Ejercicios resueltos

1.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+senx}=4$

1°. Se considera la función $f(x)=\frac{6}{2+senx}-4$ continua en $\Re$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{6}{2-1}-4>0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6}{2+1}-4<0$$

3°. Por tanto en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tal que $f(c)\ =\ 0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+senx}=4$ tiene una solución c en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

2.- Demostrar que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1°. Se considera la función $f(x)=x^{18}-5x+3$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f(0)=3>0 \qquad f(1)=-1<0 \qquad f(2)>0$$

3°. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c\in(0,1)\ y\ \exists\, c'\in(1,2)$ tal que $f(c)=f(c')\ =\ 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ tiene 2 soluciones en $\Re$

3.- Demuestra que la ecuación $x^3-3x+a=0$ con $a\in\Re$ tiene a lo más una solución en $[-1,1]$. ¿Para que valor de a existe dicha solución ?.

1°. Se considera la función $f(x)=x^3-3x+a$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se supone que hay más de 1 solución:

hay 2 soluciones, $c_1,c_2\in[-1,1]$ $tales\ que\ f(c_1)=f(c_2)=0$

Luego en el intervalo $[c_1,c_2]$ se cumplen las hipótesis del Tª Rolle por lo que

$\exists\, d\ \in(c_1,c_2)\subset[-1,1]\ tal\ que\ f'(d)=0$ que equivale a decir $d\ \in(-1,1)$

Veamos que pasa con la función derivada:

$f(x)=x^3-3x+a\ \Rightarrow\ f'(x)=3x^2-3=0\ \Rightarrow\ x=\pm1\notin(-1,1)$ en contradicción con $d\ \in(-1,1)$

Por tanto a lo sumo existe una solución de la ecuación.

3°. ¿Para que valor de a existe dicha solución?. Se tiene que cumplir el Tª Bolzano en $[-1,1]$:

$$\left.\begin{array}{r} f(-1)=-1+3+a=a+2 \\ f(1)=1-3+a=a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ (a+2)\cdot(a-2)<0\ \Rightarrow\ a\in(-2,2)$$

4.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+senx}=4$

1°. Se considera la función $f(x)=\frac{6}{2+senx}-4$ continua en $\Re$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{6}{2-1}-4>0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6}{2+1}-4<0$$

3°. Por tanto en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:
$\exists\ c\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tal que $f(c)=0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+senx}=4$ tiene una solución c en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

5.- Demostrar que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1°. Se considera la función $f(x)=x^{18}-5x+3$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f(0)=3>0 \qquad f(1)=-1<0 \qquad\qquad f(2)>0$$

3°. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\ c\in(0,1)\ y\ \exists\ c'\in(1,2)$ tal que $f(c)=f(c')=0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ tiene 2 soluciones en $\Re$

4°. Solo hay 2:

Se supone que hay 3 soluciones: $\exists\ c_1,c_2,c_3\in\Re\ con\ c_1<c_2<c_3\ tales\ que\ \ f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$

En los intervalos $[c_1,c_2]$ y $[c_2,c_3]$ se cumplen las hipótesis del Tª Rolle, luego:

$\exists\ d\in(c_1,c_2)\ y\ d'\in(c_2,c_3)\ tales\ que\ \ f'(d)=f'(d')=0$ pero $f'(x)=18x^{17}-5=0$ que solo tiene una solución real $x=\sqrt[17]{\frac{5}{18}}$ en contradicción con la suposición, por tanto solo hay 2

6.- La función $f:[-1,1]\to\Re$ definida por $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo: $f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2=1}$ $f(1x)=\sqrt[3]{1^2}=1$
Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}} \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
Si intentamos anular la derivada resulta: $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0\ \Rightarrow 2=0$ ¡absurdo!
Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica: la función no es derivable en todos los puntos del intervalo, en el punto $x=0$ no existe la derivada como podemos ver calculándola a través del límite:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1-\frac{2}{3}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=\infty$$

7.- Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde se cumple la tesis?.

➦ Por ser una función polinómica, es continua y derivable en todo $\Re$ y se cumplen las dos primeras hipótesis.

➦ Tercera hipótesis: $\left.\begin{matrix} f(0) = 2 \\ f(b) = b^3 - 9b + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^3 - 9b + 2 = 2 \Rightarrow b^3 - 9b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 9) = 0$

$b(b^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow$ La única solución válida es $b = 3$

➦ La tesis se cumple: $f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} \in (0,3)$

8.- Prueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \frac{-1}{2} \le x < 1 \\ 5 - (x-2)^2 & 1 \le x \le 4 \end{cases}$ Cumple las hipótesis del Tª de Rolle. Averigua dónde cumple la tesis.

En cada uno de los intervalos es una función polinómica que es continua y derivable en $\Re$

El único punto dudoso es $x = 1 \Rightarrow$ estudiamos la continuidad y derivabilidad en dicho punto

✯ f continua en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 \Rightarrow$

Se cumple la 1ª hipótesis: f es continua en $\left[\frac{-1}{2}, 4\right]$

✯ f derivable en $x = 1$

$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \frac{-1}{2} \le x < 1 \\ 5 - (x-2)^2 & 1 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & \frac{-1}{2} < x < 1 \\ -2(x-2) & 1 < x < 4 \\ ? & x = 1 \end{cases}$

f derivable en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$

Se cumple la 2ª hipótesis: f es continua en $\left(\frac{-1}{2}, 4\right)$

✯ $\left.\begin{matrix} f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 2 = 1 \\ f(4) = 5 - (4-2)^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ se cumple la 3ª hipótesis

✯ Veamos dónde se verifica la tesis: $f'(x) = \begin{cases} 2 & \frac{-1}{2} < x < 1 \\ -2(x-2) & 1 \le x < 4 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 \quad absurdo \\ -2(x-2) = 0 \quad \Rightarrow x = 2 \quad \in [1,4) \end{cases} \Rightarrow$ ***La tesis se verifica en*** $c = 2$