomemos la función $f(x)=4e^{x+1}-x^2+1$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$. Hemos de encontrar un intervalo de este tipo de longitud 1 en el que el signo de $f(a)$ sea distinto del signo de $f(b)$. Por el teorema de Bolzano, existirá $c\in(a,b)$ de tal manera que $f(c)=0$, es decir, tal que $4e^{c+1}-c^2+1=0\Rightarrow 4e^{c+1}=c^2-1$, y por tanto, c será una solución de la ecuación $4e^{x+1}=x^2-1$.

Como intervalo de longitud 1 puede servir el siguiente: $[-2,-1]$, ya que:

$f(-2)=4e^{-2+1}-(-2)^2+1=4e^{-1}-4+1=4e^{-1}-3<0$; $f(-1)=4e^{-1+1}-(-1)^2+1=4-1+1=4>0$.

4. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

a) $$y=\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}}\cdot\frac{1\cdot x^2-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}}\cdot\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=\frac{1}{2\frac{\sqrt{x+1}}{x}}\cdot\frac{-x^2-2x}{x^4}=$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\cdot\frac{-x^2-2x}{x^4}=\frac{-x^3-2x^2}{2x^4\sqrt{x+1}}=\frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}.$$

b) $$y=\ln\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}\right)\Rightarrow y'=\frac{1}{\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{3e^{3x}\cdot\sqrt{x}-e^{3x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}}{e^{3x}}\cdot\frac{3e^{3x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}=\frac{3x-\frac{1}{2}}{x}=\frac{6x-1}{2x}$$. O bien:

$$y=\ln\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}\right)=\ln e^{3x}-\ln\sqrt{x}=3x\ln e-\frac{1}{2}\ln x=3x-\frac{1}{2}\ln x\Rightarrow y'=3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=3-\frac{1}{2x}=\frac{6x-1}{2x}.$$

5. **[3 puntos]** Se sabe que la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+bx+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ ax^2-5x+2a & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ es derivable. Determina, <u>explicando bien el procedimiento que sigues</u>, los valores de a y b. Hallar la recta tangente a la gráfica de *f* en $x=1$.

En primer lugar, puesto que la función es derivable en $x=1$, es continua en este punto. Entonces:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2+bx+1\right)=-1+b+1=b=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax^2-5x+2a\right)=a-5+2a=3a-5\end{array}\right.\Rightarrow b=3a-5$$

En segundo lugar, puesto que la función es derivable en $x=1$ las derivadas laterales han de ser iguales.

Como $f'(x)=\begin{cases}-2x+b & \text{si} \quad x<1\\ 2ax-5 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, tenemos que $f'(1^-)=-2+b$ y $f'(1^+)=2a-5\Rightarrow -2+b=2a-5$.

De este modo, tenemos el siguiente sistema: $\begin{cases}b=3a-5\\ -2+b=2a-5\end{cases}$. Por sustitución:

$-2+3a-5=2a-5\Rightarrow a=2$. Sustituyendo en la primera ecuación: $b=3\cdot 2-5\Rightarrow b=1$.

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Como $f(1)=1$ y $f'(1)=-1$, tenemos $y-1=-1(x-1)\Rightarrow y-1=-x+1\Rightarrow y=-x+2$.