

Estudio de la continuidad de una función

1. a) Definición de función continua en un punto.

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{e}}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, estudia razonadamente su continuidad.

Solución:

a) Una función $f(x)$ es continua en $x = a \in \text{Dom}(f)$ cuando $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser un cociente (bien definido) y una función potencial-exponencial.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x = 1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e}}{2-x} = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} = [1^\infty] = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2-1} \left(\frac{x+1}{2} - 1\right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1-2}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cancel{(x-1)}}{2(x+1) \cancel{(x-1)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{2(x+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{e}$ y como $f(1) = \frac{\sqrt{e}}{2-1} = \sqrt{e}$, se tiene que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Conclusión: $f(x)$ es continua en \mathbb{R} .

2. Estudia la continuidad en todo \mathbb{R} de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

Solución:

Una función racional es continua en su dominio, luego es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Estudiamos las discontinuidades de f en dichos puntos:

Discontinuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cancel{(x-1)} (2x+1)}{(x+1) \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(2x+1)}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y,}$$

por tanto, f tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ (se evita definiendo $f(1) = \frac{3}{2}$).

Discontinuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0} \right] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad asintótica}$$

en $x = -1$.

3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \\ x-1 & \text{si } x = 1 \\ k & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Solución:

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión:

Continuidad en $x = -1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x = -1$:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

Como $\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 = f(-1)$, se tiene que f es continua en $x = -1$.

Continuidad en $x = 1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, se tiene que f no es continua en $x = 1$.

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x = 1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, se tiene que f no es continua en $x = 1$.

Conclusión: $\nexists k \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 1$.

4. Calcula el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Solución:

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x = 1$: $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x = 1$:

$$f(1) = k$$

Imponemos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ y obtenemos: $k = 2$

Conclusión: para $k = 2$ la función f es continua en $x = 1$ y, como consecuencia, en $[1, +\infty)$.

5. Calcula a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = 0$: $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + a) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + 2) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ se tiene que cumplir que } 1 + a = 2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x = 0$:

$$f(0) = e^0 + a = 1 + a$$

Para que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, se tiene que cumplir que $\boxed{1 + a = 2}$.

Continuidad en $x = 1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 2) = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ se tiene que cumplir que } a + 2 = \frac{b}{2}.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x = 1$:

$$f(1) = a + 2$$

Para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, se tiene que cumplir que $a + 2 = \frac{b}{2}$.

$$\text{Resolvemos el sistema } \begin{cases} 1 + a = 2 \\ a + 2 = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (1, 6).$$

Conclusión: para $(a, b) = (1, 6)$ la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y en $x = 1$.

6. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \log x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y $f(2) = 3$.

Solución:

Para que f sea continua en $x = 1$ (ya que cada una de las ramas lo es en su dominio, por se una función logarítmica bien definida y una función polinómica) se tiene que verificar:

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Como además queremos que $f(2) = 3$, hay que resolver el sistema correspondiente.

Continuidad en $x = 1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \log x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + b) = a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ se tiene que cumplir que } a + b = 0.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x = 1$:

$$f(1) = a + b$$

Para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, se tiene que cumplir que $a + b = 0$.

Como, además $f(2) = 3$, se tiene que $4a + b = 3$

$$\text{Resolvemos el sistema correspondiente: } \begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (1, -1)$$

Conclusión: para $(a, b) = (1, -1)$ se verifican las condiciones del enunciado.

7. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \log(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

donde \log es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución:

Continuidad en $x=1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=1$$

f presenta una discontinuidad de salto finito (de salto $1 - (-1) = 2$).

Continuidad en $x=2$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \log(x-1) = \log 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=2$:

$$f(2) = 1$$

Como $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow f$ es continua en $x=2$.

8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

Solución:

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser: la primera, una función racional cuyo denominador no se anula; la segunda la función coseno que es continua en \mathbb{R} ; y la tercera un cociente en el que el numerador está bien definido y el denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad/discontinuidad en los puntos de unión, esto es, en 2 y en 3.

Continuidad en $x=2$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos(\pi x) = \cos(2\pi) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=2$.

Continuidad en $x = 3$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \cos(\pi x) = \cos(3\pi) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\log(x-1)}{3-x} = \left[\frac{0}{0} \right] = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x = 3$:

$$f(3) = -1$$

Como $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1 = f(3) \Rightarrow f$ es continua en $x = 3$.

9. Estudia la continuidad en todo \mathbb{R} de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

Solución:

Una función racional es continua en su dominio, luego es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Estudiamos las discontinuidades de f en dichos puntos:

Discontinuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(2x+1)}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y,}$$

por tanto, f tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ (se evita definiendo $f(1) = \frac{3}{2}$).

Discontinuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0} \right] = -\infty \Rightarrow \text{y, por tanto, } f \text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x = -1.$$

10. Clasifica las discontinuidades de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

Solución:

Los puntos de discontinuidad de una función racional son los puntos en los que se anula el denominador:

$$x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Discontinuidad en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{-4}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{-4}{0} \right] = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x = 0.$$

Discontinuidad en $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

Por tanto, tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

11. ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 + 3x - 4}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$?

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a}{(x-1)(x+4)}$$

Para que el denominador no se anule, el numerador tiene que tener como factor a $x-1$, luego aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & a \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

Así:

$$x^2 + x + a = (x-1)(x+2)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{5}$$

Luego definiendo $f(1) = \frac{3}{5}$ evitamos la discontinuidad.