REGLA DE L'HÔPITAL PARA $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno E de a y tales que:

    1) $f(a) = g(a) = 0$

    2) g' no se anula en E

Si existe el límite finito $\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe también $\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y, además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Otras formas de la regla de L'Hôpital:

El esquema

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es válido para $x \to a$, $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, tanto si la indeterminación es del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, como si es de la forma $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, e independientemente de que el límite sea finito o infinito.

Indeterminación $\underline{[0\cdot\infty]}$: Para transformarla en una de la forma $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

Indeterminación $\underline{[\infty-\infty]}$: Puede resolverse utilizando la regla de L' Hôpital; para ello, se suelen realizar las operaciones indicadas, obteniéndose indeterminaciones de la forma $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Indeterminaciones $\underline{\left[\infty^0\right]}$, $\underline{\left[0^0\right]}$ y $\underline{\left[1^\infty\right]}$: Para aplicar la regla de L'Hôpital, las transformamos en la forma $0\cdot\infty$ teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$$

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Indeterminación del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

    ➢ Calcula los siguientes límites:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ (aplicando L'Hôpital) $= \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3}{x - \operatorname{sen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x^2}{1 - \cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12x}{\operatorname{sen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12}{\cos x} = \dfrac{12}{1} = 12$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{\operatorname{sen} 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x \cdot \log 4 - 2^x \cdot \log 2}{4 \cdot \cos 4x} = \dfrac{\log 4 - \log 2}{4} = \dfrac{\log \dfrac{4}{2}}{4} = \dfrac{\log 2}{4}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x}{2x} = \dfrac{e}{2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \operatorname{arctg} x - x}{2x - \operatorname{arcsen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\dfrac{1}{1+x^2} - 1}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \dfrac{2\dfrac{1}{1+0} - 1}{2 - \dfrac{1}{1}} = 1$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\log(\cos x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \cos x\right)\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{-\operatorname{sen} x}\right) = 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{-\operatorname{sen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{6x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \log(1+x)}{\left[x + \log(1+x)\right]^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{2\left(x + \log(1+x)\right)\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\left[2x + 2\log(1+x)\right](2+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2+x} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x + 2\log(1+x)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{0}{0}\right] = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to} \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{1+x}} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

Indeterminación del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

  ➢ Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2 + 2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{e^{2x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x}{e^{2x} \cdot 2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{e^{2x} \cdot 2 \cdot 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log x}{\cotg x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{\sen^2 x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sen^2 x}{-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot \sen x \cdot \cos x}{-1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sen 2x}{-1} = 0$

Indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$

> Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{x}\right) = [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sen \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-2x}{x^4}} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sen \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

donde hemos tenido en cuenta que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sen x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sen \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 1$ (aunque también se puede

calcular volviendo a aplicar L'Hôpital.

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \tg x\right] = [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{1}{\tg x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{\cos x}{\sen x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\dfrac{-\sen x \cdot \sen x - \cos x \cdot \cos x}{\sen^2 x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\dfrac{-\sen^2 x - \cos^2 x}{\sen^2 x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\dfrac{-\left(\sen^2 x + \cos^2 x\right)}{\sen^2 x}} =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\dfrac{-1}{\sen^2 x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sen^2 x}{-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cotg x \cdot \arc \sen x\right) = [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arc \sen x}{\dfrac{1}{\cotg x}}\right) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arc \sen x}{\tg x}\right) = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{\cos^2 0}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1$

Indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$

> Calcula los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sen x}\right) = [\infty - \infty] =$ (operando, se transforma en una indeterminación del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$)

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\cdot\operatorname{sen} x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{1\cdot\operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + 1\cdot\cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{e}{e^x - e}\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{e}{e^x - e}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{e^x - e}{e} - \dfrac{x-1}{1}}{\dfrac{(x-1)\cdot(e^x - e)}{e}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{e^x - e - e\cdot(x-1)}{e}}{\dfrac{(x-1)\cdot(e^x - e)}{e}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{e^x - e - e\cdot x + e}{x\cdot e^x - e\cdot x - e^x + e} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x - e\cdot x}{x\cdot e^x - e\cdot x - e^x + e} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{1\cdot e^x + x\cdot e^x - e - e^x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{x\cdot e^x - e} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{1\cdot e^x + x\cdot e^x} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{e^x + x\cdot e^x} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{e^x\cdot(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

Nota: La mayoría de las veces no es necesario realizar esa transformación. Operando convenientemente transformamos la indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$ en otra del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x - 1 - \log x}{(x-1)\cdot\log x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1 - \dfrac{1}{x}}{\log x + \dfrac{1}{x}\cdot(x-1)} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x\cdot\log x + x - 1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\log x + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} + 1} = \frac{1}{0 + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Indeterminación del tipo $\left[1^{\infty}\right]$

➢ Calculamos los siguientes límites:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + 2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\frac{1+\log 2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x + 2^x}{2} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2^x - 2}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right]\text{(aplicando L'Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2^x\log 2}{2} = \frac{1 + \log 2}{2}$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left[1^{\infty}\right]$

Aplicamos la fórmula $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$ donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\frac{\cancel{-(x-1)}}{\cancel{1-x}}=-1\Rightarrow\lim_{x\to 1}x^{1/1-x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

De otra forma:

Supongamos que $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=M\Rightarrow$ Tomando logaritmos, se tiene que:

$$\log\left[\lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\log M\Rightarrow\text{ aplicando las propiedades de los límites:}$$

$$\log\left[\lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\log(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]\Rightarrow\text{ aplicando las propiedades de los logaritmos:}$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\log(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\log x\right]=\left[\infty\cdot 0\right]\text{ (operando) }=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Luego, $\log M=-1\Rightarrow M=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ y, por tanto, $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{x}=\left[0^{\infty}\right]$

Aplicamos la fórmula $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$ donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{-\dfrac{1}{x^{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{-\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{-\frac{1}{x^{2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[-\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

Así, $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{x}=\left[0^{\infty}\right]=e^{0}=1$

De otra forma:

Llamamos $M=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{x}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos: $\log A^{B}=B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=\left[\infty\cdot0\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el cambio:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\;\left[0\cdot\infty\right]\;\text{o}\;\left[\infty\cdot0\right]\Rightarrow\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\right]=\left[\dfrac{0}{0}\right]\;\text{o}\;\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\dfrac{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\dfrac{1}{x}}\right\}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{-\dfrac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\dfrac{-\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{-\dfrac{1}{x^{2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\mathrm{tg}\,0=0\;\Rightarrow\;\log M=0\;\Rightarrow\;M=e^{0}=1$$

Luego, $\quad\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}=1$

Indeterminación del tipo $\left[\infty^{0}\right]$

Se resuelven también aplicando logaritmos neperianos.

➢ Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\log x\right)^{\frac{1}{e^{x}}}=\left[\infty\cdot0\right]=e^{0}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}\log\left(\log x\right)=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}}{e^{x}}=\left[\dfrac{0}{\infty}\right]=0$$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\mathrm{tg}\,x\right)^{\cos x}\right]=\left[\infty^{0}\right]$

Llamamos $M=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\mathrm{tg}\,x\right)^{\cos x}\right]$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\mathrm{tg}\,x\right)^{\cos x}\right]\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x}\right]\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\log\left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\log\left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\cdot\log\left(\operatorname{tg} x\right)\right]=\left[0\cdot\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\log\left(\operatorname{tg} x\right)}{\dfrac{1}{\cos x}}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{\dfrac{0\cdot\cos x-1\cdot\left(-\operatorname{sen} x\right)}{\cos^2 x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg} x}}{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\dfrac{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]=\frac{0}{1}=0$$

$\Rightarrow\quad \log M = 0 \quad\Rightarrow\quad M = e^0 = 1$

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x}\right]=1$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]=\left[\infty^0\right]$

Llamamos $M=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]=$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1}\cdot\log\left(2^x-1\right)\right]=\left[0\cdot\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log\left(2^x-1\right)}{\dfrac{2}{x+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log\left(2^x-1\right)}{\dfrac{x+1}{2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\cdot\log\left(2^x-1\right)}{x+1}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\cdot 2^x\cdot\log 2}{2^x-1}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\cdot\log 2\cdot 2^x\cdot\log 2}{2^x\cdot\log 2}\right]=2\cdot\log 2=\log 2^2=\log 4$$

$\Rightarrow\quad \log M = \log 4 \quad\Rightarrow\quad M = 4$

Luego, $M = \lim_{x \to +\infty}\left[\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right] = 4$

Indeterminación del tipo $\left[0^0\right]$

Se resuelven también tomando logaritmos neperianos.

> Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x \to 0+} x^{\operatorname{sen} x} = \left[0^0\right] = e^{\lim_{x \to 0+}\operatorname{sen} x \log x} = e^0 = 1$

$\lim_{x \to 0+}\operatorname{sen} x \log x = \left[0 \cdot \infty\right] = \lim_{x \to 0+}\dfrac{\log x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to 0+}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0+}\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{-\cos x + x\operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{0}{-1} = 0$

2) $\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x = \left[0^0\right]$

Llamamos $M = \lim_{x \to 0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x$

Tomando logaritmos neperianos:

$\log M = \log\left[\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right]$

Aplicando las propiedades de los límites:

$\log\left[\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right] = \lim_{x \to 0}\left[\log\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right]$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B \cdot \log A$

$\lim_{x \to 0}\left[\log\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right] = \lim_{x \to 0}\left[x \cdot \log\left(\operatorname{sen} x\right)\right] = \left[0 \cdot \left(-\infty\right)\right]$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el siguiente cambio:

$= \lim_{x \to 0}\left[\dfrac{\log\left(\operatorname{sen} x\right)}{\dfrac{1}{x}}\right] = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\dfrac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{-1}{x^2}}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\dfrac{x^2 \cdot \cos x}{-\operatorname{sen} x}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Nota: $D\left[\dfrac{1}{x}\right] = D\left[x^{-1}\right] = -1 \cdot x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$

$= \lim_{x \to 0}\left[\dfrac{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \left(-\operatorname{sen} x\right)}{-\cos x}\right] = \dfrac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$

Luego, $M = \lim_{x \to 0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x = 1$

2) $\lim_{x \to 0} x^{\log\left(2 - e^x\right)} = \left[0^0\right]$

Llamamos

$M = \lim_{x \to 0} x^{\log\left(2 - e^x\right)}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log\left[\lim_{x\to 0} x^{\log(2-e^x)}\right]$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left[\lim_{x\to 0} x^{\log(2-e^x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\log\ x^{\log(2-e^x)}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to 0}\left[\log\ x^{\log(2-e^x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\log\left(2-e^x\right)\cdot\log\ x\right] = \left[0\cdot(-\infty)\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el siguiente cambio:

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\log x}{\dfrac{1}{\log\ \left(2-e^x\right)}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(-e^x)}{2-e^x}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{\left(2-e^x\right)\cdot\log^2\left(2-e^x\right)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(2-e^x\right)\cdot\log^2\left(2-e^x\right)}{x\cdot e^x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-e^x\cdot\log^2\left(2-e^x\right)+\cancel{\left(2-e^x\right)}\cdot 2\cdot\log\left(2-e^x\right)\cdot\dfrac{(-e^x)}{\cancel{\left(2-e^x\right)}}}{e^x+x\cdot e^x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-e^x\cdot\log^2\left(2-e^x\right)-2\cdot e^x\cdot\log\left(2-e^x\right)}{e^x+x\cdot e^x}\right] = \frac{-1\cdot\log^2 1 - 2\cdot\log^2 1}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

ya que $\log(1)=0 \Rightarrow \log M = 0 \Rightarrow M = e^0 = 1$

Luego,

$$M = \lim_{x\to 0} x^{\log(2-e^x)} = 1$$

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} = \left[0^0\right]$ (para finalizar uno difícil)

Llamamos $M = \lim\limits_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log\left\{\lim_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to\pi}(1-\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right\} = \lim_{x\to\pi}\left[\log\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B \cdot \log A$

$$\lim_{x\to\pi}\left[\log\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\log\left(1-\cos 2x\right)\right] = \left[0\cdot(-\infty)\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{\log\left(1-\cos 2x\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{\dfrac{\operatorname{sen} 2x\cdot(2)}{1-\cos 2x}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{4\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{1-\cos 2x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}+2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 4\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-4\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] = \text{(operando)}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{(1+\cos x)\cdot(1-\cos x)}{4}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{4}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{4}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-4\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{4\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{-8\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}+2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\operatorname{sen} 2x-\operatorname{sen} x\cdot\cos 2x\cdot(2)}{2\cdot\cos 2x}\right] = 0$$

$\Rightarrow \log M = 0 \Rightarrow M = e^0 = 1$

Luego, $M = \lim_{x\to\pi}(1-\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} = 1$