Aplicaciones de los teoremas de Bolzano y Rolle

1. Comprobar que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$.

Solución:
Sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$.
Además, $f(0) = 3 = f(2)$, luego por el teorema de Rolle, $\exists c \in (0,2)$ tal que $f'(c) = 0$.
En este caso, además podemos calcular el valor de c:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Así, $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0,2)$ y $f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$.

2. Demostrar, aplicando el teorema de Rolle, que la ecuación $x^4 - 8x^2 + k = 0$ no tiene más de una solución en $[0,2]$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

Solución:
Supongamos que dicha ecuación tiene dos soluciones en el intervalo $[0,2]$, esto es, $\exists \alpha, \beta \in [0,2]$ con $\alpha < \beta$ tales que $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$, donde $f(x) = x^4 - 8x^2 + k$ es una función derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego:

i) f es continua en $[\alpha, \beta]$ y derivable en (α, β)

ii) $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$

Así, por el teorema de Rolle, $\exists c \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(c) = 0$ (además, $c \in (0,2)$), pero las soluciones de $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$ son $x = \begin{cases} -2 \\ 0 \\ 2 \end{cases}$ y ninguna de ellas está en el intervalo $(0,2)$, contradicción.

Como consecuencia, la ecuación $x^4 - 8x^2 + k = 0$ tiene una o ninguna solución en $[0,2]$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

3. Calcular p, m y n para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si} \quad -1 \le x \le 3 \\ mx + n & \text{si} \quad 3 < x \le 5 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,5]$.

Solución:
Estudiamos la continuidad de f en $x = 3$: ¿$\exists \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}\left(-x^2+px\right)=-9+3p=f(3)\\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(mx+n)=3m+n\end{array}\right\}\Rightarrow -9+3p=3m+n \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=3$$

Estudiamos ahora la derivabilidad de f en $x=3$: ¿$\exists f'(3)$?

$$\left.\begin{array}{l} f'_{-}(3)=-6+p\\ \qquad y=-x^2+px\\ \qquad y'=-2x+p\\ f'_{+}(3)=m\\ \qquad y=mx+n\\ \qquad y'=m\end{array}\right\}\Rightarrow -6+p=m \text{ para que } f \text{ sea derivable en } x=3$$

Por último, imponemos que $f(-1)=f(5)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-1-p\\ f(5)=5m+n\end{array}\right\}\Rightarrow -1-p=5m+n$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases}-9+3p=3m+n\\ -6+p=m\\ -1-p=5m+n\end{cases}\Rightarrow (p,m,n)=\left(\dfrac{10}{3},-\dfrac{8}{3},9\right)$

Además, en este caso podemos calcular el valor de c:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+\dfrac{10}{3} & \text{si} \quad -1\le x\le 3\\ -\dfrac{8}{3} & \text{si} \quad 3<x\le 5\end{cases}$$

luego $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$ ($c=\dfrac{5}{3}$).

4. [***Modelo de 2020, 3b y Junio de 2019, 3b***] Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$.

Solución:

La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego:

i) f es continua en $[-3,3]$

ii) f es derivable en $(-3,3)$

Además, $\left.\begin{array}{l} f(-3)=(-3)^2-4=5\\ f(3)=3^2-4=5\end{array}\right\}\Rightarrow f(-3)=f(3)$.

Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle, esto es, $\exists c\in(-3,3)$ tal que $f'(c)=0$.

5. [***Junio de 2018, propuesta B, 1B, a) y b)***] a) Prueba que cualquiera que sea la constante a, la función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$.

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

Solución:
a) Como f es una función derivable (por ser una función polinómica), es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego en particular en continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$.
Veamos si $f(1)=f(3)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1-5+7+a=3+a \\ f(3)=27-5\cdot 9+7\cdot 3+a=3+a \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=f(3)$$

Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle $\forall a\in\mathbb{R}$, en $[1,3]$.

b) $f'(x)=3x^2-10x+7 \underset{(1)}{=} 0 \Rightarrow x=\begin{cases} 1 \\ \dfrac{7}{3} \end{cases}$ (donde en (1) hemos usado el teorema de Rolle).

Así, el punto pedido es $c=\dfrac{7}{3}\in(1,3)$.

6. [**Junio de 2017, propuesta A, 1A, b)**] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2,6]$.

Solución:
a) Si $f(x)$ es derivable, tiene que ser continua, luego estudiamos la continuidad en $x=2$, ya que cada uno de los trozos es continuo, por ser funciones polinómicas.
Continuidad en $x=2$: ¿$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\left(x^2+a\right)=4+a \\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\left(-x^2+bx-9\right)=2b-13 \end{cases}\right\} \Rightarrow 4+a=2b-13$$ para que $f(x)$ sea continua en $x=2$.

Estudiamos la derivabilidad: cada una de las funciones componentes es derivable en su dominio, por ser funciones polinómicas, luego hay que estudiar la derivabilidad en $x=2$.
Derivabilidad en $x=2$: ¿$\exists f'(2)$?

$$f'(2) \left.\begin{cases} f_-'(x)=2x \Rightarrow f_-'(2)=4 \\ f_+'(x)=-2x+b \Rightarrow f_+'(2)=-4+b \end{cases}\right\} \Rightarrow 4=-4+b$$ para que f sea derivable en $x=2$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 4+a=2b-13 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow a=2\cdot 8-13-4=-1$$

Conclusión: para $(a,b)=(-1,8)$, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

b) Teorema de Rolle
Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists c\in(a,b)$: $f'(c)=0$.

Los valores de a y b calculados en el apartado a) son: $a=-1$ y $b=8$.
La función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (demostrado en el apartado anterior), luego en particular es continua en $[-2,6]$ y derivable en $(-2,6)$. Además,

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2-1=3 \\ f(6)=-6^2+8\cdot 6-9=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=f(6)$$

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c\in(-2,6)$ tal que $f'(c)=0$.

7. [**Junio de 2016, propuesta B, 1B, b)**] a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.
b) Razona que la ecuación $3e^x+x^5=0$ tiene al menos una solución real.
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

Solución:
a) Teorema de Bolzano
Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a)\neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c\in(a,b)$: $f(c)=0$.

Teorema de Rolle
Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists c\in(a,b)$: $f'(c)=0$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$ (por ser suma de funciones continuas), luego continua en $[-1,0]$.
Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\dfrac{2}{e}-1<0 \\ f(0)=2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } f(-1)\neq \text{ signo } f(0)$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c\in(-1,0)$: $f(c)=0$, esto es, c es una solución de la ecuación $3e^x+x^5=0$.
c) Como $f'(x)=2e^x+5x^4>0$ en $(-1,0)$, resulta que $3e^x+x^5=0$ tiene una única solución en $(-1,0)$ (Ya que es estrictamente creciente en dicho intervalo y, por tanto, si corta al eje OX, solo lo puede cortar una vez).
De otra forma:

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists c_1, c_2 \in (-1,0)$ soluciones de $3e^x + x^5 = 0$.

La función $f(x) = 3e^x + x^5$ verifica el teorema de Rolle:

- f es continua en $[c_1, c_2]$
- f es derivable en (c_1, c_2)
- $f(c_1) = 0 = f(c_2)$ (ya que c_1 y c_2 son soluciones de la ecuación)

luego $\exists c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$, pero $f'(x) = 2e^x + 5x^4 > 0$ en (c_1, c_2). Contradicción.

8. **[Reserva 1 de 2013, propuesta A, 1A]** a) Enuncia el Teorema de Rolle.
b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo (1, 2) donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula.

Solución:
a) Teorema de Rolle
Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.

b) La función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego en particular, es continua $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Además,

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = f(2)$$

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c \in (1,2)$ tal que $f'(c) = 0$, esto es, en el punto de abscisa $x = c$, la función recta tangente a $f(x)$ es nula.

9. [**Septiembre de 2012, propuesta A, 1A)**] a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.
b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$.
c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

Solución:
a) Teorema de Bolzano
Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.

b) Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3$, que es continua en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [-2,0] \\ f(-2)<0 \text{ y } f(0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(teorema de Bolzano) } x^5-5x+3=0 \text{ tiene una solución, } c_1 \text{, en } (-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [0,1] \\ f(0)>0 \text{ y } f(1)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(teorema de Bolzano) } x^5-5x+3=0 \text{ tiene una solución, } c_2 \text{, en } (0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [1,2] \\ f(1)<0 \text{ y } f(2)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(teorema de Bolzano) } x^5-5x+3=0 \text{ tiene una solución, } c_3 \text{, en } (1,2)$$

c) Veamos que no puede tener más soluciones reales:
Supongamos que $\exists c_4 \notin (-2,2)$ solución de la ecuación dada, es decir, la ecuación tiene una solución fuera del intervalo en el que existen c_1, c_2 y c_3.
Entonces, $f(c_4)=0$, y como $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, también lo es en el intervalo $[c_1,c_4]$ o $[c_4,c_1]$ y, además, $f(c_1)=f(c_4)=0$. Aplicando el teorema de Rolle, $\exists x_0 \in (c_1,c_4)$ o (c_4,c_1) tal que $f'(x_0)=0$.
Ahora bien, $f'(x)=5x^4-5$ y

$$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-5=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1\in[-2,1] \\ x=-1\in[-2,1] \end{cases}$$

Por tanto, esta ecuación no tiene una cuarta solución real, ya que de tenerla, debería estar fuera del intervalo estudiado y los valores que anulan a la derivada se encuentran en el ontervalo en el que se encuentran las raíces que ya habíamos determinado.

c) «De otra forma»:
Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists c_4 \in (-2,2)$ es otra solución de $x^5-5x+3=0$ distinta de las anteriores, y que las soluciones están ordenadas como sigue: $-2<c_1<c_2<c_3<c_4<2$ (si hace falta se pueden reordenar, y argumento de forma análoga, seguirá siendo cierto). Entonces,

$$f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=f(c_4)=0$$

y aplicando el teorema de Rolle:

$$\exists \alpha_1 \in (c_1,c_2): f'(\alpha_1)=0$$
$$\exists \alpha_2 \in (c_2,c_3): f'(\alpha_2)=0$$
$$\exists \alpha_3 \in (c_3,c_4): f'(\alpha_3)=0$$

esto es, $f'(x)=0$ tiene, al menos, tres soluciones reales en el intervalo $(c_1,c_4)\subset(-2,2)$, pero

$$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-5=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1$$

es decir, $f'(x)=0$ solo tiene dos soluciones reales en dicho intervalo. Contradicción.
Así, $x^5-5x+3=0$ solo tiene tres raíces reales.

10. [**Septiembre de 2011, propuesta B, 1B)**] a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.
b) Demuestra que la ecuación $e^x+x^7=0$ tiene al menos una solución real.
c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única.

<u>*Solución:*</u>

a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c \in (a,b): f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.

b) La función $f(x) = e^x + x^7$ es continua en $\mathbb{R}$ (por ser suma de funciones continuas), luego también lo es en $[-1,1]$ y, además, $\text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(1)$. Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1,1): f(c) = 0$, esto es, c es solución de la ecuación $e^x + x^7 = 0$.

c) Como $f(x) = e^x + x^7$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x + 7x^6 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego $e^x + x^7 = 0$ tiene una única solución real, ya que corta al eje OX y es estrictamente creciente.

De otra forma:

Como $f(x) = e^x + x^7$ es continua en $\mathbb{R}$ y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x + x^7\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x + x^7\right) = +\infty$$

aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in \mathbb{R}$ solución de $f(x) = 0$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}: f(c_1) = f(c_2) = 0$. Como

- f es continua en $[c_1, c_2]$
- f es derivable en (c_1, c_2)
- $f(c_1) = 0 = f(c_2)$ (ya que c_1 y c_2 son soluciones de la ecuación)

$\exists c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$, pero las soluciones de $f'(x) = e^x + 7x^6 = 0$ no son reales, ya que $f'(x) > 0$. Contradicción.

Por tanto, $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

11. [**Septiembre de 2011, propuesta B, 1B)**] Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ b) $g(x) = 2 - |x|$

Solución:

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.

a) Como $f\left(x\right)$ no es derivable en $x=0$, se tiene que $f\left(x\right)$ no es derivable en $\left[-2,2\right]$ y, por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, luego no hay contradicción.

b) $g\left(x\right)=2-\left|x\right|=g\left(x\right)=\begin{cases}2-x & \text{si} \quad x\geq 0\\ 2+x & \text{si} \quad x<0\end{cases}$

Continuidad en $x=0$: ¿$\lim_{x\to 0} g\left(x\right)=g\left(0\right)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0-} g\left(x\right)=\lim_{x\to 0-}\left(2+x\right)=2\\ \lim_{x\to 0+} g\left(x\right)=\lim_{x\to 0+}\left(2-x\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0} g\left(x\right)=2=g\left(0\right)\Rightarrow g \text{ es continua en } x=0$$

Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists g'\left(0\right)$?

$$\left.\begin{array}{l}g'_{-}\left(0\right)=-1\\ \qquad y=2-x\\ \qquad y'=-1\\ g'_{+}\left(0\right)=1\\ \qquad y=2+x\\ \qquad y'=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists g'\left(0\right)\Rightarrow g \text{ no es derivable en } x=0$$

Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, luego no hay contradicción.

12. **[Junio de 2006, primer bloque, B)]** Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f\left(-2\right)=f\left(2\right)$ pero no hay ningún valor $c\in\left(-2,2\right)$ tal que $f'\left(c\right)=0$. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle.

a) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^4}$ b) $g\left(x\right)=2-\left|x\right|$

Solución:

a) Teorema de Rolle

Si $f\left(x\right)$ es una función continua en $\left[a,b\right]$, derivable en $\left(a,b\right)$ y tal que $f\left(a\right)=f\left(b\right)$, entonces $\exists c\in\left(a,b\right): f'\left(c\right)=0$.

b) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^4}$

En $x=0\in\left[-2,2\right]$, la función no está definid y, por tano, no tiene sentido hablar de continuidad en dicho punto. Como consecuencia, no se puede aplicar el teorema de Rolle y no hay contradicción con el mismo.

c) $g\left(x\right)=2-\left|x\right|=\begin{cases}2-\left(-x\right) & \text{si} \quad x<0\\ 2-\left(+x\right) & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}2+x & \text{si} \quad x<0\\ 2-x & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

Sabemos que $y=\left|x\right|$ no es derivable en $x=0$ porque tiene un pico.

Vamos a estudiar, de todas formas, la derivabilidad de $g\left(x\right)$ en $x=0$: ¿$\exists g'\left(0\right)$?

$$g'(0)\ \left.\begin{cases}g_{-}'\left(x\right)=1\Rightarrow g_{-}'\left(0\right)=1\\ g_{+}'\left(x\right)=-1\Rightarrow g_{+}'\left(0\right)=-1\end{cases}\right\}\Rightarrow \nexists g'\left(0\right)\text{, es decir, } g \text{ sea derivable } x=0$$

Como consecuencia, no podemos aplicar el teorema de Rolle a g, ya que no cumple las hipótesis del mismo.