ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

1. Estudia, y calcula en su caso, las asíntotas de una función:

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$

5) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

8) $f(x)=\log\left(x^2-16\right)$ (Solo verticales)

9) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ (Solo horizontales)

10) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+3}}$ (Solo horizontales)

11) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

12) $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

13) $f(x)=2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

14) $f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$

Soluciones

1) Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

2) Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow x=3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -3+} f(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow x=-3 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2-9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{9}{x^2}} = 0$$

$y=0$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

3) Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\frac{x^2+x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m=1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+1}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4-x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x-4}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow n=-1$$

Por tanto, la recta $y = mx+n = x-1$ es una asíntota oblicua.

4) Asíntotas verticales

No tiene (ya que el denominador no se anula)

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal

Por tanto, no hay asíntotas oblicuas.

5) Esta función no tiene asíntotas.

6) Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \infty$$

Es decir, esta función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow n = 1$$

Así, la recta $y = x+1$ es una asíntota oblicua.

7) Asíntotas verticales

No tiene, que $\nexists a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales:

No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} = \infty$

Asíntotas oblicuas:

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}}=1$$

$$n_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\ldots=0$$

Así, la recta $y=x$ es una asíntota oblicua.

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}{-\frac{x}{x}}=-1$$

$$n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=\ldots=0$$

Así, la recta $y=-x$ es una asíntota oblicua.

8) Asíntotas verticales

$$\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-4-}\log\left(x^2-16\right)=-\infty\Rightarrow x=-4 \text{ es una A.V.}\\ \lim\limits_{x\to4+}\log\left(x^2-16\right)=+\infty\Rightarrow x=4 \text{ es una A.V.}\end{cases}$$

9) Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\left[\frac{1}{1+0}\right]=1\Rightarrow y=1 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\left[\frac{1}{1+\infty}\right]=0\Rightarrow y=0 \text{ es una A.H.}$$

10) Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{3}{x^4}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}=1\Rightarrow y=1 \text{ es una A.H.}$$

11) Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\Rightarrow y=0 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$$

12) Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

13) Estudiamos el dominio de la función:

$$\frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} \Rightarrow \frac{2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \text{ y } x > 0 \\ \text{o} \\ 2-x < 0 \text{ y } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = (0,2]$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es una A.V.}$$

Como no tiene sentido calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, ni $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, no tiene ni A.H., ni A.O.

14) Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+3}{e^{-x}} = -\infty$$

2. Estudia las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 1$$

Solución:

Asíntotas verticales:

No tiene, ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y, por tanto, $\nexists a \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - 4e^x + 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \left[e^x\left(e^x - 4\right) + 1\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{2x} - 4e^x + 1\right) = \begin{bmatrix} t = -x \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \left(e^{-2t} - 4e^{-t} + 1\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-2t} - 4\lim_{t\to+\infty} e^{-t} + \lim_{t\to+\infty} 1 = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{2t}} - 4\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} + \lim_{t\to+\infty} 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} - 4\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas (cuando } x \to \infty)$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}-4\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow m=0$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-4e^{x}+1\right)=\begin{bmatrix} t=-x \\ x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-2t}-4e^{-t}+1\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}e^{-2t}-4\lim_{t\to+\infty}e^{-t}+\lim_{t\to+\infty}1=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{2t}}-4\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}+\lim_{t\to+\infty}1=1\Rightarrow n=1$$

y, por tanto, $y=0x+1=1$ es una A.H.