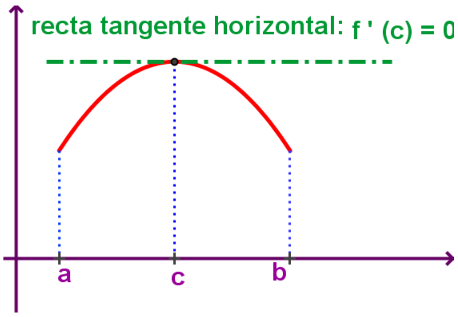
Teorema de Rolle

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, con tangente horizontal.



Teorema de Rolle

Hipótesis : f es continua en $[a, b]$
f es derivable en (a, b)
$f(a) = f(b)$

Tesis: $\exists c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$

Ejemplo 3

La función $f: [-2, 1] \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = x^3 - 3x$ verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en $[-2, 1]$ por ser polinómica
2. Es derivable en $(-2, 1)$ por se polinómica.
3. $f(-2) = f(1) = -2$

Entonces existe un punto c en el intervalo abierto $(-2, 1)$ con derivada nula en dicho punto. Vamos a comprobarlo:

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = -1} \in (\boldsymbol{-2, 1})$$

Ejemplo 4

Determina k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del Tª de Rolle en el intervalo $[-3, 1]$ y calcula el punto que vaticina el Tª.

➦ La continuidad y derivabilidad se cumplen puesto que es una función polinómica, luego la única condición que hay que imponer es la 3ª:

$$f(-3) = f(1) \quad \Rightarrow \quad (-3)^3 - k(-3) + 10 = 1^3 - k \cdot 1 + 10 \quad \Rightarrow \quad -27 + 3k + 10 = 11 - k$$

$$4k = 28 \quad \Rightarrow \quad k = 7 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 7x + 10$$

➦ El valor que vaticina el Tª es:

$$f(x) = x^3 - 7x + 10 \;\Rightarrow\; f(x) = 3x^2 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1'53 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = -1'53} \in (\boldsymbol{-2, 1})$$

Ejemplo 5: **Aplicación del teoremas de Rolle**

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x)=0$ tiene 1 única solución $\Rightarrow$ $f(x)=0$ tiene 2 soluciones como máximo

Solución

La demostración se hace por reducción al absurdo es decir negar "tiene 2 soluciones como máximo"

Se supone que $f(x)=0$ tiene 3 soluciones: $\exists\, c_1 < c_2 < c_3$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$

Por tanto se puede aplicar el Tª de Rolle a la función f en los intervalos $[c_1,c_2]$ y $[c_2,c_3]$

En ambos intervalos se cumplen las hipótesis del Tª Rolle, luego:

$\exists\, d \in (c_1,c_2)$ *y* $\exists\, d' \in (c_2,c_3)$ *tales que* $f'(d)=f'(d')=0$ en contradicción con "$f'(x)=0$ tiene 1 única solución" por tanto no se puede suponer que $f(x)=0$ tiene 3 soluciones

Por tanto $f(x)=0$ tiene 2 soluciones como máximo

Se demuestra en general que:

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x)=0$ tiene n única soluciones $\Rightarrow$ $f(x)=0$ tiene $n+1$ soluciones como máximo

Ejemplo 6: **Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y de Rolle**

Demuestra que la ecuación $x^5+5x+1=0$ sólo admite una solución real

Solución

1°. Se considera la función $f(x)=x^5+5x+1$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$f(0)=1>0$ $\quad\quad$ $f(1)=7>0$

$f(-1)=5>0$ $\quad\quad$ $f(-2)=-41<0$

3°. Por tanto en el intervalo $[-2,-1]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c \in (-2,-1)$ tal que $f(c)=0$ que equivale a decir que la ecuación $x^5+5x+1=0$ tiene una solución c en el intervalo $(-2,-1)$

4°. Es única:

Se supone que tiene 2 soluciones: $\exists\, c_1 < c_2$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=0$

En el intervalo $[c_1,c_2]$ se cumple las hipótesis del Tª Rolle, luego:

$\exists\, d \in (c_1,c_2)$ *tal que* $f'(d)=0$ pero $f'(x)=5x^4+5 \neq 0 \;\forall\, x \in \Re$ por tanto no se puede suponer que $f(x)=0$ tiene 2 soluciones