Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

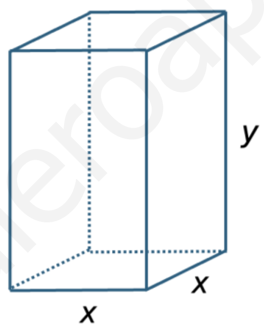
Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

   a) [**1'5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

   b) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



   a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).

   b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.

   c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2.

3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,\ -1,\ 3)$ y $B(-2,\ 4,\ 5)$.

   a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

   b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?

   c) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

4.

   a) [**1 punto**] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$.

   b) [**1,5 puntos**] Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

5.

a) [**1 punto**] Calcula la siguiente integral: $\int x\sqrt{2x+3}dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t=\sqrt{2x+3}$.

b) [**1,5 puntos**] Sean los vectores $\vec{u}=(1,\ a,\ a)$ y $\vec{v}=(-1,\ 0,\ 2)$, con $a\in\ \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

6.

a) **[1 punto]** Calcula los coeficientes $a,b,c\in\mathbb{R}$ de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y un punto de inflexión en $P(1,2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A)=0{,}2$; $P(A\cap B)=0{,}1$ y $P(A\cup B)=0{,}3$. Calcula:

b.1) [**0,75 puntos**] $P(B)$ y $P(A\cap\bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B.

b.2) [**0,75 puntos**] $P(A\mid B)$ y $P(B\mid A)$.

7.

a) [**1,25 puntos**] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) [**1,25 puntos**] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,\ 2,\ 1)$ y $\vec{v}=(1,\ 0,\ 0)$.

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Junio 2024

1) $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{cases}$ $\quad M=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\det M = a^2-7a+10=0 \Rightarrow a=\begin{cases}2\\5\end{cases}$

Si $\boxed{a=2}$ $\Rightarrow \operatorname{rg} M = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-5F_1+2F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rg}\tilde{M}=3$$

Si $\boxed{a=5}$ $\Rightarrow \operatorname{rg} M = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 21 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rg}\tilde{M}=2$$

Discusión (aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius)

Si $a \neq \begin{cases}2\\5\end{cases} \Rightarrow \operatorname{rg} M = 3 = \operatorname{rg}\tilde{M} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $a=2 \Rightarrow \operatorname{rg} M = 2 \neq 3 = \operatorname{rg}\tilde{M} \Rightarrow$ S.I.

Si $a=5 \Rightarrow \operatorname{rg} M = 2 = \operatorname{rg}\tilde{M} <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) Resolución para $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-5F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{-8F_2+3F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

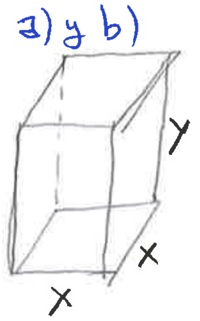
De [3]: $z=1$

Sustituimos en [2]: $y=\frac{-1+1}{-3}=0$

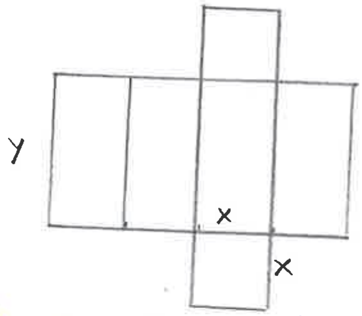
Sustituimos en [1]: $x=1-1=0$

Solución: $\boxed{(x,y,z)=(0,0,1)}$

② a) y b)



$V = 1\ dm^3$



Superficie: $4xy + 2x^2$

Volumen: $x^2 y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x^2}$

Por tanto, la función que tenemos es:

$$\boxed{f(x) = 4x \cdot \frac{1}{x^2} + 2x^2 = \frac{4}{x} + 2x^2}$$

Optimizamos f:

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2} + 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4}{x^2} + 4x = 0 \Rightarrow -4 + 4x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{8x}{x^4} + 4$$

$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mín. relativo de f

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $\boxed{1 \times 1 \times 1\ dm}$

c) La superficie de cada envase es $4 + 2 = \underline{\underline{6\ dm^2}}$ y tendrá un coste de $6 \cdot 5 = \underline{\underline{30\ €}}$

③ $A(2,-1,3)$, $B(-2,4,5)$

a) $r \equiv \{A, \vec{AB}\}$

$\vec{AB} = (-2,4,5)-(2,-1,3) = (-4,5,2)$

$$\boxed{r \equiv \frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{2} \equiv \begin{cases} x = 2-4\lambda \\ y = -1+5\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Longitud de la viga $= d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2+4^2+5^2} = \boxed{3\sqrt{5}\ u}$

c) $A_{\substack{\text{TRIÁNGULO} \\ A,B,C}} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+12^2+6^2} = \boxed{9\ u^2}$

$\vec{AC} = (0,0,1)-(2,-1,3) = (-2,1,-2)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -12\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k} = (-12,12,6)$$

④ a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{(1)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{(2)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} =$$

$= +\infty$

donde en (1) y (2) hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{(orlamos)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{rg A = 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}}$$

5 a) $\int x\sqrt{2x+3}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=2x+3 \Rightarrow & dt = 2\,dx \\ & \Downarrow \\ \frac{t-3}{2}=x & \frac{1}{2}dt = dx \end{array}\right] =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (t-3)\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{4}\int\left(t^{3/2}-3t^{1/2}\right)dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\cdot\frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] =$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5}t^{5/2} - 3\,\frac{2}{3}t^{3/2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5} - 2\sqrt{(2x+3)^3}\right] =$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{5}(x-1)\sqrt{(2x+3)^3}\right] + C = \boxed{\frac{1}{5}(x-1)\sqrt{(2x+3)^3} + C}$

$\boxed{= \frac{1}{5}\left(2x^2+x-3\right)\sqrt{2x+3} + C}$

Usando el cambio que nos dan

$\int x\sqrt{2x+3}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt{2x+3} \Rightarrow & dt = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx \\ \frac{t^2-3}{2} = x & \sqrt{2x+3}\,dt = dx \Rightarrow t\,dt = dx \end{array}\right] =$

$= \int \frac{t^2-3}{2}\cdot t\cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t^4-3t^2\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \cancel{3}\frac{t^3}{\cancel{3}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^5}{5} - \left(\sqrt{2x+3}\right)^3\right] + C =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+3)^2\sqrt{2x+3}}{5} - (2x+3)\sqrt{2x+3}\right] + C =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(4x^2+9+12x)\sqrt{2x+3} - 5(2x+3)\sqrt{2x+3}}{5}\right] + C =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(4x^2+2x-6)}{5}\sqrt{2x+3}\right] + C = \boxed{\frac{1}{5}\left[(2x^2+x-3)\sqrt{2x+3}\right] + C}$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1,a,a) \\ \vec{v} = (-1,0,2) \end{array}\right\}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 60°$

$\frac{1}{2} = \frac{-1+2a}{\sqrt{1+2a^2}\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5(1+2a^2)} = 2(-1+2a)$

$5(1+2a^2) = (-2+4a)^2$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1+2a$

$5+10a^2 = 4+16a^2-16a$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+a^2+a^2} = \sqrt{1+2a^2}$

$6a^2-16a-1=0$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\boxed{a = \frac{8\pm\sqrt{70}}{6}}$

6) a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

f tiene un extremo relativo en $x=2 \Rightarrow f'(2)=0$

f tiene un punto de inflexión en $P(1,2) \Rightarrow \begin{cases} f(1)=2 \\ f''(1)=0 \end{cases}$

- $f(1)=2 \Rightarrow 1+a+b+c=2 \Rightarrow a+b+c=1$
- $f'(x) = 3x^2+2ax+b$

  $f'(2)=0 \Rightarrow 12+4a+b=0 \Rightarrow 4a+b=-12$
- $f''(x) = 6x+2a$

  $f''(1)=0 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow a=-3$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+b=-12 \\ a=-3 \end{cases} \longrightarrow b=-12-4\cdot(-3)=0 \qquad c=1+3=4$$

Solución: $(a,b,c)=(-3,0,4)$

b) $P(A)=0{,}2$

$P(A\cap B)=0{,}1$

$P(A\cup B)=0{,}3$

b1) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0{,}3 = 0{,}2 + P(B) - 0{,}1$

$\boxed{P(B)=0{,}2}$

$\boxed{P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B) = 0{,}2-0{,}1 = 0{,}1}$

$A\cap\overline{B} = A-B$

b2) $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5}$

$\boxed{P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5}$

⑦ a) $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$

¿ $a\in\mathbb{R}$ t.q. $A=A^{-1}$?

Calculamos A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-aF_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Imponemos que $A=A^{-1}$

$$A=A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 1=1 \\ 1=1 \\ 0=-a \end{cases} \Rightarrow a=0$$

Solución: $\boxed{\text{para } a=0,\ A=A^{-1}}$

b) r (recta) t.q. $\begin{cases} A(1,0,0)\in r \\ r\perp\vec{u} \text{ y } r\perp\vec{v} \end{cases}$

$$r\equiv\{A,\vec{u}\times\vec{v}\}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\vec{j}-2\vec{k}=(0,1,-2)$$

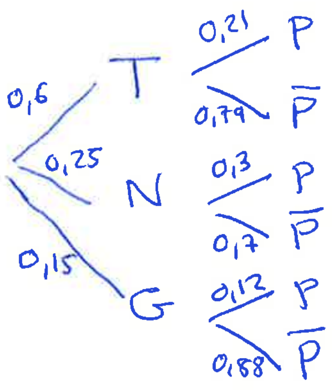
$$\boxed{r\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$$

(8) a) T = Socio que juega al Tenis

N = " " practica natación

G = " " practica golf

P = obtener premio



a1) $\boxed{P(P)} = P(T)P(P/T) + P(N)P(P/N) +$

$+ P(G)P(P/G) = 0{,}6 \cdot 0{,}21 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}15 \cdot 0{,}12 =$

$= \boxed{0{,}219}$

a2) $P(N/P) = \dfrac{P(N \cap P)}{P(P)} = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}3}{0{,}219} = \boxed{0{,}3425}$

b) X = tiempo que tarda en recorrer 5 km

$X \sim N(60, 8) \quad \begin{cases} \mu = 60 \\ \sigma = 8 \end{cases}$

b1) $\boxed{P(X < 50)} = P\left(\dfrac{X - 60}{8} < \dfrac{50 - 60}{8}\right) = P(Z < -1{,}25) =$

$= P(Z \geq 1{,}25) = 1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = \boxed{0{,}1056}$

b2) $\boxed{P(50 < X < 66)} = P\left(\dfrac{50-60}{8} < Z < \dfrac{66-60}{8}\right) = P(-1{,}25 < Z < 0{,}75) =$

$= P(Z < 0{,}75) - P(Z < -1{,}25) = 0{,}7734 - 0{,}1056 = \boxed{0{,}6678}$