11

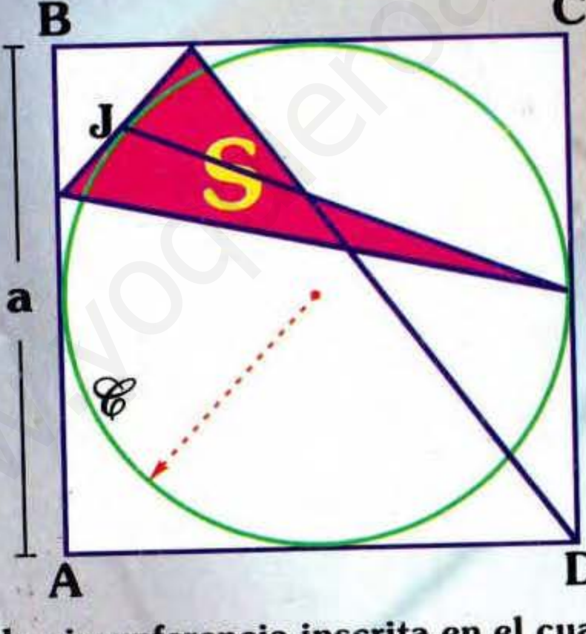
GEOMETRÍA

ÁREAS DE REGIONES PLANAS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Si $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD, J es punto de tangencia, entonces: $S=\frac{a^2}{8}$

Editorial CUZCANO

Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

ÁREAS DE REGIONES PLANAS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos
300 Problemas Propuestos

JULIO ORIHUELA BASTIDAS

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

ÁREAS

DE REGIONES PLANAS

Autor : Julio Orihuela Bastidas

Editor : Editorial Cuzcano

Composición, Diagramación y Montaje :
Área de cómputo y publicaciones de la Editorial Cuzcano

Jr. Coricancha N° 675 Zárate S. J. L. Lima - Perú

Primera Edición : Diciembre 2010

Tiraje : 1 000 ejemplares

Obra editada, impresa y distribuida por:
Editorial Cuzcano
Jr. Coricancha N° 675 Zárate S. J. L. Lima - Perú
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña
Telefax 423-8154

LIMA - PERÚ

Introducción

Las matemáticas en nuestro país vienen atravesando por un gran cambio, producto del esfuerzo de muchos profesores y estudiantes que se preparan y afrontan el reto de superación, es agradable ver los recientes éxitos internacionales logrados por nuestros estudiantes, lo cual no contrasta con los resultados de la UNESCO donde nuestros escolares ocupan los últimos lugares. Por supuesto el éxito no es producto de la casualidad, pues en realidad nada surge de nada, es producto de la inversión de pocas instituciones privadas y del talento de muchos estudiantes y profesores que no hace mucho fueron estudiantes. La idea es hacer nuestra educación más competitiva, llegar a más zonas de nuestro país.

Con el deseo de aportar, de alguna manera sumar positivamente y unirme al grupo de profesores que viene impulsando el estudio de las matemáticas, desde mi campo que es la geometría, presento esta nueva publicación: "Áreas de regiones planas".

El tema es muy amplio y nos conduce a referirnos desde el origen de la geometría hasta nuestros días, realizar muchas notas históricas, aplicaciones en juegos educativos y pedagógicos, por supuesto mi objetivo es llegar a un público amplio en especial al nivel preuniversitario para ello he dosificado el tipo de problemas para un público básico hasta uno avanzado. He sacrificado algunas veces la belleza de la geometría y he enfocado el tema netamente académico.

Se trata de un libro teórico y práctico, inicio la obra indicando la idea de área, así como enunciando el grupo de axiomas para poder demostrar la mayoría de expresiones dadas para el cálculo de áreas: En la primera parte de la teoría me he referido a la parte básica de áreas, para todo público escolar y preuniversitario; en la segunda parte es para un nivel UNI donde se requiere combinar el curso con otras ramas como trigonometría y álgebra; en la parte final de la teoría es para un público de mayor experiencia y como entrenamiento para estudiantes preolímpicos y para quien desea profundizar un poco más en la geometría. En cuanto a la parte práctica esta compuesto por 600 problemas, divididos en niveles, según ello el estudiante se ubicará y avanzará las soluciones planteadas como guías.

La obra es producto de la experiencia e investigación del autor realizadas en aulas académicas, centros superiores, y en el interactuar con los estudiantes, amigos y profesores, a quienes estoy muy agradecido, por sus sugerencias y críticas objetivas, las cuales me permiten mejorar en cada nueva publicación.

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- A mis padres Margarita y Moises por su apoyo incondicional.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
- A todos mis alumnos y ex alumnos que sin su apoyo estas publicaciones no serian posible.

Índice

ÁREAS DE REGIONES PLANAS

ÁREAS DE REGIONES PLANAS

GEOMETRÍA

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bertrand Russell

NOCIONES PREVIAS

La palabra Geometría, etimológicamente quiere decir medida de la Tierra, según el historiador Heródoto (siglo V a.C) atribuyó a los egipcios el origen de esta ciencia, la cual consistía en una colección desorganizada de reglas para calcular "áreas", "volúmenes", realizar construcciones sencillas, etc. La idea del área no dista mucho de lo moderno, se pagaba impuestos en función del lote que ocupaban. Los rebalses del Río Nilo muchas veces hacía desaparecer parte de la tierra de los agricultores, entonces los cobradores del faraón tenían que recalcular el "área" de cada terreno.

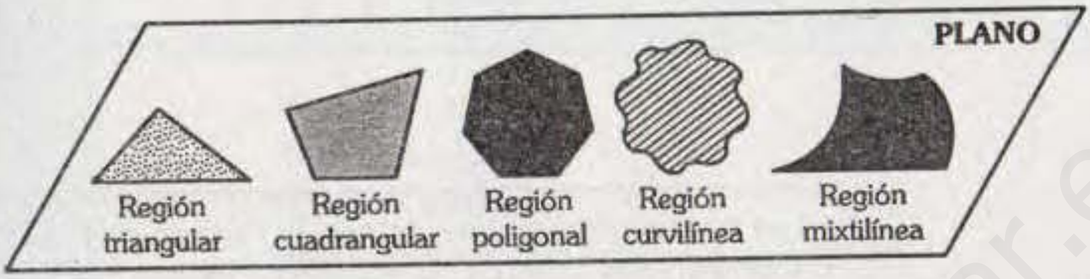
Durante los primeros dos mil años, la geometría fue un conjunto de conocimientos empíricos, obtenidos por inducción sin el fundamento de una demostración lógica. Los griegos inclinados por el temperamento a la filosofía y a la abstracción tomaron la geometría de los griegos y lo rehicieron dándole el carácter deductivo, comenzando por Tales (Siglo VI a.C) y consolidandose con la obra de Euclides (siglo III a.C), en cuya obra "Los Elementos" donde se presenta a la geometría organizada deductivamente. Este modelo se toma hasta nuestro días y es así que se dice que la matemática es estructurada.

Según Puig Adams, la edificación racional de la geometría se funda en las siguientes normas: enunciar los conceptos; admitir sin demostración ciertas propiedades que relacionan estos conceptos (axiomas); y deducir lógicamente las restantes propiedades.

Para todas las publicaciones he tratado de seguir dicho modelo de construcción de la geometría.

REGIÓN PLANA LIMITADA

Dada una línea cerrada en el plano (poligonal, curva o combinación de ellas), e denomina región plana limitada a la reunión de todos los puntos interiores a dicha ínea con su frontera, así tenemos:

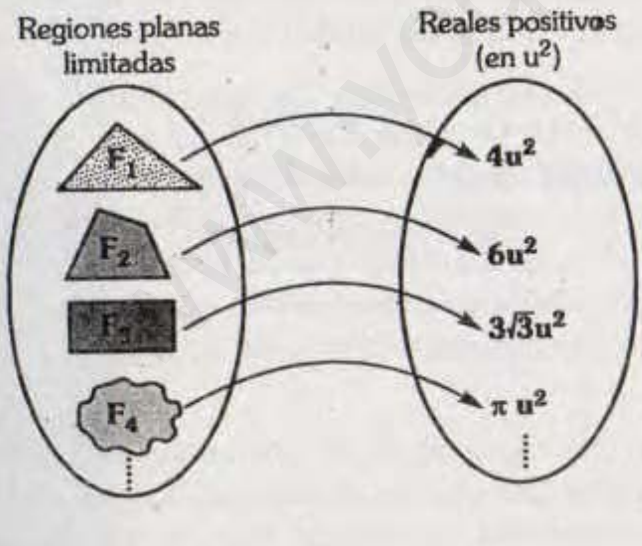


ÁREA

Elijamos una unidad de medida para las longitudes (centímetros, metros, pulgadas, yarda, etc), todos los cálculos se realizarán en función a esa longitud, aunque en la mayoría de ejercicios no se mencionen.

Asignaremos a cada región plana cerrada un número real positivo denominada área expresado en unidades cuadradas, la cual representará la extensión comprendida de la región plana limitada.

Por ejemplo:



Denotemos :

$S_{(F)}$: Área de la figura F

$$S_{(F_1)} = 4u^2$$

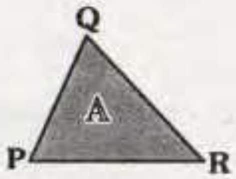
$$S_{(F_2)} = 6u^2$$

$$S_{(F_3)} = 3\sqrt{3}u^2$$

$$S_{(F_4)} = \pi u^2$$

Notación:

Aunque no hay una notación general, se suele usar las siguientes:

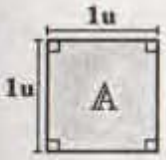


Área de la región triángular PQR:

$S_{\Delta PQR}$; (PQR) ; $S_{(PQR)}$; $[PQR]$; S_{PQR} ; $\mathbb{A}$

Si no hay lugar a ambigüedad: colocar una letra mayúscula sobre la región sombreada (algunas veces con subíndices)

AXIOMAS SOBRE ÁREAS

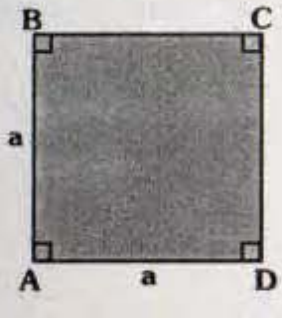
Un cuadrado cuyo lado es "1u", cumple que el área de su región es $1u^2$.  $\mathbb{A}=1u^2$	Regiones congruentes limitadas tienen áreas iguales.  $\mathbb{A}=\mathbb{B}$	Una región plana limitada puede ser descompuesta en subregiones, entonces la suma de áreas de dichas subregiones es el área inicial.  $S_T=S_1+S_2+S_3+S_4$

Nota

- El último axioma es a su vez un buen criterio para la resolución de problemas cuando el área de la región no es sencilla.
- En cálculo superior se calcula áreas de superficies curvas (no planas) con la ayuda de métodos de geometría diferencial; así como también hallar áreas bajo la curva cuando la región no es limitada (como por ejemplo, en estadística, cuando se estudia la normal)

TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRADA)

El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.



En el gráfico, ABCD es un cuadrado.

Se cumple:

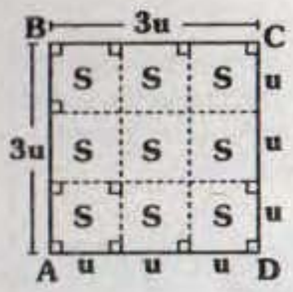
$$S_{(ABCD)} = a^2$$

Prueba

En realidad la prueba no es tan sencilla para todos los casos, veamos todas las posibilidades:

– Si $a \in \mathbb{N}$

(Elijamos un número sencillo: "a=3u", pero se prueba análogamente para todo a)



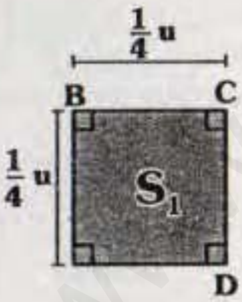
- Se divide en "3" partes iguales (en general en "a" partes iguales) cada lado, luego trazamos paralelas a los lados, tendremos "3^2" nuevos cuadrados (en general: "a^2" nuevos cuadrados). Usando los axiomas:
- Cada cuadrado pequeño tiene área "$S=1u^2$" y como el total es:

$$S_{(ABCD)} = 9S = 3^2(1u^2) = 9u^2$$

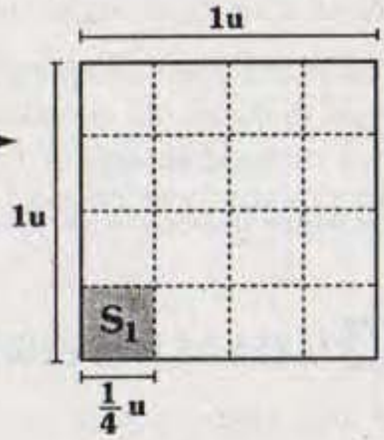
En general: $S_{(ABCD)} = a^2$

– Si "a" es de la forma: $\frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$

Elijamos para fines didácticos "$a=\frac{1}{4}$" pero también se puede hacer en general



considerando el cuadrado de lado "1u" →



Se descompone en cuatro partes cada lado, tendremos "4^2" nuevos cuadrados, cuya área será: "S_1"

Luego $\quad 4^2 S_1 = 1u^2 \Rightarrow S_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 u^2$

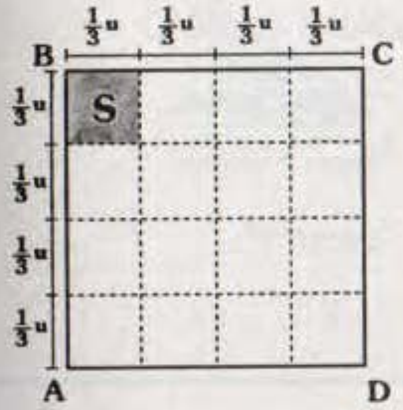
En general: $\quad S_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 u^2 = a^2$

– Si a es de la forma: $\frac{m}{n}$; $m \wedge n$ son naturales.

se puede decomponer así: $\frac{m}{n} = m\left(\frac{1}{n}\right)$

Tomemos por ejemplo: $a = \frac{4}{3}u = 4\left(\frac{1}{3}u\right)$

$S_{(ABCD)} = S$



Como ya fue probado que si el lado del cuadrado es $\frac{1}{n}$, entonces su área es : $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$$\Rightarrow \; S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 u^2 \quad \Rightarrow \; S_{(ABCD)} = \frac{16}{9}u^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 u^2$$

En general: $S_{(ABCD)} = a^2$

– Si "a" es irracional, la prueba se realiza con límites (ver anexos), de todos maneras se prueba que:

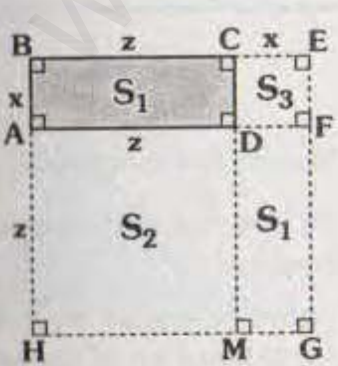
$$S_{(ABCD)} = a^2; \text{ donde } a \in \mathbb{R}^+$$

TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN RECTANGULAR)

El área de una región rectangular es el producto de sus dimensiones.

Prueba

Sea el rectángulo ABCD, cuyos lados son AB=x y BC=z, como ya conocemos el área de una región cuadrada, formemos el cuadrado cuyo lado mide "x+z"



- Como ABCD es congruente con MDFG

$$\Rightarrow \; S_{(ABCD)} = S_{(MDFG)} = S_1$$

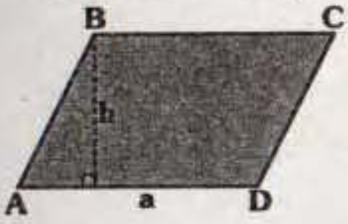
- $S_2 = z^2 \wedge S_3 = x^2$, luego:

$$\underbrace{S_{(HBEG)}} = (x+z)^2$$

$$\underbrace{S_2}_{z^2} + \underbrace{S_3}_{x^2} + 2S_1 = x^2 + z^2 + 2xz \qquad \therefore \; \mathbf{S_1 = xz}$$

TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA)

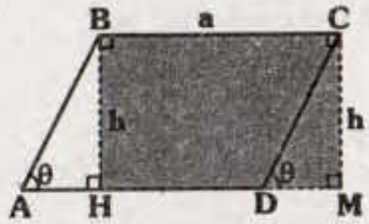
n el gráfico; ABCD es un paralelogramo



e cumple:

$$\boxed{S_{(ABCD)} = ah}$$

Prueba



Como $\triangle AHB \cong \triangle DMC$

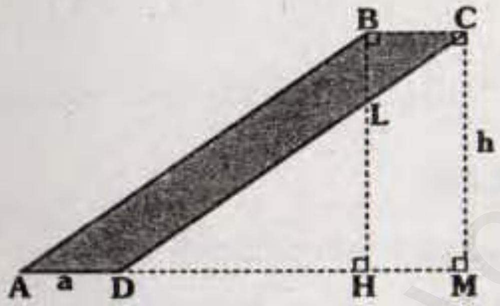
$\Rightarrow\ S_{\triangle AHB} \cong S_{\triangle DMC}$

$\Rightarrow\ S_{(ABCD)} = S_{(HBCD)}$

$\therefore\ S_{(ABCD)} = ah$

Observación

- También se cumple en este caso:



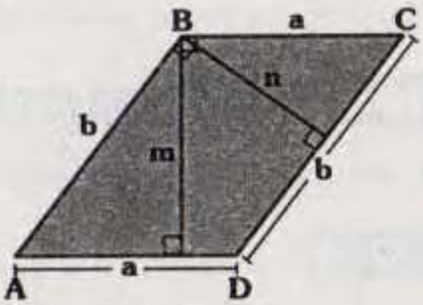
$\triangle AHB \cong \triangle DMC$

$\Rightarrow\ S_{\triangle AHB} = S_{\triangle DMC}$

$\Rightarrow\ S_{(ABLD)} = S_{(HLCM)}$

$\Rightarrow\ S_{(ABCD)} = S_{(HBCM)} = ah$

- Se deduce:



$$\boxed{am = bn}$$

REGIONES EQUIVALENTES

e llaman regiones equivalentes, a aquellas regiones que tienen áreas iguales:

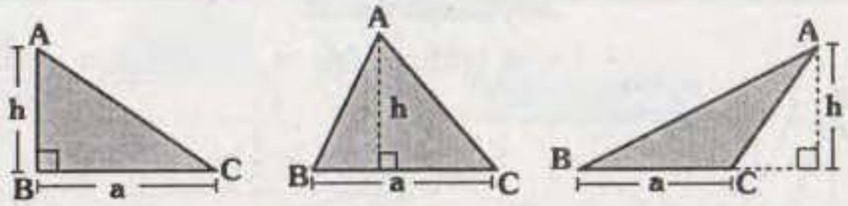
Si $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{C} \Rightarrow$ Dichas regiones son equivalentes.

Una aplicación sobre regiones equivalentes las veremos más adelante en el juego chino TANGRAM.

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

TEOREMA (Fórmula básica)

El área de toda región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado con la altura relativa a dicho lado.



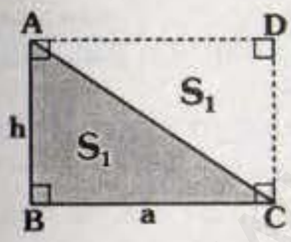
(ABC): Área de la región triangular ABC

Se cumple:

$$\boxed{S_{(ABC)} = \frac{ah}{2}}$$

Prueba

Veamos para cada caso:

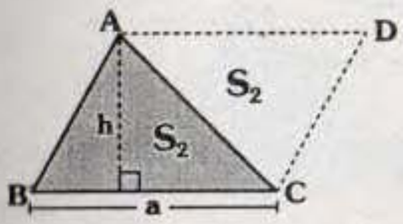


- Completamos el rectángulo ABCD, luego tendremos:

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_1$$

- Por teorema: $2S_1 = ah$

$$\therefore \quad S_1 = \frac{ah}{2}$$

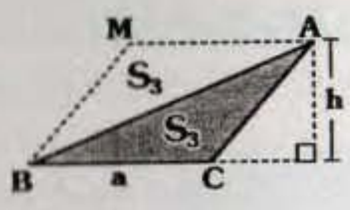


- Completamos el paralelogramo ABCD, luego tendremos:

$$\Delta ABC \cong \Delta CDA \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} = S_2$$

- Por teorema: $2S_2 = ah$

$$\therefore \quad S_2 = \frac{ah}{2}$$

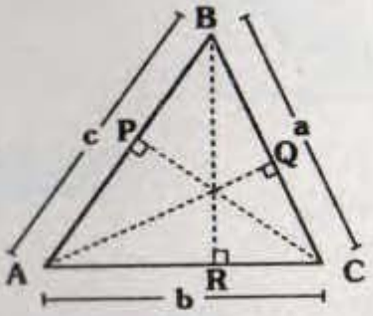


- Análogamente completamos el paralelogramo ACBM, tendremos $2S_3=ah$

$$\therefore \quad S_3=\frac{ah}{2}$$

Observaciones

En el gráfico, $AQ = h_a$, $CP = h_c$ y $BR = h_b$



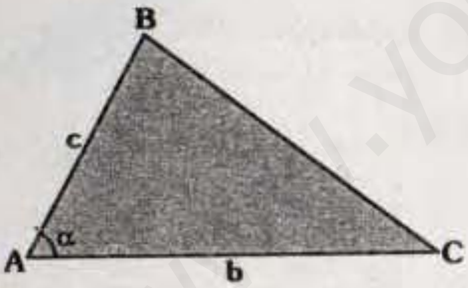
$$\Rightarrow \quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ah_a=bh_b=ch_c}$$

Un resultado similar se obtiene con semejanza y con "Relaciones Métricas" concluyendo que la mayor altura es relativa al menor lado y viceversa.

TEOREMA (Fórmula trigonométrica)

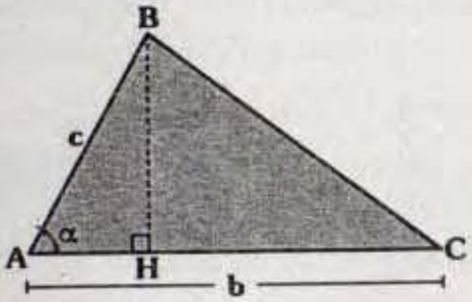
l área de toda la región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos e sus lados multiplicado con el seno de la medida del ángulo entre dichos lados.



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{cb}{2}\operatorname{sen}\alpha}$$

Prueba

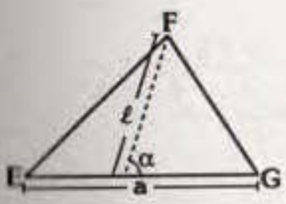


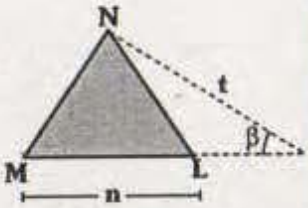
- Se traza la altura BH
- En ⊿AHB: $BH=c.\operatorname{sen}\alpha$
- $$S_{\Delta ABC}=\frac{b(BH)}{2}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC}=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

Observaciones

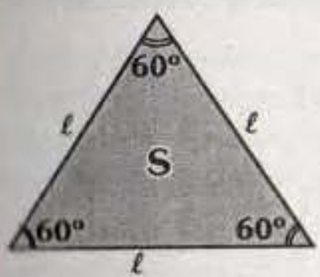
- En forma similar al anterior, se prueba los siguientes resultados:





$$\boxed{S_{\Delta EFG}=\frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha} \qquad \boxed{S_{\Delta MNL}=\frac{nt}{2}\operatorname{sen}\beta}$$

- Para el triángulo equilátero, se cumple:

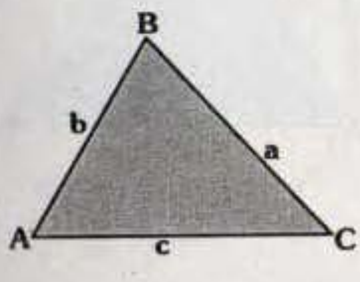


$$S=\frac{\ell\ell}{2}\operatorname{sen}60°$$

$$\boxed{S=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

TEOREMA (Fórmula de Herón)

El área de toda región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro, con las diferencias del semiperímetro con las longitudes de cada lado.



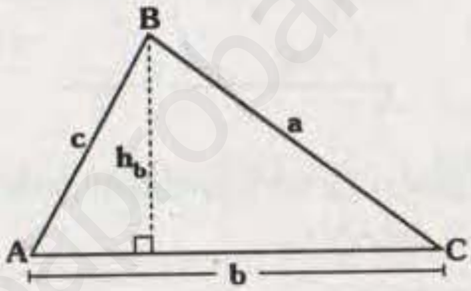
En el gráfico, sea **p** el semiperímetro

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Prueba



- Por la fórmula básica:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{bh_b}{2} \qquad \ldots(1)$$

- Por el teorema de Herón, (relaciones métricas):

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \ldots(2)$$

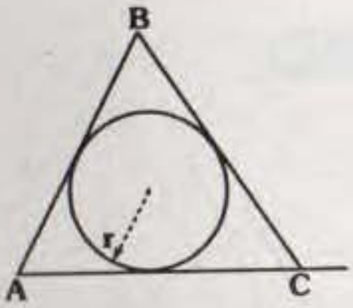
- De (1) y (2):

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DIVERSAS EXPRESIONES PARA EL ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

EN FUNCIÓN DEL INRADIO

El área de toda región triangular es igual al producto del semiperímetro con su inradio.

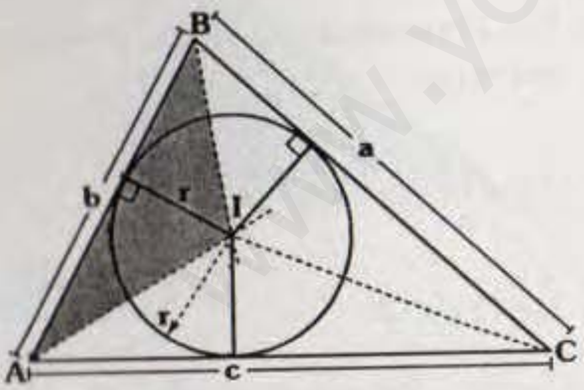


En el gráfico, **p** y **r** son el semiperímetro e inradio del ΔABC

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = pr}$$

Prueba



- Usemos el criterio de hallar un área como la suma de sus regiones parciales, así:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AIC} + S_{\Delta BIC} + S_{\Delta CIA}$$

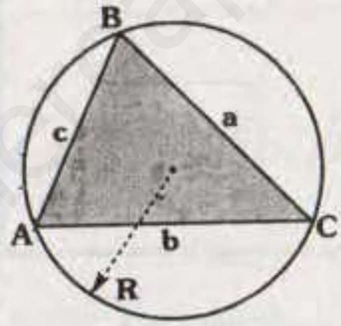
$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \underbrace{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}_{p} r$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = pr$$

EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO

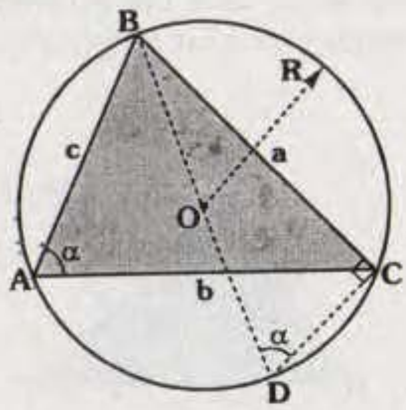
El área de toda región triangular es igual al producto de las longitudes de los tres lados entre cuatro veces el circunradio



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}}$$

Prueba



- Por fórmula trigonométrica:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad ...(1)$$

- En $\measuredangle BCD$:

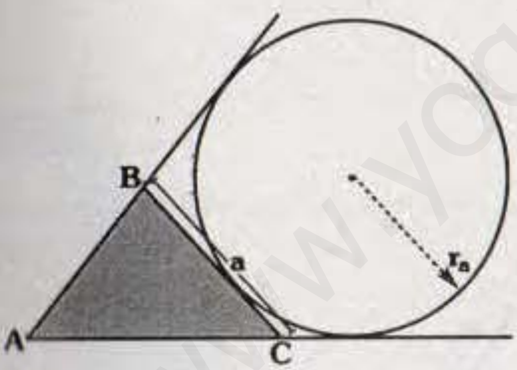
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

EN FUNCIÓN DEL EXRADIO

El área de toda región triangular es igual el producto del exradio con la diferencia del semiperímetro con la longitud del lado relativo a dicho exradio.

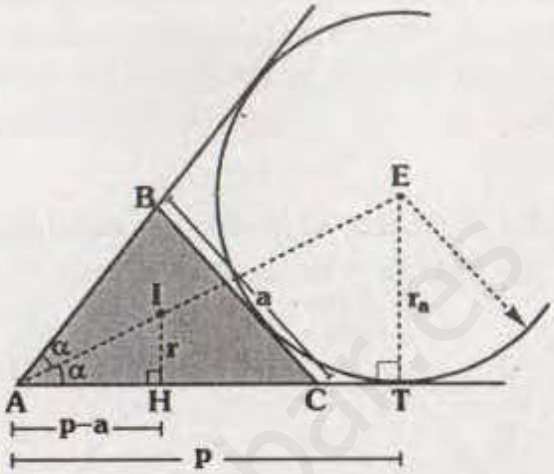


En el gráfico, p y r_a son el semiperímetro y exradio del ΔABC

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r_a(p-a)}$$

Prueba



- Sea p el semiperímetro del ΔABC
- Se ubica el incentro I del ΔABC y se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$)

$$\Rightarrow \; AH = p - a$$

- $\measuredangle AHI \sim \measuredangle ATE \;\Rightarrow\; \dfrac{r}{p-a} = \dfrac{r_a}{p}$

$$\Rightarrow \; \underbrace{pr}_{S_{\Delta ABC}} = r_a(p-a)$$

$$\therefore \; S_{\Delta ABC} = r_a(p-a)$$

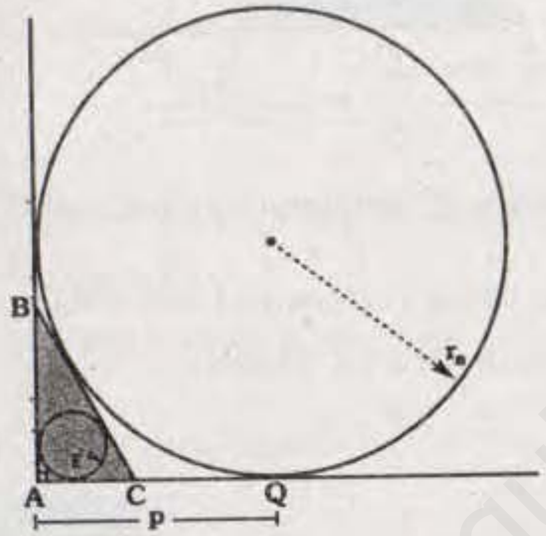
Análogamente, para cada lado. Sea AB=c y AC=b, se tendrá:

$$\boxed{\begin{gathered} S_{\Delta ABC} = r_b(p-b) \\ S_{\Delta ABC} = r_c(p-c) \end{gathered}}$$

EXPRESIONES PARA ÁREAS DE REGIONES LIMITADAS POR TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Además de conocer la forma de hallar el área de un triángulo rectángulo con los catetos, es importante conocer otras expresiones que por su presencia en muchos ejercicios y por su simplicidad en la expresión.

- En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita y exinscrita.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r_a r}$$

Prueba

- Sabemos que:

$$S_{\triangle} = pr \qquad ...(1)$$

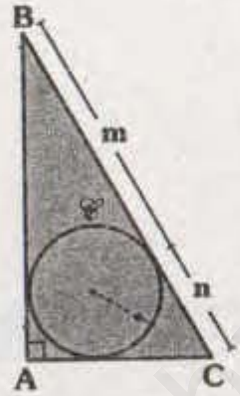
donde p es el semiperímetro de ABC

- Por propiedad de circunferencia:

$$\underbrace{AQ}_{r_a} = p$$

- En (1): $S_{\triangle ABC} = r_a r$

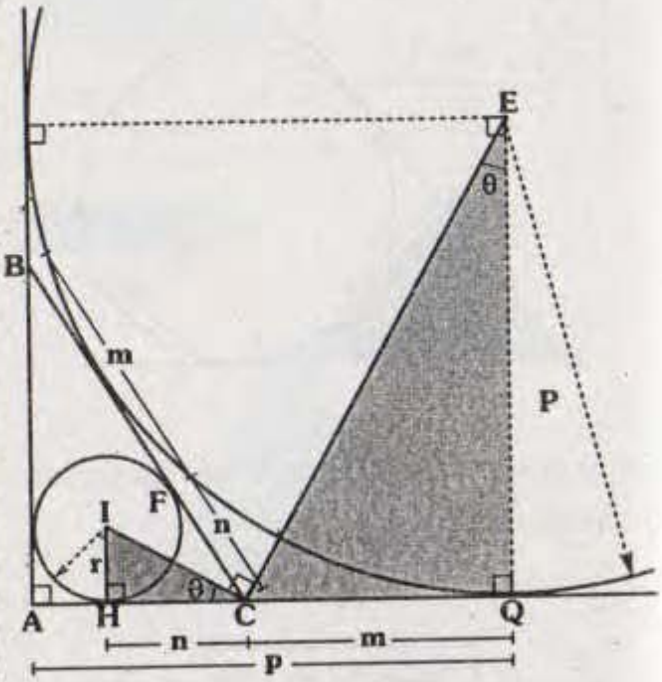
- En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita, se cumple:



$$\boxed{S_{\triangle ABC} = mn}$$

Prueba

- Tracemos también la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AC}$ (sólo como referencia)



- Por propiedad de circunferencia:

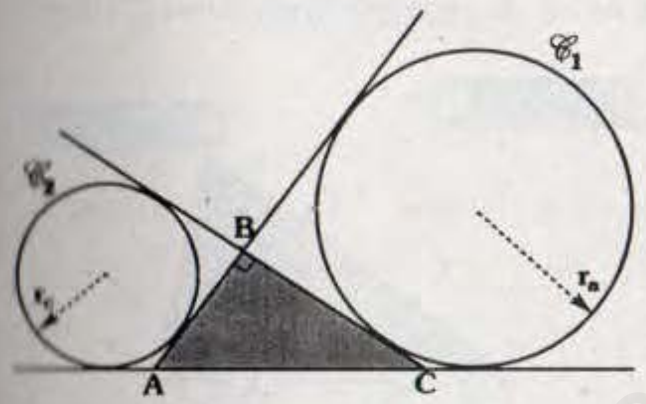
$CF=CH=n$; $BF=CQ=m$ y $AQ=p$

- $\triangle IHC \sim \triangle CQE$: $\dfrac{r}{n}=\dfrac{m}{p}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{rp}=mn$$

$$\therefore \; S_{\triangle ABC}=mn$$

❑ En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencia exinscrita para el $\triangle ABC$

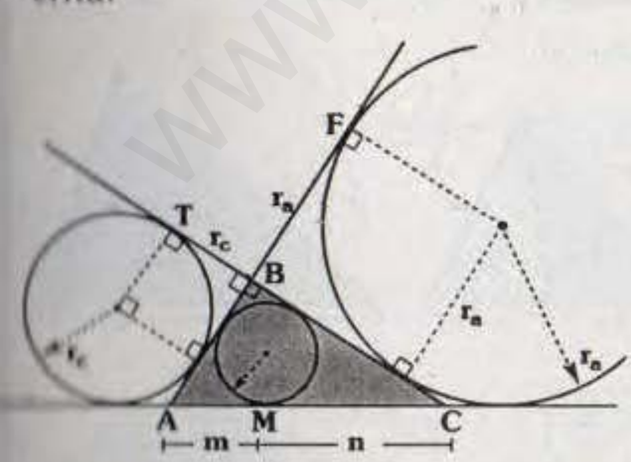


Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=r_a r_c}$$

Prueba

- Tracemos ahora la circunferencia inscrita.

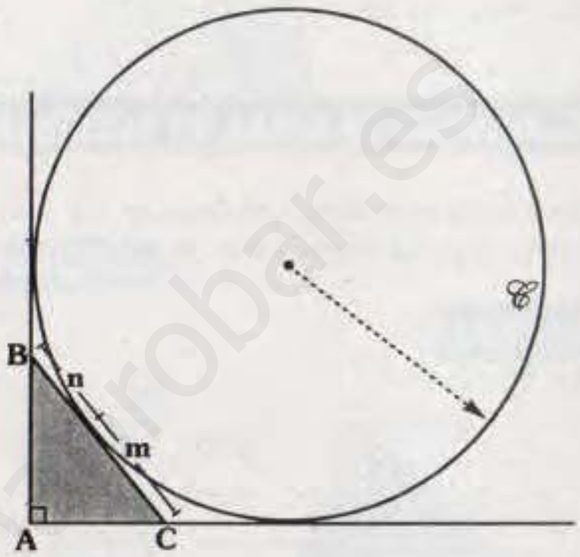


- Por propiedad de circunferencia:

$$\underbrace{BT}_{r_c}=AM=m \;\text{ y }\; \underbrace{BF}_{r_a}=MC$$

- Como $S_{\triangle ABC}=mn \;\Rightarrow\; S_{\triangle ABC}=r_c r_a$

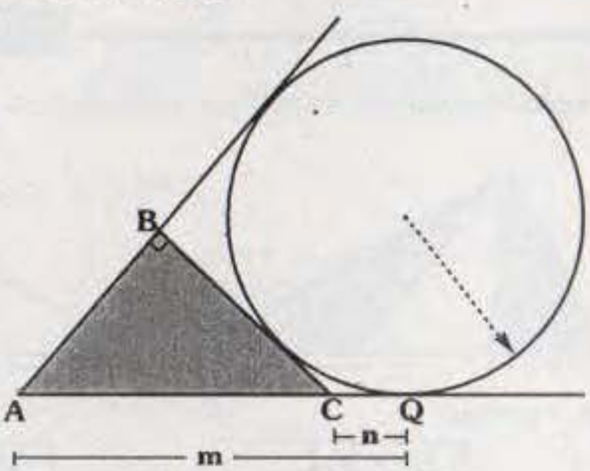
❑ En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita del $\triangle ABC$



Se cumple: $\boxed{S_{\triangle ABC}=mn}$

La prueba se deja como ejercicio para el lector

❑ En el gráfico, se muestra la circunferencia exinscrita.



Se cumple: $\boxed{S_{\triangle ABC}=mn}$

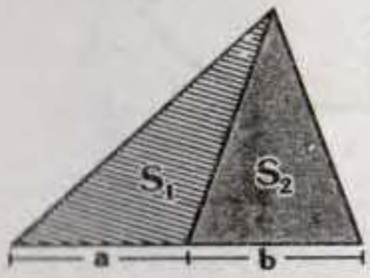
Prueba

- Notemos que "m" es el semiperímetro
- Si trazamos la circunferencia inscrita, tangente a $\overline{BC}$ en T, entonces BT=CQ=n
- Usemos $S_{\triangle ABC}=pr$, donde r es inradio:
- Como: $r=BT \Rightarrow n=r$ $\therefore$ $S_{\triangle ABC}=mn$

RELACIONES DE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Ahora veremos diversas formas de comparar áreas de regiones triangulares, cuando tienen algunos elementos en común.

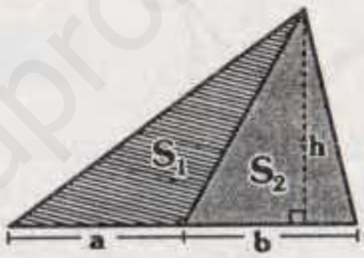
TEOREMA



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}}$$

Prueba

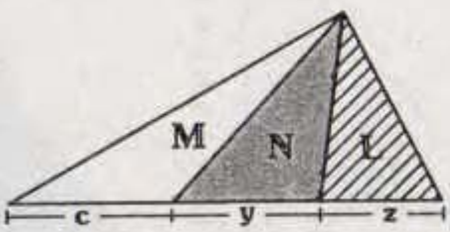


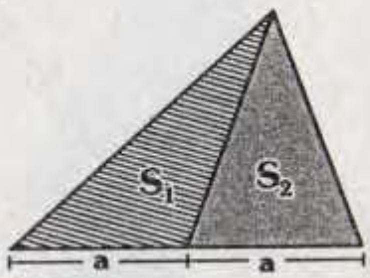
Usemos la fórmula básica:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{ah}{2} \\ S_2 &= \frac{bh}{2} \end{aligned}\right\} \frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$$

Observación

Veamos algunos casos particulares de lo anterior:



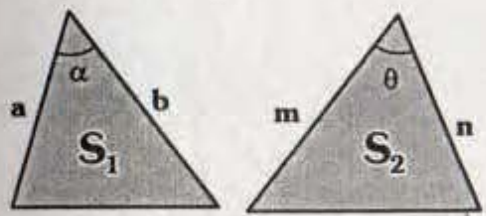


Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_3}{S_4}=\frac{c}{d}} \qquad \boxed{\frac{M}{x}=\frac{N}{y}=\frac{L}{z}} \qquad \boxed{S_1=S_2}$$

TEOREMA

Si $\alpha=\theta$ ó $\alpha+\theta=180°$



Se cumple: $\boxed{\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{ab}{mn}}$

Prueba

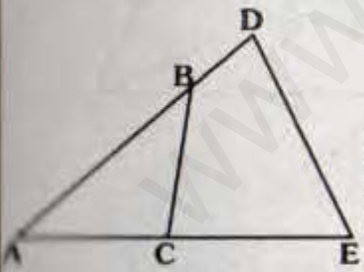
- Como $\alpha=\theta$ ó $\alpha+\theta=180°$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\theta$$

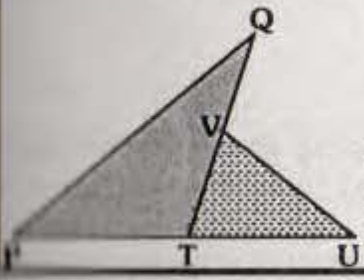
- $$\left.\begin{aligned} S_1&=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha \\ S_2&=\frac{mn}{2}\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \ \frac{S_1}{S_2}=\frac{ab}{mn}$$

Observación

Como caso particular veamos:

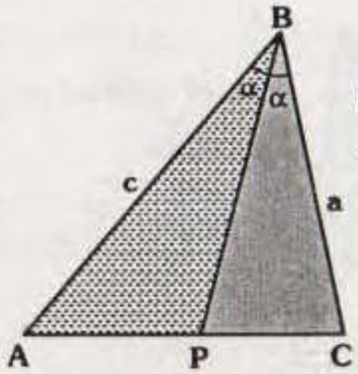


$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{(AB)(AC)}{(AD)(AE)}$$



$$\frac{S_{\Delta PQT}}{S_{\Delta VTU}}=\frac{(PT)(TQ)}{(TV)(TU)}$$

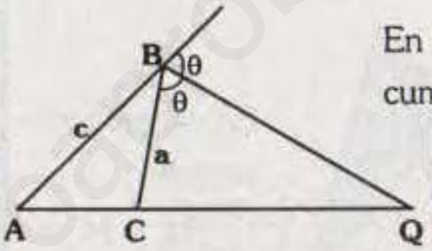
TEOREMA



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta PBC}}=\frac{c}{a}}$$

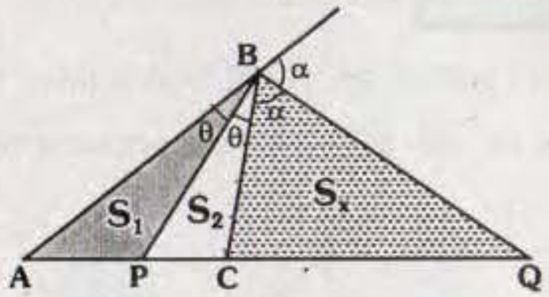
TEOREMA



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}=\frac{c}{a}}$$

Observación



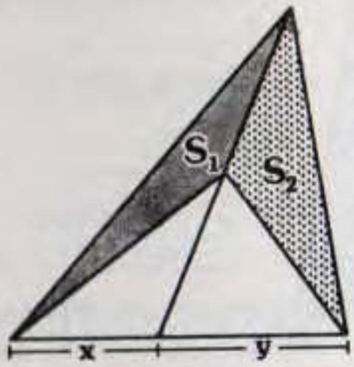
Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta PBC}}=\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}}$$

Reemplazando:

$$\boxed{S_x=\frac{S_1(S_1+S_2)}{(S_1-S_2)}}$$

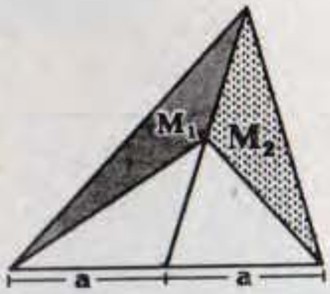
TEOREMA



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{x}{y}}$$

Observación

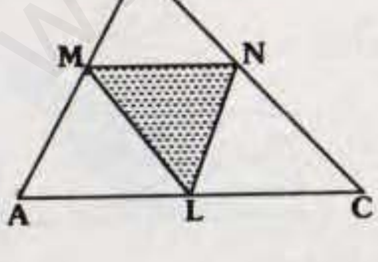


En el gráfico se cumple:

$$\boxed{M_1 = M_2}$$

TEOREMA

En el gráfico, M, N y L son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

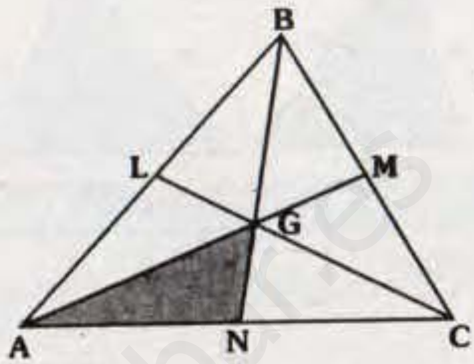


Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta AMN} = S_{\Delta MLN} = S_{\Delta LNC} = S_{\Delta MBN}}$$

TEOREMA

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC.

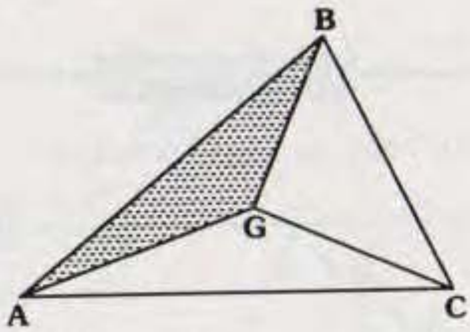


Se cumple:

$$\boxed{S_{(\Delta LGA)} = S_{(\Delta ANG)} = S_{(\Delta NGC)} = S_{(\Delta CGM)} = S_{(\Delta MGB)} = S_{(\Delta GLB)}}$$

COROLARIO

Si G es baricentro del triángulo ABC se cumple:

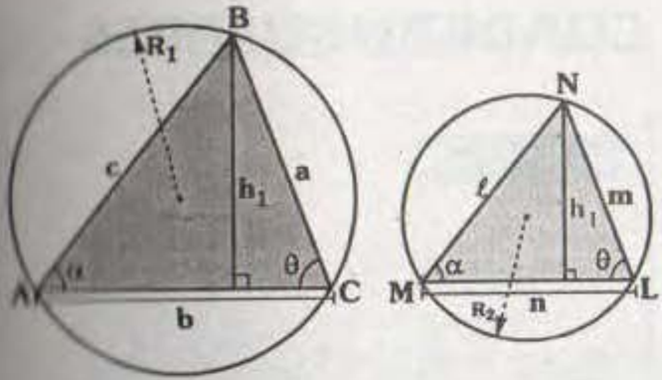


Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABG} = S_{\Delta BCG} = S_{\Delta ACG}}$$

TEOREMA

La razón de áreas de dos regiones triangulares es igual al cuadrado de la razón de longitudes de segmentos homólogos.



En el gráfico, $\Delta ABC \sim \Delta MNL$, entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNL}}=\left(\frac{a}{m}\right)^2=\left(\frac{b}{n}\right)^2=\left(\frac{c}{\ell}\right)^2=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2=...=k^2}$$

Prueba

• Por la fórmula básica:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{bh_1}{2} \wedge S_{\Delta MNL}=\frac{nh_2}{2}$$

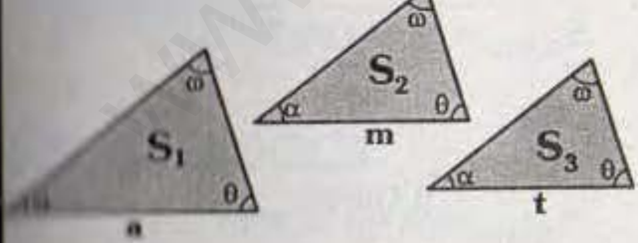
$$S_{\Delta ABC}=\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \qquad ...(1)$$

• Como $\Delta ABC \sim \Delta MNL$, entonces:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{R_1}{R_2}=....=k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNL}}=\left(\frac{b}{n}\right)^2=k^2$$

Observación

1) Cuando se trate de comparar tres o más regiones semejantes; es recomendable usar:



$$\boxed{\frac{S_1}{a^2}=\frac{S_2}{m^2}=\frac{S_3}{t^2}}$$

2) En general para dos regiones semejantes:

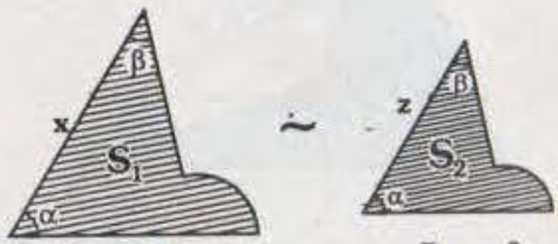


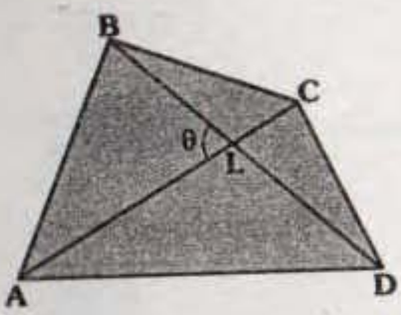
Figura 1 **Figura 2**

Si las figuras 1 y 2 son semejantes "x" y "z" son longitudes homólogas, Se cumple: $\boxed{\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{x}{z}\right)^2}$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

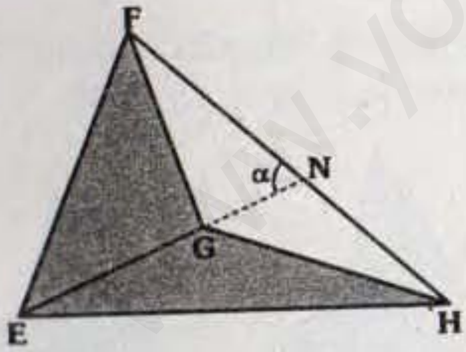
FÓRMULA GENERAL

En área de toda región cuadrangular es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales por el seno de la medida del ángulo entre dichas diagonales.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\operatorname{sen}\theta}$$



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}\operatorname{sen}\alpha}$$

Prueba

• Para el $\square$ABCD:

$$S_{\square ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BL)}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{(AC)(DL)}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)}{2}\operatorname{sen}\theta\underbrace{(BL + LD)}_{BD}$$

$$\therefore\ S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\operatorname{sen}\theta$$

• Para el $\measuredangle$EFGH

$$S_{\measuredangle EFGH} = \underbrace{S_{\Delta EFH}} - \underbrace{S_{\Delta FGH}}$$

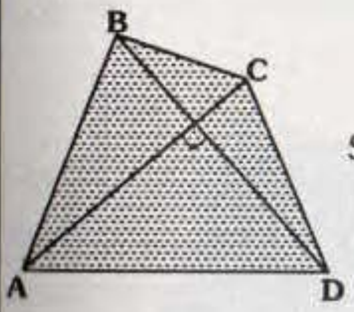
$$S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EN)(FH)}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{(GN)(FH)}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

$$S_{\measuredangle EFGH} = \underbrace{(EN - GN)}_{EG}\frac{(FH)}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\therefore\ S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

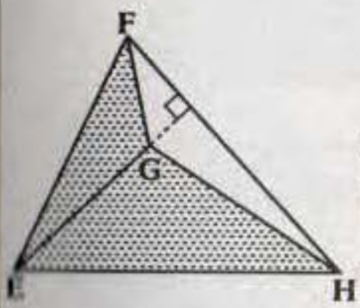
Observación

- Si las diagonales son perpendiculares.



Se cumple :

$$\boxed{S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}}$$

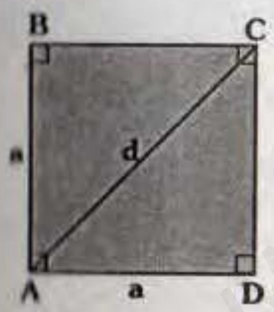


Se cumple :

$$\boxed{S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}}$$

REGIÓN CUADRADA

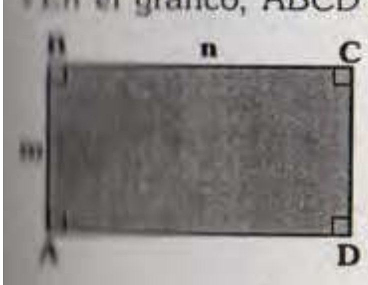
En el gráfico ABCD es un cuadrado, se cumple:



$$\boxed{S_{(ABCD)} = a^2 = \frac{d^2}{2}}$$

REGIÓN RECTANGULAR

- En el gráfico, ABCD es rectángulo



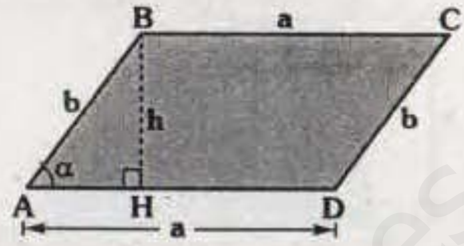
Se cumple :

$$\boxed{S_{(ABCD)} = mn}$$

REGIÓN PARALELOGRAMICA

En el gráfico, ABCD es paralelogramo

Se cumple:



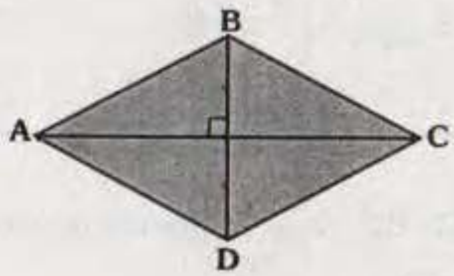
$$\boxed{S_{(ABCD)} = ah = ab\operatorname{sen}\alpha}$$

Nota

Las últimas expresiones planteadas ya han sido demostradas

REGIÓN ROMBAL

En el gráfico, ABCD es un rombo. Se cumple:



$$\boxed{S_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}}$$

Prueba

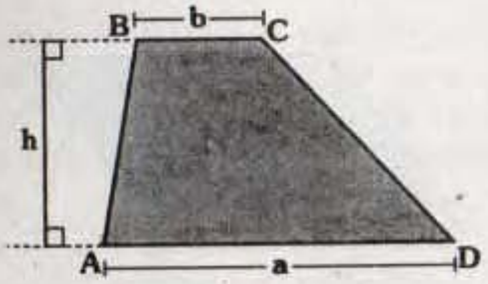
Por la fórmula general:

$$S_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\underbrace{\operatorname{sen}90^\circ}_{1}$$

$$\therefore \quad S_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

REGIÓN TRAPECIAL

En el gráfico, $\overline{AD}//\overline{BC}$. Se cumple:



$$\boxed{S_{\triangle ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h}$$

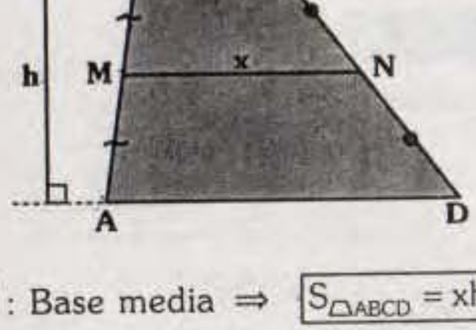
Prueba

$$S_{\triangle ABCD}=\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{\frac{bh}{2}}+\underbrace{S_{\Delta ACD}}_{\frac{ah}{2}}$$

$$\Rightarrow\ S_{\triangle ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

Observación

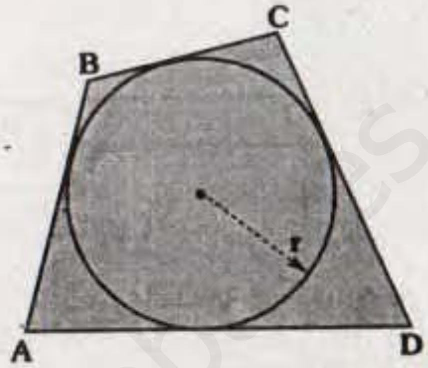
Si $\overline{AD}//\overline{BC}$, M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$



$\overline{MN}$: Base media $\Rightarrow$ $\boxed{S_{\triangle ABCD}=xh}$

REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

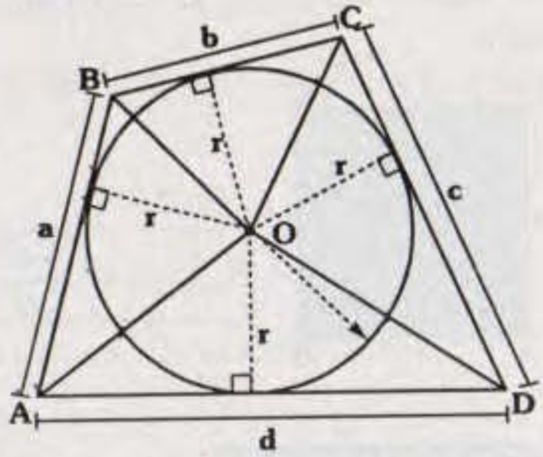
En el gráfico $\triangle ABCD$ es circunscrito,se cumple



$$\boxed{S_{\triangle ABCD}=pr}$$

donde "p" es el semiperímetro del $\triangle ABCD$

Prueba



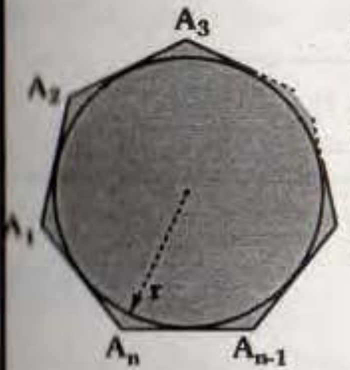
- Antes, consideremos el teorema de Pitot: $a+c=b+d$
- Como $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}=a+c=b+d$
- $S_{\triangle ABCD}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}+S_{\Delta AOD}$

$$S_{\triangle ABCD}=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}+\frac{dr}{2}$$

$$S_{\triangle ABCD}=r\underbrace{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)}_{p}=r(a+c)=r(b+d)$$

Observación

El teorema anterior, se puede generalizar para todo polígono circunscrito.



Sea $A_1A_2A_3....A_n$: polígono circunscrito

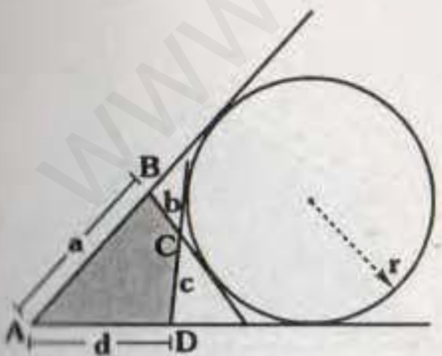
p: semiperímetro

Se cumple:

$$\boxed{S_{A_1A_2...A_n}=pr}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO EXINSCRITO

En el gráfico, el $\square ABCD$ es exinscrito



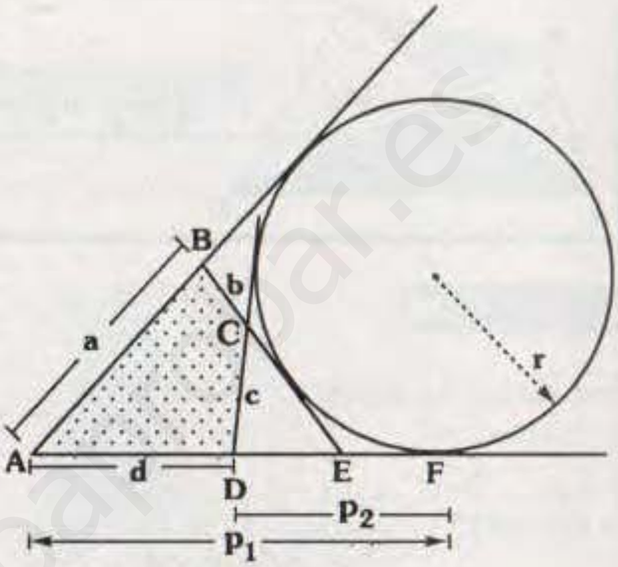
Se cumple:

$$\boxed{S_{\square ABCD}=r(a-c)=r(d-b)}$$

Prueba

p_1: semiperímetro de ΔABE

p_2: semiperímetro de ΔDCE



- $S_{\square ABCD}=\underbrace{S_{\Delta ABE}}-S_{\Delta CDE}$

$$=r(p_1-BE)-r(p_2-CE)$$

$$S_{\square ABCD}=r[\underbrace{(p_1-p_2)}_{d}-\underbrace{(BE-CE)}_{b}]$$

$$S_{\square ABCD}=r(d-b)$$

- Por teorema de Steiner:

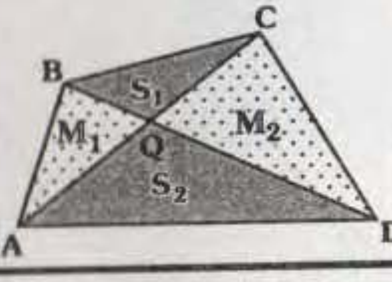
$$d-b=a-c$$

$$S_{\square ABCD}=r(d-b)=r(a-c)$$

DIVERSAS PROPIEDADES SOBRE ÁREAS EN CUADRILÁTEROS

EN TODO CUADRILÁTERO

• En el gráfico, se cumple:



$$\boxed{M_1M_2 = S_1S_2}$$

Prueba

Por razón de áreas:

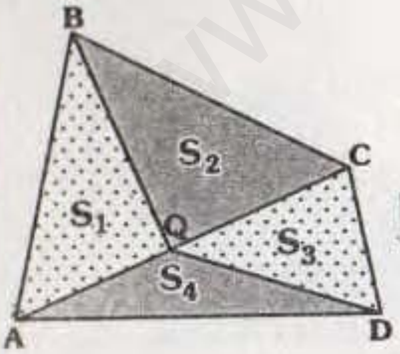
• En ΔABC: $\dfrac{M_1}{S_1} = \dfrac{AQ}{QC}$

• En ΔACD: $\dfrac{S_2}{M_2} = \dfrac{AQ}{QC}$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \dfrac{M_1}{S_1} = \dfrac{S_2}{M_2}$$

$$\therefore\ M_1M_2 = S_1S_2$$

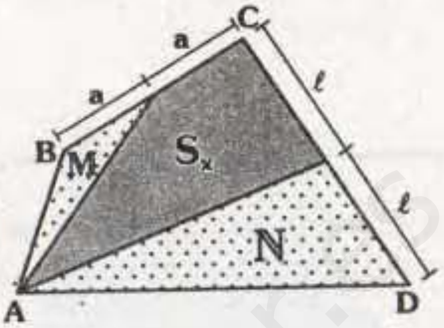
En el gráfico, $Q \in \overleftrightarrow{AC}$, se cumple:



$$\boxed{S_1S_3 = S_2S_4}$$

La prueba es análoga a la anterior.

En el gráfico, se cumple:



$$\boxed{S_x = M + N = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}}$$

Prueba

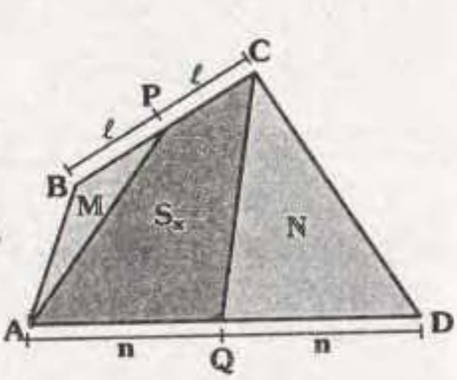
Notemos que:

$$S_x = \underbrace{S_{\Delta AMC}} + \underbrace{S_{\Delta ACN}}$$

$$S_x = \underbrace{S_{\Delta ABM}} + \underbrace{S_{\Delta AND}}$$

$$S_x = \ M \ + \ N$$

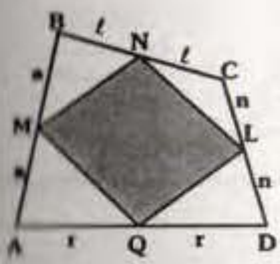
En el gráfico, se cumple:

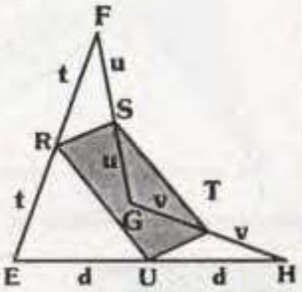


$$\boxed{S_x = M + N}$$

La prueba es análoga a la anterior, se deja como ejercicio para el lector.

En el gráfico, se cumple:





MNLQ: Paralelogramo **RSTU:Paralelogramo**

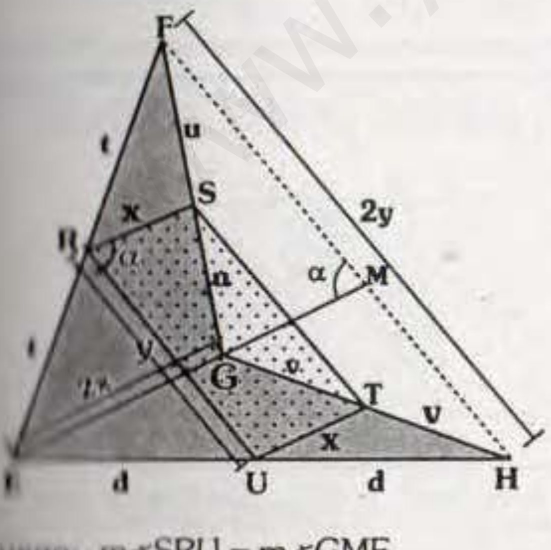
$$\boxed{S_{\square MNLQ}=\frac{S_{\triangle ABCD}}{2}}\qquad \boxed{S_{\square RSTU}=\frac{S_{\measuredangle EFGH}}{2}}$$

Prueba

- Ambos casos es similar, demostremos el segundo:
- En ΔGHT y ΔEFH, por base media:

$FH=2(ST)=2(RU)$ y $\overline{FH}//\overline{ST}//\overline{RU}$

$\Rightarrow$ RSTU es paralelogramo



- Luego: $m\measuredangle SRU=m\measuredangle GMF$

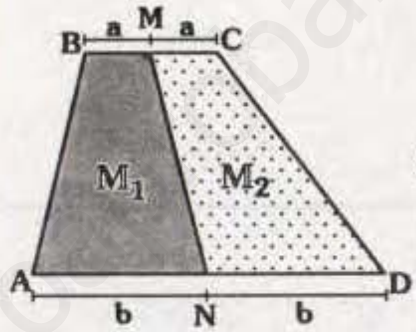
- $S_{\square RSTU}=xysen\alpha$ y

$$S_{\measuredangle EFGH}=\frac{(2x)(2y)}{2}sen\alpha$$

$$\therefore\quad S_{\square RSTU}=\frac{S_{\measuredangle EFGH}}{2}$$

EN EL TRAPECIO

En el gráfico, $\overline{AD}//\overline{BC}$. Se cumple:



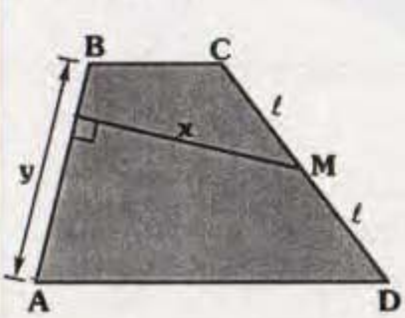
Se cumple : $\boxed{M_1=M_2}$

Prueba

Notemos que debido a que $\overline{AD}//\overline{BC}\Rightarrow$ los trapecio ABMN y NMCD tienen igual altura y la misma suma de bases, luego:

$$\underbrace{S_{\triangle ABMN}}_{M_1}=\underbrace{S_{\triangle NMCD}}_{M_2}$$

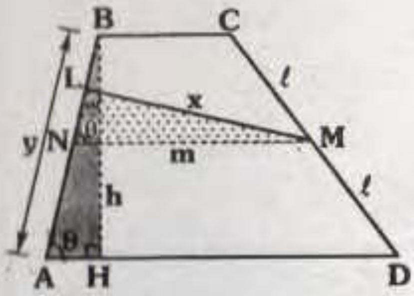
Si $\overline{AD}//\overline{BC}$.



Se cumple : $\boxed{S_{\triangle ABCD}=xy}$

Prueba

• Sea $\overline{MN}$ la base media

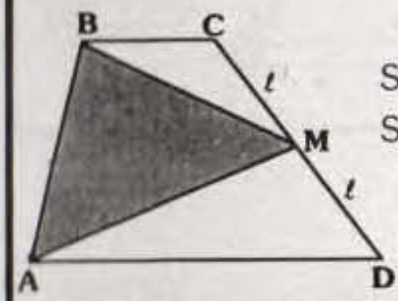


$\Rightarrow S_{\square ABCD} = mh$

$\triangle AHB \sim \triangle NLM$

$$\frac{h}{y} = \frac{x}{m} \Rightarrow mh = xy$$

$$\therefore \quad S_{\square ABCD} = xy$$

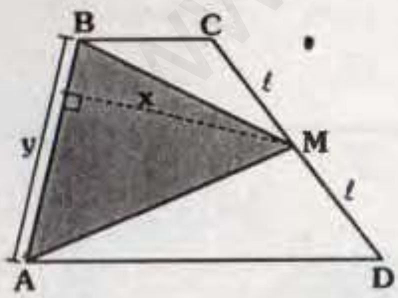


Si $\overline{BC} // \overline{AD}$

Se cumple :

$$\boxed{S_{\triangle ABM} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}}$$

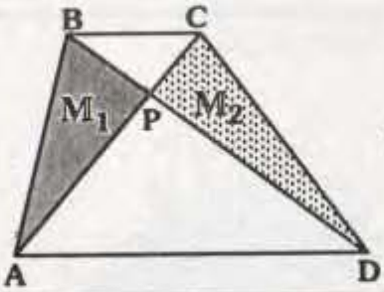
Prueba



• Por teorema

$$\left.\begin{array}{l} S_{\square ABCD} = xy \\ S_{\triangle ABM} = \dfrac{xy}{2} \end{array}\right\} S_{\triangle ABM} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Si $\overline{AD} // \overline{BC}$



Se cumple :

$$\boxed{M_1 = M_2}$$

Prueba

Como los Δs ABD y ACD tienen a $\overline{AD}$ en común (igual base) y $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow$ las alturas desde B y C en dichos triángulos son iguales, luego:

$$\underbrace{S_{\Delta ABD}} = S_{\Delta ACD}$$

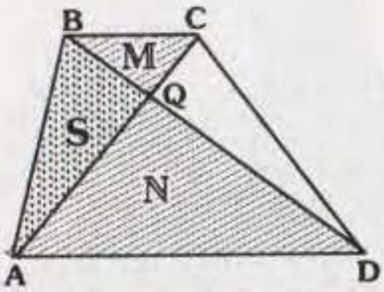
$$M_1 + S_{\Delta APD} = M_2 + S_{\Delta APD}$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2$$

Nota

La propiedad expuesta es muy importante en la resolución de problemas, la usamos generalmente cuando notemos rectas paralelas.

En el gráfico, $\overline{AD} // \overline{BC}$. Se cumple:



$$\boxed{S = \sqrt{MN} \ \wedge \ S_{\square ABCD} = (\sqrt{M} + \sqrt{N})^2}$$

Prueba

- Por lo anterior:

$$S_{(QCD)}=S$$

- Por teorema:

$$(S)(S)=MN \Rightarrow S=\sqrt{MN}$$

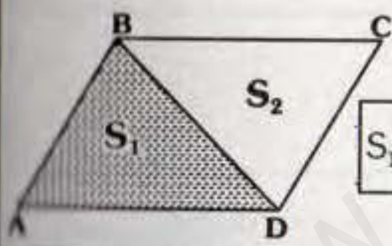
- $S_{\square ABCD}=M+N+2S$

$$S_{\square ABCD}=\underbrace{M+N+2\sqrt{MN}}$$

$$\therefore\ S_{\square ABCD}=(\sqrt{M}+\sqrt{N})^2$$

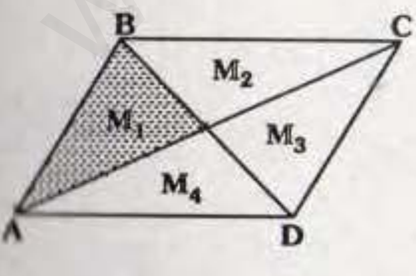
EN EL PARALELOGRAMO

Si ABCD es un paralelogramo, se cumple:



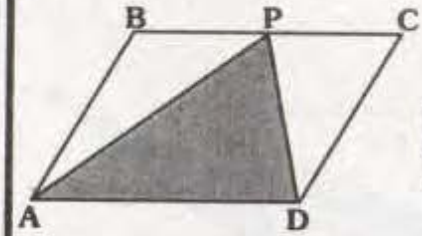
$$\boxed{S_1=S_2=\frac{S_{\square ABCD}}{2}}$$

EFGH: paralelogramo, Se cumple:



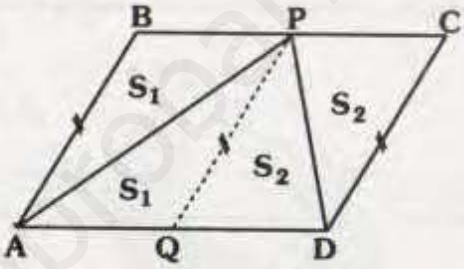
$$\boxed{M_1=M_2=M_3=M_4=\frac{S_{\square ABCD}}{4}}$$

ABCD: paralelogramo se cumple:



$$\boxed{S_{\Delta APD}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}}$$

Prueba

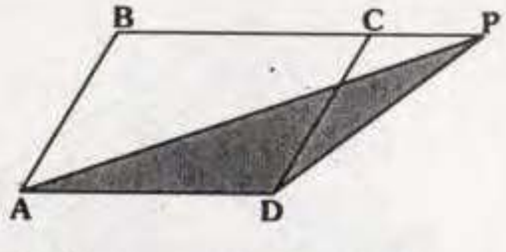


- Sea $\overline{PQ}//\overline{AD} \Rightarrow$ ABQG y QPCD: paralelogramo

$$\Rightarrow S_{\Delta APD}=S_1+S_2$$

$$S_{\square ABCD}=2S_1+2S_2$$

$$\Rightarrow S_{\square ABCD}=2S_{\Delta APD}$$

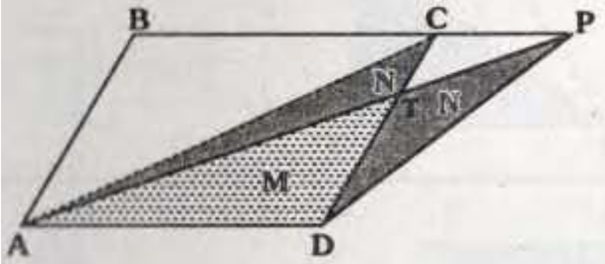


Si: ABCD es paralelogramo.

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta APD}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}}$$

Prueba

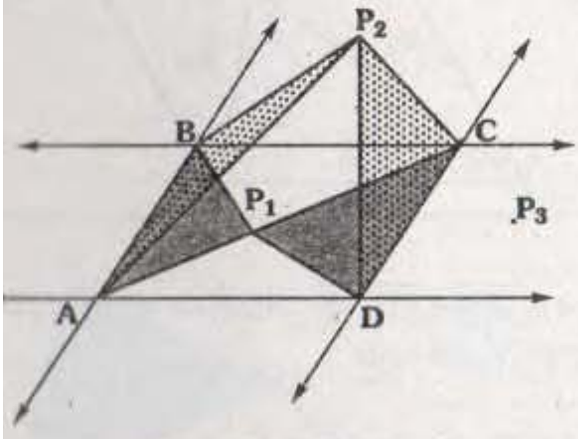


- Como $\overline{AD} // \overline{CP}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ACT} = S_{\Delta DTP} = \mathbb{N}$$

- $S_{\Delta APD} = \mathbb{M} + \mathbb{N}$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

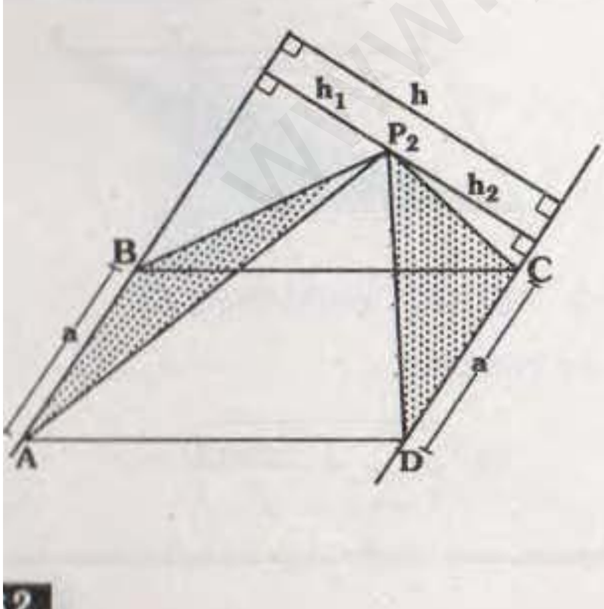


Si ABCD es un paralelogramo y P es un punto entre las rectas paralelas. Se cumple

- $S_{P_1AB} + S_{P_1CD} = S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$

- $S_{P_1CD} + S_{P_1AD} = S_{P_3BC} + S_{P_3AD} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$

Prueba

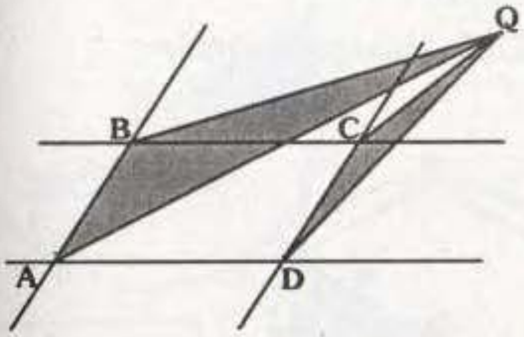


- Demostremos para el punto P_2
- Notemos: $h_1 + h_2 = h$
- $S_{\square ABCD} = ah$
- $\left.\begin{array}{l} S_{P_2AB} = \dfrac{ah_1}{2} \\ S_{P_2CD} = \dfrac{ah_2}{2} \end{array}\right\} S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \dfrac{a}{2}\underbrace{(h_1 + h_2)}_{h}$

$$\Rightarrow S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \frac{ah}{2} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

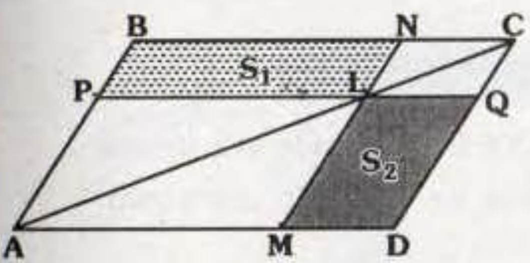
Observación

Si un punto no se ubica en la región indicada:



$$S_{\Delta QAB} + S_{\Delta QCD} \neq \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Más bien se cumple: $\boxed{S_{\Delta QAB} - S_{\Delta QCD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}}$



Si ABCD es un paralelogramo
$\overline{AD} // \overline{PQ}$ y $\overline{AB} // \overline{MN}$

Se cumple: $\boxed{S_1 = S_2}$

Prueba

- Notemos que APLM y LNCQ son paralelogramos, entonces:

$$S_{\Delta APL} = S_{\Delta ALM} \quad y \quad S_{\Delta LNC} = S_{\Delta LCQ}$$

- En ABCD: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$

$$S_1 + \cancel{S_{\Delta APL}} + \cancel{S_{\Delta LNC}} = S_2 + \cancel{S_{\Delta ALM}} = \cancel{S_{\Delta LCQ}} \qquad \therefore \; S_1 = S_2$$

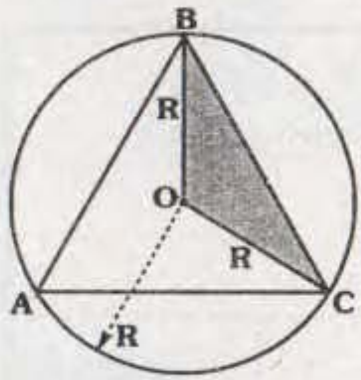
ÁREAS DE REGIONES POLÍGONALES REGULARES

(En función del circunradio)

En general para hallar el área de una región polígonal, bastará hallar el área de su "triángulo elemental" y multiplicarlo con la cantidad de lados, veamos algunos casos:

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

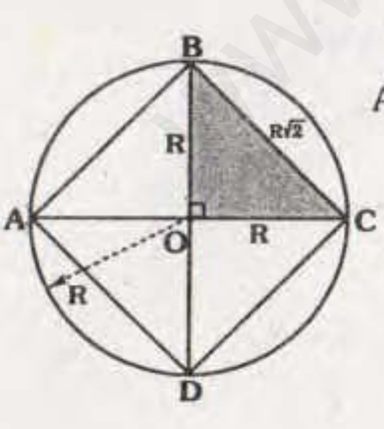
ΔABC : Equilátero



$$S_{\Delta ABC} = 3\underbrace{S_{\Delta BOC}}_{\frac{RR}{2}\text{sen}120^\circ}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}$$

CUADRADO



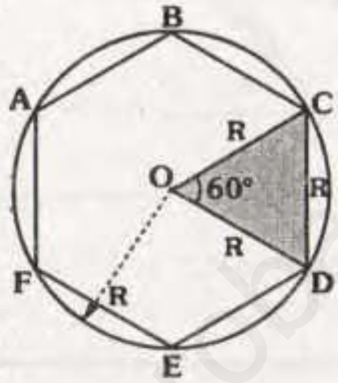
ABCD : Cuadrado

$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta BOC}$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 2R^2}$$

HEXÁGONO REGULAR

ABCDEF: Hexágono regular

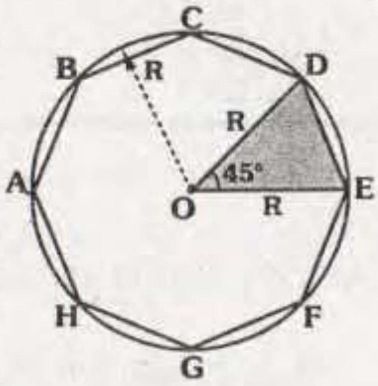


$$S_{ABCDEF} = 6\underbrace{S_{\Delta OCD}}_{\frac{R^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ABCDEF} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}}$$

OCTÓGONO REGULAR

- ABCDEFGH: Octógono regular
- S: área de la región octogonal

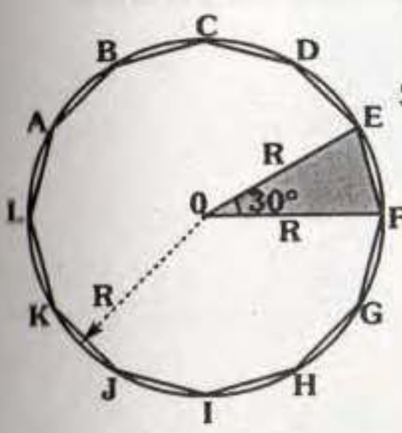


$$S = 8\underbrace{S_{\Delta DOE}}_{\frac{R^2}{2}\text{sen}45^\circ}$$

$$\boxed{S = 2R^2\sqrt{2}}$$

DODECÁGONO REGULAR

- ABCDEFGHIJKL: Dodécagono regular
- S: área de la región polígonal

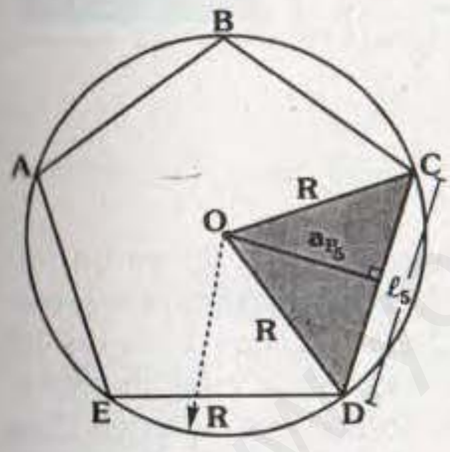


$$S = 12\underbrace{S_{\Delta EOF}}_{\frac{R^2}{2}\text{sen}30°}$$

$$\boxed{S = 3R^2}$$

PENTÁGONO REGULAR

- ABCDE: Pentágono regular
- S: área de ABCDE



$$S = 5\underbrace{S_{\Delta COD}}_{\frac{(\ell_5)(a_{p_5})}{2}}$$

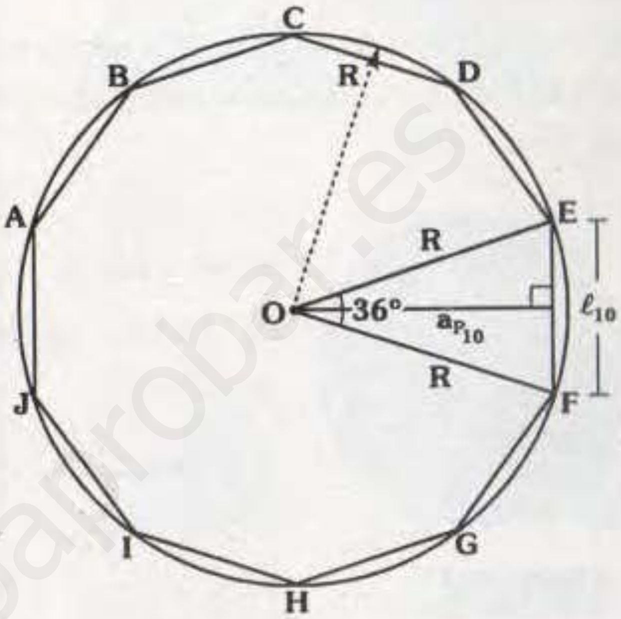
- Pero: $\ell_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$$a_{p_5} = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\boxed{S = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

DECÁGONO REGULAR

- ABCDEFGHIJ: Decágono regular
- S: Área de la región poligonal



- $$S = 10\underbrace{S_{\Delta EOF}}_{\frac{(\ell_{10})(ap_{10})}{2}}$$

- Pero: $\ell_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$a_{p_{10}} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

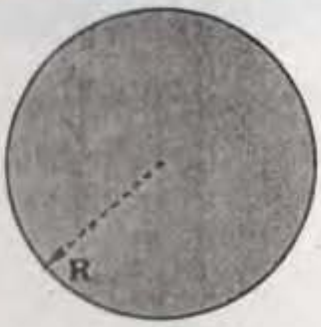
$$\Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

ÁREAS DEL CÍRCULO Y PARTES NOTABLES

ÁREA DEL CÍRCULO

El círculo es la región plana limitada por una circunferencia.

El área del círculo es igual a la constante $\pi(3,14159...)$ multiplicado con el cuadrado de su radio.



En el gráfico:

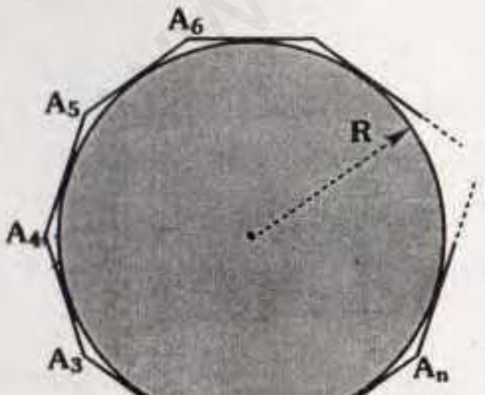
$A_{\circ}$: área del círculo

Se cumple:

$$\boxed{A_{\circ} = \pi R^2}$$

Prueba

- Una manera de probar el teorema indicado, es usando la expresión dada en la página 21, como todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia y el número de lados tiende al infinito: $n \to \infty$, luego el perímetro del polígono tiende a la longitud de la circunferencia.



A(poligonal) $\to A_{\circ}$

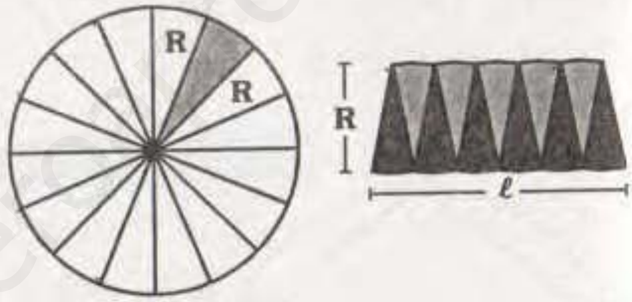
$$A_{\circ} = pr$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2\pi R}{2}$$

$$\therefore\ A_{\circ} = \pi R^2$$

Otro método



Procedemos así:

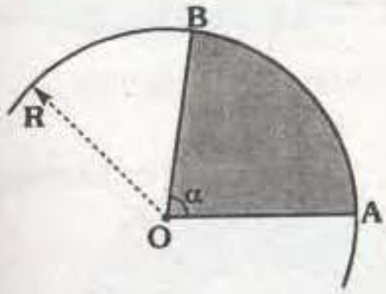
- Se descompone el círculo en un número par (bastante grande) de sectores; se ordenan dichos sectores tal como se muestra, la cual tiende al área de un paralelogramo cuya base es ℓ (longitud de la semicircunferencia) y altura r.

- Como la longitud de la circunferencia(2) es $2\pi r \Rightarrow \ell = \pi r$

- $A_{\circ} = \ell r \Rightarrow A_{\circ} = \pi r^2$

SECTOR CIRCULAR

En el gráfico, la región sombreada es un sector circular:



α en grados sexagesimales . Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangleleft AOB}=\frac{\alpha}{360^\circ}\pi R^2}$$

Prueba

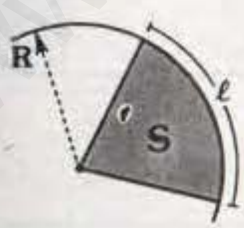
Usando regla de tres simple

$$360^\circ \rightarrow A_{\bigcirc}$$
$$\alpha \rightarrow S_{\triangleleft AOB}$$

Luego: $S_{\triangleleft AOB}=\dfrac{\alpha}{360^\circ}A_{\bigcirc}$

Observación 1

Una forma alternativa para el área de un sector circular es en función a la longitud de arco:

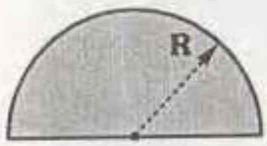


ℓ : longitud de arco

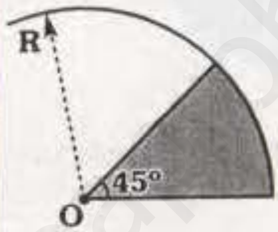
Se cumple : $\boxed{S=\dfrac{\ell R}{2}}$

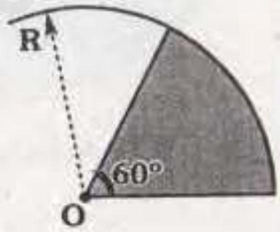
Observación 2

Debido a la presencia de algunos casos particulares, es recomendable recordar:



$\boxed{A_{\frown}=\dfrac{\pi R^2}{2}}$ $\boxed{A_{\triangleleft}=\dfrac{1}{4}\pi R^2}$

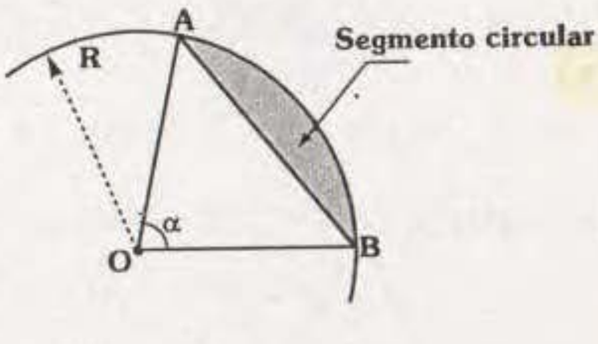




$\boxed{A_{\triangleleft}=\dfrac{1}{8}\pi R^2}$ $\boxed{A_{\triangleleft}=\dfrac{1}{6}\pi R^2}$

SEGMENTO CIRCULAR

Se cumple:

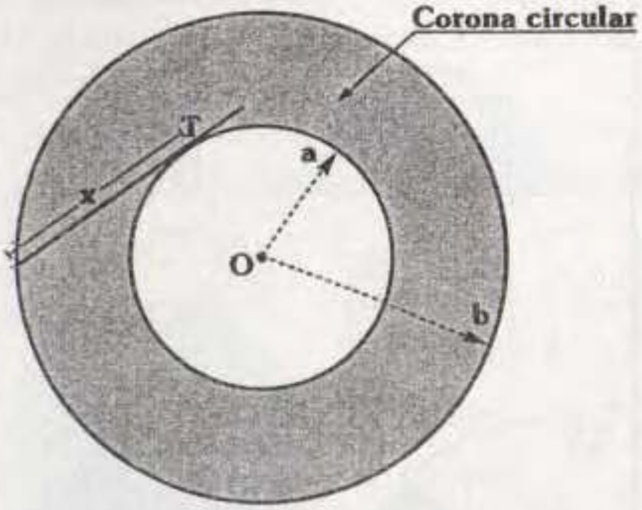


$$S_{\triangleleft AOB}=S_{\triangleleft AOB}-S_{\Delta AOB}$$

$$\boxed{S=\frac{\alpha}{360^\circ}\pi R^2-\frac{R^2}{2}\operatorname{sen}\alpha}$$

CORONA CIRCULAR

En el gráfico, T es punto de tangencia



- Sea A_{cc}: Área de la corona circular

Se cumple

$$\boxed{A_{cc} = \pi(b^2 - a^2)}$$

También:

$$\boxed{A_{cc} = \pi x^2}$$

Prueba

- $A_{cc} = \pi b^2 - \pi a^2$

$\Rightarrow \; A_{cc} = \pi(b^2 - a^2)$

- En ⊿MTO:

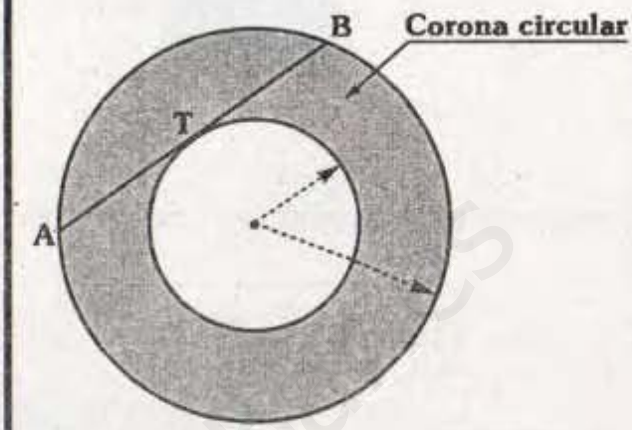
$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = b^2 - a^2$$

$$\therefore \; A_{cc} = \pi x^2$$

Observación

- T es punto de tangencia.

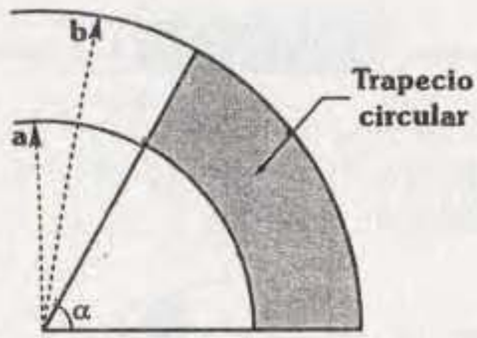


Se cumple:

$$\boxed{A_{cc} = \frac{1}{4}\pi(AB)^2}$$

TRAPECIO CIRCULAR

A_{TC}: Área del trapecio circular

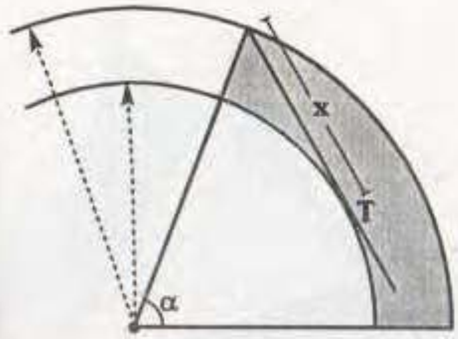


Se cumple:

$$\boxed{A_{TC} = \frac{\alpha}{360°}\pi(b^2 - a^2)}$$

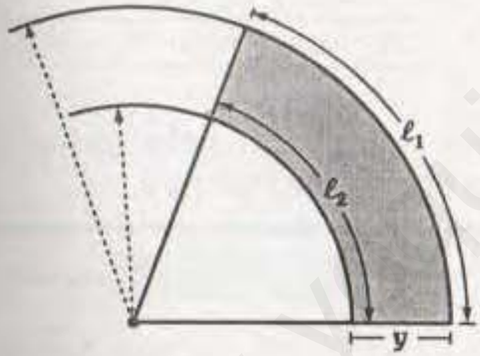
Observación

- T es punto de tangencia



Se cumple:

$$\boxed{A_{TC} = \frac{\alpha}{360°}\pi x^2}$$

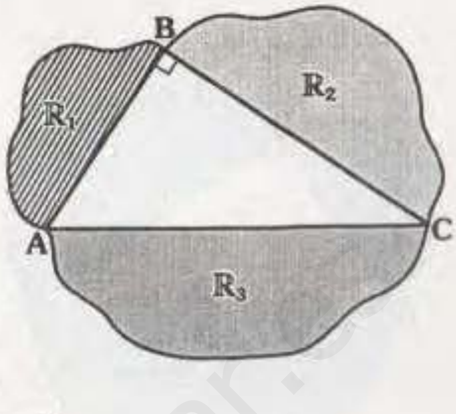


- ℓ_1 y ℓ_2: longitudes de arco
- Se cumple:

$$\boxed{A_{TC} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{2}y}$$

TEOREMA

En el gráfico, las regiones $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$ y $\mathbb{R}_3$ son semejantes, de elementos homólogos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.



Se cumple:

$$\boxed{S_{(\mathbb{R}_3)} = S_{(\mathbb{R}_1)} + S_{(\mathbb{R}_2)}}$$

Demostración:

- Como las regiones son semejantes, entonces:

$$\frac{S_{(\mathbb{R}_3)}}{(AC)^2} = \frac{S_{(\mathbb{R}_1)}}{(AB)^2} = \frac{S_{(\mathbb{R}_2)}}{(BC)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{(\mathbb{R}_3)}}{(AC)^2} = \frac{S_{(\mathbb{R}_1)} + S_{(\mathbb{R}_2)}}{(AB)^2 + (BC)^2} \qquad \ldots(1)$$

- En $\triangle$ABC:

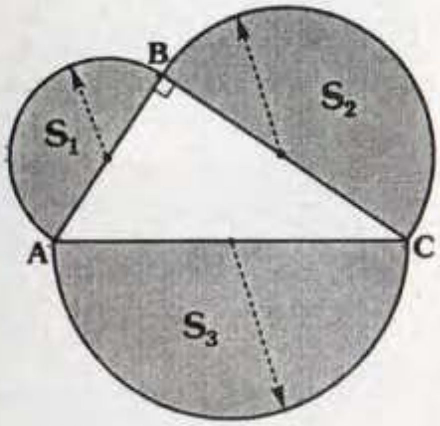
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

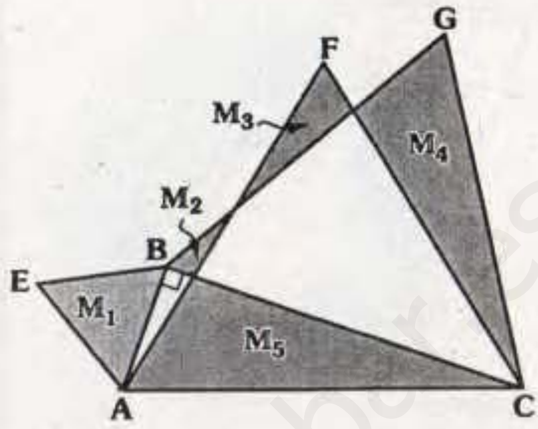
- En (1):

$$S_{(\mathbb{R}_3)} = S_{(\mathbb{R}_1)} + S_{(\mathbb{R}_2)}$$

Observación

- A manera de corolario veamos algunos casos partículares:





Como los semicírculos son semejantes:

$$\boxed{S_3 = S_1 + S_2}$$

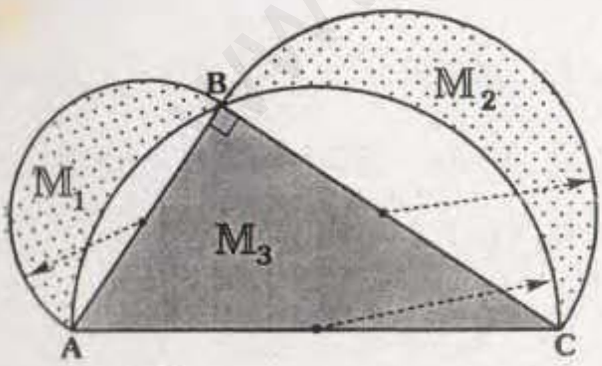
Si los Δs ABE, BGC y AFC son equiláteros, se cumple:

$$S_{\Delta AFC} = S_{\Delta AEB} + S_{\Delta BGC}$$

$$\boxed{M_5 + M_3 = M_1 + M_2 + M_4}$$

- Notar que sólo es condición que los lados del $\measuredangle$ABC sean lados homólogos y las regiones pueden ser internas o externas.

TEOREMA DE LAS LÚNULAS DE HIPOCRATES

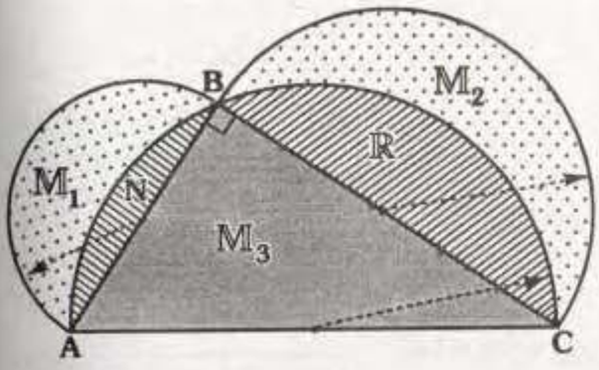


- En el gráfico, M_1 y M_2 son las áreas de las lúnulas y M_3 es el área de la región ABC, se cumple:

$$\boxed{M_3 = M_1 + M_2}$$

Prueba

- Usaremos el teorema anterior:



Por corolario del teorema anterior:

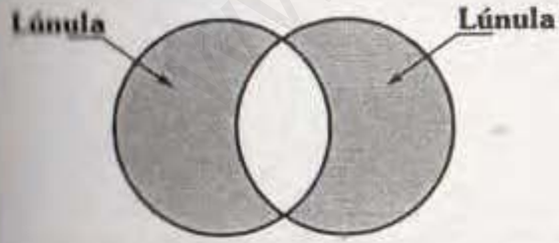
$$\underbrace{S_{\overset{\frown}{AC}}}\;=\;\underbrace{S_{\overset{\frown}{AB}}}\;+\;\underbrace{S_{\overset{\frown}{BC}}}$$

$$\mathbb{M}_3+\mathbb{N}+\mathbb{R}=\mathbb{M}_1+\mathbb{N}+\mathbb{M}_2+\mathbb{R}$$

$$\therefore\ \mathbb{M}_3=\mathbb{M}_1+\mathbb{M}_2$$

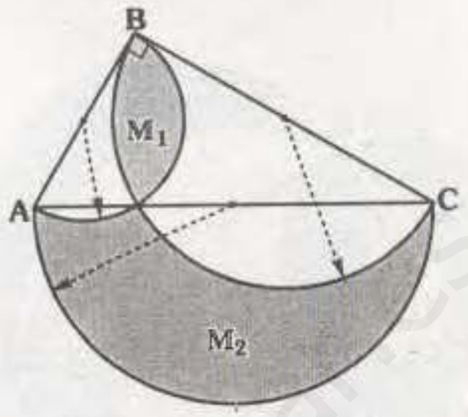
Observación

Se llama lúnula a la región no convexa limitada por dos arcos de circunferencias secantes.



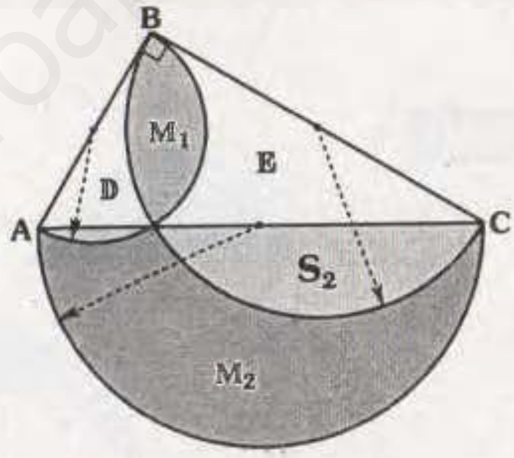
TEOREMA

En el gráfico, se cumple:



$$\boxed{\mathbb{M}_2-\mathbb{M}_1=S_{\triangle ABC}}$$

Demostración:



Por teorema:

$$S_{\overset{\frown}{AC}}\;=\;\underbrace{S_{\overset{\frown}{AB}}}\;+\;\underbrace{S_{\overset{\frown}{BC}}}$$

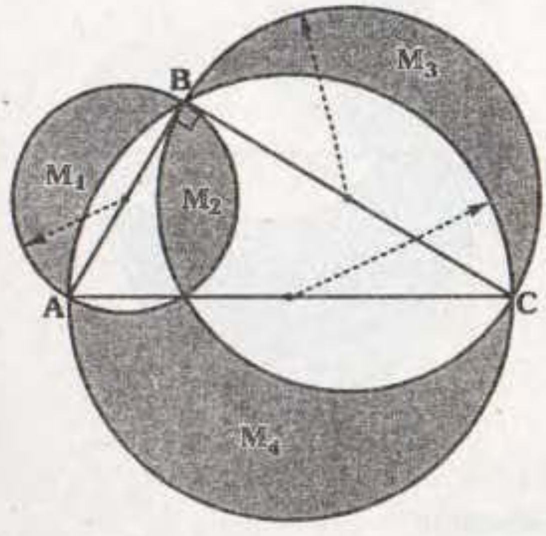
$$\mathbb{M}_2+\cancel{S}_1+\cancel{S}_2=\cancel{S}_1+\mathbb{D}+\mathbb{M}_1+\cancel{S}_2+\mathbb{E}+\mathbb{M}_1$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{M}_2=\underbrace{\mathbb{D}+\mathbb{M}_1+\mathbb{E}}_{S_{\triangle ABC}}+\mathbb{M}_1$$

$$\therefore\ \mathbb{M}_2-\mathbb{M}_1=S_{\triangle ABC}$$

Observación

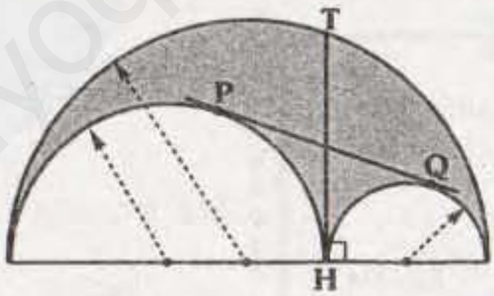
Como consecuencia de los últimos dos teoremas, tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle ABC}=M_1+M_3 \\ S_{\triangle ABC}=M_4-M_2 \end{array}\right\} \boxed{M_4=M_1+M_2+M_3}$$

TEOREMA

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia.



Sea **A** el área de la región sombreada.

Se cumple:

$$\boxed{\mathbf{A}=\pi\frac{(PQ)^2}{4}=\pi\frac{(HT)^2}{4}}$$

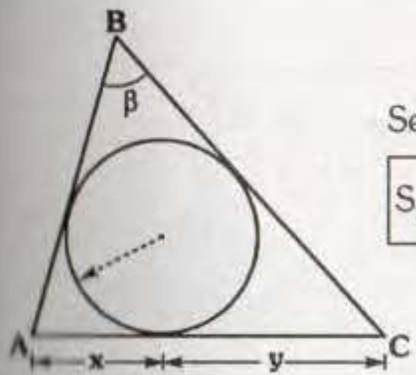
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

TEOREMAS ADICIONALES

Ahora conoceremos casos generales y expresiones un tanto algebraicas, pero son fácilmente deducibles.

TEOREMA

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita.



Se cumple :

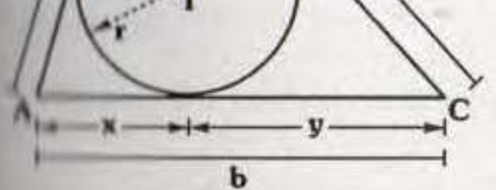
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = xy \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

Demostración:

Conocemos: $x = p - a$

$y = p - c$

$z = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = p - b$



Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

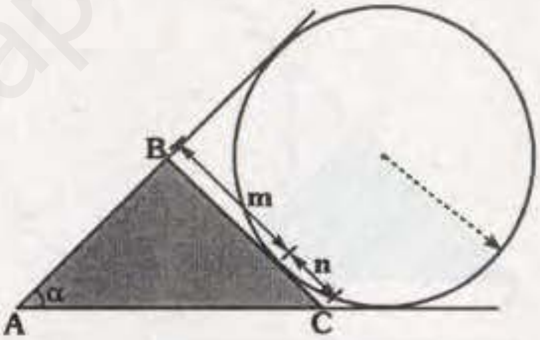
$$\Rightarrow (S_{\Delta ABC})^2 = p.xr\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)y$$

$$\Rightarrow (S_{\Delta ABC})^2 = \underbrace{pr}_{S_{\Delta ABC}}\ xy \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore\ S_{\Delta ABC} = xy \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

TEOREMA

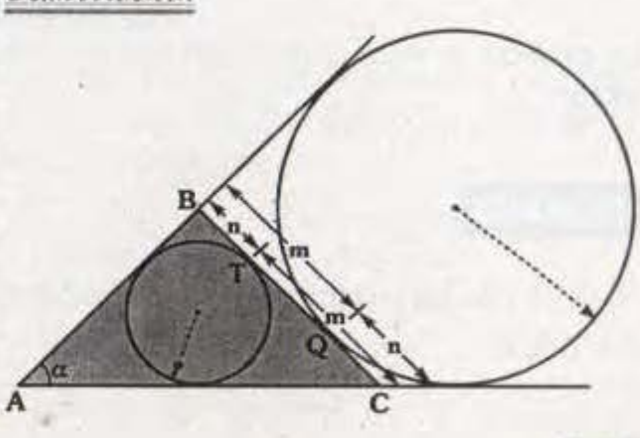
En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ es la circunferencia exinscrita



Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = mn \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

Demostración:



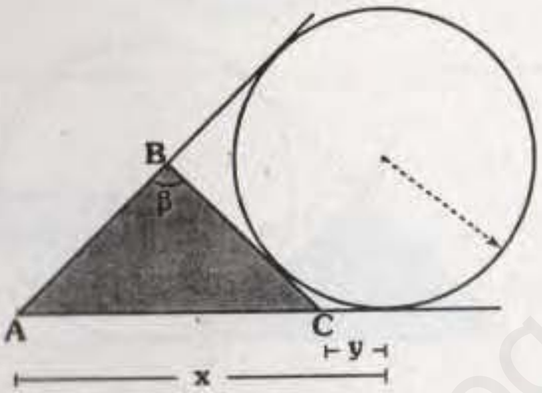
- Se puede proceder usando el teorema de Heron, pero mejor optemos por el resultado anterior.

- Se traza la circunferencia inscrita, por teorema de circunferencia: BT=QC y BQ=CT

$$\Rightarrow \; S_{\Delta ABC} = mn \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

TEOREMA

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita.



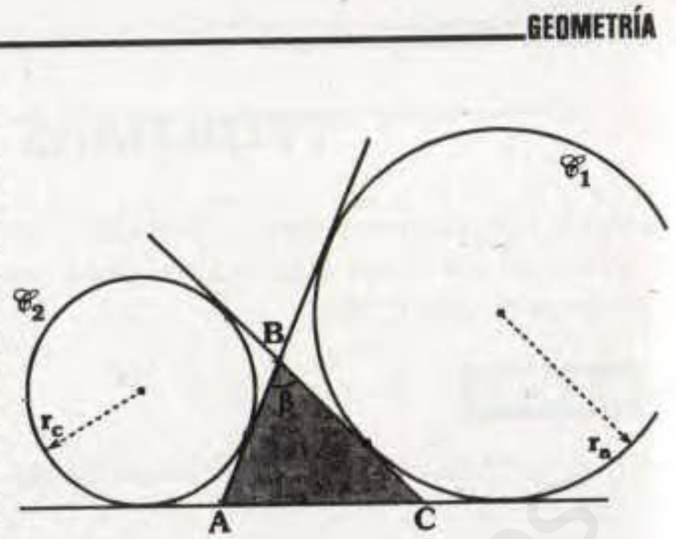
Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = xy \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

TEOREMA

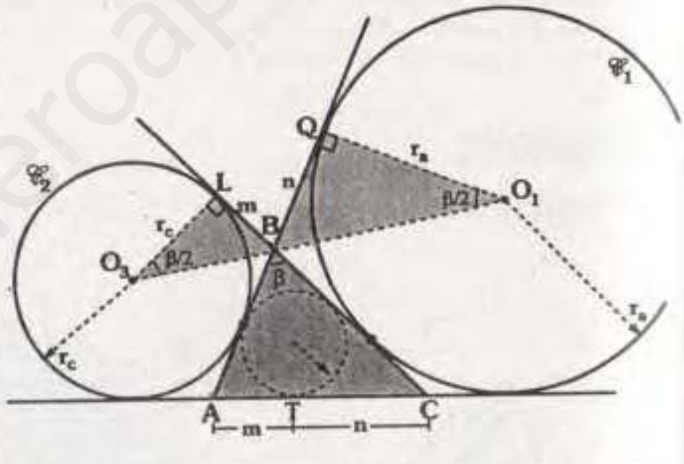
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias exinscritas del ΔABC



Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r_a r_c \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

Prueba



- Trazamos la circunferencia inscrita en el ΔABC
- Sabemos:

$$S_{\Delta ABC} = mn \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \qquad \ldots(1)$$

- Por teoremas de circunferencia:

$$AT = BL = m = r_c \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$BQ = TC = n = r_a \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

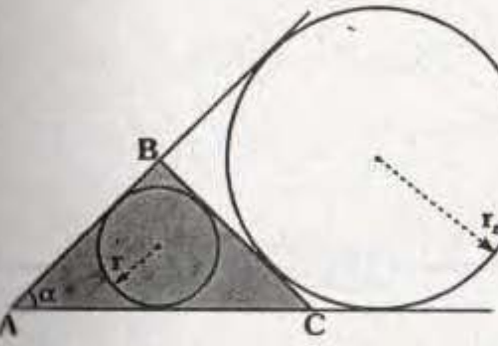
• En (1):

$$S_{\Delta ABC}=\left(r_c\ tg\frac{\beta}{2}\right).\left(r_a\ tg\frac{\beta}{2}\right).ctg\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore\quad S_{\Delta ABC}=r_ar_c\ tg\frac{\beta}{2}$$

TEOREMA

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ es la circunferencia inscrita y $\mathscr{C}_2$ es la circunferencia exinscrita.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=rr_a\ ctg\frac{\alpha}{2}}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

Nota

El lector puede encontrar más expresiones para casos particulares ($\alpha=90°$; $\alpha=60°$; $\alpha=45°$....)

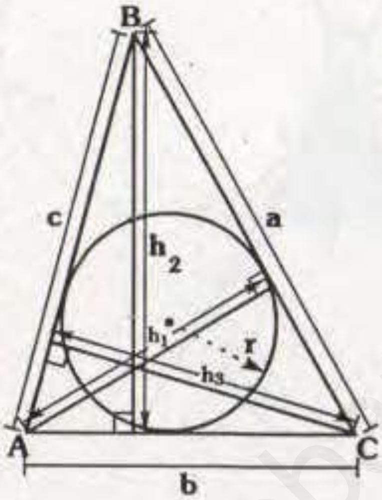
TEOREMA

En un triángulo h_1, h_2 y h_3 son las longitudes de sus alturas y "r" es su inradio, se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}}$$

Demostración

• Usemos la fórmula básica:



$$S_{\Delta ABC}=\frac{ah_1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{h_1}=\frac{a}{2S_{\Delta ABC}}$$

• Análogamente tenemos:

$$\frac{1}{h_2}=\frac{b}{2S_{\Delta ABC}}\ \text{ y }\ \frac{1}{h_3}=\frac{c}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{a+b+c}{2S_{\Delta ABC}}=\frac{p}{S_{\Delta ABC}}\quad ...(1)$$

• También sabemos:

$$S_{\Delta ABC}=pr\ \Rightarrow\ \frac{1}{r}=\frac{p}{S_{\Delta ABC}}\quad ...(2)$$

• De (1) y (2):

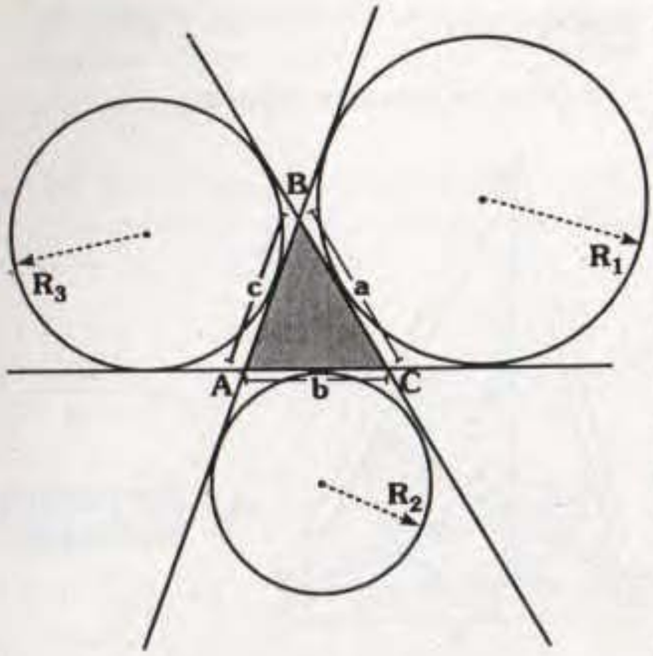
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

TEOREMA

Sean R_1, R_2 y R_3 los exradios de un triángulo y r su inradio. Sea S el área de su región, se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

$$\boxed{S=\sqrt{rR_1R_2R_3}}$$



Demostremos el primer resultado

• Usemos las siguientes expresiones

$$S_{\Delta ABC}=R_1(p-a) \qquad ...(1)$$

$$S_{\Delta ABC}=R_2(p-b) \qquad ...(2)$$

$$S_{\Delta ABC}=R_3(p-c) \qquad ...(3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_1}=\frac{p-a}{S_{\Delta ABC}} \;;\; \frac{1}{R_2}=\frac{p-b}{S_{\Delta ABC}} \quad y$$

$$\frac{1}{R_3}=\frac{p-c}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{p}{S_{\Delta ABC}} \qquad ...(\alpha)$$

• Como $\quad S_{\Delta ABC}=pr \qquad ...(4)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}=\frac{p}{S_{\Delta ABC}} \qquad ...(\beta)$$

• De (α) y (β):

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

Ahora para el segundo resultado:

• Multiplicando las expresiones (1), (2), (3) y (4):

$$(S_{\Delta ABC})^4=p(p-a)(p-b)(p-c).rR_1R_2R_3...(\theta)$$

• Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \quad (S_{\Delta ABC})^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

• Reemplazando en (θ)

$$(S_{\Delta ABC})^2=rR_1R_2R_3$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC}=\sqrt{rR_1R_2R_3}$$

Observación

• De los últimos resultados, encontramos una relación entre los exradios y alturas de un triángulo:

$$\boxed{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

• Si usamos el teorema de las medias para R_1, R_2 y R_3:

$$MA \geq MH$$

$$\frac{R_1+R_2+R_3}{3} \geq \frac{3}{\underbrace{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}_{\frac{1}{r}}}$$

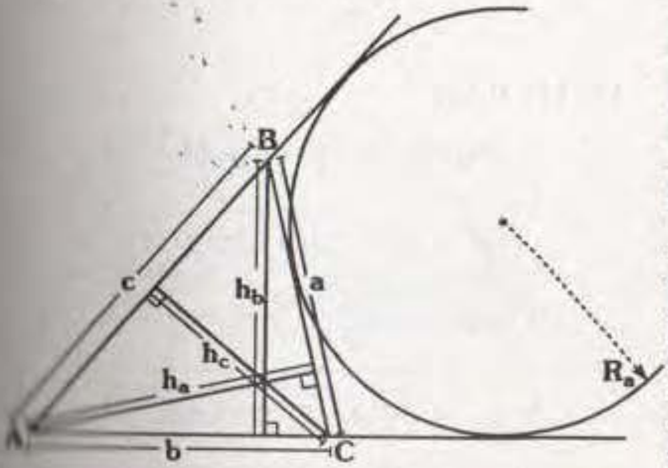
$$\boxed{R_1+R_2+R_3 \geq 9r}$$

• Análogamente para las alturas:

$$\boxed{h_1+h_2+h_3 \geq 9r}$$

TEOREMA

En el gráfico, R_a es exradio relativo a $\overline{BC}$ y h_a, h_b y h_c son las alturas.



Se cumple: $\boxed{\dfrac{1}{R_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}}$

Análogamente:

$\boxed{\dfrac{1}{R_b}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_b}}$ $\boxed{\dfrac{1}{R_c}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}-\dfrac{1}{h_c}}$

Prueba

- Por la fórmula básica, se tiene:

$$\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S_{\Delta ABC}} \quad ; \quad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S_{\Delta ABC}} \quad y$$

$$\frac{1}{h_a}=\frac{b}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}=\frac{b+c-a}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}=\frac{p-a}{2S_{\Delta ABC}} \quad ...(1)$$

- Pero: $S_{\Delta ABC}=R_a(p-a)$

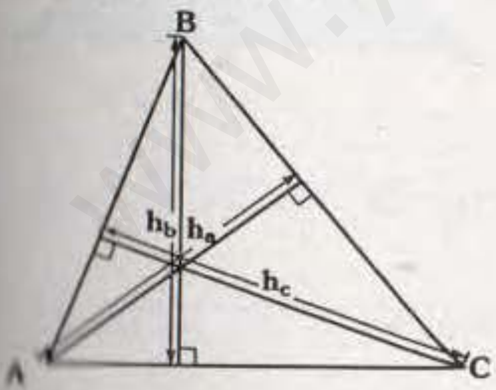
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_a}=\frac{p-a}{2S_{\Delta ABC}} \quad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$\frac{1}{R_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$$

Observación

Con los resultados anteriores se demuestra fácilmente una expresión para el área en función de las alturas.



$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{R_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{R_b}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}$$

$$\frac{1}{R_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

Sea $H=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}\right)$

Usando: $S_{\Delta ABC}=\sqrt{rR_aR_bR_c}$

Tendremos:

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4\sqrt{H\left(H-\frac{1}{h_a}\right)\left(H-\frac{1}{h_b}\right)\left(H-\frac{1}{h_c}\right)}}}$$

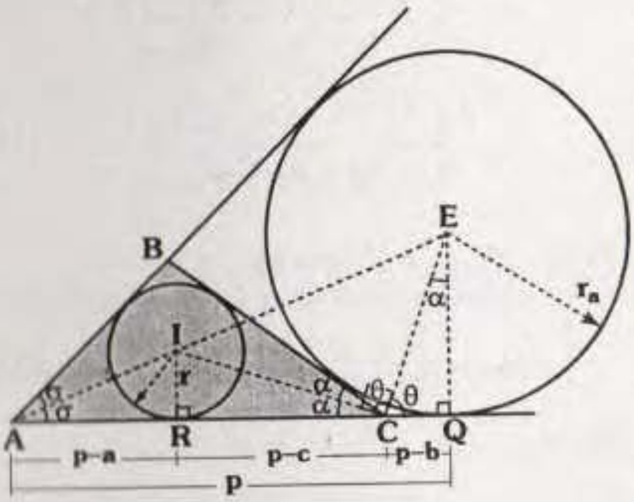
OTRA MANERA DE DEMOSTRAR LA FÓRMULA DE HERÓN

Sea $AB = c$

$BC = a$

$AC = b$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



- Trazamos la circunferencia inscrita y la exinscrita relativa a $\overline{BC}$ y sean **r** y r_a sus respectivos radios.
- Por teorema de circunferencia:

$AR=p-a$; $RC=p-c$; $CQ=p-b$ y

$AQ=p$

- $\triangle IRC \sim \triangle CQE$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r_a}$$

$$\Rightarrow \quad rr_a = (p-c)(p-b) \qquad \ldots(1)$$

- $\triangle AQE \sim \triangle ARI$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} \qquad \ldots(2)$$

- De (1) y (2):

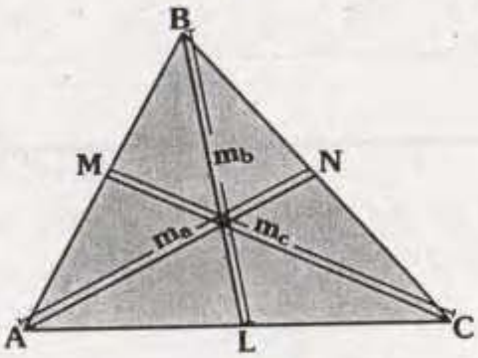
$$r^2p = (p-a)(p-c)(p-b)$$

$$\underbrace{r^2p^2}_{(S_{\Delta ABC})^2} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ÁREA EN FUNCIÓN DE LAS MEDIANAS

En el gráfico, $\overline{AN}$, $\overline{CM}$ y $\overline{BL}$ son medianas.

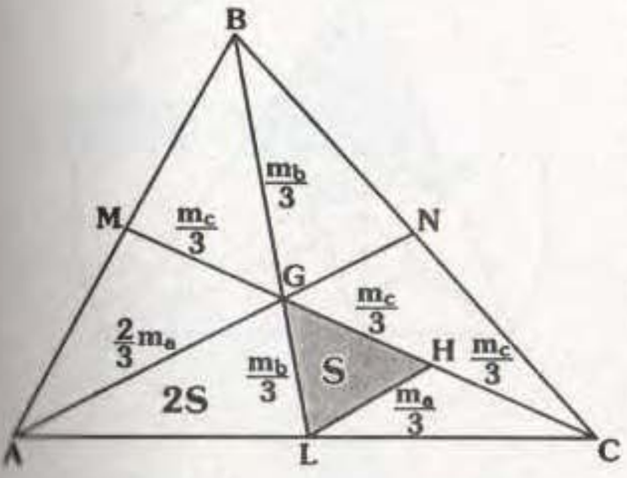


Sea $M = \dfrac{m_a + m_b + m_c}{2}$

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}}$$

Prueba



- Se traza $\overline{LH} // \overline{AG}$, luego:

$$LH = \frac{AG}{2} \quad y \quad GH = LC$$

- Luego tenemos:

$$S_{\Delta ABC} = 12\underbrace{S_{\Delta LGH}}_{S} \qquad ....(1)$$

- Para el ΔLGH : usemos el teorema de Heron:

Sea $p = \frac{1}{2}\left(\frac{m_a + m_b + m_c}{3}\right) \Rightarrow p = \frac{M}{3}$

$$S = \sqrt{p\left(p - \frac{m_a}{3}\right)\left(p - \frac{m_b}{3}\right)\left(p - \frac{m_c}{3}\right)}$$

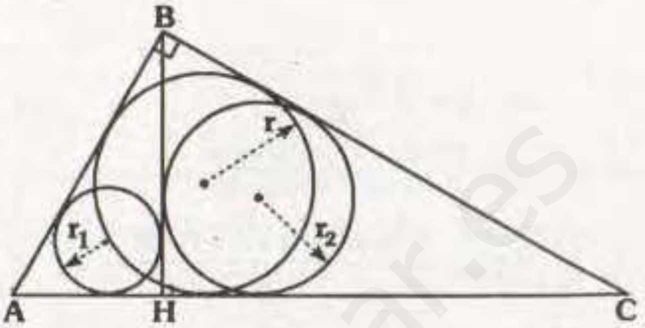
$$S = \frac{1}{9}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$

- En (1):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$

TEOREMA

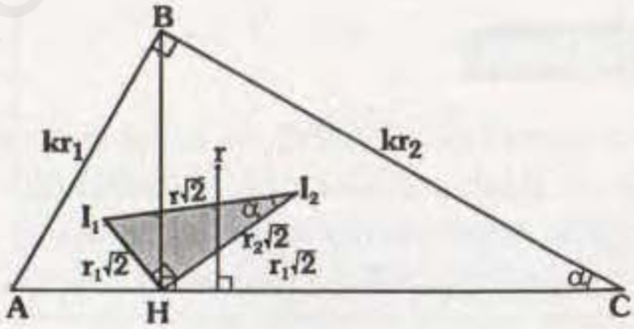
En el gráfico, r, r y r_2 son inradios de los triángulos ABC, AHB y BHC respectivamente.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r^2\frac{(r_1 + r_2 + r_3)}{(r_1 + r_2 - r)}}$$

Demostración:



- Notemos que $\triangle ABC \sim \triangle I_1HI_2$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle I_1HI_2}} = \frac{r^2}{x^2} \qquad ...(1)$$

Donde "x" es inradio del $\triangle I_1HI_2$

- Propiedad:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow I_1I_2 = r\sqrt{2}$$

• En $\triangle I_1HI_2$:

$$r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{2}=r\sqrt{2}+2x$$

$$\Rightarrow\ r_1+r_2-r=\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{(r_1+r_2-r)}{\sqrt{2}} \qquad ...(2)$$

• $$S_{\triangle I_1HI_2}=\frac{(r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{2}+r\sqrt{2})}{2}x$$

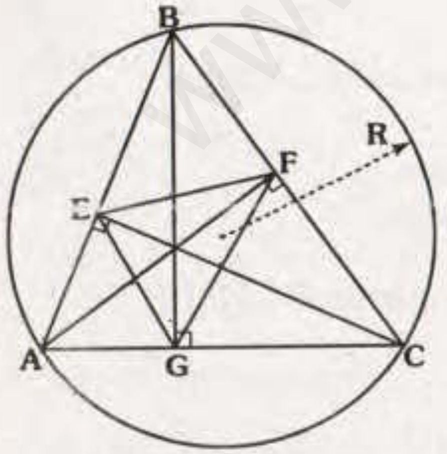
$$=\frac{(r_1+r_2+r)}{2}(r_1+r_2+r) \quad ...(3)$$

• De (1), (2) y (3):

$$S_{\triangle ABC}=r^2\left(\frac{r_1+r_2+r}{r_1+r_2-r}\right)$$

TEOREMA

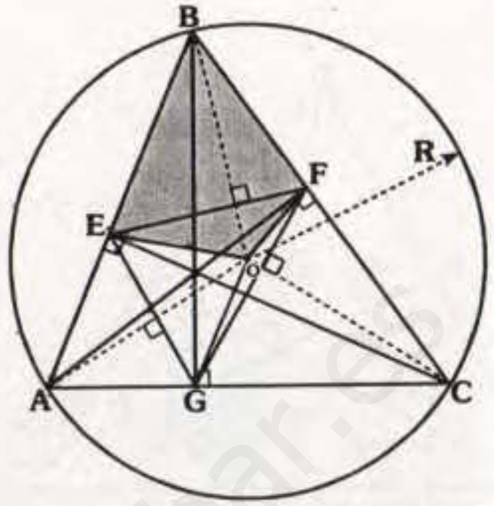
En el gráfico, el ΔABC es acutángulo y "p" es el semiperímetro del triángulo órtico EFG.



Se cumple :

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=pR}$$

Demostración:



• Por teorema de puntos notables:

$$\overline{OB}\perp\overline{EF};\ \overline{OA}\perp\overline{EG}\ \text{y}\ \overline{OC}\perp\overline{EG}$$

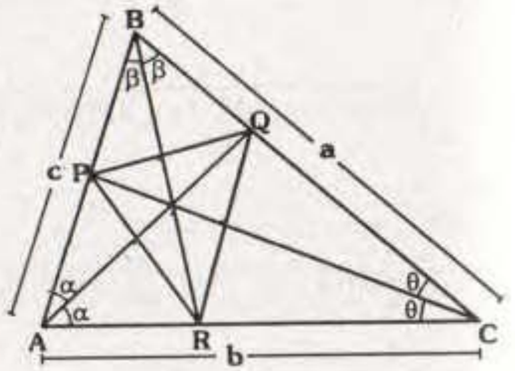
• $$S_{\Delta ABC}=\underbrace{S_{\square EOFB}}_{\frac{(EF)R}{2}}+\underbrace{S_{\square AEOG}}_{\frac{(EG)R}{2}}+\underbrace{S_{\square FOGC}}_{\frac{(FG)R}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=R\underbrace{\left(\frac{EF+EG+FG}{2}\right)}_{p}$$

$$\therefore\quad S_{\Delta ABC}=pR$$

TEOREMA

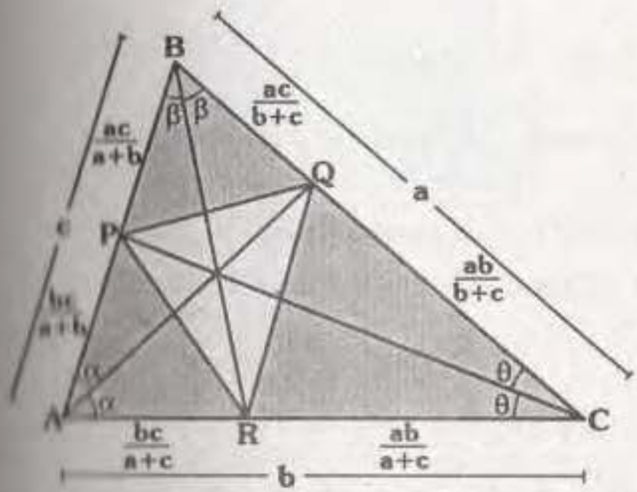
En el gráfico, el ΔPQR es el triángulo incéntrico.



Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}}$$

Prueba



- Primero hallemos cada uno de las longitudes de los segmentos determinados por las bisectrices, por ejemplo:

$$AP=\frac{bc}{a+b} \quad y \quad PB=\frac{ac}{a+b}$$

$$\frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(PB)(BQ)}{ac}$$

$$\frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)} \qquad ...(1)$$

- Análogamente:

$$\frac{S_{\Delta APR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)} \qquad ...(2)$$

$$\frac{S_{\Delta CQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \qquad ...(3)$$

- Sumando (1), (2) y (3):

$$\frac{S_{\Delta ABC}-S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

- Ordenando tenemos:

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

Observación

Usando el resultado anterior y apoyandonos en el teorema de las medias para los lados:

$$\frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}$$

$$\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

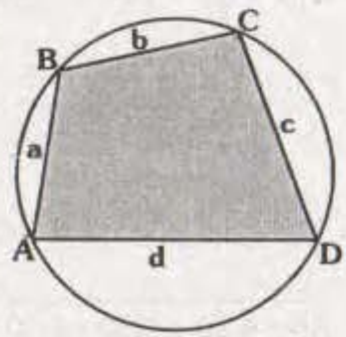
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\geq\frac{2abc}{(a+c)(b+c)(a+b)}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}\leq\frac{1}{4}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO INSCRITO O INSCRIPTIBLE

(Fórmula de Brahmagupta)

En el gráfico, el ⏢ABCD es inscrito.



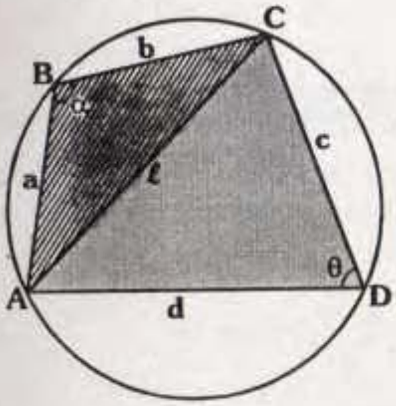
Sea :

$$p=\frac{a+b+c+d}{4}$$

Se cumple: $\boxed{S_{\square ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

Demostración:

- Como no sabemos si los lados opuestos son paralelos y para no considerar casos, optemos por obtener el área total por partes, así:



$$\underbrace{S_{\square ABCD}}=\underbrace{S_{\Delta ABC}}+\underbrace{S_{\Delta ACD}}$$

$$S=\frac{ab}{2}\text{sen}\alpha+\frac{cd}{2}\text{sen}\theta$$

- Como $\alpha+\theta=180^\circ \Rightarrow \text{sen}\alpha=\text{sen}\theta$

$\Rightarrow 2S=(ab+cd)\text{sen}\theta \Rightarrow 4S=(2ab+2cd)\text{sen}\theta$ ...(1)

- Usando teorema de cosenos en ΔABC y ΔACD :

$$\left.\begin{array}{r}\ell^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha\\ \ell^2=d^2+c^2-2cd\cos\theta\\ \text{Como } \alpha+\theta=180^\circ\Rightarrow\cos\alpha=-\cos\theta\end{array}\right\}\ c^2+d^2-a^2-b^2=(2ab+2cd)\cos\theta$$

- Sumando los cuadrados de las expresiones (1) y (2)

$$16S^2+(c^2+d^2-a^2-b^2)=(2ab+2cd)^2\underbrace{(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}$$

$$\Rightarrow\ 16S^2=(2ab+2cd)^2-(c^2+d^2-a^2-b^2)^2$$

$$16S^2=(2ab+2cd+c^2+d^2-a^2-b^2)(2ab+2cd-c^2-d^2+a^2+b^2)$$

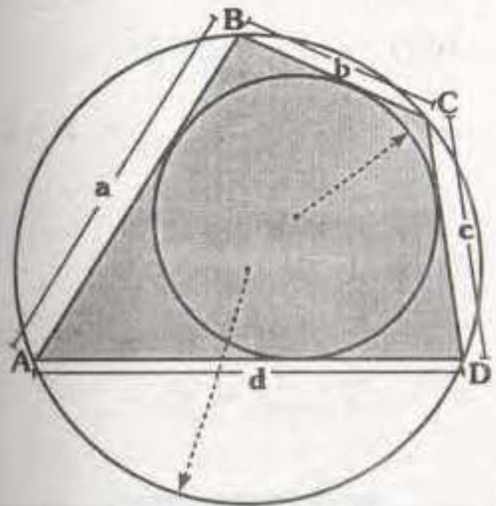
- Ordenando: $16S^2=[(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2]$

$$16S^2=\underbrace{(c+d+a-b)}_{(2p-2b)}\underbrace{(c+d+b-a)}_{(2p-2a)}\underbrace{(a+b+c-d)}_{(2p-2d)}\underbrace{(a+b+d-c)}_{(2p-2c)}$$

$$\Rightarrow\ 16S^2=2(p-b)2(p-a)2(p-d)2(p-c)$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

PARA UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO E INSCRITO A LA VEZ (Bicéntrico)



En el gráfico, el $\square ABCD$ es inscrito y circunscrito, al cual se denomina cuadrilátero bicéntrico.

Se cumple:

$$\boxed{S_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}}$$

Prueba

- Usando el teorema de Pitot:

$$a+c=b+d=p$$

- Por teorema de Brahmagupta:

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{\underbrace{(p-a)}_{a+b}\underbrace{(p-b)}_{a+b}\underbrace{(p-c)}_{c+d}\underbrace{(p-d)}_{c+d}}$$

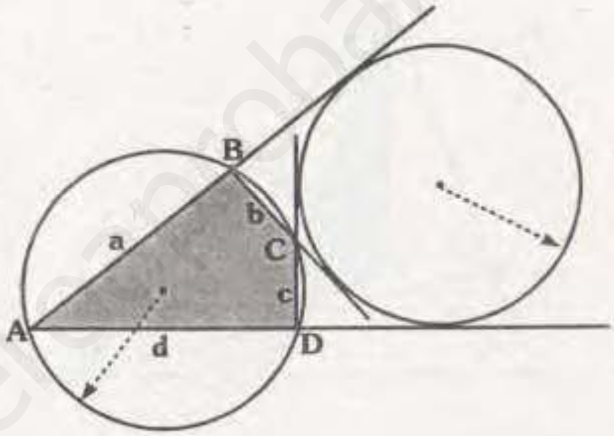
$$\therefore\ S_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}$$

Observación

- *El teorema también es válida para un cuadrilátero es inscriptible y circunscriptible a la vez.*

PARA UN CUADRILÁTERO INSCRITO Y EXINSCRITO A LA VEZ

En el gráfico, el $\square ABCD$ es inscrito y exinscrito.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}}$$

Prueba

- Por la fórmula de Brahmagupta:

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad ...(1)$$

$$\text{con } p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

- Por teorema de Steiner:

$$a-c=d-b$$

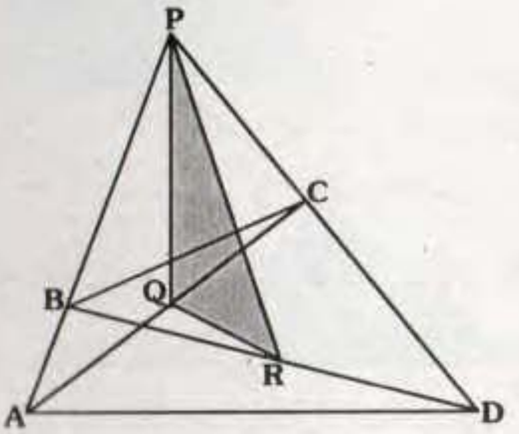
$$\Rightarrow a+b=c+d=p$$

- En (1)

$$S_{\square ABCD}=\sqrt{badc}$$

TEOREMA

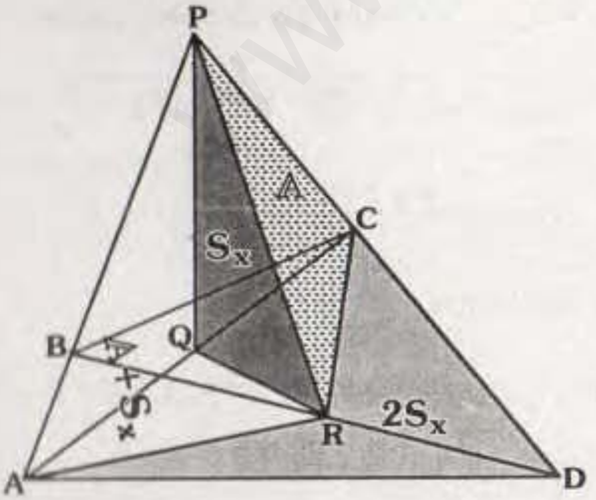
Sea el cuadrilátero convexo ABCD; sea p la intersección de las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$; Q y R son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\square ABCD}=4S_{(\Delta QPR)}}$$

Demostración:



- Sea $S_{\Delta PRC}=\mathbb{A}$ y $S_{\Delta PQR}=S_x$
- En $\square$APCR:

$$S_{\square RQPC}=S_{\measuredangle APQR}=\mathbb{A}+Sx$$

- En ΔAPD : como BR=RD

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta ARP}=S_{\measuredangle ADPR}=\mathbb{A}+2S_x$$

$$\Rightarrow \quad S_{\measuredangle ADCR}=2S_x$$

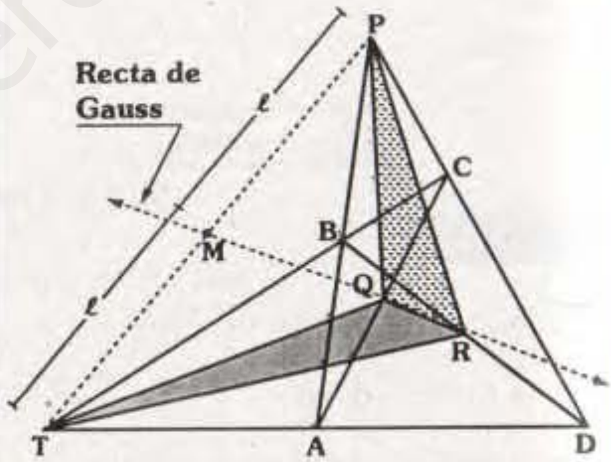
- En $\square$ABCD:

$$S_{\square ABCR}=S_{\measuredangle ADCR}=2S_x$$

$$S_{\square ABCD}=4S_x$$

Observación

- Usando el resultado anterior, tendremos:



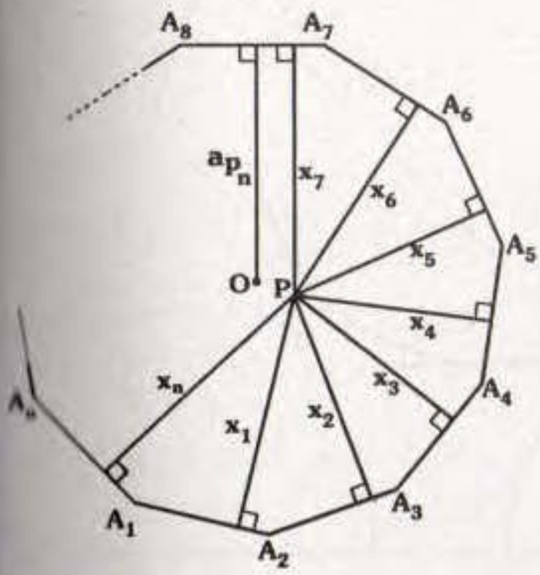
Si AQ=QC y BR=RD

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{\Delta TQR}=S_{\Delta QPR}}$$

- Además la prolongación de $\overline{RQ}$, llegará al punto medio de $\overline{TP}$, a dicha recta se le conoce como: "RECTA DE GAUSS"

TEOREMA DE VIVIANI

La suma de las distancias de un punto interior a todos los lados es igual al producto entre el número de lados con su respectivo apotema.

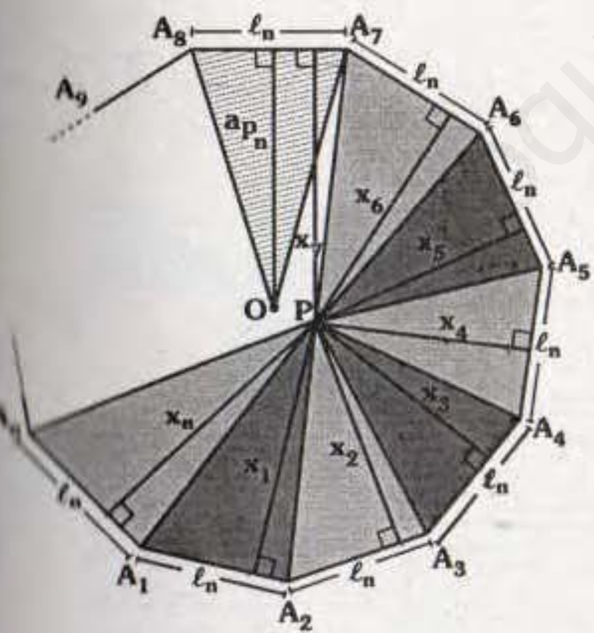


Sea $A_1A_2A_3...A_n$ un polígono regular de "n" lados y centro O, P es un punto interior del polígono.

Se cumple:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n(ap_n)}$$

Demostración:



• Sea "S" el área de la región polígonal

$$\Rightarrow \; S = n(\underbrace{S_{\Delta A_7OA_8}}_{\frac{(\ell_n)a_P}{2}})$$

$$S = n\frac{(\ell_n)(a_P)}{2} \qquad ...(1)$$

• También:

$$S = \underbrace{S_{\Delta PA_1A_2}}_{\frac{(\ell_n)x_1}{2}} + \underbrace{S_{\Delta PA_2A_3}}_{\frac{(\ell_n)x_2}{2}} + \underbrace{S_{\Delta PA_3A_4}}_{\frac{(\ell_n)x_3}{2}} + ... + \underbrace{S_{\Delta PA_nA_1}}_{\frac{(\ell_n)x_n}{2}}$$

$$\Rightarrow \; S = \frac{(\ell_n)}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) \qquad ...(2)$$

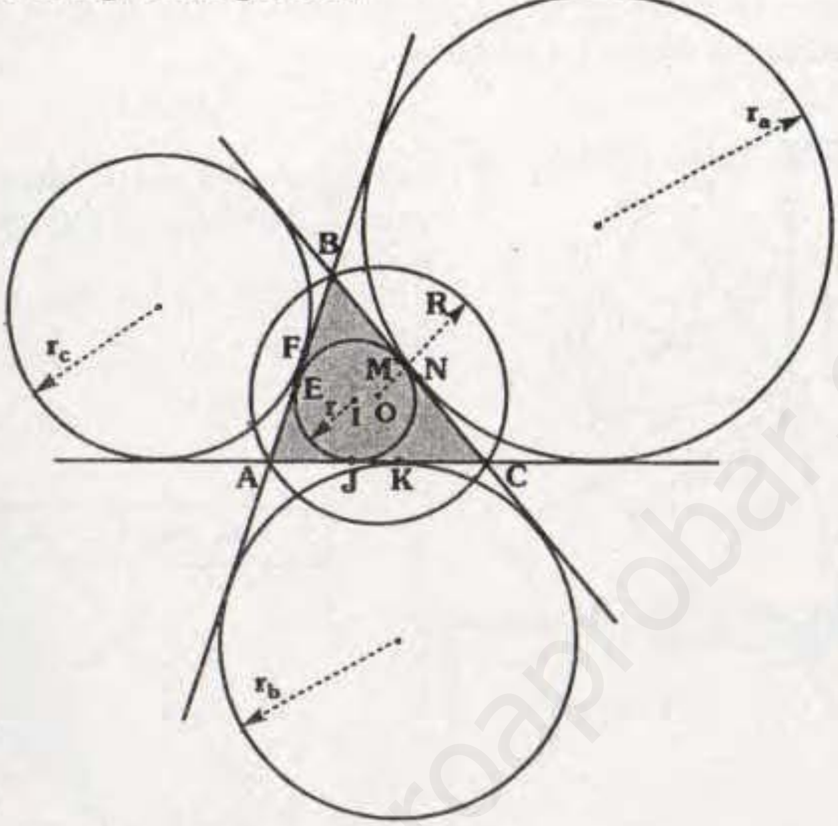
• De (1) y (2):

$$\frac{n(\ell_n)(a_P)}{2} = \frac{(\ell_n)}{2}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

$$\therefore \quad n(ap_n) = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

El siguiente grupo de teoremas se deja como ejercicio para el lector:

Consideremos el siguiente gráfico:



Sean AB=c; BC=a y AC=b con: $a \geq b \geq c$

h_a; h_b y h_c : alturas relativas a los lados que miden a, b y c

p: semiperímetro de ABC

Se cumple: $\boxed{S_{\Delta IJK} = S_{\Delta IMN} + S_{\Delta IEF}}$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{R}{2}h_a h_b h_c} = \frac{2R^2}{abc}h_a h_b h_c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_a h_b h_c}}$$

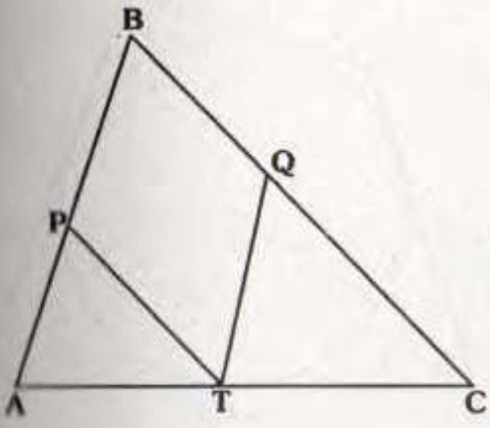
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r\frac{ar_a}{r_a - r} = r\frac{br_b}{r_b - r} = r\frac{cr_c}{r_a - r}}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{r(a+b)r_c}{r+r_c} = \frac{r(a+c)r_b}{r+r_b} = \frac{r(b+c)r_a}{r+r_a}}$$

$\boxed{ab = rr_c + r_a r_b}$ $\boxed{bc = rr_a + r_b r_c}$ $\boxed{ac = rr_b + r_a r_c}$

$\boxed{S_{(IJK)} = S_{(IEF)} + S_{(IMN)}}$

En el gráfico, TPBQ es paralelogramo.

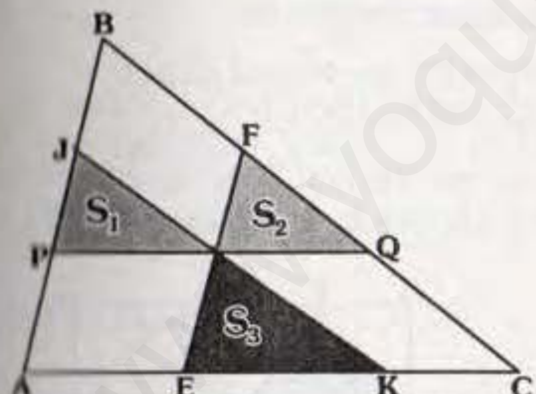


Se cumple:

$$\boxed{\sqrt{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{S_{\Delta APT}} + \sqrt{S_{\Delta TQC}}}$$

En el gráfico,

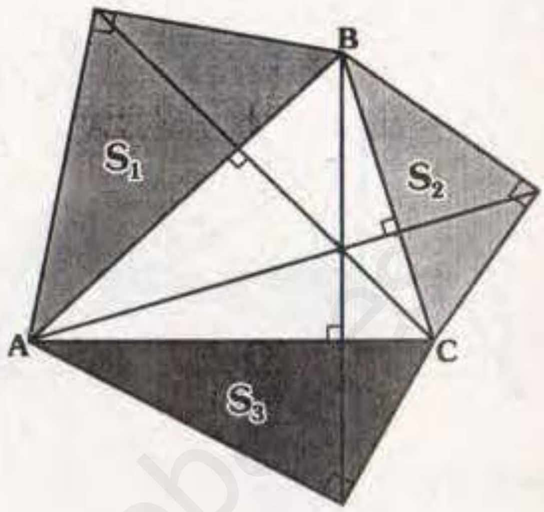
$\overline{PQ} /\!/ \overline{AC}$; $\overline{JK} /\!/ \overline{BC}$ y $\overline{EF} /\!/ \overline{AB}$



Se cumple:

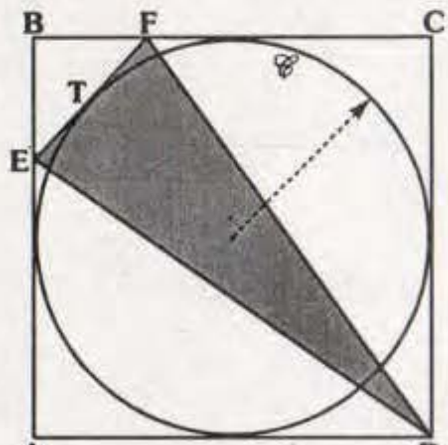
- $\boxed{\sqrt{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}$
- $\boxed{S_{\Delta ABC} \leq 3(S_1 + S_2 + S_3)}$
- $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{S_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{S_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{S_3}} \geq \dfrac{9}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}}}$

En el gráfico se cumple:



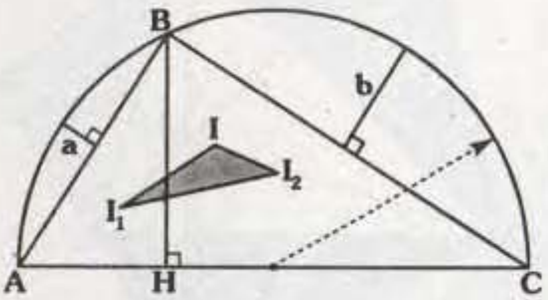
- $(S_{\Delta ABC})^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$
- $3S_{\Delta ABC} \geq S_1 + S_2 + S_3$

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD y T es punto de tangencia.



Se cumple: $\boxed{\dfrac{S_{\Delta EFD}}{S_{\Delta BCD}} = \dfrac{1}{4}}$

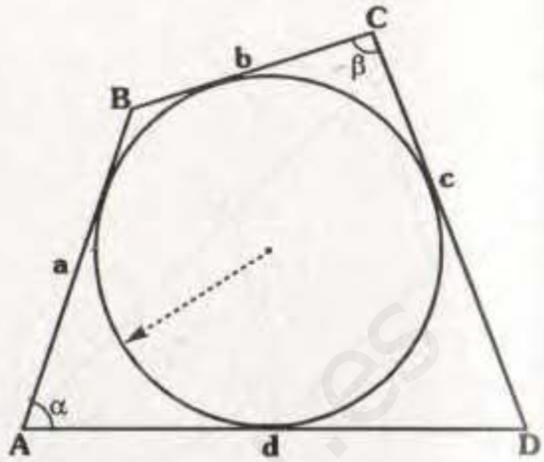
En el gráfico, I, I_1 e I_2 son incentros de ABC, AHB y BHC respectivamente "a" y "b" son flechas



Se cumple:

$$S_{\Delta II_1I_2} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{a+b+2ab}$$

- Si el $\square$ABCD es circunscrito



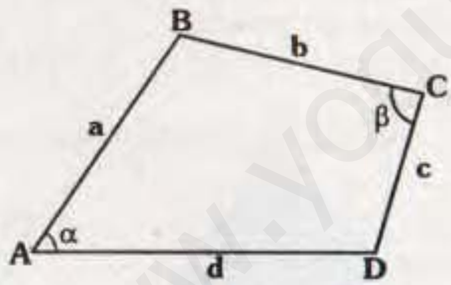
Se cumple

$$S_{\square ABCD} = abcd\ \text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

Nota

El último resultado también es válido si el cuadrilátero es exinscrito.

Una expresión general



Sea: $p = \frac{a+b+c+d}{4}$

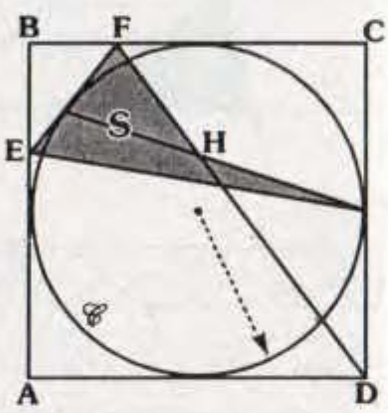
Se cumple:

$$(S_{\square ABCD})^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

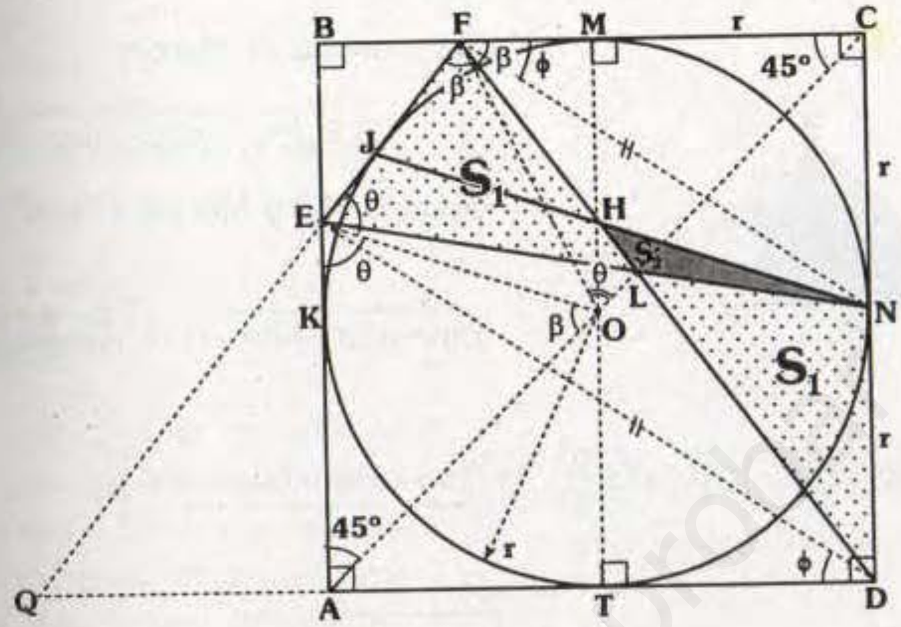
Un buen resultado:

Propuesto por Miguel Yépez (FC–UNMSM;2010)

En el gráfico ABCD es un cuadrado y $\mathscr{C}$ está inscrito en el pentágono AEFCD



Se cumple: $\dfrac{S}{S_{(ABCD)}} = \dfrac{1}{8}$



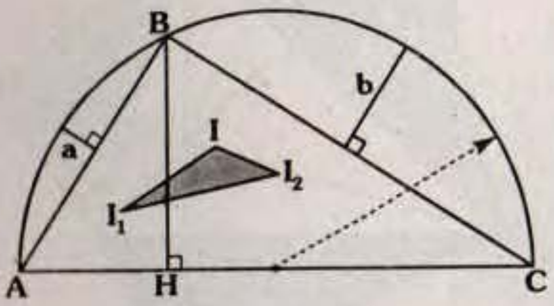
- Notemos que: $\Delta AEO \sim \Delta COF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{OC}=\frac{AO}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{r\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{2r}=\frac{2r}{FC}$$

- Luego: $⊿EAD \sim ⊿NCF \Rightarrow \overline{ED}//\overline{FN}$
- Como $\overline{ED}//\overline{FN} \Rightarrow S_{\Delta ELF}=S_{\Delta LND}=S_1$
- El área pedida "S" es $S_1+S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1+S_2=S_{\Delta HND}$
- Por teorema de Newton en $\triangle QFCD$: $\overline{JN}$, $\overline{TM}$, $\overline{FD}$ y $\overline{QC}$ concurren en H.
- Como $\overline{TM}$ es diámetro $\Rightarrow$ MT=2r $\quad \Rightarrow \underbrace{S_1+S_2}_{S}=S_{\Delta HND}=\frac{r.r}{2}=\frac{r^2}{2}$
- $S_{(ABCD)}=(2r)^2=4r^2$

$$\therefore \frac{S}{S_{(ABCD)}}=\frac{1}{8}$$

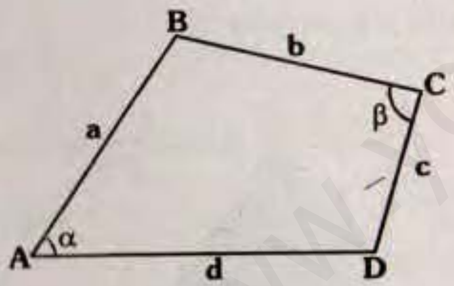
En el gráfico, I, I_1 e I_2 son incentros de ABC, AHB y BHC respectivamente "a" y "b" son flechas



Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangle II_1I_2} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{a+b+2ab}}$$

Una expresión general

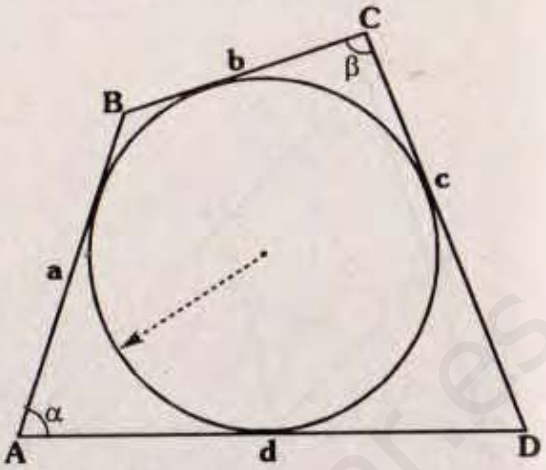


Sea: $p = \dfrac{a+b+c+d}{4}$

Se cumple:

$$\boxed{(S_{\square ABCD})^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$$

- Si el $\square$ABCD es circunscrito



Se cumple

$$\boxed{S_{\square ABCD} = abcd\ \text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$$

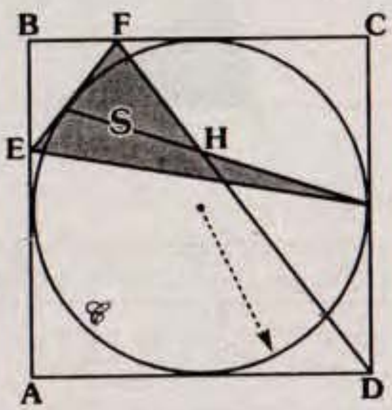
Nota

El último resultado también es válido si el cuadrilátero es exinscrito.

Un buen resultado:

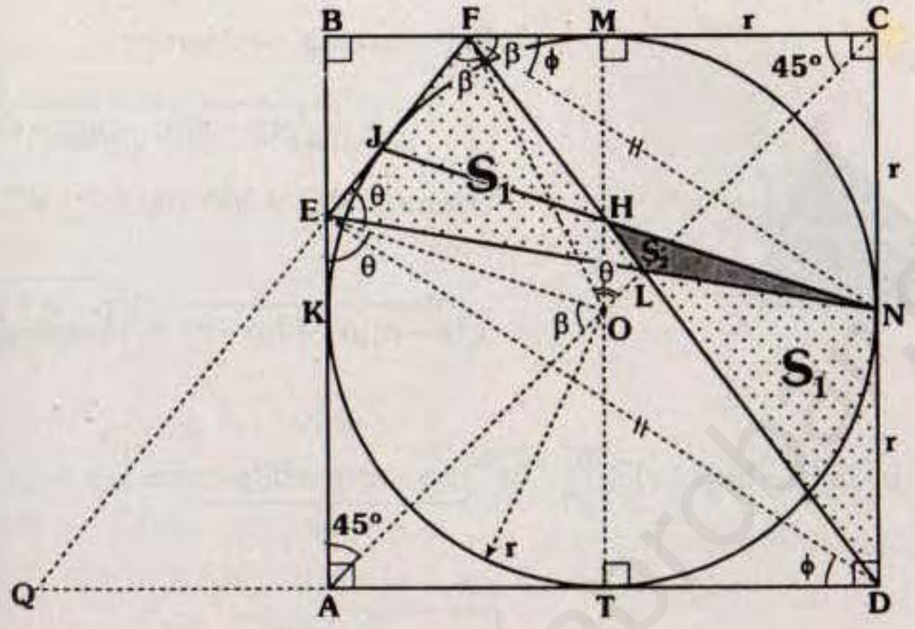
Propuesto por Miguel Yépez (FC–UNMSM;2010)

En el gráfico ABCD es un cuadrado y $\mathscr{C}$ está inscrito en el pentágono AEFCD



Se cumple: $\boxed{\dfrac{S}{S_{(ABCD)}} = \dfrac{1}{8}}$

Prueba 9[illegible]



- Notemos que: $\Delta AEO \sim \Delta COF$

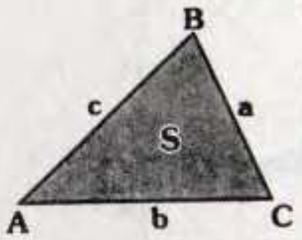
$$\Rightarrow \frac{AE}{OC}=\frac{AO}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{r\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{2r}=\frac{2r}{FC}$$

- Luego: $\measuredangle EAD \sim \measuredangle NCF \;\Rightarrow\; \overline{ED}//\overline{FN}$
- Como $\overline{ED}//\overline{FN} \Rightarrow S_{\Delta ELF}=S_{\Delta LND}=S_1$
- El área pedida "S" es $S_1+S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1+S_2=S_{\Delta HND}$
- Por teorema de Newton en $\triangle QFCD$: $\overline{JN}$, $\overline{TM}$, $\overline{FD}$ y $\overline{QC}$ concurren en H.
- Como $\overline{TM}$ es diámetro $\Rightarrow MT=2r \quad \Rightarrow \underbrace{S_1+S_2}_{S}=S_{\Delta HND}=\frac{r.r}{2}=\frac{r^2}{2}$
- $S_{(ABCD)}=(2r)^2=4r^2$

$$\therefore \; \frac{S}{S_{(ABCD)}}=\frac{1}{8}$$

RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y SEMIPERÍMETRO

Sea el ΔABC de área "S" y semiperímetro "p".



Por teorema de Herón:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Usemos MG y MA para "p–a", "p–b", "p–c"

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{\overbrace{p-a+p-b+p-c}^{p}}{3}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{p^3}{27} \Rightarrow \underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2}\le\frac{p^4}{27}$$

$$\therefore \quad \boxed{S\le\frac{p^2}{3\sqrt{3}}}$$

La igualdad se cumple en el triángulo equilátero.

RELACIÓN ENTRE EL ÁREA E INRADIO

- Sea el ΔABC de inradio r.
- Usando la expresión anterior para el ΔABC de inradio r.

$$S\le\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow Sr^2\le\frac{p^2r^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow Sr^2\le\frac{S^2}{3\sqrt{3}}$$

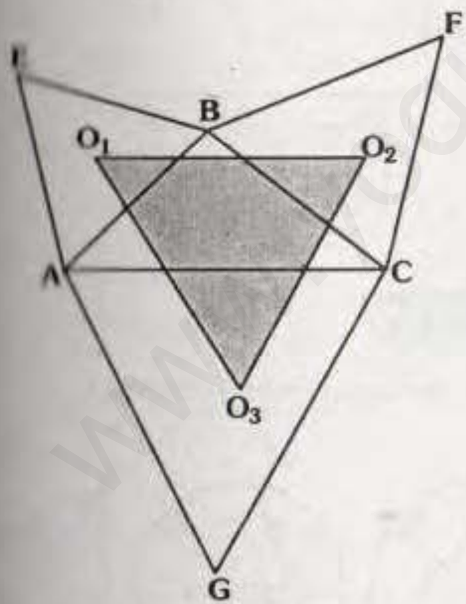
$$\therefore \quad \boxed{S\ge 3\sqrt{3}\,r^2}$$

TEMAS SELECTOS

Los temas tratados a continuación no son motivo de examen de admisión, son algunos de ellos deducibles con ayuda de la trigonometría, sirven para profundizar un poco más el tema de áreas y también como entrenamiento para alumnos preolímpicos.

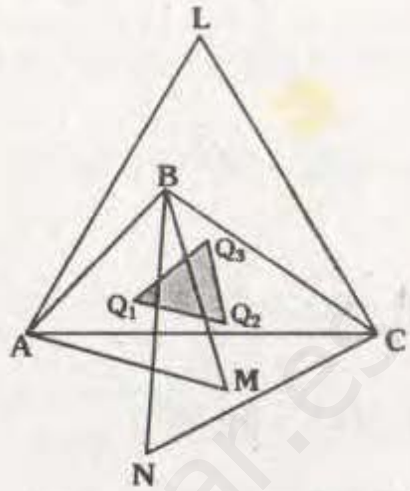
TEOREMA DE NAPOLEÓN

Sea el triángulo ABC, sobre los lados se construyen triángulo equiláteros llamemos T_1 al triángulo cuyos vértices son los centros de dichos triángulos, ahora construyamos sobre los lados triángulos equiláteros interiores sea T_2 el triángulo cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros.



Se cumple:

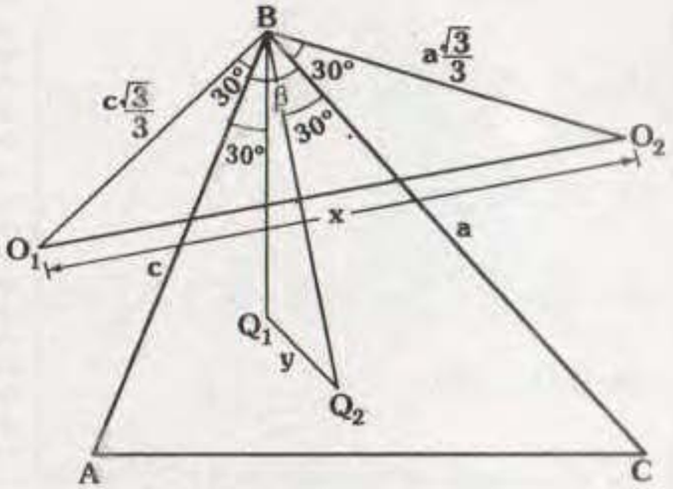
$$\boxed{S_{(\Delta ABC)} = S_{T_1} - S_{T_2}}$$



En el gráfico, los triángulos AEB, BFC, AGC, AMB, BNC y ALC son equiláteros, sus respectivos centros son O_1, O_2, O_3, Q_1, Q_2 y Q_3.

Demostración:

Usemos el siguiente resultado los triángulos $O_1O_2O_3$ y $Q_1Q_2Q_3$ son equiláteros, lo cual ya fue probado (ver una prueba en la publicación de puntos notables: fascículo 7), consideremos el siguiente gráfico:



Sea BC=a, AB=c y $m\measuredangle ABC = \alpha$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta ABC}=\frac{ac}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad ....(I)$$

También:

- $$BO_1=BQ_1=\frac{c\sqrt{3}}{3}$$

- $$BO_2=BQ_2=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

- $$m\sphericalangle O_1BO_2=\beta+60°$$

- $$m\sphericalangle Q_1BQ_2=\beta-60°$$

$$\Rightarrow \quad S_{(\Delta O_1O_2O_3)}=S_{T_1}=x^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{(\Delta Q_1Q_2Q_3)}=S_{T_2}=y^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Luego:

$$S_{T_1}-S_{T_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-y^2) \qquad ...(II)$$

- Por teorema de cosenos:

– En ΔO_1BO_2:

$$x^2=\frac{a^2}{3}-\frac{c^2}{3}-\frac{2}{3}ac.\cos(\beta+60°) \qquad ...(III)$$

– En ΔQ_1BQ_2:

$$y^2=\frac{a^2}{3}-\frac{c^2}{3}-\frac{2}{3}ac.\cos(\beta-60°) \qquad ...(IV)$$

- De (III) y (IV):

$$x^2-y^2=\frac{2}{3}ac[\underbrace{\cos(\beta-60°)-\cos(\beta+60°)}_{2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}60°}]=\frac{2\sqrt{3}}{3}ac.\operatorname{sen}\beta \qquad ....(V)$$

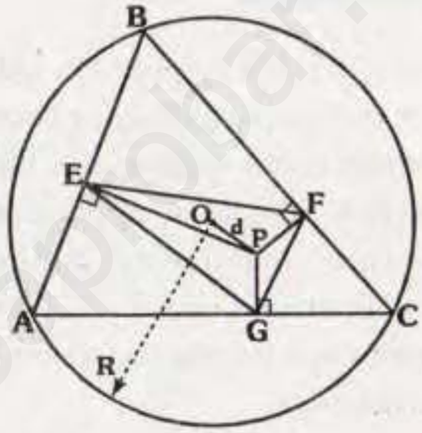
- (V) en (II)

$$S_{T_1}-S_{T_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}ac.\operatorname{sen}\beta\right)=\underbrace{\frac{ac}{2}\operatorname{sen}\beta}_{S_{\Delta ABC}}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC}=S_{T_1}-S_{T_2}$$

TEOREMA DE EULER

En el gráfico: d<R

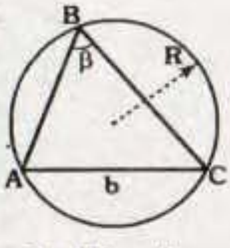


Se cumple:

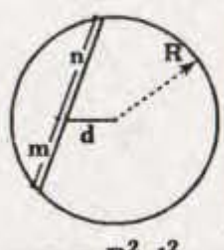
$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R^2-d^2}{4R^2}}$$

Prueba

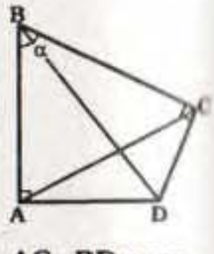
Usemos los siguientes teoremas:



$b=2R\operatorname{sen}\beta$

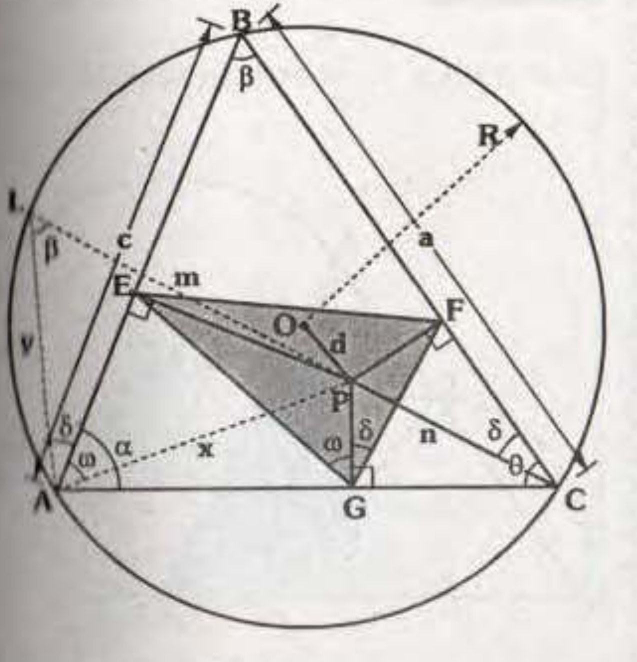


$mn=R^2-d^2$



$AC=BD.\operatorname{sen}\alpha$

Ampliemos el gráfico inicial:



- Sea CP=n y PL=m
- Usemos razón de áreas:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta LAP}} &= \frac{(EG)(GF)}{xy}\\ \frac{S_{\Delta LAP}}{S_{\Delta ABC}} &= \frac{my}{ac}\end{aligned}\right\} \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(EG)(GF)m}{xac}$$

- En los cuadriláteros AEPG y CGPF

$$EG = x\ \text{sen}\alpha$$
$$FG = n\ \text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{mn\text{sen}\alpha\text{sen}\theta}{ac} \qquad ...(*)$$

- Pero $a = 2R\ \text{sen}\alpha$
  $c = 2R\ \text{sen}\theta$

- Como: $mn = R^2 - d^2$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{R^2-d^2}{4R^2}$$

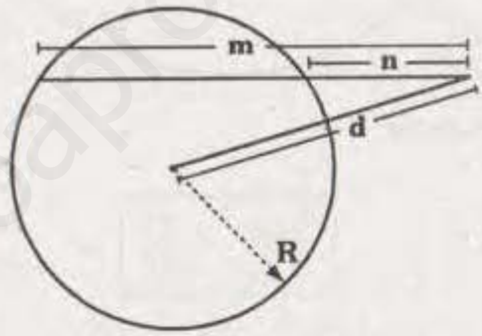
Observación

- Como el punto P es interior a la circunferencia, entonces:

$$R^2 - d^2 \le R^2 \Rightarrow \frac{R^2-d^2}{4R^2} \le \frac{1}{4}$$

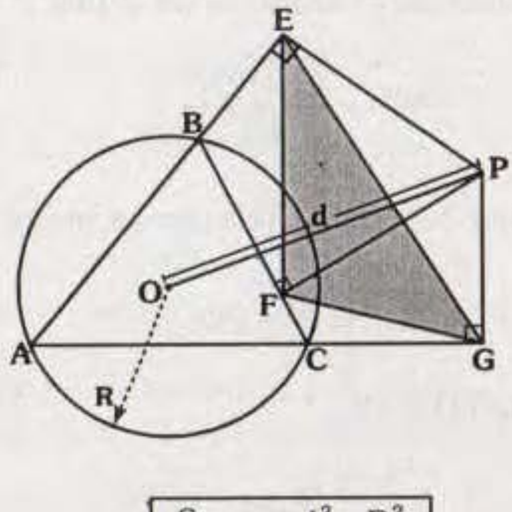
$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} \le \frac{1}{4}$$

- La igualdad se da cuando d=0, es decir P es el circuncentro.
- Si P es un punto exterior con las mismas notaciones y usando:



$$\boxed{d^2 - R^2 = mn}$$

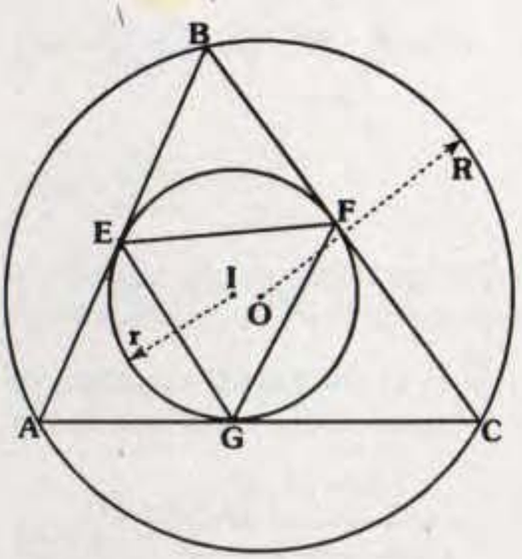
Se demuestra:



$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{d^2-R^2}{4R^2}}$$

TEOREMA

En el gráfico, R y r son circunradio e inradio del triángulo ABC



Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R}}$$

Prueba

- Usando el teorema de Euler:

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R^2-(IO)^2}{4R^2} \qquad ....(1)$$

- Por teorema (Relaciones métricas):

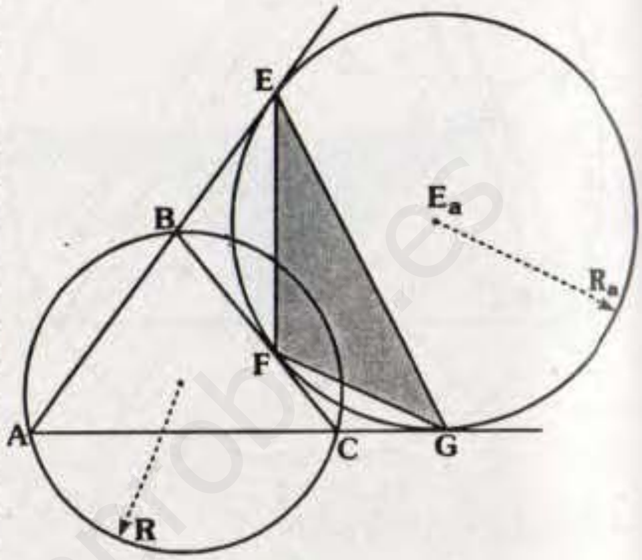
$$(IO)^2=R^2-2Rr \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R}$$

TEOREMA

En el gráfico, R_a es exradio relativo a $\overline{BC}$.



Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R_a}{2R}}$$

Demostración:

- Por teorema de Euler(para áreas)

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(E_aO)^2-R^2}{4R^2} \qquad ...(1)$$

- Por teorema de relaciones métricas:

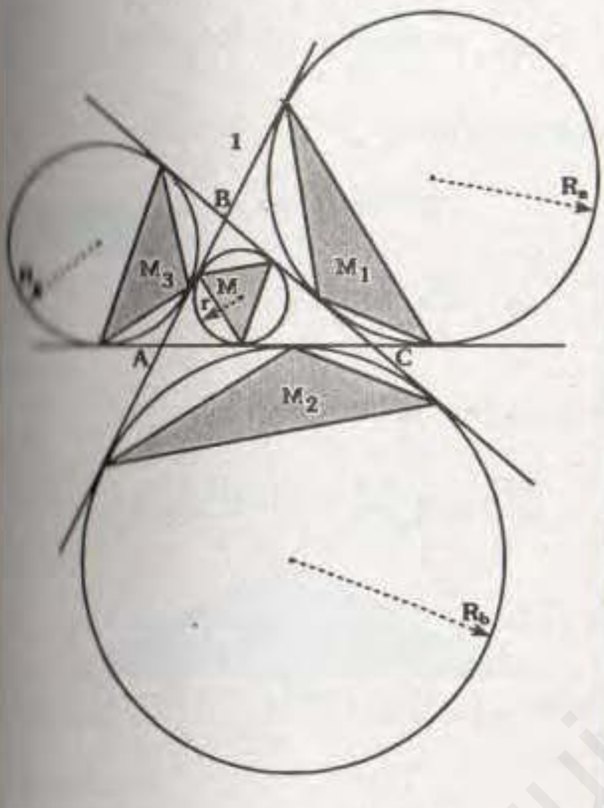
$$(E_aO)^2=R^2+2RR_a \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R_a}{2R}$$

Observación

Como consecuencia de los últimos dos teoremas, tenemos:



Sea R el circunradio del ΔABC, y usando:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}$$

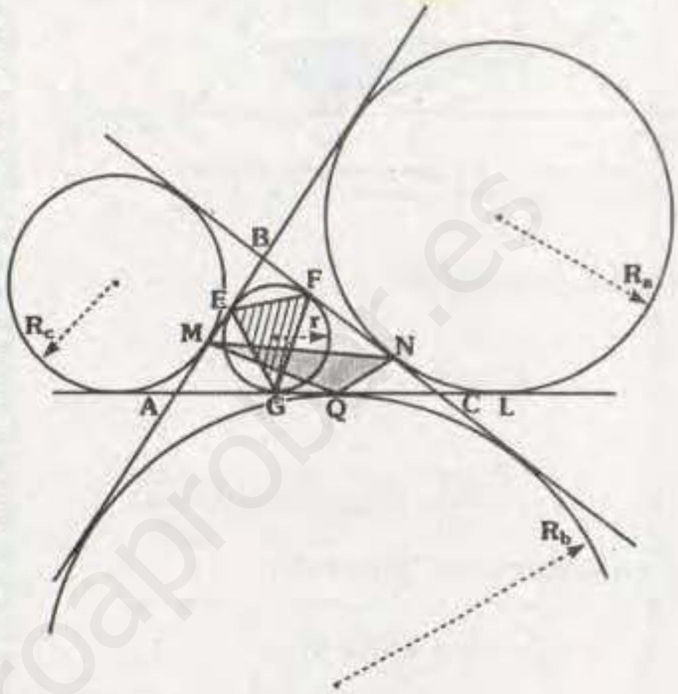
$$\Rightarrow \quad \frac{2R}{r}=\frac{2R}{R_a}+\frac{2R}{R_b}+\frac{2R}{R_c}$$

$$\frac{\cancel{S_{\Delta ABC}}}{M}=\frac{\cancel{S_{\Delta ABC}}}{M_1}+\frac{\cancel{S_{\Delta ABC}}}{M_2}+\frac{\cancel{S_{\Delta ABC}}}{M_3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{M}=\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\frac{1}{M_3}}$$

TEOREMA

En el gráfico, se muestra las circunferencias exinscritas y la inscrita.



Se cumple:

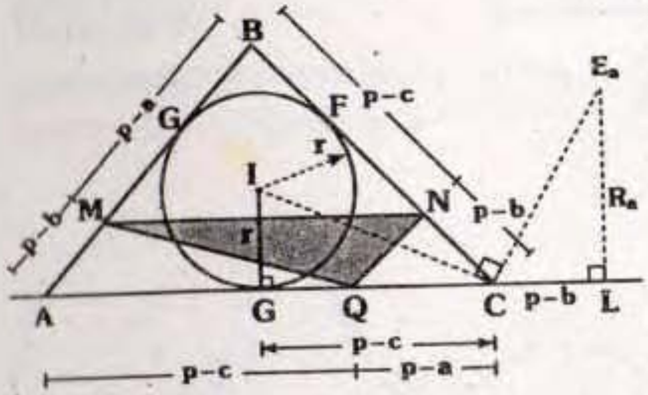
$$\boxed{S_{\Delta EFG}=S_{\Delta MNQ}}$$

Demostración:

- Sea R el circunradio del ΔABC
- Por teorema (página 56)

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R} \qquad ...(\alpha)$$

- Solo grafiquemos la circunferencia inscrita, sean $AB=c$; $BC=a$; $AC=b$ y $p=\dfrac{a+b+c}{2}$



- $\measuredangle CGI \sim \measuredangle E_aLC$

$$\Rightarrow \frac{r}{p-c}=\frac{p-b}{R_a}$$

$$\Rightarrow rR_a=(p-b)(p-c)$$

- Análogamente tenemos:

$$rR_b=(p-a)(p-c) \quad y$$

$$rR_c=(p-a)(p-b) \qquad ...(2)$$

- Comparemos áreas:

$$\frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{rR_a}{bc} \qquad ...(3)$$

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}=\frac{rR_b}{ac} \qquad ...(4)$$

$$\frac{S_{\Delta CNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(p-b)(p-a)}{ba}=\frac{rR_c}{ab} \qquad ...(5)$$

- Sumando (3), (4) y (5):

$$\frac{S_{\Delta ABC}-S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{rR_a}{bc}+\frac{rR_b}{ac}+\frac{rR_c}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\left(\frac{rR_a}{bc}+\frac{rR_b}{ac}+\frac{rR_c}{ab}\right) \qquad ...(6)$$

- Usando: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}=pr$

- En (6):

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\left(\frac{aR_a}{4Rp}+\frac{bR_b}{4Rp}+\frac{cR_c}{4Rp}\right) \qquad ...(7)$$

- Ahora usemos:

$$pr=R_a(p-a)$$

$$\Rightarrow \frac{aR_a}{p}=R_a-r$$

- Análogamente tenemos:

$$\frac{bR_b}{p}=R_b-r \quad y \quad \frac{cR_c}{p}=R_c-r$$

- En (7):

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\frac{(R_a-r+R_b-r+R_c-r)}{4R} \qquad ...(8)$$

- Por teorema de Steiner:

$$R_a+R_b+R_c=4R+r$$

- En (8):

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4R-(4R+r-3r)}{4R}$$

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R} \qquad ...(\beta)$$

- De (α) y (β):

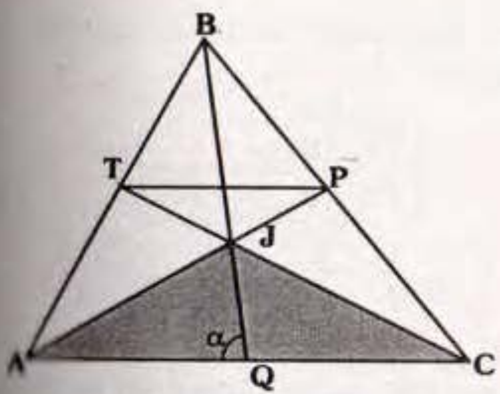
$$S_{\Delta EFG}=S_{\Delta MNQ}$$

TEOREMA

Si en un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes AP, CT y BQ en F. Se cumple:

$$\boxed{\frac{JQ}{BQ}+\frac{JP}{AP}+\frac{JT}{CT}=1}$$

Prueba



Usemos:

$$\left.\begin{array}{l}(AJC)=\dfrac{(AC)(JQ)}{2}\operatorname{sen}\alpha \\ (ABC)=\dfrac{(AC)(BQ)}{2}\operatorname{sen}\alpha\end{array}\right\}\ \frac{JQ}{BQ}=\frac{(AJC)}{(ABC)}\ \ldots(1)$$

Análogamente tenemos:

$$\frac{JP}{AP}=\frac{(BJC)}{(ABC)} \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{JT}{CT}=\frac{(AJB)}{(ABC)} \qquad \ldots(3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$\frac{JQ}{BQ}+\frac{JP}{AP}+\frac{JT}{CT}=\frac{(AJC)+(BJC)+(AJB)}{(ABC)}$$

$$\therefore\quad \frac{JQ}{BQ}+\frac{JP}{AP}+\frac{JT}{CT}=1$$

Observación

Veamos algunas consecuencias de este resultado

- Si J es circuncentro y el circunradio es R, entonces:

$JQ=BQ-R$; $JP=AP-R$ y

$JT=CT-R$

Luego:

$$\frac{BQ-R}{BQ}+\frac{AP-R}{AP}+\frac{CT-R}{CT}=1$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{1}{BQ}+\frac{1}{AP}+\frac{1}{CT}=\frac{2}{R}}$$

- Si usamos: $MH\le MA$, para

$$\frac{JQ}{BQ}\ ;\ \frac{JP}{AP}\ \text{y}\ \frac{JT}{CT}$$

$$\frac{3}{\dfrac{BQ}{JQ}+\dfrac{AP}{JP}+\dfrac{CT}{JT}}\le\frac{\boxed{\dfrac{JQ}{BQ}+\dfrac{JP}{AP}+\dfrac{JT}{CT}}^{\,1}}{3}$$

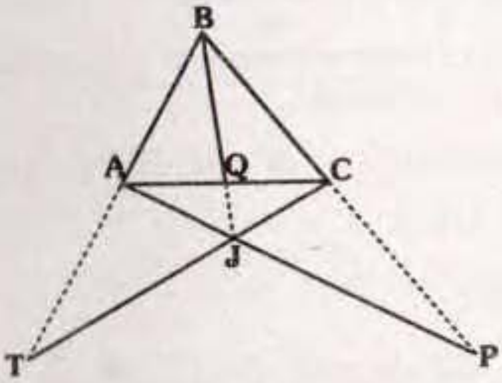
$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{BQ}{JQ}+\frac{AP}{JP}+\frac{CT}{JT}\ge 9}$$

- También: $\frac{9}{2}R\le BQ+AP+CT$, donde

$\overline{BQ}$, $\overline{AP}$ y $\overline{CT}$ son cevianas interiores que pasan por el circuncentro.

TEOREMA

- En el gráfico, respecto del ΔABC, $\overline{BQ}$ es ceviana interior, $\overline{CT}$ y $\overline{AP}$ son cevianas exteriores concurrentes en J.



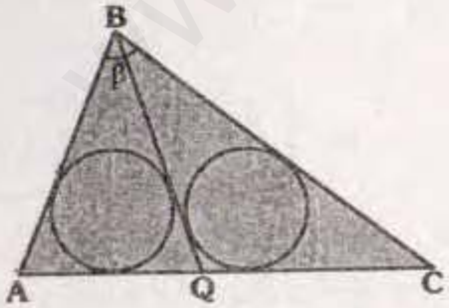
Se cumple:

$$\boxed{\frac{JT}{CT}+\frac{JP}{AP}-\frac{JQ}{BQ}=1}$$

La prueba es análoga a la anterior se deja como ejercicio para el lector.

TEOREMA

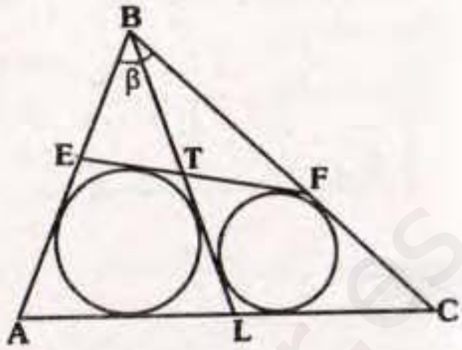
- En el gráfico, las circunferencias inscritas en los triángulos ABQ y CBQ son congruente.



Se cumple: $\boxed{S_{\Delta ABC}=(BQ)^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

Demostración:

- Usemos los siguientes teoremas:



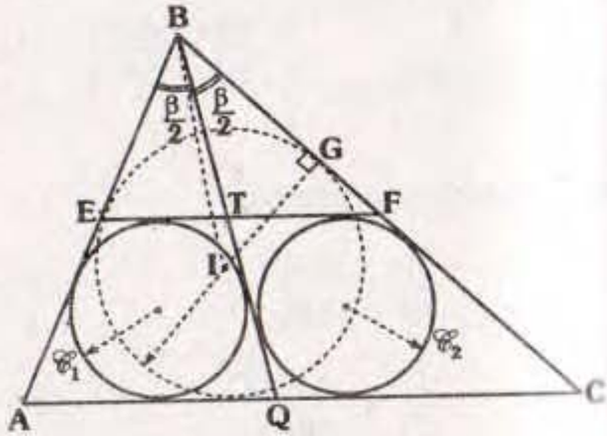
- Para cualquier ceviana interior, se cumple:

$BL = p_{\Delta EBF}$
$BT = p_{\Delta ABC} - AC$

$p_{\Delta EBF}$: Semiperímetro del ΔEBF

La prueba, se realizará en la publicación de circunferencia.

En el gráfico inicial:



- En el gráfico, $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$
- Se traza $\overline{EF}$ tangente común a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ como $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2 \Rightarrow \overline{EF} // \overline{AC}$

- $\triangle ABC \sim \triangle EBF$:

$$\frac{BT}{BQ}=\frac{p_{\triangle EBF}}{p_{\triangle ABC}}$$

- $BQ = p_{\triangle EBF}$

- Como $BT = p_{\triangle ABC} - AC$ y

$$\underbrace{BG}_{r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}} = p_{\triangle ABC} - AC$$

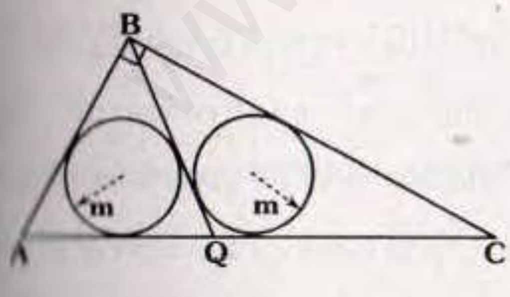
$$\Rightarrow\ BT = r\ \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$$

- $$\underbrace{r\,p_{\triangle ABC}}_{S_{\triangle ABC}}\ \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = (BQ)^2$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABC} = (BQ)^2\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$$

COROLARIO

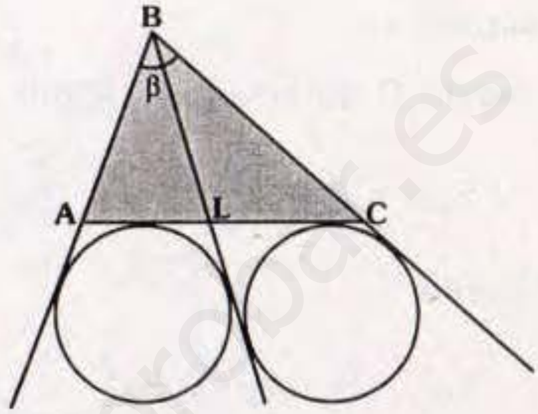
Cuando $\beta = 90°$, tenemos:



$$\Rightarrow\ \boxed{S_{\triangle ABC} = (BQ)^2}$$

Observación

Con el mismo criterio, si dos circunferencias exinscritas de los $\triangle$s ABL y BLC relativas a $\overline{AL}$ y $\overline{LC}$ respectivamente son congruentes.

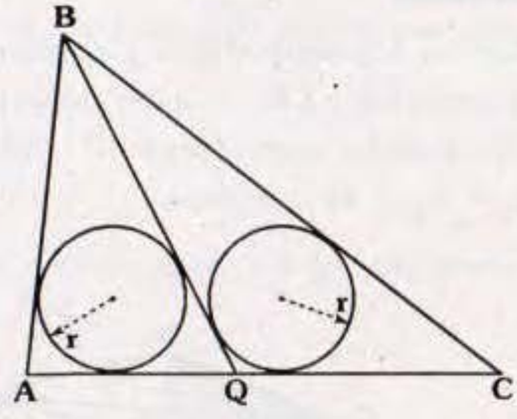


Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = (BL)^2\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}$$

TEOREMA

En el gráfico, se muestra las circunferencias inscritas en los $\triangle$s ABQ y QBC.



Sea p el semiperímetro del $\triangle ABC$ y $AC = b$.

Se cumple:

$$\boxed{BQ=\sqrt{p(p-b)}}$$

Prueba

Sea AB=c, BC=b, AC=a y

$m\measuredangle ABC=\beta$

- Usando el teorema (pag. N°69)

$$S_{\Delta ABC}=(BQ)^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \qquad ...(1)$$

- Usando:

$$S_{\Delta ABC}=(p-a)(p-c)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \qquad ...(2)$$

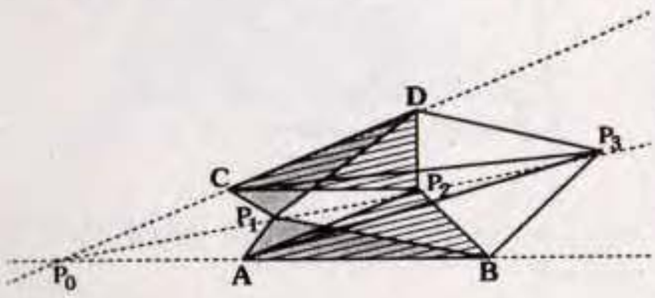
- Multiplicando las expresiones (1) y (2):

$$\underbrace{(S_{\Delta ABC})^2}_{p(p-a)(p-b)(p-c)}=(BQ)^2(p-a)(p-c)$$

$$\therefore\ BQ=\sqrt{p(p-b)}$$

TEOREMA

Dados los segmentos fijos y coplanares, tales como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, el lugar geométrico de los puntos coplanares "P" tal que $S_{\Delta APB}=S_{\Delta CPD}$ es una recta.



Si: $S_{(\Delta P_1AB)}=S_{(\Delta P_1CD)}$

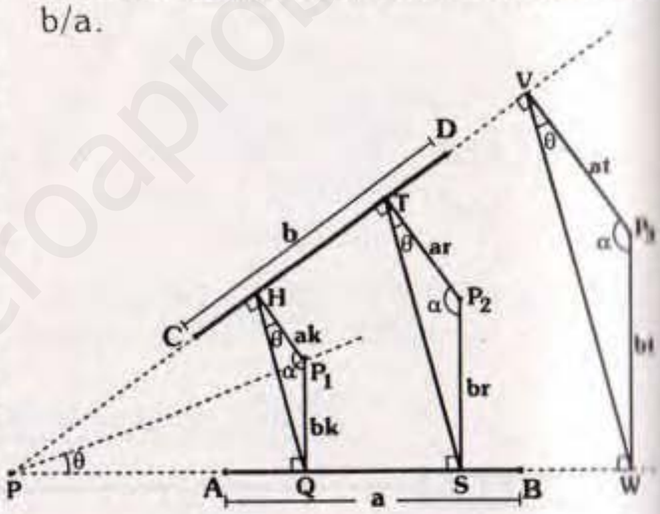
$S_{(\Delta P_2AB)}=S_{(\Delta P_2CD)}$

$S_{(\Delta P_3AB)}=S_{(\Delta P_3CD)}$

$\Rightarrow\ P_1,P_2,P_3,....$ son colineales

Demostración:

a) Analicemos primero si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos como las áreas de AP_1B y CP_1B son iguales y siendo AB y CD fijos (sea $\overline{AB}$=a y $\overline{CD}$=b), entonces la razón de sus respectivas alturas es b/a.



- Notemos que los $\Delta s\ HP_1Q$, TP_2S y VP_3W son semejantes

$m\measuredangle P_1HQ=m\measuredangle P_2TS=m\measuredangle P_3VW=\theta$

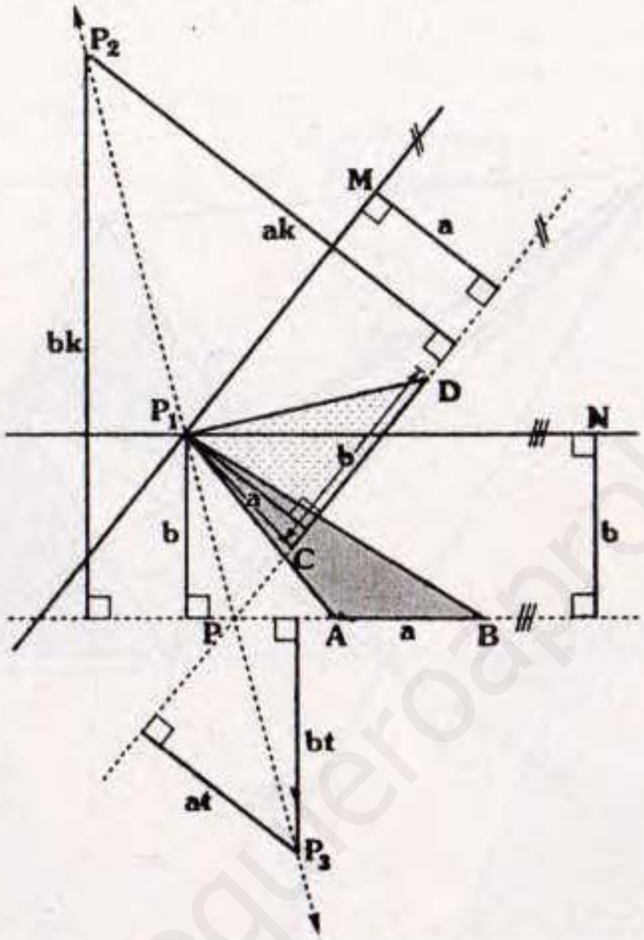
- Como los cuadriláteros PHP_1Q, PTP_2S y PVP_3W son inscriptibles

$m\measuredangle P_1PQ=m\measuredangle P_2PS=m\measuredangle P_3PW=\theta$

- Es decir la prolongación de $\overline{PP_1}$ pasará por P_2 y P_3

$\therefore\ P,P_1,P_2$ y P_3 son colineales

- Analicemos ahora puntos exteriores
- Se podria partir de la misma forma como en el primer caso, se llegará al mismo resultado. Optemos por ubicar la recta.



- Ubiquemos M y N tal que la distancia de M a $\overleftrightarrow{CD}$ sea "a" y la distancia de N a $\overleftrightarrow{AB}$ sea "b"
- Por M se traza la paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ y por N la paralela $\overleftrightarrow{AB}$ dicha paralelas se cortan en P_1

$$\Rightarrow\ S_{\Delta P_1AB} = S_{\Delta P_1CD} = \frac{ab}{2}$$

- Cualquier punto de la recta que pasa por P y P_1 sumple que la condición.

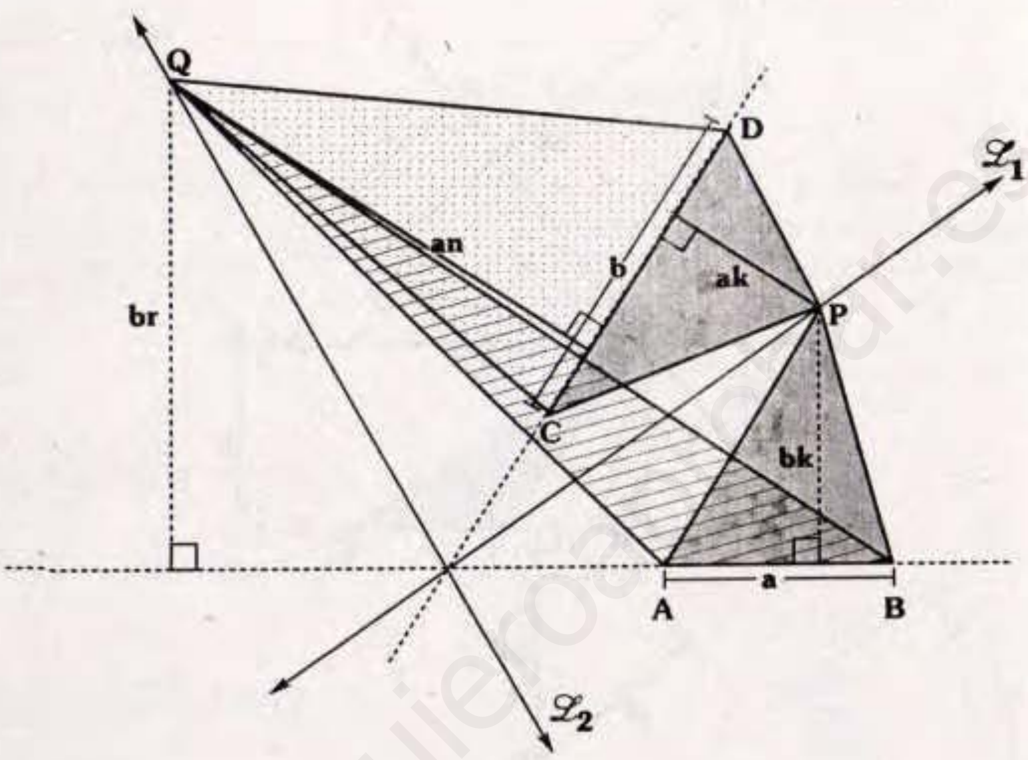
Por ejemplo:

– $S_{\Delta P_2AB} = S_{\Delta P_2CD}$

– $S_{\Delta P_3AB} = S_{\Delta P_3CD}$

Nota

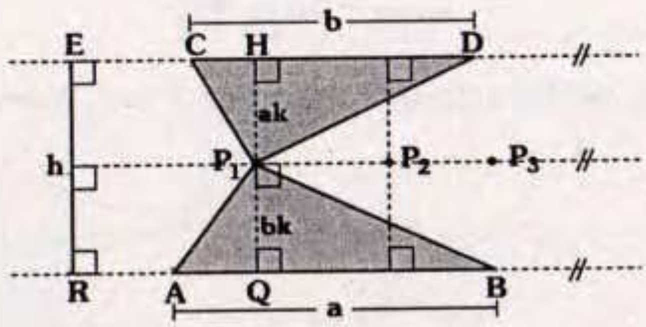
• *Cuando los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos, se tendrán dos rectas que cumple tal condición:*



• *Todo punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, cumple:* $\boxed{S_{\Delta APB} = S_{\Delta CPD}}$

• *Todo punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, cumple:* $\boxed{S_{\Delta AQB} = S_{\Delta CQD}}$

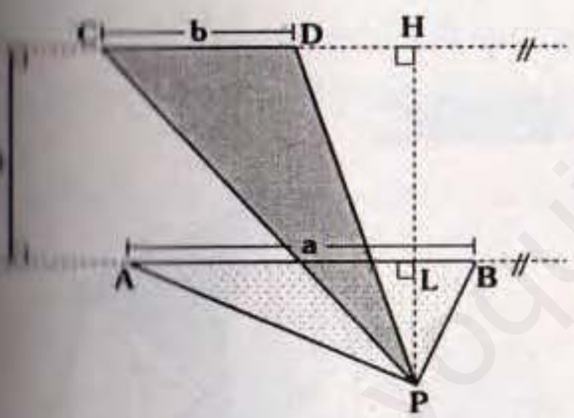
b) Ahora analicemos cuando $\overline{AB} // \overline{CD}$



Si un punto (P_1) cumple que:

$S_{\Delta P_1AB} = S_{\Delta P_1CD} \Rightarrow \dfrac{P_1Q}{P_1H} = \dfrac{b}{a}$, si la distancia entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ es h es $P_1Q = \dfrac{hb}{a+b}$; lo mismo para cada punto entre las paralelas (P_2 y P_3 por ejemplo), es decir P_1, P_2, P_3,....P_i son colineales.

- Veamos ahora puntos exteriores, para ello consideremos: $AB \neq CD$ ya que si $AB = CD$, solo habrán puntos entre las rectas que contengan a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
- Sea $a > b$.



- Si P cumple la condición, entonces:

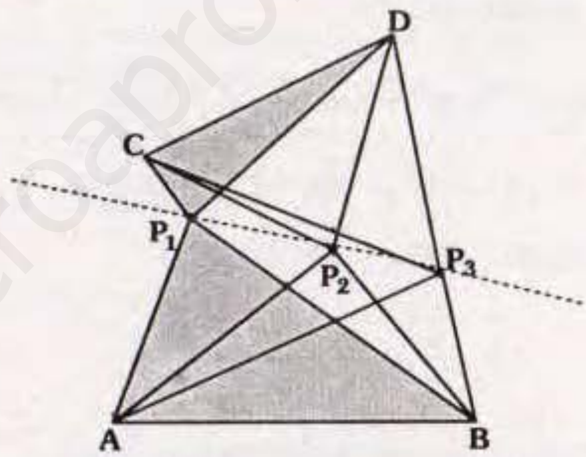
$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta PCD} \Rightarrow \frac{PL}{PH} = \frac{b}{a}$$

- Luego $PL = \dfrac{b}{(a-b)}h$, luego "PL" es constante.
- Todo punto ubicado en la paralela a $\overline{AB}$ y que pase por P cumple la condición.

c) Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están ubicado sobre una misma recta, la unica posibilidad de encontrar puntos tal que $S_{\Delta APB} = S_{\Delta CPD}$ es que AB=CD y cualquier punto cumpliría tal condición:

TEOREMA

Dados los segmentos fijos y coplanares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, el lugar geométrico de los puntos "P" en dicho plano tal que "$S_{\Delta PAB} + S_{\Delta PCD}$" es constante es una recta.



En el gráfico:

Si:

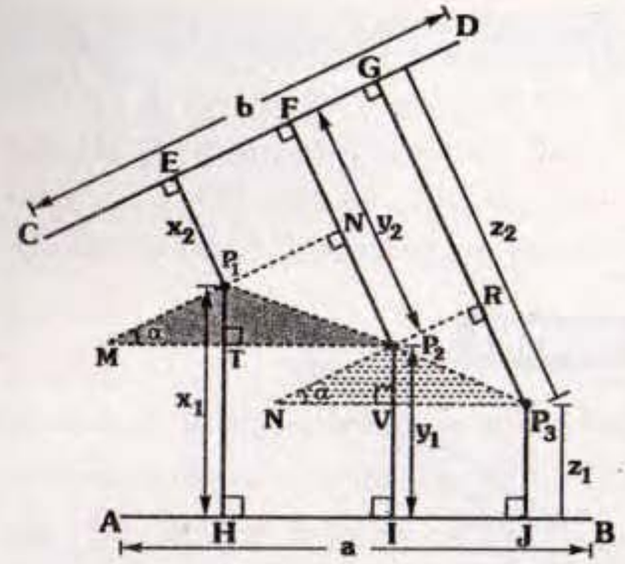
$$S_{\Delta P_1AB} + S_{\Delta P_1CD} = S_{\Delta P_2AB} + S_{\Delta P_2CD} = S_{\Delta P_3AB} + S_{\Delta P_3CD} = \ldots$$

Se cumple:

P_1, P_2, P_3,.... son colineales

Demostración:

- Analicemos solo tres puntos, sea $AB > CD$.



- Los puntos P_1, P_2 y P_3 cumplen la condición:

$$S_{\Delta P_1AB}+S_{\Delta P_1CD}=S_{\Delta P_2AB}+S_{\Delta P_2CD}=S_{\Delta P_3AB}+S_{\Delta P_3CD}$$

$$\Rightarrow \ ax_1+bx_2=ay_1+by_2=az_1+az_2$$

- Luego: $a(x_1-y_1)=b(y_2-x_2)$

$$\Rightarrow \ \frac{a}{b}=\frac{y_2-x_2}{x_1-y_1}=\frac{P_2N}{P_1T}$$

- Análogamente, tendremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{z_2-y_2}{y_1-z_1}=\frac{RP_3}{P_2V}$$

- Como:

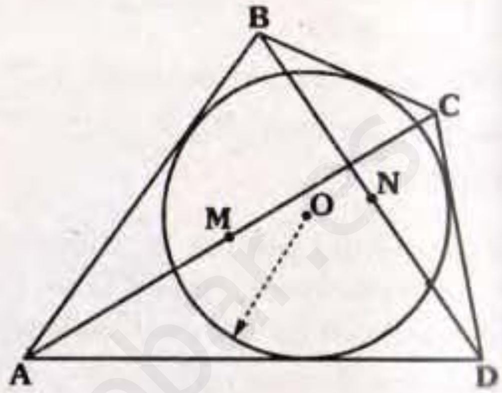
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MTP_1\sim\measuredangle MNP_2\Rightarrow\dfrac{MP_2}{MP_1}=\dfrac{a}{b} \\ \measuredangle NVP_2\sim\measuredangle NRP_3\Rightarrow\dfrac{NP_3}{NP_2}=\dfrac{a}{b}\end{array}\right\} \Delta P_1MP_2\sim\Delta P_2NP_3$$

$$\Rightarrow \ m\measuredangle MP_2P_1=m\measuredangle NP_3P_2$$

$$\Rightarrow \ P_1,P_2 \text{ y } P_3 \text{ son colineales}$$

TEOREMA DE NEWTON

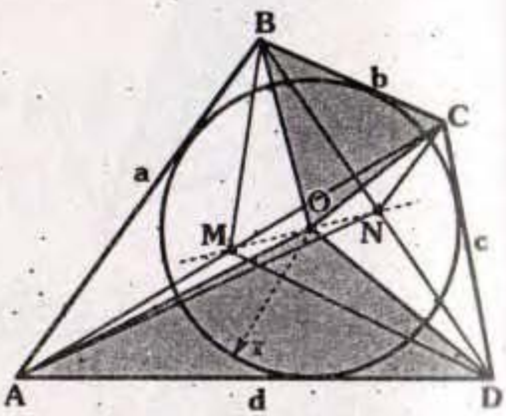
En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se cumple que los puntos medios de las diagonales y el centro de dicha circunferencia son colineales.



En el gráfico, el $\square$ABCD es circunscrito, AM=MC y BN=ND. Se cumple:

M, O y N son colineales

Prueba



- Notemos:

$$S_{\Delta MAD}=S_{\Delta MCD}=\frac{S_{\Delta ABC}}{2}$$

$$S_{\Delta MCB}=S_{\Delta MAB}=\frac{S_{\Delta ACD}}{2}$$

$$S_{\Delta MAD}=S_{\Delta MBC}=\frac{S_{\ ABCD}}{2} \qquad ...(1)$$

Análogamente:

$$S_{\Delta NAD} = S_{\Delta NBC} = \frac{S_{\ ABCD}}{2} \qquad ...(2)$$

También:

$$S_{\Delta OAD} + S_{\Delta OBC} = \frac{br}{2} + \frac{dr}{2} = r\frac{(b+d)}{2} = \frac{S_{\ ABCD}}{2}$$

De (1), (2) y (3):

Los puntos M, O y N cumplen la condición considerando los segmentos fijos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ $\Rightarrow$ M, O y N son colineales, por el teorema anterior.

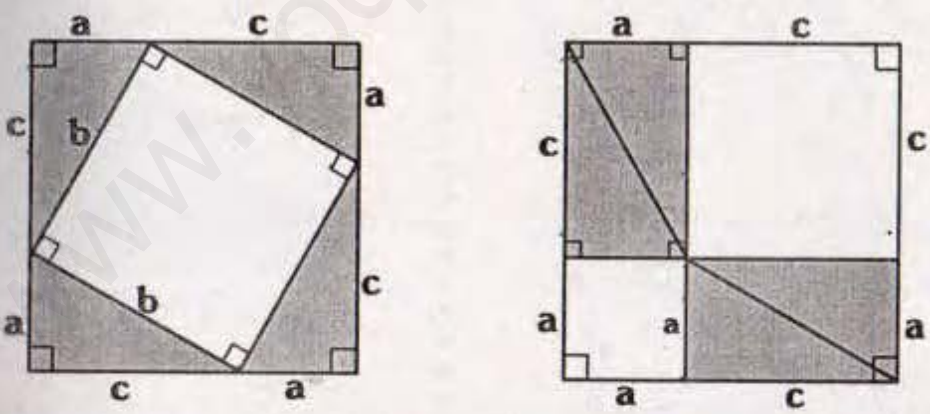
ALGUNAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Su descubrimiento del teorema recae sobre la escuela pitagórica, en la actualidad cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes.

En el libro de E.S.Loomis (1927) aparecen 367 pruebas diferentes.

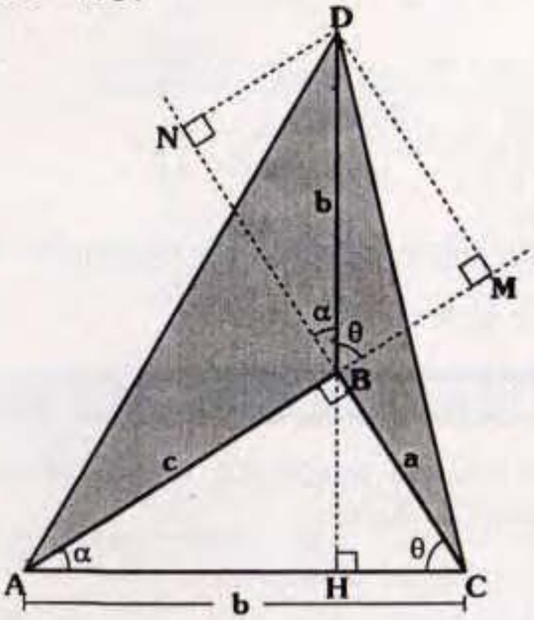
Aquí damos algunas pruebas, basadas en la idea de áreas.

Partimos de un cuadrado cuyo lado mide "a+c"



Se puede considerar una prueba visual, notemos que a un cuadrado de lado "a+c", en la izquierda le hemos quitado cuatro triángulos congruentes de catetos "a" y "c". Al cuadrado de la derecha le hacemos algo similar, entonces: $b^2 = a^2 + c^2$

Partimos así, se traza el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura $\overline{BH}$, se ubica D en la prolongación de $\overline{HB}$ tal que BD=AC.



- En el gráfico, sea S, el área de la región cuadrangular no convexa ADCB.

$$\Rightarrow \ S=\frac{b.b}{2}=\frac{b^2}{2}$$

Pero: $\quad S=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta DBC}$

- También:

$\triangle BMD \cong \triangle BCA \ \Rightarrow \ DM=c$

$\triangle BND \cong \triangle BAC \ \Rightarrow \ DN=a$

$$\Rightarrow \ S_{\Delta ABD}=\frac{c^2}{2} \quad y \quad S_{\Delta DBC}=\frac{a^2}{2}$$

Finalmente:

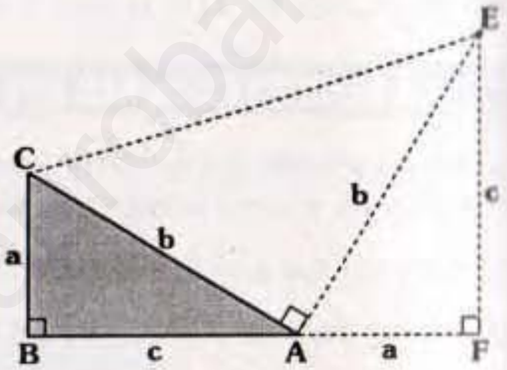
$$S=\frac{b^2}{2}=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \ b^2=a^2+c^2$$

En los anexos veremos una prueba física del teorema de pitágoras.

Demostración de James A. Garfield (1876)

- Dado el $\triangle$ABC, se ubica F en la prolongación de $\overline{BA}$, se ubica E en el mismo semiplano de C, determinado por $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $m\measuredangle AFE=90^\circ$, AF=BC=a y FE=AB=c.



- $\triangle ABC \cong \triangle EFA$

$$\Rightarrow \ AC=AE=b \qquad y$$

$$m\measuredangle EAC=90^\circ$$

- Podemos asegurar:

$$S_{\square EFBC} = S_{\triangle CBA}+S_{\triangle CAE}+S_{\triangle AFE}$$

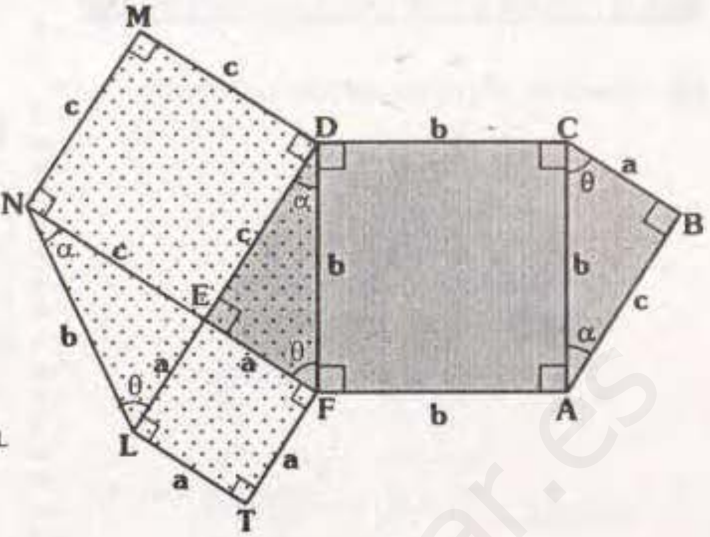
$$\left(\frac{a+c}{2}\right)(a+c)=\frac{ac}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{ac}{2}$$

$$\therefore \ a^2+c^2=b^2$$

Demostración de Leonardo da Vinci:

Del gráfico notamos que:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle NEL$



También: ⬡ABCDEF ≅ ⬡NLTFDM

$S_{(ABCDEF)} = S_{(NLTFDM)}$

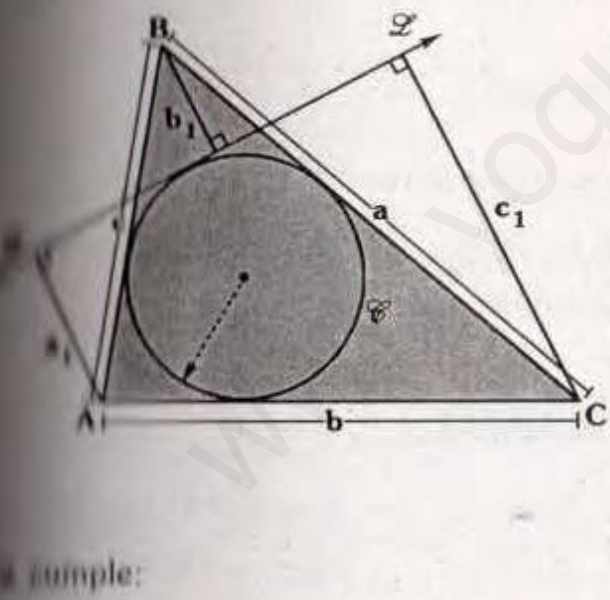
$S_{\triangle ABC} + b^2 + S_{\triangle DEF} = c^2 + S_{\triangle DEF} + a^2 + S_{\triangle NEL}$

$\therefore \quad b^2 = c^2 + a^2$

TEOREMA DE HARCOUT

Para la circunferencia inscrita:

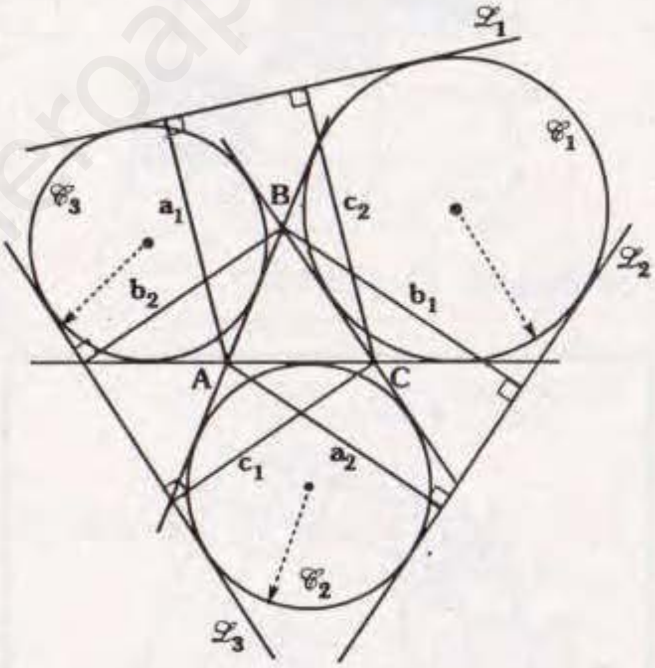
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita, $\mathscr{L}$ es tangente a $\mathscr{C}$.



Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{aa_1 + cc_1 - bb_1}{2}}$$

Para las circunferencias exinscritas



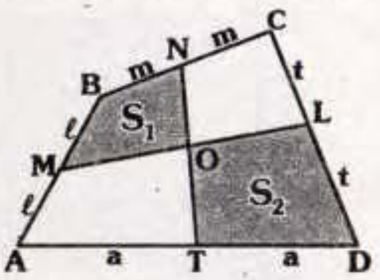
En el gráfico, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias exinscritas y $\vec{\mathscr{L}}_1$, $\vec{\mathscr{L}}_2$ y $\vec{\mathscr{L}}_3$ son rectas tangentes.

Se cumple: $\boxed{a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2}$

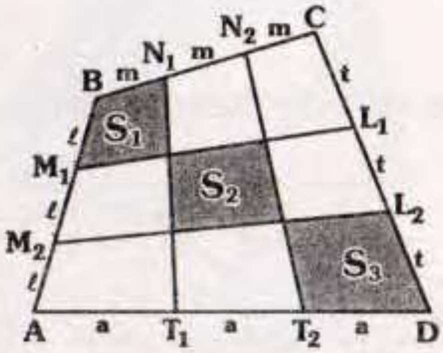
Estos teoremas fueron probadas sintéticamente por el profesor Juan Carlos Salazar, sugiero: http://www.oei.es/oim/revistaiom.

UN RESULTADO EXTRAORDINARIO

Veamos algunos casos previos:

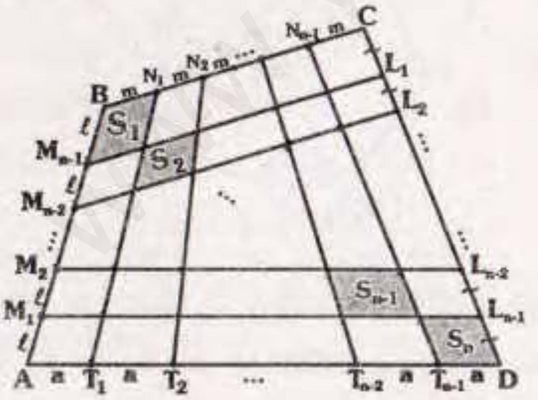


Se cumple: $\boxed{S_1 + S_2 = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}}$



Se cumple: $\boxed{S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{S_{\square ABCD}}{3}}$

En general:



Se cumple:

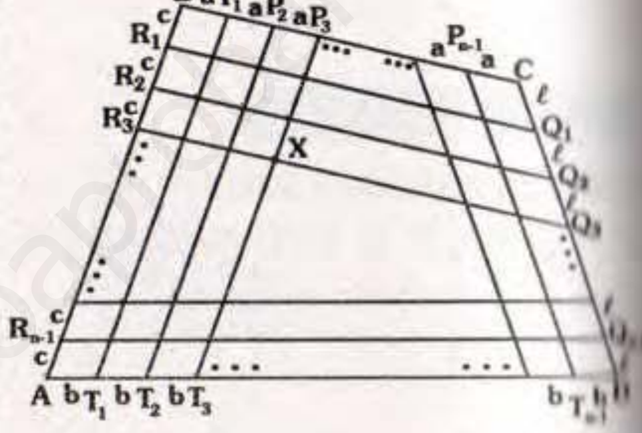
$$\boxed{S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{n-1} + S_n = \dfrac{S_{\square ABCD}}{n}}$$

Demostración:

- Primero hagamos algunas pruebas

LEMA

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, cada lado lo dividimos en "n" partes iguales $(n \geq 2)$. Se unen los puntos correspondientes (ver gráfico), para formar un tablero de $n \times n$.



Se cumple:

Los segmentos: "$\overline{P_1T_1}$, $\overline{P_2T_2}$......$\overline{P_{n-1}T_{n-1}}$ y $\overline{R_1Q_1}$, $\overline{R_2Q_2}$......$\overline{R_{n-1}Q_{n-1}}$", están también divididos en partes iguales.

Prueba

- Elijamos por ejemplo "X" ubicado en $\overline{R_3Q_3}$ y $\overline{P_3T_3}$, bastará probar:

$$\frac{P_3X}{XT_3} = \frac{BR_3}{R_3A} \quad \wedge \quad \frac{R_3X}{XQ_3} = \frac{BP_3}{P_3C}$$

- Lo cual es inmediato, pues:

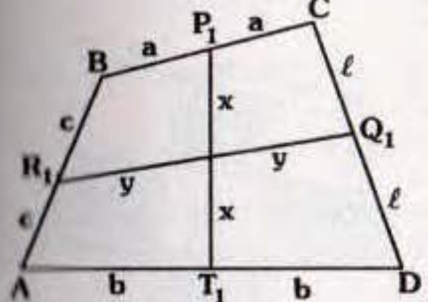
$\overline{R_3P_3} // \overline{AC} // \overline{T_3Q_3} \Rightarrow \Delta R_3XP_3 \sim \Delta Q_3XT_3$

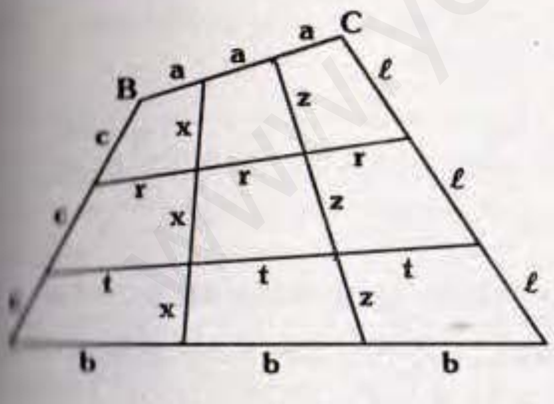
luego:

$$\frac{P_3X}{XT_3} = \frac{R_3X}{XQ_3} = \frac{R_3P_3}{T_3Q_3} = \frac{\frac{R_3P_3}{AC}}{\frac{T_3Q_3}{AC}} = \frac{\frac{BR_3}{AB}}{\frac{DT_3}{AD}}$$

$$= \frac{\frac{3}{n}}{\frac{n-3}{n}} = \frac{3}{n-3} = \frac{BR_3}{R_3A} = \frac{BP_3}{P_3C}$$

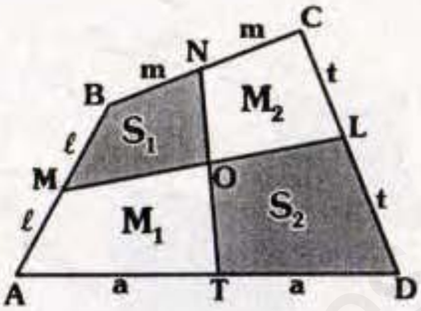
- Se pudo haber elejido cualquier punto en general, la prueba es análoga.
- Veamos algunos casos partículares:





Antes de las pruebas en general analicemos el tablero de "2×2" y "3×3" encontraremos más resultados que se pueden extender.

<u>En el tablero "2×2"</u>



se cumple:

$$S_1 + S_2 = M_1 + M_2 = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

La prueba es directa pues: MNLT es paralelogramo de centro O, como $\overline{MN} // \overline{AC} // \overline{TL}$

$$\Rightarrow S_{\square ABCD} = \underbrace{S_{\Delta ABC}}_{4S_{\Delta MBN}} + \underbrace{S_{\Delta ACD}}_{4S_{\Delta LTD}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\square ABCD}}{4} = S_{\Delta MBN} + S_{\Delta LTD}$$

Análogamente:

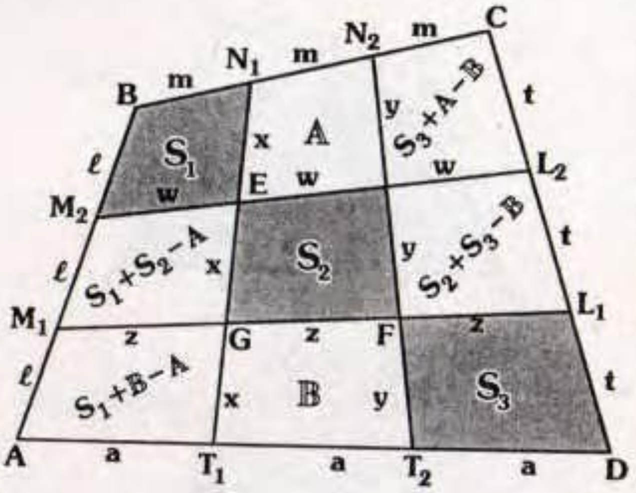
$$\frac{S_{\square ABCD}}{4} = S_{\Delta AMT} + S_{\Delta NCL}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MBN} + S_{\Delta LTD} = S_{\Delta AMT} + S_{\Delta NCL}$$

$$\text{Como}: S_{\Delta MON} + S_{\Delta OLT} = S_{\Delta MOT} + S_{\Delta NOL}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = M_1 + M_3$$

En el tablero "3×3"



- Usando el lema, entonces:

  $\overline{M_1L_1}$, $\overline{M_2L_2}$, $\overline{N_1T_1}$, $\overline{N_2T_2}$ y $\overline{M_1L_1}$ son tri-secados.

- Notamos tableros de "2×2":

  M_1BN_2F, GN_1CL_1, T_1EL_2D y AM_2HT_2

- Usemos la propiedad anterior, tenemos:

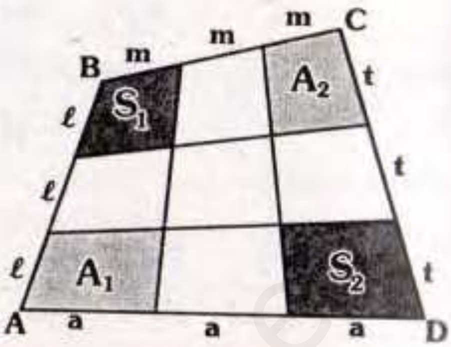
$$S_{\triangle ABCD} = 3(S_1 + S_2 + S_3)$$

$$\Rightarrow \ S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{3} \ \ldots(1)$$

También: si trazamos $\overline{M_2N_1}$, $\overline{GH}$ y $\overline{T_2L_1}$, notemos: $S_1 + S_3 = 2S_2$

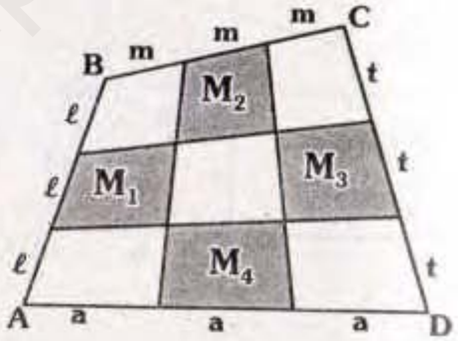
En (1): $S_2 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{9}$

Consecuencias para el tablero de "3×3"



Se cumple:

$$\boxed{S_1 + S_2 = A_1 + A_2 = \frac{2}{9} S_{\triangle ABCD}}$$



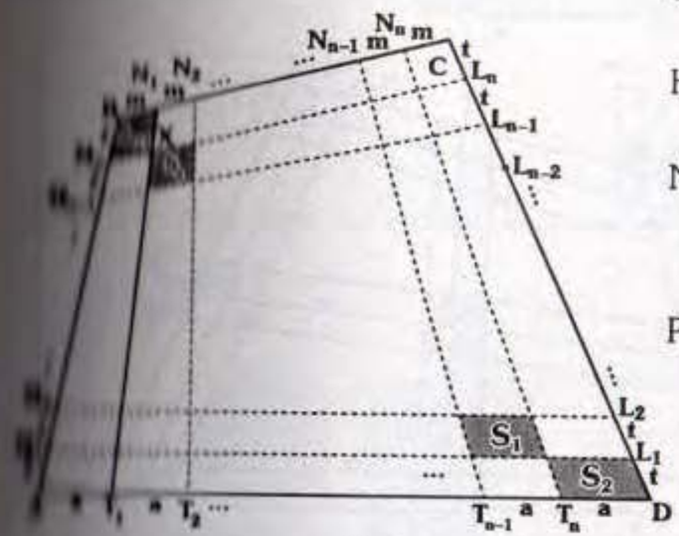
Se cumple

$$\boxed{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \frac{4}{9} S_{\triangle ABCD}}$$

Hagamos la prueba en general

Dada la forma que tiene el resultado, la prueba se hará por inducción, hemos visto que para n=2 y n=3, ya fue probado. Supongamos que cumpla para todo "n", demostremos ahora para "n+1"

Sea el tablero de $(n+1)\times(n+1)$



Sea: $S_{M_nBN_1X} = S_{n+1}$

Hipotesis inductiva: $\sum_{i=1}^{n} Si = \frac{1}{n} S_{T_1XL_nD}$

Notemos: $AM_n = \ell n$

$N_1C = mn$

Por lema: $\frac{N_1X}{XT_1} = \frac{M_nX}{XL_n} = \frac{1}{n}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Si + S_{n+1}}_{\sum_{i=1}^{n+1} Si} = \frac{1}{n} S_{T_1XL_nD} + S_{\Delta BXM_n} + S_{\Delta BXC}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} Si = \frac{1}{n}(S_{AT_1XD} + S_{AL_nXD}) + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXA} + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXC} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1} S_{\Delta AXD} + \frac{n}{n+1} S_{\Delta CXD}\right) + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXA} + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXC}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} Si = \frac{1}{n+1}(S_{\Delta AXD} + S_{\Delta CXD} + S_{\Delta BXA} + S_{\Delta BXC}) = \frac{1}{n+1} S_{ABCD}$$

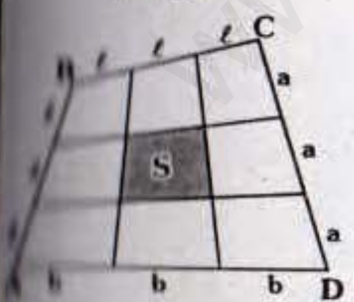
Con lo cual queda probado el teorema

Ahora veamos algunos resultados para todo tablero de "n×n" cuyas pruebas se dejan como desafíos para el lector.

Para n: impar

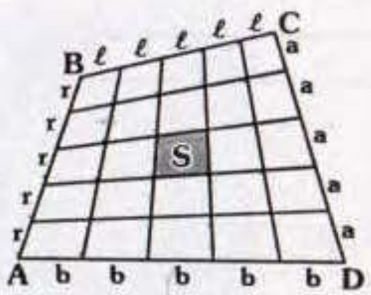
La región sombreada está ubicada en la **mitad de la diagonal.**

Tablero de 3×3



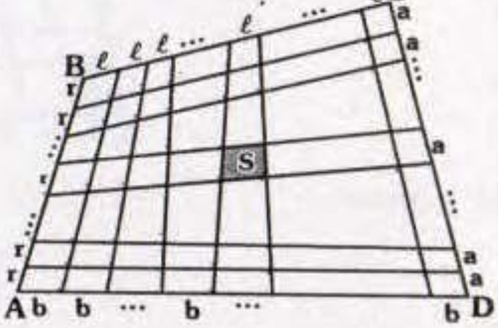
$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{9}$$

Tablero de 5×5



$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{25}$$

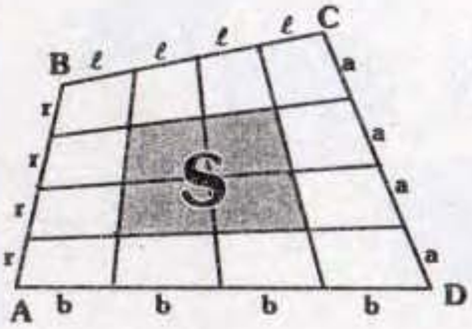
Tablero de n×n

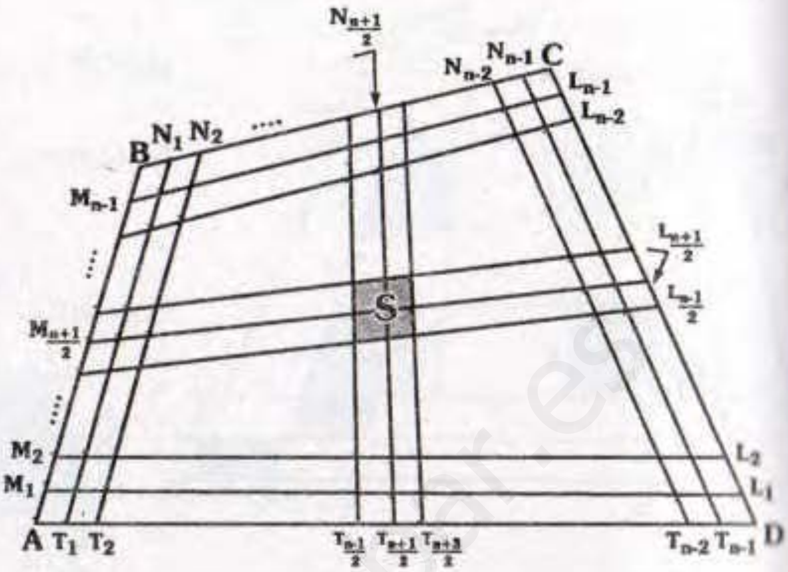


$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{n^2}$$

Para n: par

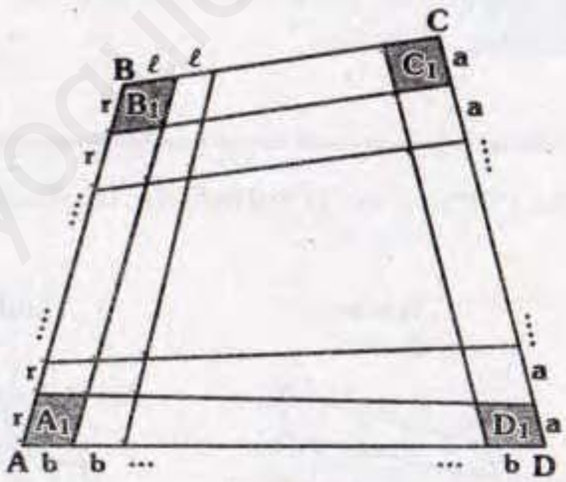
Tablero
de 4×4





Se cumple: $\boxed{S = \dfrac{4}{n^2}}$

Para todo "n"



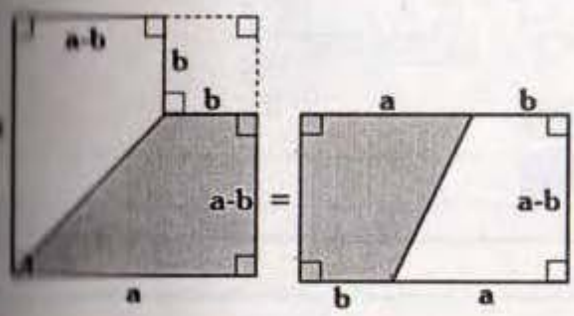
Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A}_1 + \mathbb{C}_1 = \mathbb{B}_1 + \mathbb{D}_1}$$

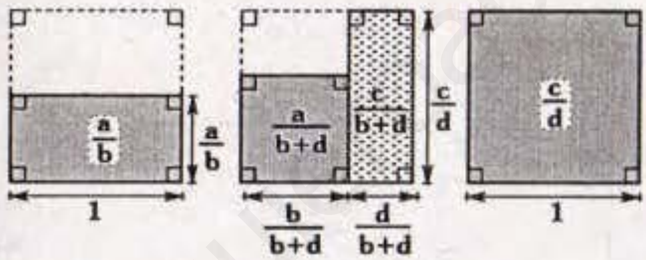
Algo realmente maravilloso es que si sombreamos "n" cualesquiera de los "n^2" escaques, con la condición de que no pertenezcan a la misma fila o columna, entonces la suma de estas áreas es "1/n" del total

PRUEBAS VISUALES

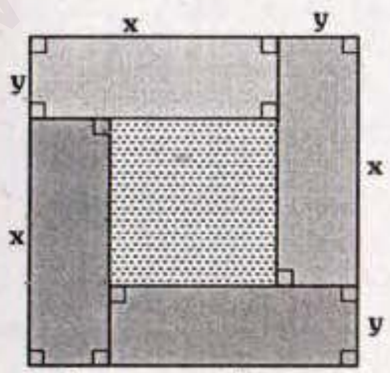
"Los teoremas han de ser notables, sorprendentes, elegantes, intrigantes, rigurosos, creativos.... y sobre todo, comprensibles" **H. Zeeman**



$\Rightarrow$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$



Si $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$; con a, b, c, d >0 $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a}{b+d} + \dfrac{c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

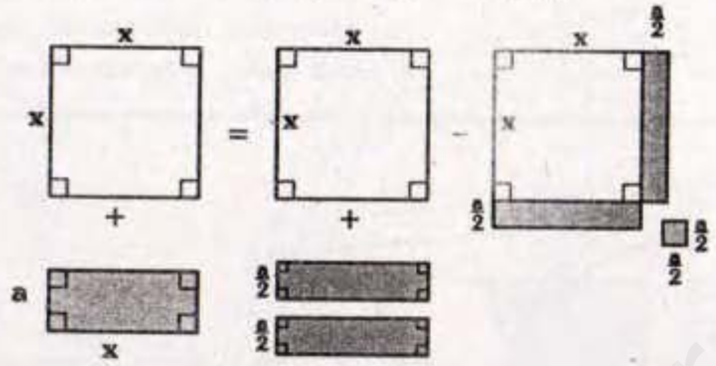


Sea $x \geq y$

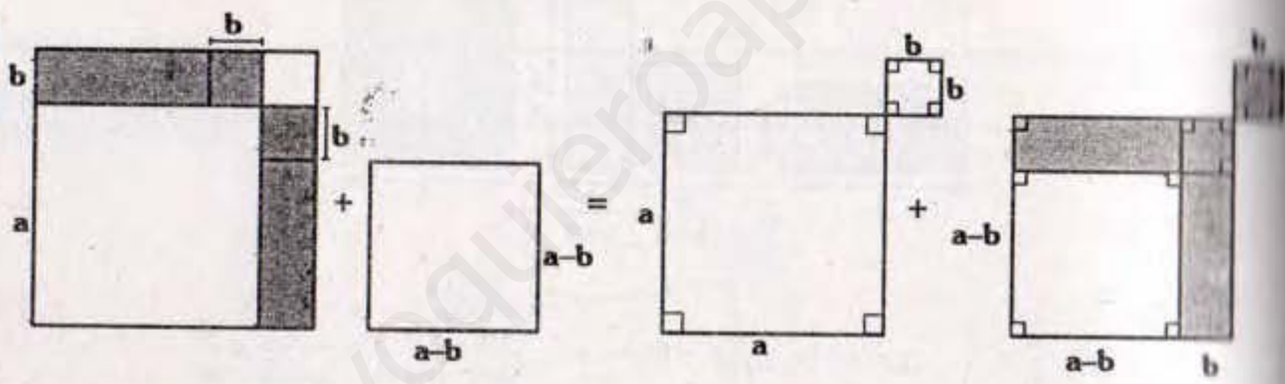
$(x+y)^2 \geq 4xy$

$\boxed{\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}}$

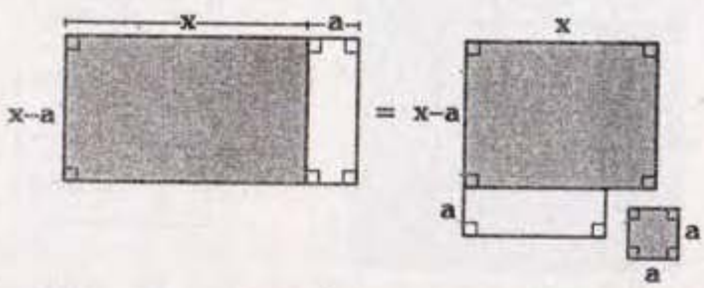
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



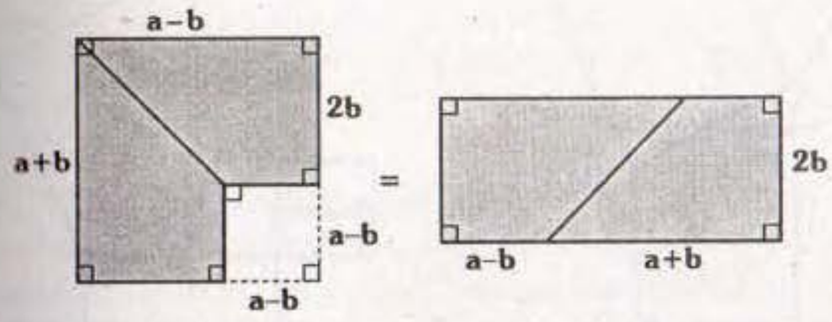
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

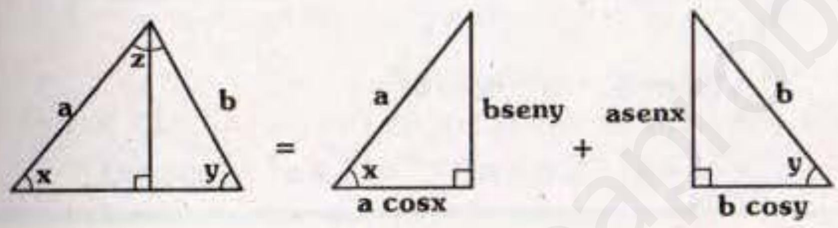


$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$



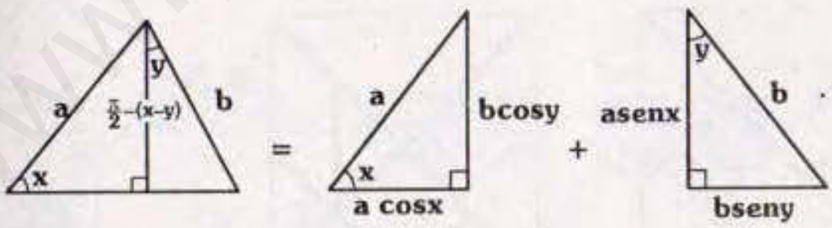
$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$



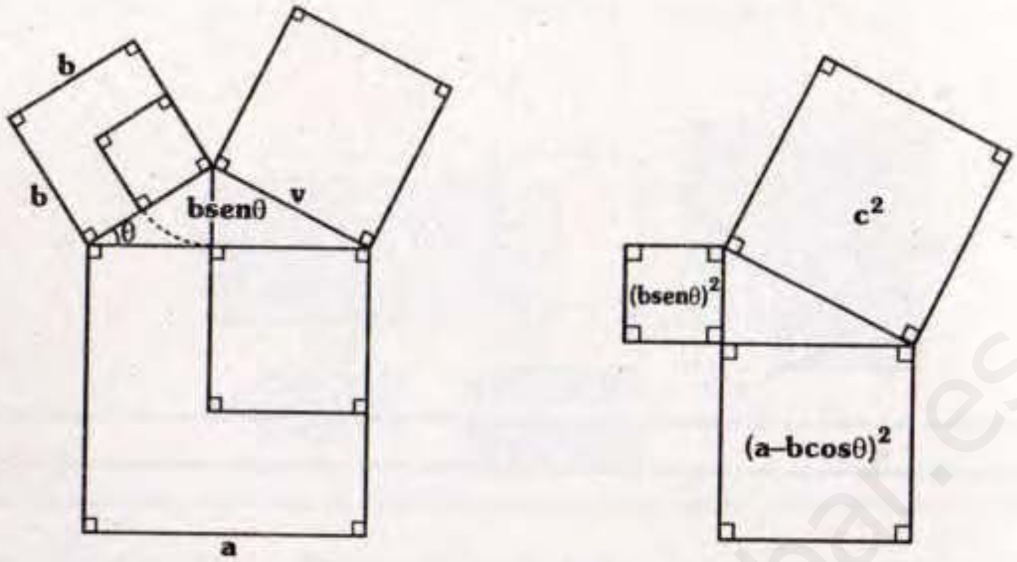


$$\frac{ab}{2}\operatorname{sen} z=\frac{ab}{2}\operatorname{sen} y\cos x+\frac{ab}{2}\operatorname{sen} x\cos y$$

$$\operatorname{sen} z=\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} y\cos x+\operatorname{sen} x\cos y$$



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right)=\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$$

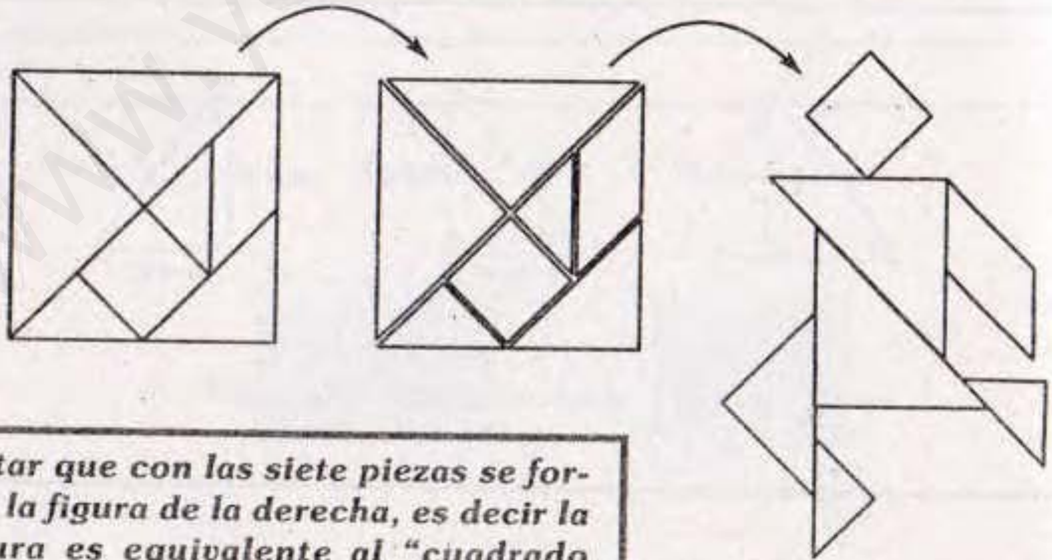


$$c^2 = (b\operatorname{sen}\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta$$

SOBRE EL TANGRAM (siete tableros de astusia)

Es un juego chino antiguo, consiste en formar siluetas con las sietes piezas dadas sin sobreponerse. Es un juego que potencia la percepción visual, estimula la planificación de estrategias y desarrolla la orientación espacial.



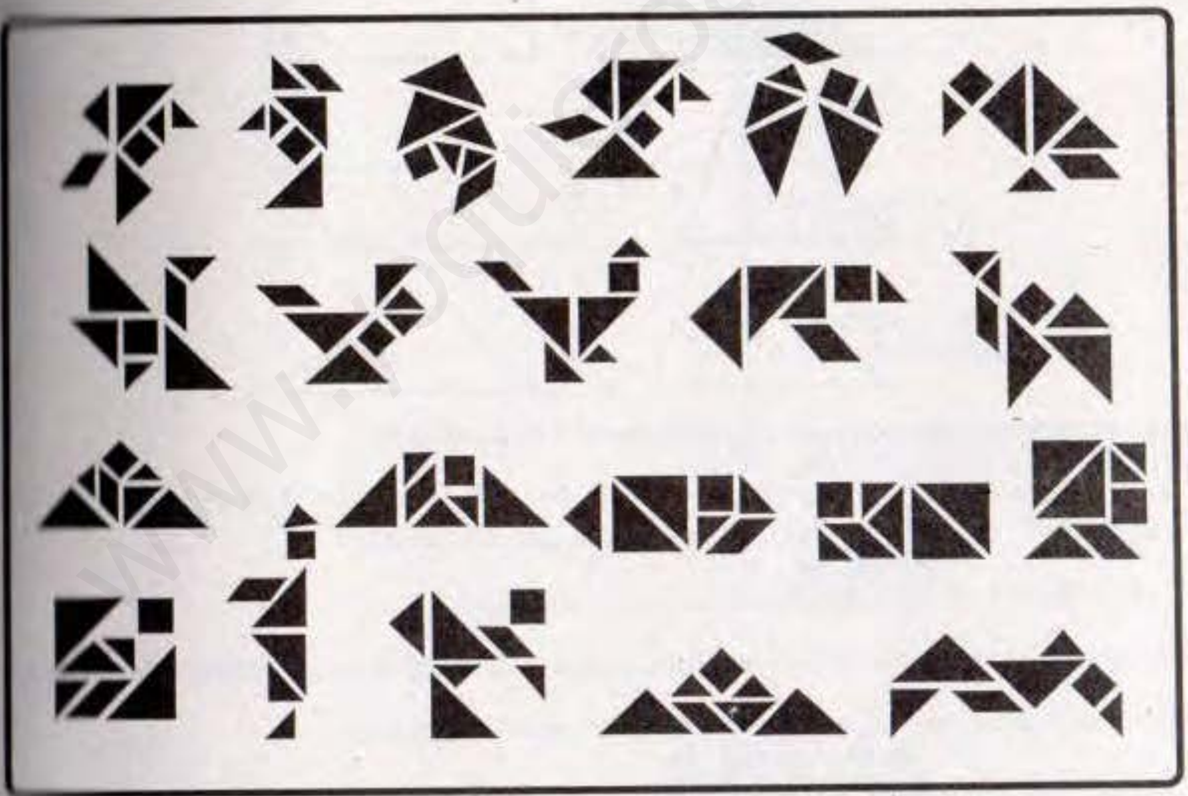
Notar que con las siete piezas se formó la figura de la derecha, es decir la figura es equivalente al "cuadrado inicial".

Es quizás uno de los juegos más antiguos del mundo. Hoy en día el Tangram no sólo se usa como entretenimiento también se utiliza en psicología, en filosofía y particularmente en pedagogía. En matemáticas el Tangram se emplea para introducir conceptos geométricos de equivalencias de áreas y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños, pues permite ligar de manera lúdica de manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

En el siglo XV era llamado "rompecabezas chino" se volvió tan popular que jugaban niños y adultos, personas comunes y personalidades del mundo de las ciencias y artes. Napoleón Bonaparte se convirtió en un especialista en Tangram desde su exilio en la isla de Santa Helena.

En cuanto a la cantidad de figuras que se pueden realizar, en 1973 los diseñadores holandeses Joost Elffers y Michael Schuyt produjeron 7500 nuevas figuras.

A continuación veamos algunas figuras equivalentes al cuadrado inicial:



EQUIDESCOMPOSICIÓN DE POLÍGONOS

En este breve espacio analizaremos sobre la equidescomponibilidad de polígonos, el problema se origina de la pregunta siguiente: si dos regiones poligonales tiene áreas iguales, ¿es factible dividir uno de ellos en un número finito de partes las cuales puedan rearreglarse para formar el otro?

Observemos las siguientes figuras:

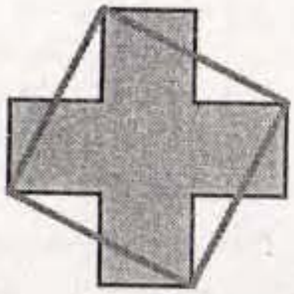


Fig. 1

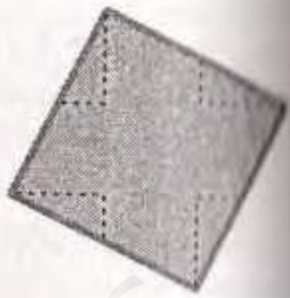
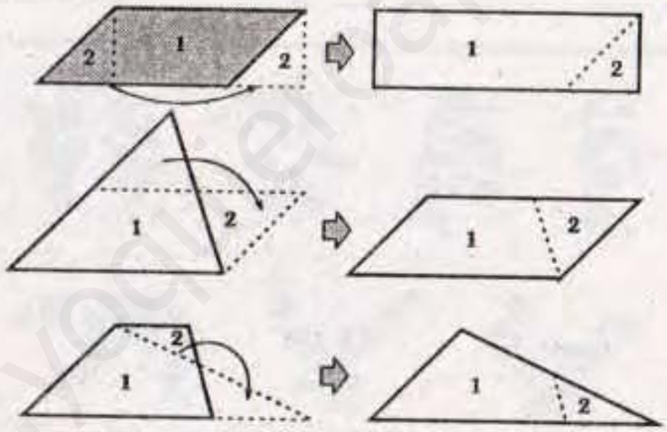


Fig. 2

La figura 1 representa una cruz tiene igual área que la figura2 que es un cuadrado, notemos que ambas figuras tiene igual área. Este hecho se expresa así: las figuras representadas son equidescomponibles. Dos figuras son equidescomponibles, si es factible descomponer una de ellas en un número finito de partes, las cuales puedan rearreglarse para formar la segunda figura. Es evidente que dos figuras equidescomponibles tienen áreas iguales.

Veamos estos casos, también sencillos:



A continuación daremos una serie de proposiciones sin demostración:

- Si una figura A es equidescomponible con una figura B , y la figura B es equidescomponible con una figura C, entonces las figuras A y C son equidescomponibles.
- Todo triángulo es equidescomponible con un rectángulo;
- Dos paralelogramos que tienen una base común y la misma área son equidescomponibles.
- Dos rectángulos que tienen áreas iguales son equidescomponibles.
- Todo polígono es equidescomponible con algún rectángulo.
- (Teorema de Bolyai) Dos polígonos que tienen áreas iguales son equidescomponibles.

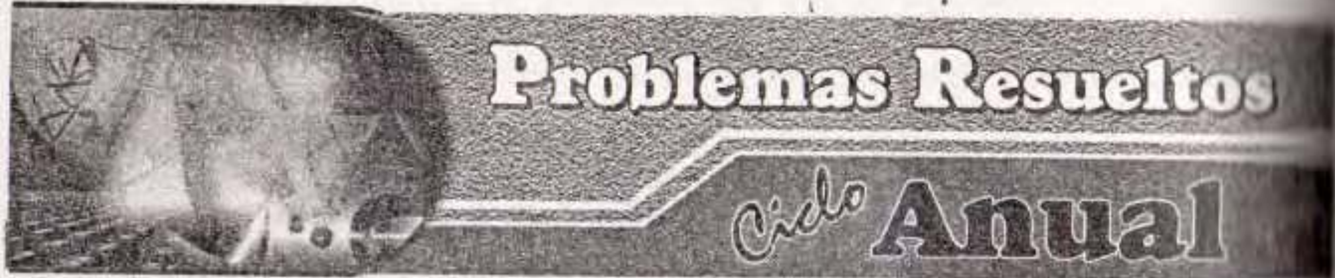
Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS RESUELTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

ÁREAS
DE REGIONES PLANAS

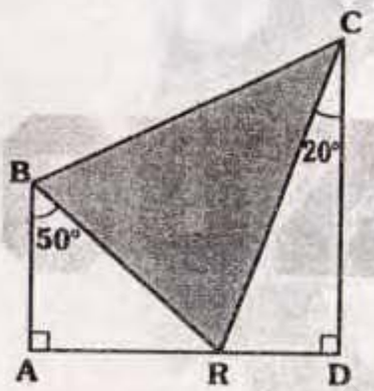


ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº 1

En el gráfico, CD = 10 y BR = 6. Calcule el área de la región sombreada.

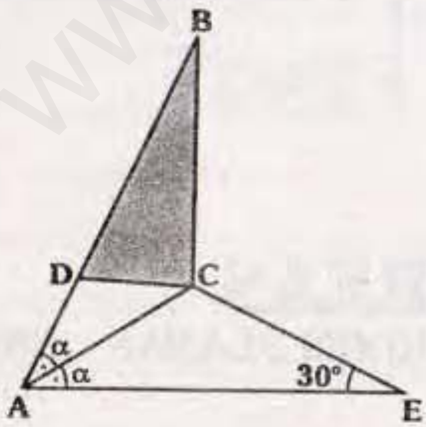
A) 60
B) 30
C) 15
D) 20
E) 25



PROBLEMA Nº 2

En el gráfico, DB = 10 y CE = 8, calcule el área de la región sombreada.

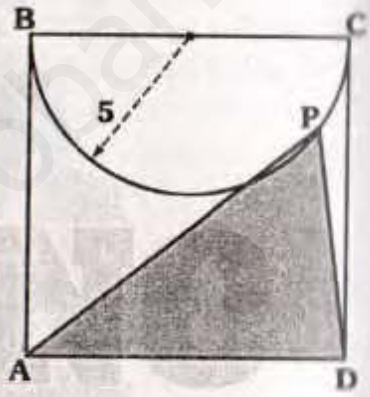
A) 30
B) 15
C) 25
D) 20
E) 10



PROBLEMA Nº 3

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, si $m\overset{\frown}{CP} = 37°$, calcule el área de la región sombreada.

A) 30
B) 35
C) 40
D) 25
E) 20



PROBLEMA Nº 4

Se tiene el cuadrado ABCD, cuyo lado mide 10, se traza la circunferencia $\mathscr{C}$ cuyo radio es 1, la cual es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si: $P \in \mathscr{C}$, calcule el área mínima de la región triangular PAD.

A) 20 B) 30 C) 40
D) 28 E) 25

PROBLEMA Nº 5

Se tiene la región triangular ABC de área $8m^2$, se ubica D en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que AC = CD, M es punto medio de $\overline{BC}$. Calcule el área de la región triangular MCD.

A) $8m^2$ B) $4m^2$ C) $6m^2$

D) $9m^2$ E) $5m^2$

PROBLEMA Nº 6

Se tiene el triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10. Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son el ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo inicial.

A) 2 B) 1 C) 0,5

D) 4 E) 2,5

PROBLEMA Nº 7

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia, $(AC)(AD) = 20$ y $m\widehat{TP}=53°$. Calcule el área de la región sombreada.

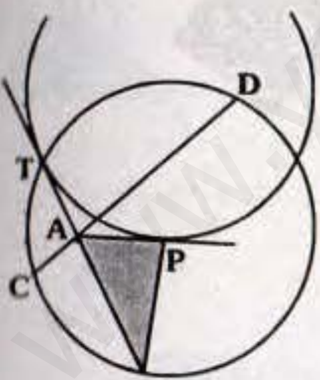
A) 8

B) 10

C) 12

D) 16

E) 18



PROBLEMA Nº 8

En el gráfico, T es punto de tangencia, si $m\widehat{PLQ}=120°$ y $AT = 4$. Calcule el área de la región sombreada.

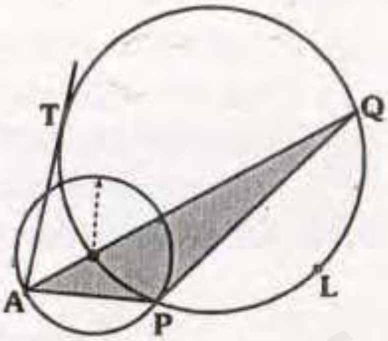
A) $2\sqrt{3}$

B) 4

C) 8

D) $4\sqrt{3}$

E) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 9

Los lados de un triángulo miden 4 y 6. Calcule el área máxima de dicha región triangular.

A) 12 B) $12\sqrt{2}$ C) 15

D) $6\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 10

Se tiene el triángulo ABC, ubicamos M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que $\overline{AB}//\overline{MN}$ en el triángulo MNC se traza la altura CH, si $AB = NC$ y $(HC)(BC) = 10$. Calcule el área de la región ABC.

A) 5 B) 10 C) 15 D) 7,5 E) 12,5

PROBLEMA Nº 11

En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se sabe que $AC = 8\sqrt{2}$ y $m\sphericalangle A=67,5°$. Calcule el área de la región ABC.

A) 16 B) $16\sqrt{2}$ C) 32 D) $32\sqrt{2}$ E) 24

PROBLEMA Nº 12

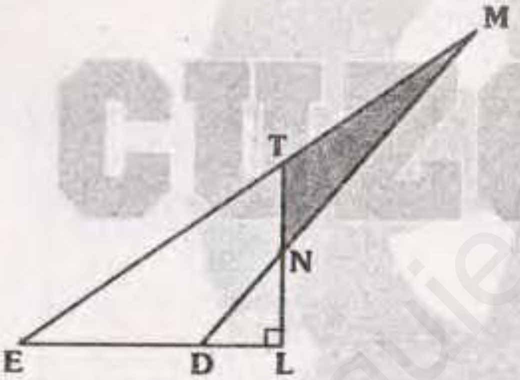
Calcule el área de la región correspondiente a un hexágono equiángulo ABCDEF, si AB = 3, CD = 6, DE = 2 y EF = 4.

A) $20\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $\frac{85}{4}\sqrt{3}$

D) $\frac{93}{4}\sqrt{3}$ E) $\frac{83}{4}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 13

En el gráfico, TN = NL = 4, 5(ED) = 7(DL) = 35. Calcule el área de la región sombreada.



A) 30

B) 40

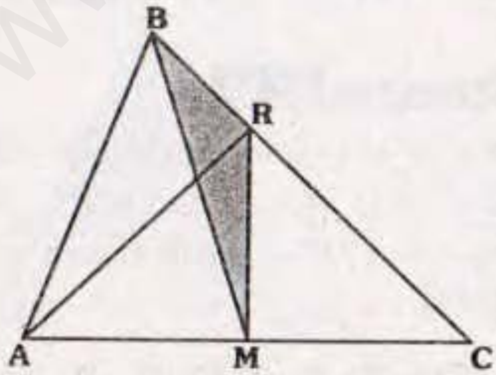
C) 50

D) 60

E) 70

PROBLEMA Nº 14

Calcule el área de la región triangular BRM, si área de la región ABR es 10 y AM = MC.



A) 10

B) 5

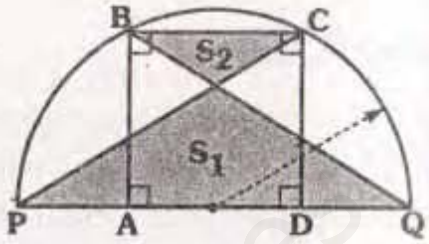
C) 15

D) 20

E) 25

PROBLEMA Nº 15

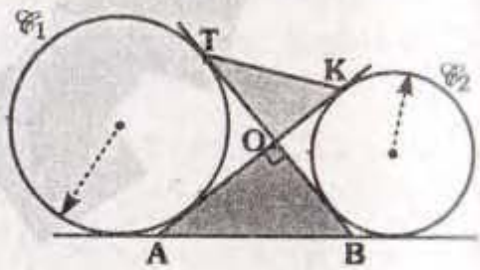
En la figura, ABCD es un cuadrado y $S_2=2$. Calcule S_1.



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 16

Calcule el área de la región triangular TOK, si el área de la región triangular AOB es 6 ($\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias exinscritas para el triángulo ABC).



A) 4,5 B) 5,5 C) 6

D) 3 E) 1,5

PROBLEMA Nº 17

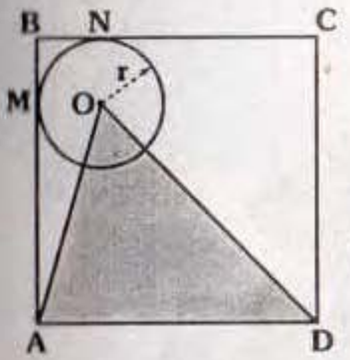
Se tiene el triángulo equilátero ABC en donde "M" es punto medio de $\overline{AB}$. Calcule el área de la región CGK, si "K" es ortocentro del triángulo ABC, "G" es baricentro del triángulo BCM y BC = 6.

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$

D) [illegible]$\sqrt{3}/3$ E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 18

Si el lado del cuadrado ABCD mide a. Calcule el área de la región triangular AOD. (M y N son puntos de tangencia)



A) ar/2 B) a(a - r)/2
C) r(a - r)/2 D) ar
E) a(a + r)/2

PROBLEMA Nº 19

En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se ubica en $\overline{BC}$ el punto "M" tal que AB = MC, luego se traza la altura $\overline{BH}$. Si AH = 4, calcule el área de la región triangular AMH.

A) 2 B) $4\sqrt{3}$ C) 16
D) 8 E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 20

En un triángulo escaleno se cumple que su área es numéricamente igual al triple de su perímetro. Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en este triángulo.

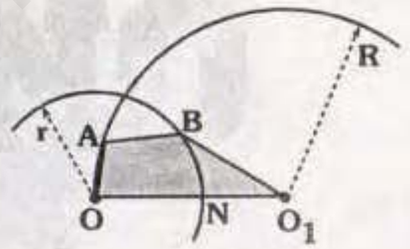
A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 1,5

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA Nº 21

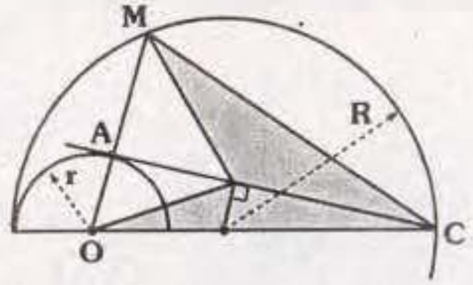
En el gráfico, R = 8u, r = 6u, $m\widehat{BN} = 27°$ y $m\widehat{AO} = 18°$. Calcule el área de la región sombreada.

A) $12\sqrt{2}u^2$
B) $13\sqrt{2}u^2$
C) $14\sqrt{3}u^2$
D) $16\sqrt{3}u^2$
E) $10\sqrt{3}u^2$



PROBLEMA Nº 22

En el gráfico, A es punto de tangencia. Si (OM)(AC)=24, R=5 y r=2, calcule el área de la región sombreada.



A) 24 B) 12 C) 15 D) 15/2 E) 20

PROBLEMA Nº 23

Se tiene el hexágono convexo ABCDEF que cumple que los lados opuestos son de igual longitud y paralelos. Calcule $\dfrac{S_{\triangle ACE}}{S_{ABCDEF}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

PROBLEMA Nº 24

En la figura, ab=40, calcule el área de la región sombreada (B es punto de tangencia).

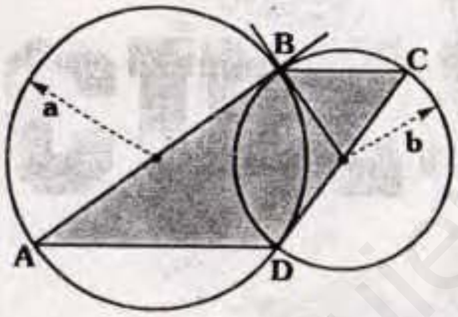
A) 40

B) 60

C) 80

D) 100

E) 90



PROBLEMA Nº 25

En el gráfico, D, G, H y F son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ son las áreas de la regiones sombreadas. Calcule $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}}+\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{T}}$.

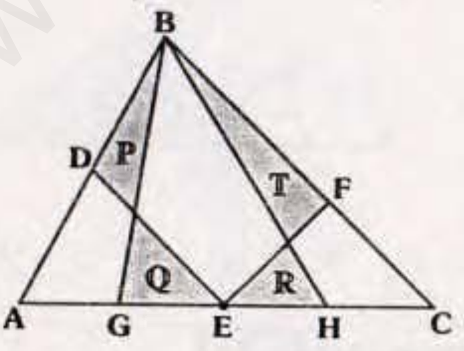
A) 1

B) 2

C) 3/2

D) 4/3

E) 3



PROBLEMA Nº 26

En el gráfico ABCD y PQRD son cuadrados, si PC=6, calcule la diferencia de áreas de las regiones sombreadas.

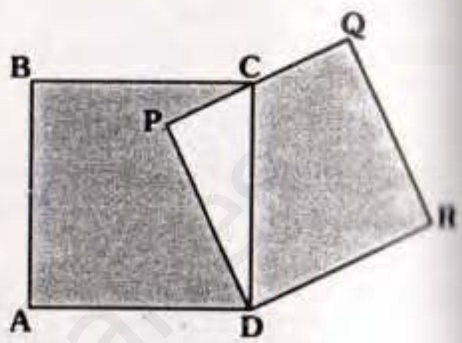
A) 6

B) 12

C) 18

D) 36

E) $12\sqrt{2}$



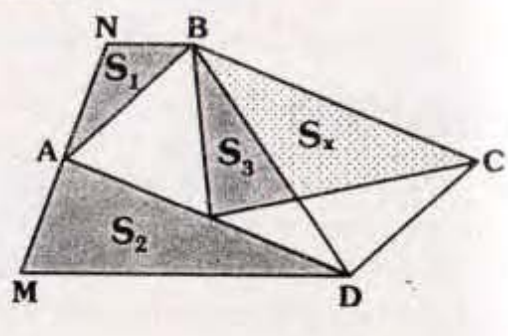
PROBLEMA Nº 27

Se tienen los paralelogramos ABCD y PQRD, tal que $P \in \overline{AB}$ y $C \in \overline{QR}$. Calcule $\dfrac{S_{\square ABCD}}{S_{\square PQRD}}$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 28

Según el gráfico, S_1 ; S_2 ; S_3 y S_x son áreas de las regiones sombreadas. Si ABCD es un paralelogramo, $\overline{MD} // \overline{NB}$ y MA = AN, se cumple:



A) $S_x = S_1 - S_2 + S_3$ B) $S_x = S_1 + S_2 + S_3$

C) $S_x = S_1 + S_2 - S_3$ D) $S_x = \dfrac{S_1 S_2}{S_3}$

E) $S_x = S_2 + S_3 - S_1$

PROBLEMA Nº 29

Si BD = 6; PD = 4 y BC = $\dfrac{3R}{2}$; calcule el área de la región sombreada.

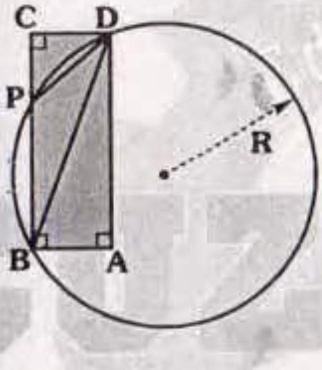
A) 18

B) 12

C) 15

D) 16

E) 14



PROBLEMA Nº 30

Se tiene una región hexagonal regular ABCDEF cuya área es $6\sqrt{3}$; calcule el área de la región cuadrangular cuyos vértices son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{AF}$.

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{6}$ E) $\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

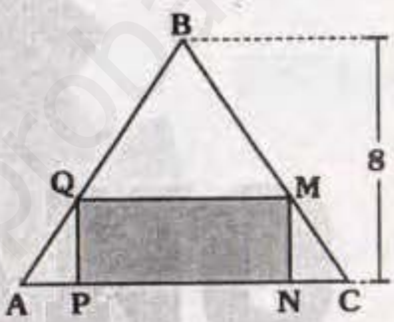
PROBLEMA Nº 31

En un trapecio ABCD sus diagonales se cortan en O; en $\overline{CD}$ y en la base $\overline{AD}$ se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MN} // \overline{AC}$; $\overline{MN}$ corta a $\overline{BD}$ en E; MD = 2(CM) y las áreas de las regiones triangulares BOC y END son iguales a 4, calcule el área de la región trapecial ABCD.

A) 10 B) 30 C) 36 D) 54 E) 25

PROBLEMA Nº 32

Si el área de la región rectangular sombreada es 32 y AC = 16; calcule QM.



A) 5 B) 9 C) 6 D) 8 E) 12

PROBLEMA Nº 33

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada siendo "I" el incentro del triángulo ABC y AI + IC = 12.

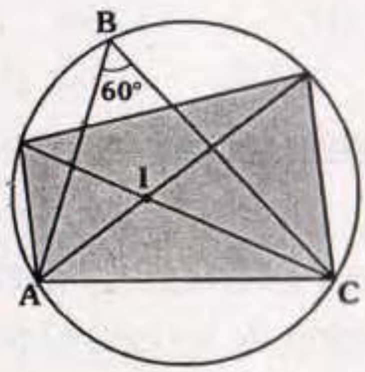
A) 36

B) $48\sqrt{2}$

C) $12\sqrt{3}$

D) $20\sqrt{3}$

E) $36\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 34

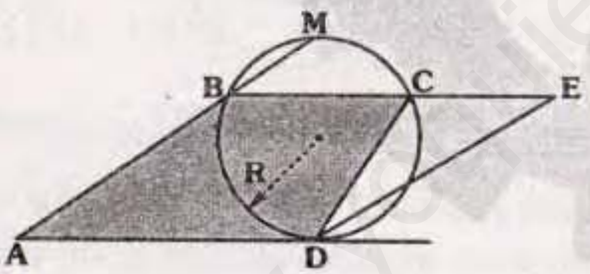
En el trapecio ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$), se traza la diagonal AC; en $\overline{AB}$ se ubica M tal que $\overline{DM} \cap \overline{AC} = \{N\}$. Si las áreas de las regiones AMN y CND es $2cm^2$ y $10cm^2$ respectivamente. Calcule el área de la región BDM.

A) 8 cm^2 B) 10 cm^2 C) 6 cm^2

D) 4 cm^2 E) 12 cm^2

PROBLEMA Nº 35

En el gráfico, D es punto de tangencia y ABED es paralelogramo.
Si $m\widehat{BM} = m\widehat{MC} = 53°$ y R = 5, calcule el área de la región sombreada.

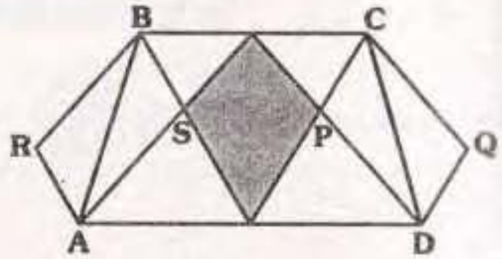


A) 92 B) 82 C) 102

D) 112 E) 144

PROBLEMA Nº 36

Según el gráfico, $\overline{BC} // \overline{AD}$ y el área de la región sombreada es 6. Calcule la suma de áreas de la regiones paralelográmicas ARBS y PCQD.



A) 18 B) 10 C)12 D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº 37

En la figura, ABC es equilátero, AM = MC = 3 y PQ = 4. Calcule el área de la región sombreada.

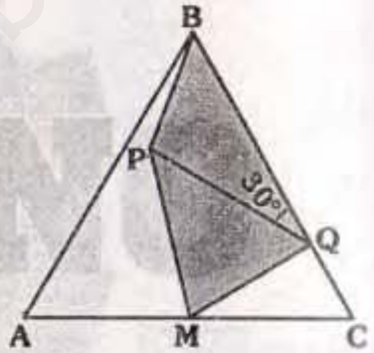
A) 6

B) 9

C) $3\sqrt{3}$

D) 4

E) $2\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 38

Si G es baricentro de la región triangular ABC. Si AB=7; BC=9 y AC=4, calcule el área de la región paralelográmica sombreada.

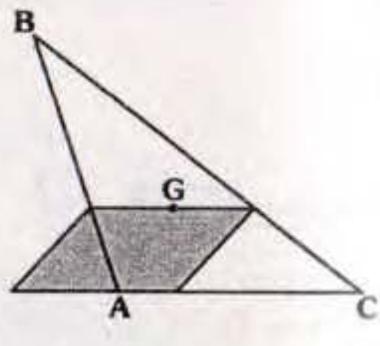
A) $6\sqrt{2}$

B) $6\sqrt{5}$

C) $4\sqrt{3}$

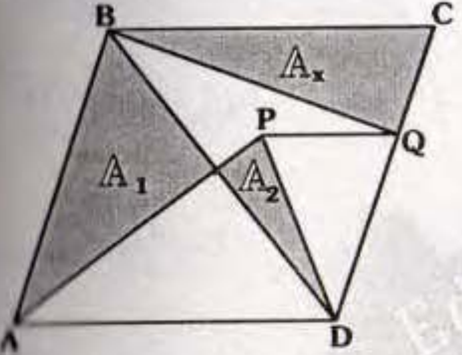
D) $5\sqrt{5}$

E) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, ABCD es un romboide y $\overline{PQ} // \overline{BC}$. Calcule el área $\mathbb{A}_x$ en función de las áreas $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$.



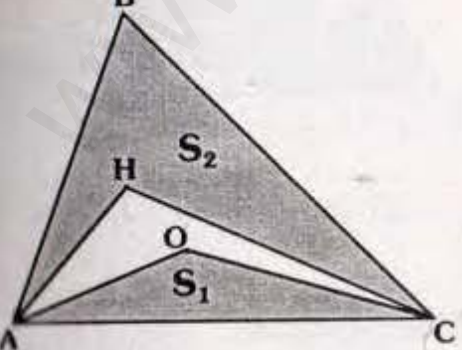
A) $\frac{\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}{2}$ B) $2(\mathbb{A}_1-2\mathbb{A}_2)$

C) $\mathbb{A}_1-\mathbb{A}_2$ D) $3(\mathbb{A}_1-2\mathbb{A}_2)$

E) $\mathbb{A}_1-2\mathbb{A}_2$

PROBLEMA Nº 40

En el gráfico, H y O son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC. Calcule $\frac{S_2}{S_1}$.



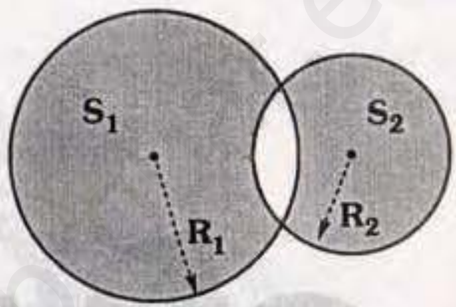
A) 2 B) 1 C) 3

D) 3/2 E) 2/3

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº 41

En el gráfico, S_1 y S_2 son las áreas de las regiones sombreadas. Si $R_1=9$ y $R_2=4$, calcule S_1-S_2.



A) 36π B) 65π C) 49π

D) 25π E) 72π

PROBLEMA Nº 42

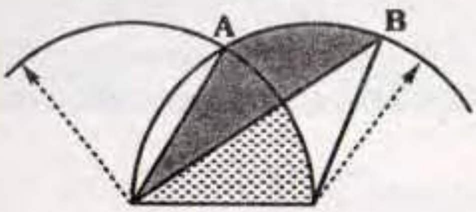
Se tiene el triángulo ABC, con AB=10, BC=12 y AC=14 está inscrito en la circunferencia de centro O. Halle el área de la corona circular limitada por las circunferencias concéntricas de centro O y tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

A) 24π B) 12π C) 11π

D) 25π E) 16π

PROBLEMA Nº 43

Si $m\overset{\frown}{AB}=60°$, calcule la razón de áreas de las regiones sombreadas.



A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 44

Calcule la razón de áreas de las regiones sombreadas. (A, Q, C, D y E son puntos de tangencia)

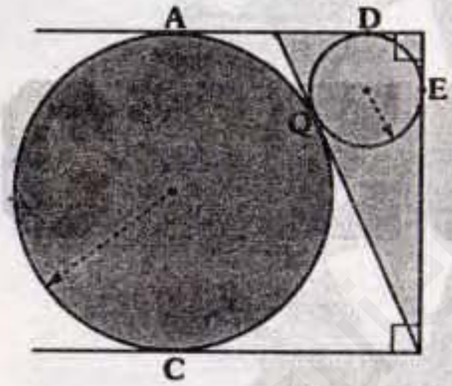
A) π

B) $\frac{3}{2}\pi$

C) 2π

D) $\sqrt{2}\pi$

E) $\frac{5}{4}\pi$



PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. T es punto de tangencia. Si AB = 6, calcule el área de la región sombreada.

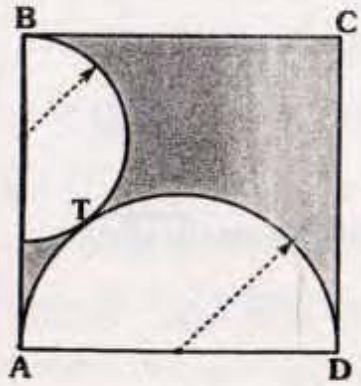
A) $36-10\pi$

B) $15-2\pi$

C) $9-\pi$

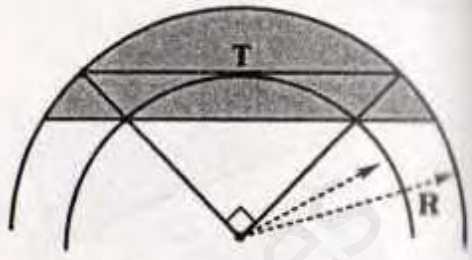
D) $36-4\pi$

E) $36-\frac{13}{2}\pi$



PROBLEMA Nº 46

T es punto de tangencia y $R=2\sqrt{2}$, calcule el área de la región sombreada.



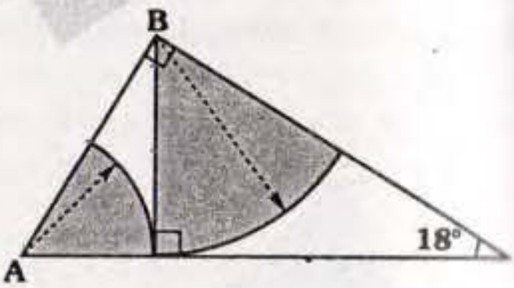
A) $\frac{4}{3}(\pi-\sqrt{3})$ B) $\frac{4}{3}(\pi-\sqrt{2})$

C) $\frac{2}{3}(\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{2}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$

E) $\frac{4}{3}(4\pi-3)$

PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, halle la suma de áreas de las regiones sombreadas, si $AB=\sqrt{5}$.

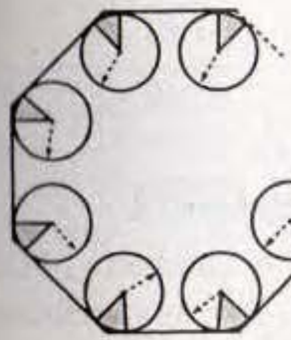


A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) $\pi/$

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, las circunferencias son congruentes de radio 2 y son tangentes a los lados del polígono convexo mostrado. Ha-

Halle la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



A) 2π

B) π

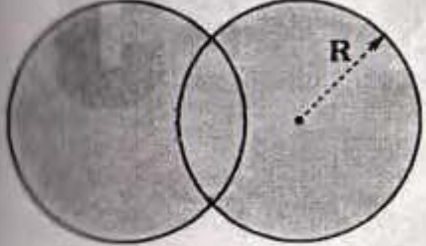
C) 4π

D) 3π

E) $\frac{1}{2}\pi$

PROBLEMA Nº 49

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales y congruentes, halle el área de la región sombreada.

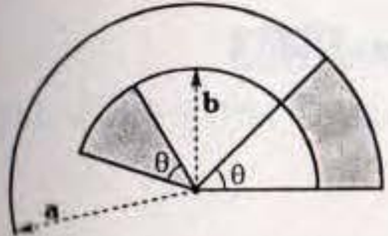


A) $2\pi R^2$ B) $4\pi R^2$ C) $\frac{3}{2}\pi R^2$

D) $\frac{1}{4}\pi R^2+R^2$ E) $\frac{3}{2}\pi R^2+R^2$

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico las regiones sombreadas son equivalentes. Halle a/b.

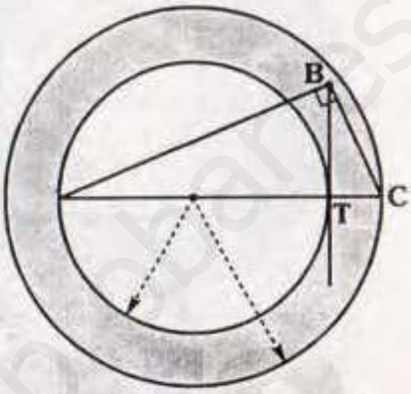


A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 51

En el gráfico, BC = 6u. Siendo T punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada.

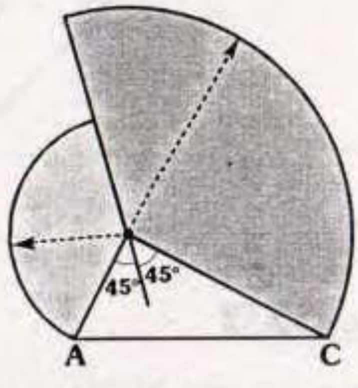


A) $16\pi u^2$ B) $18\pi u^2$ C) $6\sqrt{2}\pi u^2$

D) $36\pi u^2$ E) $24\pi u^2$

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, AC=a, calcule el área de la región sombreada.



A) πa^2 B) $\frac{3}{4}\pi a^2$ C) $\frac{1}{2}\pi a^2$

D) $\frac{3}{8}\pi a^2$ E) $\frac{2}{3}\pi a^2$

PROBLEMA Nº 53

En el gráfico, C es punto de tangencia y AB = BC. Calcule S_x en función de S.

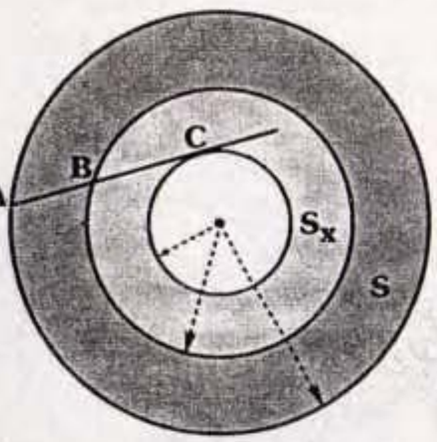
A) $\frac{S}{3}$

B) 2S

C) $\frac{S}{2}$

D) $\frac{S}{4}$

E) $\frac{3}{2}S$



PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, calcule S_x en función de r.

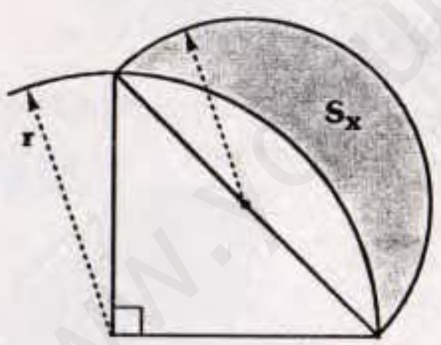
A) $\frac{\pi r^2}{2}$

B) r^2

C) $2r^2$

D) $2\pi r^2$

E) $\frac{r^2}{2}$



PROBLEMA Nº 55

Se tiene el cuadrado ABCD se ubica M y N en $\overline{AC}$ tal que la circunferencia que contiene a M y N es tangente a $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$. Si AM = MN = NC = $\sqrt{2}$, calcule el área del círculo limitado por la circunfe rencia.

A) π B) 2π C) 4π

D) 8π E) 6π

PROBLEMA Nº 56

Se tiene el cuadrado JFDC, M es punto medio de $\overline{FD}$, una circunferencia pasa por M y es tangente a $\overline{JC}$ en J, el segmento tangente a la circunferencia trazado por D a la circunferencia mide $4\sqrt{3}$. Calcule el área del círculo limitado por la circun ferencia.

A) 16π B) 9π C) 25π

D) 49π E) 20π

PROBLEMA Nº 57

En el gráfico, T es punto de tangencia calcule S_1/S_2.

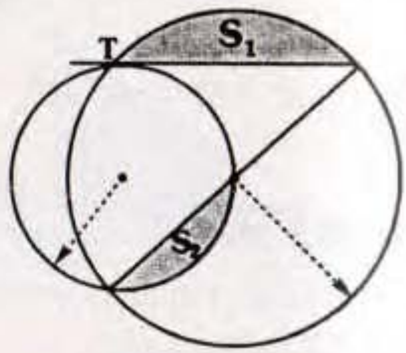
A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) 2

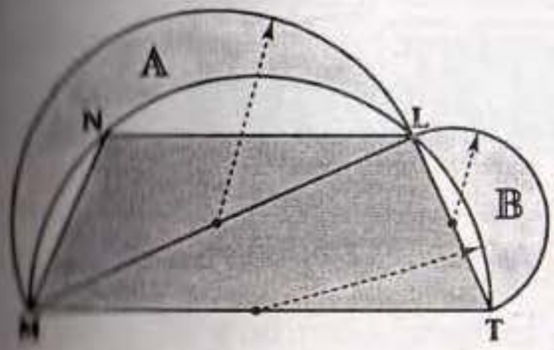
D) π

E) $\frac{\pi+1}{\pi}$



PROBLEMA Nº 58

En el gráfico, MN = NL = LP, calcule $\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{S_{(MNLT)}}$.



A) 1 B) 2 C) 3/2

D) 2/3 E) 4/3

PROBLEMA Nº 59

En la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio 6, se ubican los puntos A y B, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias de diámetros $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$, si $m\widehat{AB}=90°$, calcule el área de la región externa a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ e interna a $\mathscr{C}$.

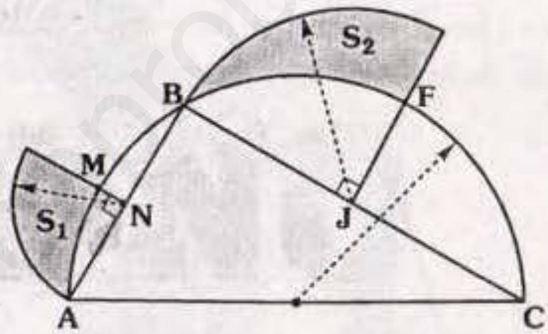
A) $\frac{45}{2}\pi-9$ B) $\frac{99}{2}\pi-9$

C) $\frac{115\pi}{4}-10$ D) $20\pi-6$

E) $\frac{99}{4}\pi-12$

PROBLEMA Nº 60

En el gráfico, $\overline{MN}$ y $\overline{FJ}$ son flechas relativas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $S_1=3$ y $S_2=4$. Halle el área de la región ABC.



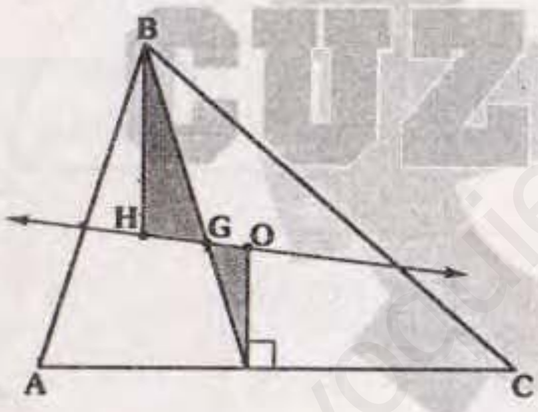
A) 5 B) 10 C) 7

D) 14 E) 25

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº 61 Seminario

En la figura mostrada, H es el ortocentro y G el baricentro del triángulo ABC. Si AB=13u, BC=15u y AC=14u. Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) 55/8 B) 33/4 C) 44/3

D) 17/3 E) 23/4

PROBLEMA Nº 62 Seminario

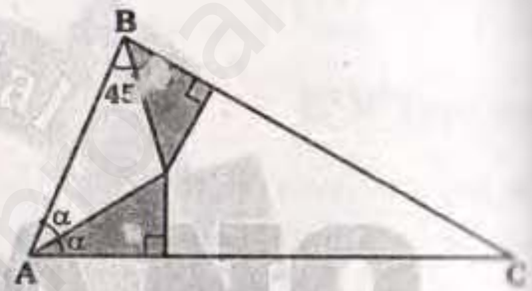
En el triángulo ABC, AB < BC, $\overline{BE}$ es bisectriz interior y $\overline{BD}$ es bisectriz exterior, demostrar:

$$A_{\Delta ABD} = A_2\left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2}\right)$$

donde: $A_1 = A_{\Delta CBE}$ y $A_2 = A_{\Delta EBA}$

PROBLEMA Nº 63 Seminario

En la figura, AB = 6u y BC = 8u. Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) 10u² B) 8u² C) 4u²

D) 2u² E) 6u²

PROBLEMA Nº 64 Seminario

En un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH y una recta secante que interseca a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N; además contiene a los incentros de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Si MB = m, MA = ℓ y CN = n. Halle el área de AMNC.

A) $\frac{3}{2}\ell(m+n)$ B) $\frac{\ell}{2}(m+n)+\frac{mn}{2}$

C) $\frac{3\ell}{2}(m+n)-\frac{mn}{2}$ D) $\frac{mn}{2}+\frac{3\ell}{2}(m+n)$

E) $mn+\ell(m+n)$

PROBLEMA Nº 65 Seminario

En un triángulo ABC, cuyos lados miden a, b y c y las alturas relativas a dichos lados son h_1, h_2 y h_3 respectivamente. Hallar el área de la región ABC.

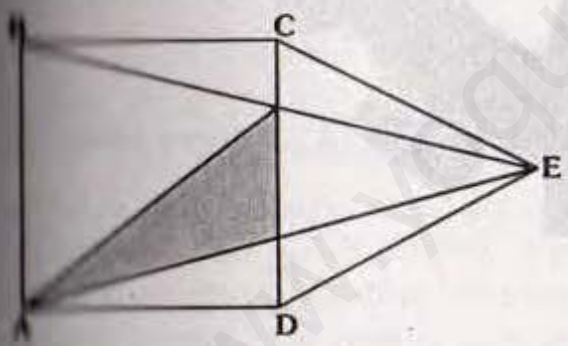
A) $\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$ B) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$

C) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$ D) $\sqrt[3]{\frac{abch_1h_2h_3}{2}}$

E) $2\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$

PROBLEMA Nº 66 Seminario

ABCD es un cuadrado cuyo lado mide ℓ y DCE es un triángulo equilátero. Hallar el área de la región sombreada.



A) $\frac{\ell^2}{2}(3\sqrt{3}-2)$ B) $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-3)$

C) $\frac{\ell^2}{2}(\sqrt{3}-1)$ D) $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-1)$

E) $\frac{\ell^2}{2}(4\sqrt{3}-3)$

PROBLEMA Nº 67 Seminario

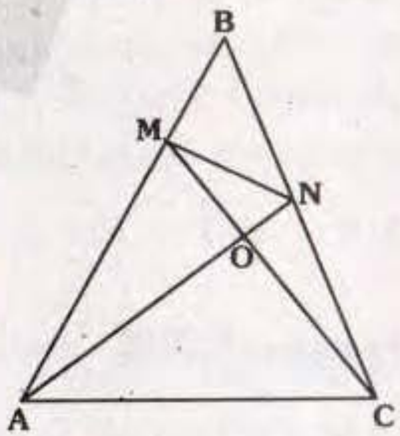
En un triángulo isósceles ABC, AB = BC, AC = b, las medianas congruentes son perpendiculares. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{3}{8}b^2$ B) $\frac{3}{4}b^2$ C) $\frac{3}{2}b^2$

D) $2b^2$ E) $3b^2$

PROBLEMA Nº 68 Seminario

En la figura, $A_{\Delta MBN} = \mathbb{X}u^2$, $A_{\Delta MON} = \mathbb{Y}u^2$, $A_{\Delta AOC} = \mathbb{Z}u^2$. Halle el área de la región triangular ABC.



A) $\frac{3}{2}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z})$

B) $\frac{\mathbb{XY}}{\mathbb{Z}}$

C) $\frac{\mathbb{XZ}}{\mathbb{Y}}$

D) $\frac{\mathbb{YZ}}{\mathbb{X}}$

E) $\frac{2}{3}(\mathbb{X}+2\mathbb{Y}+\mathbb{Z})$

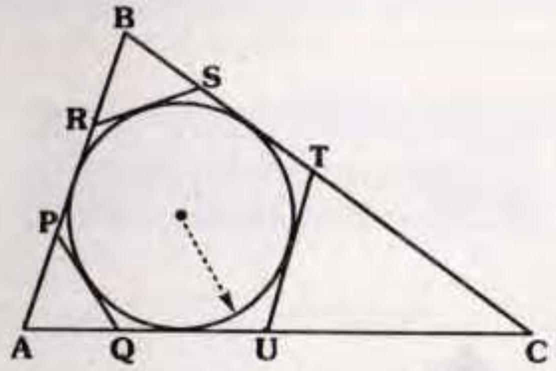
PROBLEMA Nº 69 Seminario

Si p representa al semiperímetro y

$$(p_{APQ})(p_{RBS})(p_{TCU}) = 336$$

$$p_{APQ} + p_{RBS} + p_{TCU} = 21$$

Halle el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 70 Seminario

En un triángulo ABC se ubica el ortocentro O, $\overline{BH}$ es altura del triángulo ABC, F es un punto de la prolongación de $\overline{BH}$, tal que $m\measuredangle AFC = 90°$. Si $(AC)(BH) = 32u^2$ y $(AC)(OH) = 8u^2$. Halle el área de la región triangular AFC en u^2.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 71 Seminario

En un cuadrado ABCD sobre el lado $\overline{BC}$ se construye exteriormente el triángulo rectángulo BMC (recto en M). Si el producto de las áreas de las regiones triangulares ABM y MCD es $36u^4$, entonces el área de la región triangular BMC (en u^2) es:

A) 18 B) 15 C) 12 D) 6 E) 5

PROBLEMA Nº 72 Seminario

Se tiene un triángulo de lados 9u, 10u y 11u. Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo.

A) $\frac{80}{11}\sqrt{2}$ B) $\frac{40}{13}\sqrt{2}$ C) $\frac{20}{33}\sqrt{2}$

D) $\frac{80}{11}\sqrt{3}$ E) $\frac{40}{11}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 73 Seminario

En un triángulo ABC se ubica D en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $AC : CD :: 3:1$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DM} \cap \overline{AB} = \{N\}$. Halle la relación entre las áreas de las regiones BMN y ANMC.

A) 1: 5 B) 1: 6 C) 1: 9

D) 2: 9 E) 2: 5

PROBLEMA Nº 74 Examen parcial

En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado 8 con una circunferencia inscrita de centro O. Después del vértice A se traza el arco BD, luego el área de la región triangular AOM es:

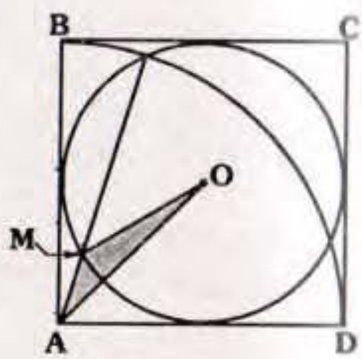
A) $\sqrt{7}$

B) 2,5

C) $\sqrt{6}$

D) 3

E) $\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 75 Seminario

Siendo $\mathbb{A}$ el área de una región triangular, hallar el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos medios de las medianas.

A) $\mathbb{A}/4$ B) $\mathbb{A}/6$ C) $\mathbb{A}/8$

D) $\mathbb{A}/16$ E) $\mathbb{A}/24$

PROBLEMA Nº 76 Seminario

En un triángulo ABC, se cumple que BC=a, AC=b y AB=c, el incentro es I; la bisectriz del ángulo B corta a la circunferencia circunscrita en F; si r y r_b representan las longitudes del inradio y exradio relativo a $\overline{AC}$, probar que el área de la región AIF tiene por expresión: $\dfrac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$

PROBLEMA Nº 77 Seminario

En un cuadrilátero inscriptible ABCD, AB=7cm; BC=CD=15cm y AD=25cm. Hallar el área del triángulo ABC.

A) 24cm² B) 48cm² C) 20cm²

D) 42cm² E) 50cm²

PROBLEMA Nº 78 Seminario

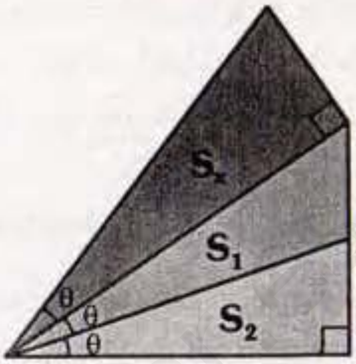
Calcula el área de la región triangular cuyos lados miden $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$.

A) $\dfrac{\sqrt{35}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{59}}{4}$ C) $\dfrac{49}{15}$

D) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$ E) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{105}}\right)$

PROBLEMA Nº 79 Seminario

De la figura, hallar S_x en función de S_1 y S_2.



A) S_1^2/S_2

B) $\sqrt{S_1^2+S_2^2}$

C) $\sqrt{S_1S_2}$

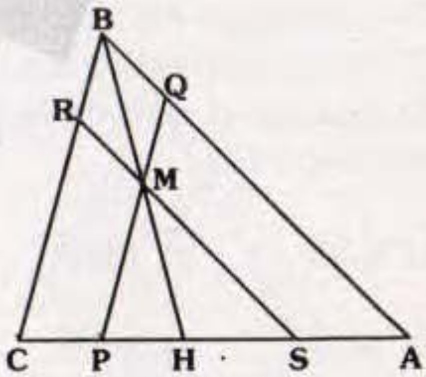
D) S_2^2/S_1

E) S_1+S_2

PROBLEMA Nº 80 Seminario

En la figura $\overline{PQ}//\overline{CB}$, $\overline{RS}//\overline{BA}$, AH=2(HC), $S_{\Delta ABC}=120u^2$ BM=MH.

Hallar $S_{AQMS}-S_{MRCP}$.



A) 40

B) 80

C) 90

D) 60

E) 30

PROBLEMA Nº 81 Seminario

En el triángulo ABC, I es incentro y G es baricentro. Si AB = 15u, BC = 13u y AC = 14u. Calcule $S_{\Delta BIG}$.

A) 2 B) 1 C) 4/3

D) 2/3 E) 5/3

PROBLEMA Nº 82 Práctica Calificada

En un triángulo ABC, se cumple que AC=6, AB+BC=18 y su inradio mide 2. Calcule el área de la superficie del triángulo ABC.

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

PROBLEMA Nº 83 Práctica Calificada

En un triángulo ABC (recto en B), I es incentro, AI=a, IC= $b\sqrt{2}$. Calcule el área de la superficie triangular AIC.

A) 2ab B) ab C) $\frac{ab}{2}$

D) $\frac{1}{4}ab$ E) $\frac{a^2+b^2}{2}$

PROBLEMA Nº 84 Práctica Calificada

En un triángulo ABC dos lados miden 9 y 13, la mediana relativa al tercer lado mide 10. Calcule el área de la superficie del triángulo ABC.

A) $8\sqrt{14}$ B) $10\sqrt{14}$ C) $12\sqrt{14}$

D) $14\sqrt{14}$ E) $16\sqrt{14}$

PROBLEMA Nº 85 Práctica Calificada

En un triángulo acutángulo ABC, la $m\measuredangle ABC=72°$, se trazan las alturas $\overline{AF}$ y $\overline{CH}$. Entonces, el área de la región triangular HBF es $(a-b\sqrt{5})$ veces el área de la región triangular ABC. Calcule a/b.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 86 Práctica Calificada

El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero ABC mide 1u. Halle el área de la región triangular ABC (en u²).

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 87 Práctica Calificada

Una región triangular ABC, de baricentro G tiene k u² de área. Por G se traza una paralela a $\overline{AC}$ que interseca a los lados AB y BC en P y Q respectivamente. Halle el área de la región APQC (en u²).

A) $\frac{k}{6}$ B) $\frac{k}{5}$ C) $\frac{2}{5}k$

D) $\frac{3}{7}k$ E) $\frac{5}{9}k$

PROBLEMA Nº 88 Práctica Calificada

En un triángulo ABC se traza la mediana AM y la bisectriz BD del ángulo ABC, $D\in\overline{AC}$, $\overline{BD}\cap\overline{AM}=\{Q\}$, $\frac{AD}{DC}=\frac{3}{4}$. Si el área de BQM es S, halle el área de la región triangular ABC.

A) 5S B) 6S C) 7S D) 8S E) 9S

PROBLEMA Nº 89 Examen de Selección

El perímetro de un triángulo isósceles es 28u. Si uno de los lados congruentes mide [illegible], entonces el área (en u^2) de la región triangular es:

A) [illegible] B) $6\sqrt{21}$ C) $8\sqrt{21}$

D) [illegible] E) 28

PROBLEMA Nº 90 Seminario

En una circunferencia se inscribe el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica un punto F sobre el arco $\overset{\frown}{BC}$. Si [illegible]$\sqrt{3}$, BF = 6 y $m\overset{\frown}{AB}=60°$, entonces el área de la región triangular BFC es:

A) [illegible]$(4-\sqrt{3})$ B) $9(4-\sqrt{3})$

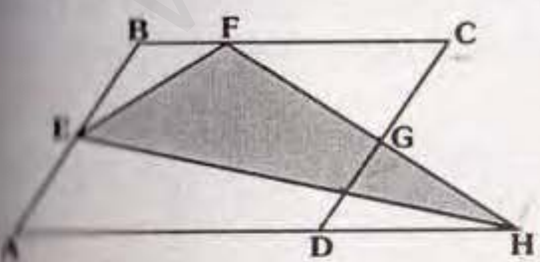
C) [illegible]$(\ldots-\sqrt{3})$ D) $\dfrac{9}{2}(2-\sqrt{3})$

E) [illegible]$(\ldots-\sqrt{3})$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA Nº 91 Seminario

En el romboide ABCD de área S, se cumple que AE = DG. Hallar el área de la región sombreada.



A) S/2 B) S/3 C) S/4 D) S E) 2S

PROBLEMA Nº 92 Seminario

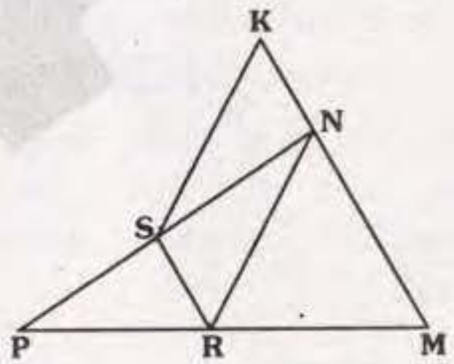
En un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ (BC < AD); la base media y la diagonal $\overline{AC}$ se cortan en Q. Calcular el área de BQD, si las áreas de las regiones trapeciales parciales determinadas por la base media son S_1 y S_2 ($S_1 > S_2$).

A) $\dfrac{S_1+S_2}{2}$ B) $S_1 - S_2$ C) $\dfrac{S_1-S_2}{2}$

D) $\sqrt{S_1S_2}$ E) $\dfrac{2S_1S_2}{S_1-S_2}$

PROBLEMA Nº 93 Seminario

En la siguiente figura el área de la región triangular PSR es $\mathbb{A}u^2$ y b(MN) = a(NK), entonces el área de la región limitada por el paralelogramo KSRN es:



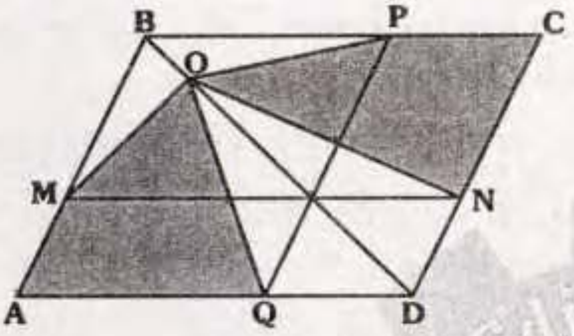
A) $\dfrac{3\mathbb{A}(a-b)}{2b}$ B) $\dfrac{4}{3}\dfrac{\mathbb{A}(a-b)}{b}$

C) $\dfrac{\mathbb{A}(a-b)}{b}$ D) $\dfrac{\mathbb{A}(a-b)}{2b}$

E) $\dfrac{2\mathbb{A}(a-b)}{b}$

PROBLEMA Nº 94 Práctica Calificada

En el paralelogramo ABCD de la figura $\overline{MN}//\overline{AD}$ y $\overline{PQ}//\overline{AB}$. Si $S_{\square OMAQ}=17u^2$, calcule $S_{(\square OPCN)}$ en u².



A) 8,5 B) 13 C) 17,5

D) 21 E) 17

PROBLEMA Nº 95 Práctica Calificada

Las bases de un trapecio miden a y b (a<b). Halle la longitud del segmento paralelo a las bases que determina dos trapecios de la misma área.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$

D) $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ E) $\frac{a^3+b^3}{ab}$

PROBLEMA Nº 96 Práctica Calificada

En el triángulo ABD, $C\in\overline{AD}$ (AC > CD) y $P\in\overline{AB}$, tal que $\overline{CP}//\overline{BD}$. Si M es punto medio de $\overline{AD}$ y $S_{\Delta ABC}=16m^2$, halle $S_{\square MPBC}$ en m².

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

PROBLEMA Nº 97 Práctica Calificada

En el cuadrado ABCD de 2[illegible]u de lado, $M\in\overline{CD}$, $N\in\overline{AB}$ y $\overline{AM}//\overline{CN}$. Si la distancia entre $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ es 40, calcule el área de la región AMCN (en u²)

A) 100 B) 120 C) 130

D) 140 E) 150

PROBLEMA Nº 98 Práctica Calificada

En una circunferencia de centro O y de radio R unidades, se inscribe un hexágono regular ABCDEF. Las prolongaciones de las cuerdas $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ se interceptan en el punto G. Si $\overline{EC}\cap\overline{AD}=\{K\}$, entonces el área (en u²) de la región cuadrangular EKDG es:

A) $\frac{2R^2\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{5R^2\sqrt{3}}{8}$

D) $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$

PROBLEMA Nº 99 Práctica Calificada

Sea ABC un triángulo, AC= b, BC=a (a > b), r_a y r_b son los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los lados BC y AC respectivamente. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{2\sqrt{r_a r_b}\,ab}{\sqrt{r_a^2-r_b^2}}$ B) $\frac{(a^2-b^2)r_a r_b}{r_a^2-r_b^2}$ C) $\frac{ab\sqrt{r_a r_b}}{a-b}$

D) $\frac{r_a r_b(a-b)}{r_a-r_b}$ E) $\frac{(r_a+r_b)ab}{r_a-r_b}$

PROBLEMA Nº 100 Práctica Calificada

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra; AB = a, BC = b, CD = c, AD = d. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\dfrac{(a+b)\sqrt{abcd}}{c+d}$ B) $\dfrac{ab\sqrt{abcd}}{ab+cd}$

C) $\dfrac{ac\sqrt{abcd}}{ac+bd}$ D) $\dfrac{bd\sqrt{abcd}}{ad+bc}$

E) $\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}\right)\sqrt{abcd}$

PROBLEMA Nº 101 Práctica Calificada

En un rombo la suma de las longitudes de sus diagonales es 70 u y la longitud del radio de la circunferencia inscrita al rombo es 12u. Entonces el área (en u²) de la región limitada por el rombo es:

A) 400 B) 480 C) 560

D) 600 E) 640

PROBLEMA Nº 102 Práctica Calificada

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se inscribe un cuadrado EFLJ, $\overline{EJ} \subset \overline{AC}$, $F \in \overline{AB}$, $L \in \overline{BC}$. Las áreas de las regiones triangulares AEF y LJC son Vu² y Wu². Halle el área de la región cuadrada EFLJ. (en u²)

A) $\dfrac{\sqrt{V.W}}{2}$ B) $\sqrt{V.W}$ C) $\sqrt{2V.W}$

D) $2\sqrt{V.W}$ E) $\dfrac{V.W}{V+W}$

PROBLEMA Nº 103 Práctica Calificada

En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica: $m\sphericalangle BCD = 90°$, AB = 13u, BC = 20u, CD = 10u y DA = 17u. Entonces, el área (en u²) de la región cuadrangular ABCD es:

A) 200 B) 210 C) 220

D) 310 E) 320

PROBLEMA Nº 104 Práctica Calificada

En un triángulo ABC se ubican los puntos M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que: MC = 2AM y BN = 2NC. Si $\overline{AN} \cap \overline{BM} = \{P\}$ y el área de la región triangular APB es 10u², entonces el área (en u²) de la región cuadrangular PMCN es:

A) 10 B) 15 C) 20

D) 25 E) 30

PROBLEMA Nº 105 Seminario

Sea el rombo ABCD, P es punto medio de $\overline{BC}$, AP = 9cm, DP = 13cm. Halle el área limitado por el rombo ABCD en cm².

A) $12\sqrt{14}$ B) $14\sqrt{14}$ C) $18\sqrt{14}$

D) $22\sqrt{14}$ E) $24\sqrt{14}$

PROBLEMA Nº 106 Examen Parcial

En el triángulo cuyos lados miden 5; 7 y 8m se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura. Entonces el área máxima en m² que puede encerrar dicho rectángulo es:

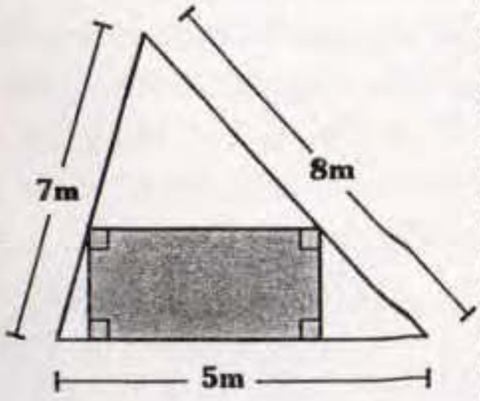
A) $\sqrt{55}$

B) $6\sqrt{3}$

C) $\sqrt{65}$

D) $5\sqrt{3}$

E) $\sqrt{85}$



PROBLEMA Nº 107 Seminario

Se tiene un rectángulo de área 60 u^2, cuyos lados son longitudes enteras, entonces el perímetro máximo de dicho rectángulo es:

A) 122 u B) 64u C) 32u

D) 100u E) 60u

PROBLEMA Nº 108 Seminario

Por los vértices opuestos de un cuadrado, cuyo lado mide 5m, se trazan dos paralelas distantes 7m. Calcular el área de la región paralelográmica (no cuadrado) que se forma.

A) 50 B) $\frac{625}{4}$ C) $\frac{625}{2}$

D) $\frac{1225}{8}$ E) $\frac{1225}{24}$

PROBLEMA Nº 109 Seminario

Tres polígonos regulares de **n** lados de áreas $\mathbb{A}_1$; $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_3$ cuyas longitudes de lados miden a_1, a_2 y a_3 respectivamente. Si $\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$. Calcule a_3 en función de a_1 y a_2.

A) $\sqrt{a_1a_2}$ B) a_1+a_2 C) $\frac{a_1+a_2}{3}$

D) $\frac{a_1+a_2}{n}$ E) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

PROBLEMA Nº 110 Seminario

En un cuadrado ABCD, se traza una recta secante que pasa por el centro y que interseca a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, las distancias trazadas de los vértices a la recta miden a; b; c y d, si $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Hallar el área de la región cuadrada.

A) 120 B) 150 C) 100

D) 200 E) 160

PROBLEMA Nº 111 Seminario

Hallar el área encerrada por el trapecio ABCD, si AB=BC=4, $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACD = 90°$ y AC=CD

A) 12 B) 24 C) 20 D) 36 E) 32

PROBLEMA Nº 112 Práctica Calificada

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un cuadrilátero cualquiera ABCD, se ubican los puntos medios M, N, P y Q de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Entonces, el área de la región cuadrangular MNPQ es igual a la mitad del área de la región cuadrangular ABCD.

II. En un trapecio ABCD ($\overline{AB}//\overline{CD}$): El segmento de recta que une los puntos medios de las bases, divide a la región cuadrangular ABCD en dos regiones cuadrangulares equivalentes.

III. En un triángulo escaleno ABC, las medianas del triángulo dividen a la región triangular en seis regiones triangulares equivalentes.

A) VFV B) VVF C) FFV

D) VVV E) FVV

PROBLEMA Nº 113 **Seminario**

El área de la región de un triángulo ABC es de $18u^2$, se traza la altura BH y la mediatriz de $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{BC}$ en N. Calcule el área de la región cuadrangular ABNH (en u^2)

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

PROBLEMA Nº 114 **Seminario**

En un cuadrilátero MNPQ, se tiene que $m\sphericalangle M=30°$, $m\sphericalangle N=150°$, $m\sphericalangle P=120°$, $MN=K\sqrt{3}$ y $NP=\ell$, entonces el área de la región cuadrangular MNPQ es:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}k(\ell+k)$ B) $\sqrt{\frac{3}{2}}k(\ell+2k)$

C) $\sqrt{3}\,k(\ell+k)$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\,(\ell+2k)$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}k(2\ell+k)$

PROBLEMA Nº 115 **Seminario**

Dentro del rectángulo ABCD se ubica el punto M tal que $AM=\sqrt{2}u$, $BM=2u$ y $CM=6u$. Si $AD=2(AB)$, entonces el área de la región rectangular ABCD (en u^2)

A) 16 B) 18 C) 20

D) 24 E) 28

PROBLEMA Nº 116 **Seminario**

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$; sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Demostrar que el área de la región triangular ABC es igual al producto del semiperímetro del triángulo DEF con R.

PROBLEMA Nº 117 **Seminario**

Sobre la hipotenusa AB del triángulo ABC se contruye un cuadrado ABDE exterior al triángulo. Si O es el centro del cuadrado y CO = L, entonces el área de la región cuadrangular ACBO es:

A) L^2 B) $\frac{L^2}{2}$ C) $\frac{L^2}{3}$

D) $\frac{2L^2}{3}$ E) $\frac{3L^2}{4}$

PROBLEMA Nº 118 Seminario

Si las bases de un trapecio isósceles ABCD circunscrito a una circunferencia miden 2a y 2b entonces el área de ABCD es:

A) $\frac{(a+b)^2}{2}$ B) $\frac{(a+b)}{2}\sqrt{ab}$

C) $(a+b)\sqrt{ab}$ D) $2(a+b)\sqrt{ab}$

E) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$

PROBLEMA Nº 119 Seminario

En un trapecio ABCD ($\overline{AB}//\overline{CD}$); M es punto medio de $\overline{AD}$. Luego se traza $\overline{MQ}\perp\overline{BC}$. Si MQ = a y BC = b, entonces el área de la región limitada por el trapecio es:

A) ab B) 2ab C) 3ab

D) $\frac{ab}{2}$ E) $\frac{3ab}{4}$

PROBLEMA Nº 120 Seminario

ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$) $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle CDA) = 60°$.

Si 2(BC)=AD=8, entonces el área de ABCD es:

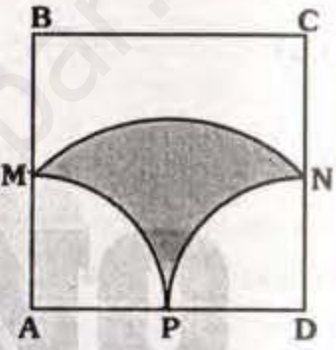
A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{3}$ E) C ó D

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº 121 Seminario

ABCD es un cuadrado de lado ℓ, los centros de los arcos son: A, D y P (P, M y N son puntos medios)



A) $\ell^2/8$

B) $\ell^2/2$

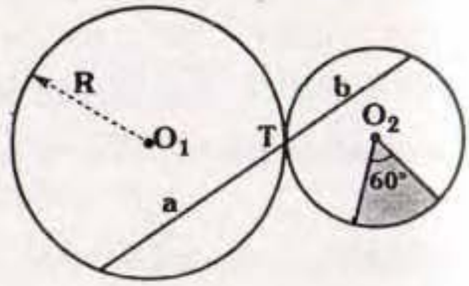
C) $\ell^2/3$

D) $\ell^2/5$

E) $\ell^2/4$

PROBLEMA Nº 122 Seminario

Hallar el área del sector circular mostrado en función de a, b y R (T es punto de tangencia, O_1 y O_2 son centros)



A) $\frac{\pi a^2R^2}{6b^2}$ B) $\frac{\pi b^2R^2}{6a^2}$ C) $\frac{\pi a^2b^2}{6R^2}$

D) $\frac{\pi a^4}{6bR}$ E) $\frac{\pi b^4}{6bR}$

PROBLEMA Nº 123 Seminario

En la figura hallar $S_1 - S_2$, si el lado del cuadrado ABCD mide $2\sqrt{2}u$.

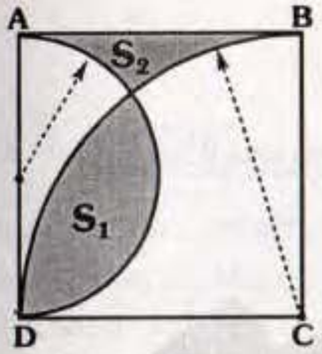
A) $3\pi - 4$

B) $3\pi - 6$

C) $3\pi - 8$

D) $2\pi - 3$

E) $2\pi - 4$



PROBLEMA Nº 124 Seminario

Si $\overline{AB} = \overline{BC}$ y el área de la región sombreada es 36 cm², halle el área de la superficie triangular mixtilínea FBC (en cm²)

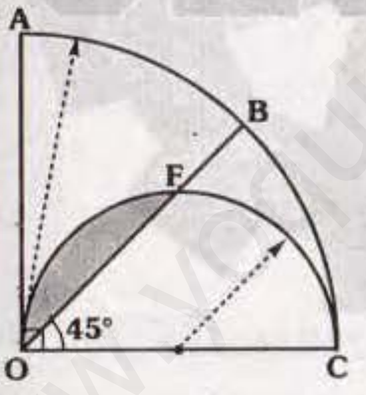
A) 18 cm²

B) 36 cm²

C) $18\pi cm^2$

D) $36\pi cm^2$

E) $9\pi cm^2$



PROBLEMA Nº 125 Seminario

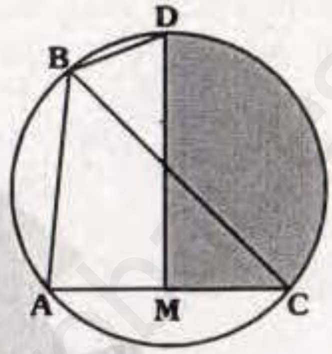
Hallar el área de la corona circular determinada por la circunferencia inscrita y circunscrita a un polígono regular de lado "a".

A) $\frac{\pi a^2}{4}$ B) $\frac{\pi a^2}{2}$ C) πa^2

D) $a^2(\pi - 1)$ E) $\frac{\pi a^2}{8}$

PROBLEMA Nº 126 Seminario

En la figura $m\measuredangle ABC = 45°$ y $\overline{BD}$ es bisectriz exterior del ángulo en B, M es punto medio de $\overline{AC}$. Calcular el área de la región sombreada (R es el radio de la circunferencia)



A) $\frac{R^2}{2}(2\pi + 3)$ B) $\frac{R^2}{6}(2\pi + 3)$

C) $\frac{R^2}{8}(3\pi + 2)$ D) $\frac{R^2}{8}(3\pi + 1)$

E) $\frac{\pi R^2}{5}$

PROBLEMA Nº 127 Práctica Calificada

En una circunferencia de radio R unidades, se trazan dos cuerdas paralelas situadas a un mismo lado del centro de la circunferencia. Si las medidas de los arcos que corresponden a estas cuerdas son 30° y 150°, entonces el área (en u²) de la parte de la región circular limitada por estas cuerdas es:

A) $\frac{\pi R^2}{4}$ B) $\frac{\pi R^2}{5}$ C) $\frac{\pi R^2}{6}$

D) $\frac{\pi R^2}{8}$ E) $\frac{\pi R^2}{3}$

PROBLEMA Nº 128 **Práctica Calificada**

Dos radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de una circunferencia, forman un ángulo agudo cuya medida es 60°. Desde el punto A se traza el segmento AC perpendicular a la recta tangente trazada a la circunferencia por el punto B (C está en la recta tangente). Si OA = R; entonces el área de la región limitada por $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y el arco AB es:

A) $\dfrac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{12}$ B) $\dfrac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$

C) $\dfrac{(7\sqrt{3}-2\pi)R^2}{12}$ D) $\dfrac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{18}$

E) $\dfrac{(7\sqrt{3}-3\pi)R^2}{24}$

PROBLEMA Nº 129 **Práctica Calificada**

Dos circunferencia son concéntricas, una cuerda de la circunferencia mayor es tangente a la menor, la longitud de la cuerda es 2u. Halle (en u²) el área de la corona circular.

A) π B) 2π C) 3π

D) 4π E) 6π

PROBLEMA Nº 130 **Práctica Calificada**

Sea L la longitud de un lado del cuadrado ABCD, con centro en D se traza el arco AC, $\overline{BD} \cap \overset{\frown}{AC} = \{E\}$ se ubica el punto medio M del lado CD, $\overline{AM} \cap \overline{BD} = \{F\}$. Calcule el área de la región limitada por los segmentos EF, FM, MC y el arco CE.

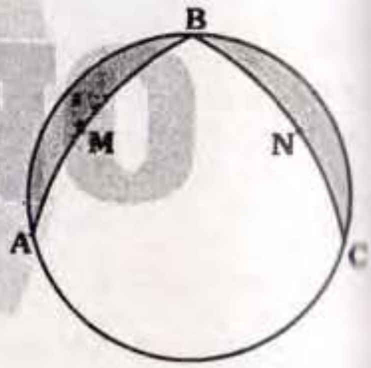
A) $\dfrac{L^2}{24}(3\pi-2)$ B) $\dfrac{L^2}{18}(\pi-1)$

C) $\dfrac{L^2}{12}(2\pi-3)$ D) $\dfrac{L^2}{9}(2\pi-5)$

E) $\dfrac{\pi L^2}{16}$

PROBLEMA Nº 131 **Seminario**

En la figura, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{AC}$, sobre la circunferencia de radio R con centros en A y C se trazan los arcos AMB y BNC. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{R^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$

B) $\dfrac{R^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$

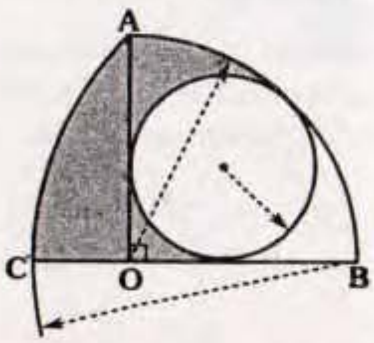
C) $\dfrac{R^2}{6}(\pi+\sqrt{3})$

D) $\dfrac{R^2}{6}(3\sqrt{3}+\pi)$

E) $\dfrac{R^2}{6}(4\sqrt{3}-2\pi)$

PROBLEMA Nº 132 **Seminario**

En la figura, se cumple que OA=OB=2u, halle el área de la región sombreada.



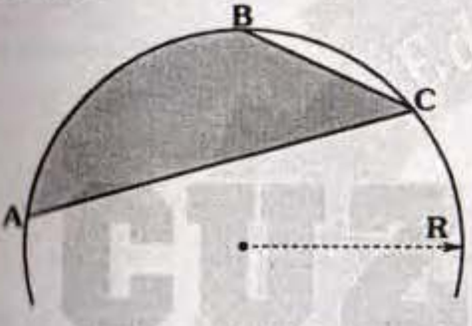
A) $(\pi-1)u^2$ B) $\left(\pi-\frac{8}{5}\right)u^2$

C) $(4+5\pi\sqrt{2}-6\pi-4\sqrt{2})u^2$

D) $(6\pi+3\pi\sqrt{2}+4-4\sqrt{2})u^2$ E) πu^2

PROBLEMA Nº 133 Seminario

En la figura mostrada, R es radio del arco de circunferencia, si $m\widehat{AB}=90°$ y $m\widehat{BC}=45°$. Halle el área de la región sombreada.



A) πR^2 B) $\frac{\pi R^2}{2}$ C) $\frac{\pi R^2}{3}$

D) $\frac{\pi R^2}{4}$ E) $\frac{\pi R^2}{8}$

PROBLEMA Nº 134 Seminario

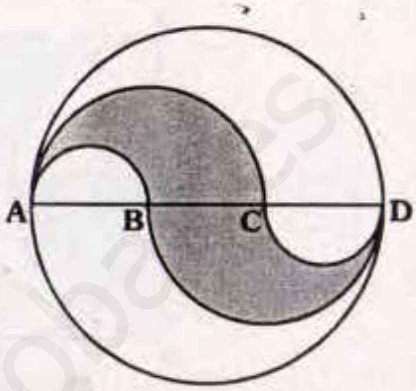
En un triángulo equilátero de lado L, haciendo centro en cada vértice y con radios $\frac{2}{5}L\sqrt{3}$ se trazan arcos de circunferencia. Halle el área del círculo en el interior del triángulo curvilíneo tangente a los arcos trazados.

A) $\frac{\pi L^2}{3}$ B) $\frac{\pi L^2}{2}$ C) $\frac{\pi L^2}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{\pi L^2}{12}$ E) $\frac{\pi L^2}{75}$

PROBLEMA Nº 135 Seminario

En la figura $\overline{AD}$ es diámetro y AB=BC=CD, calcule la relación entre el área de la región sombreada y el de la no sombreada (todas las curvas son semicircunferencias)



A) 1/3

B) 2/5

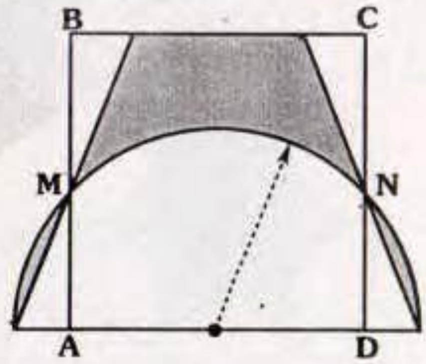
C) 1/2

D) 1

E) 2/3

PROBLEMA Nº 136

Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado (AB=a , M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$)



A) $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{2})$ B) $\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{2})$

C) $\frac{a^2}{2}(2-\sqrt{2})$ D) $\frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

E) $\frac{a^2}{2}(3-2\sqrt{2})$

PROBLEMA Nº 137 **Seminario**

En el gráfico, se tiene un cuadrado cuyo lado mide ℓ, se tiene también dos semicírculos y un círculo inscrito. Hallar el área de la región sombreada.

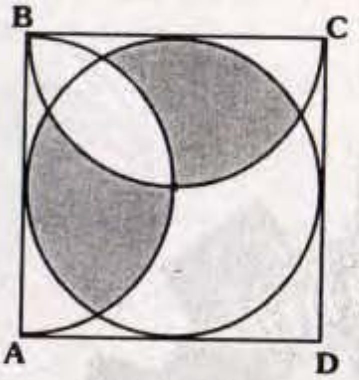
A) $\pi\ell^2/4$

B) $\pi\ell^2/6$

C) $\pi\ell^2/3$

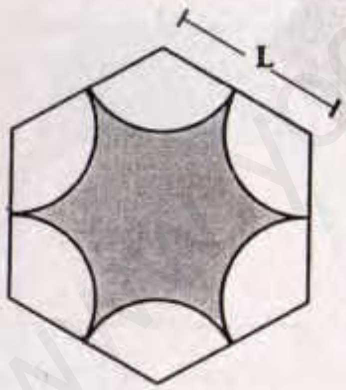
D) $\pi\ell^2/8$

E) $\pi\ell^2/16$



PROBLEMA Nº 138 **Seminario**

Los vértices del hexágono regular mostrado son centros de seis circunferencias congruentes y tangentes exteriores. Hallar el área de la región sombreada.



A) $\frac{L^2}{2}(3\sqrt{3}+\pi)$

B) $\frac{L^2}{2}(3\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{L^2}{2}(3\sqrt{3}+2\pi)$

D) $\frac{L^2}{2}(2\pi-3\sqrt{3})$

E) $L^2(3\sqrt{3}-\pi)$

PROBLEMA Nº 139 **Seminario**

Hallar el área de la corona circular, si PA=3u y PC=6u (C y M son puntos de tangencia)

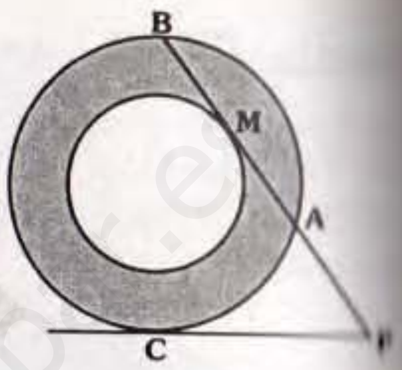
A) $\frac{27}{4}\pi u^2$

B) $\frac{45}{4}\pi u^2$

C) $25\pi u^2$

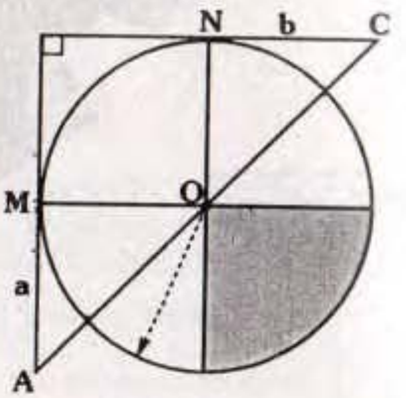
D) $\frac{81}{4}\pi u^2$

E) $\frac{45}{2}\pi u^2$



PROBLEMA Nº 140 **Seminario**

En la figura M y N son puntos de tangencia. Hallar el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$

B) $\pi(a^2+b^2)$

C) $\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$

D) $\frac{\pi}{4}ab$

E) $\frac{\pi}{2}ab$

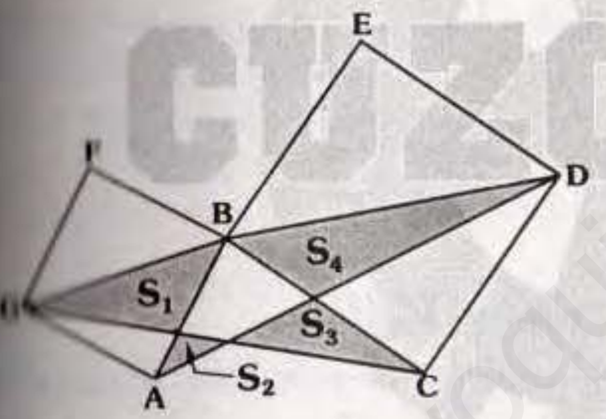
Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº 141

En el gráfico, ABFG y BCDE son cuadrados. Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



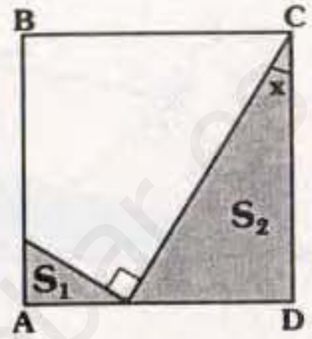
A) $S_1+S_3=S_2+S_4$ B) $S_1S_3 = S_2S_4$

C) $S_1^2+S_3^2=S_2^2+S_4^2$ D) $S_1-S_3=S_4-S_2$

E) $S_1S_2 = S_4S_3$

PROBLEMA Nº 142

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, S_1 y S_2 son las áreas de las regiones sombreadas. Si $S_2 = 16S_1$, calcule x.



A) 16°

B) 37°

C) 30°

D) 22,5°

E) 26,5°

PROBLEMA Nº 143

En el triángulo ABC se traza la mediana BM tal que $m\sphericalangle BMA=60°$, si $(BC)^2-(AB)^2=12$. Calcule el área de la región triangular ABC.

A) $3\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$

D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº 144

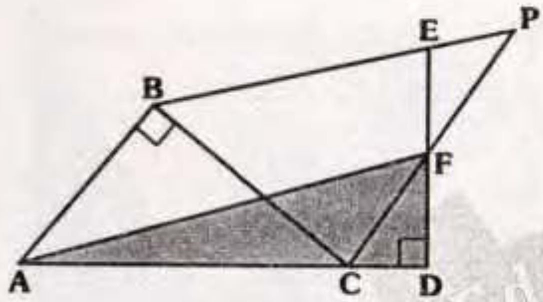
Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica Q en $\overline{AD}$, la mediatriz de $\overline{CQ}$ corta a $\overline{AB}$ en P. Si AQ=m, calcule el área de la región triangular PBC.

A) m^2 B) $2m^2$ C) $\frac{m^2}{4}$

D) $\frac{m^2}{2}$ E) $4m^2$

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, E es excentro relativo a $\overline{BC}$ del triángulo ABC, si $m\measuredangle EPF = m\measuredangle BCA$, calcule $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}}$



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\dfrac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 146

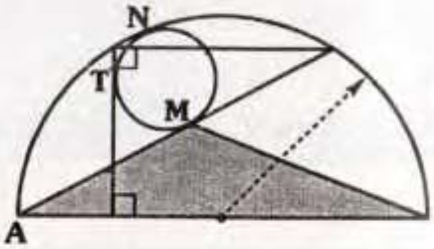
E_1 y E_2 son los excentros relativos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, $\overline{E_1E_2}$ interseca a la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ en el punto M, tal que $E_1M = ME_2 = 4(BM) = 4$, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $\dfrac{36}{5}$ B) 9 C) $\dfrac{18}{5}$

D) 4 E) $\dfrac{27}{8}$

PROBLEMA Nº 147

Si T, N y M son puntos de tangencia y AM=6 calcule el área de la región sombreada.



A) 12 B) 24 C) 18 D) $6\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 148

Sea el triángulo ABC de inradio r; sea r_b el radio de la semicircunferencia que su diámetro está en $\overline{AC}$ y es tangente a $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$, analogamente se define r_a y r_c.

Si $\dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$. Calcule x.

A) 1 B) 2 C) 3

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

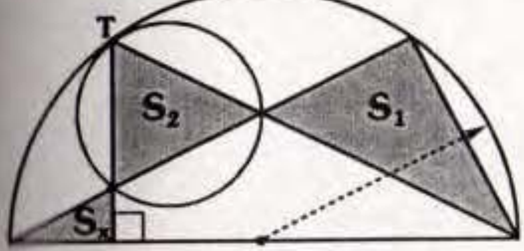
PROBLEMA Nº 149

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P y Q en $\overline{AC}$ (P en $\overline{AQ}$) tal que $m\measuredangle ABP = m\measuredangle CBQ$, se trazan las circunferencias inscritas en los triángulos ABP y BQC, tangentes a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Demuestre

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{QN} + \frac{1}{NC}$$

PROBLEMA Nº 150

En el gráfico, halle S_x en función de S_1 y S_2 (T es punto de tangencia)



A) $(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2})^2$ B) $\sqrt{S_1S_2}$ C) S_2^2/S_1

D) $\dfrac{(S_1-S_2)^2}{2S_2}$ E) $\dfrac{(S_1-S_2)^2}{2S_1}$

PROBLEMA Nº 151

Dada una región triangular ABC de incentro "I", sea "H" la proyección del excentro relativo a $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$. Luego con centro en "H" se traza el cuadrante CAP, tal que la semicircunferencia de diámetro $\overline{PH}$ contiene a "I". Si IH = 6, calcule el área de la región triangular ABC.

A) 36 B) 18 C) 12

D) 20 E) $6\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 152

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), E es excentro relativo a $\overline{BC}$, se traza la circunferencia de centro C y radio CE, la cual corta a $\overline{AC}$ en M. Si AB=12 y BC=5, calcule el área de la región triangular BMC.

A) $\dfrac{30}{13}\sqrt{15}$ B) $\dfrac{18}{13}\sqrt{13}$ C) $\dfrac{30}{13}\sqrt{13}$

D) $\dfrac{17}{3}\sqrt{13}$ E) $\dfrac{17}{13}\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 153

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ secantes en I, si AF=a y EC=b. Calcule la suma de áreas de las regiones triangulares AFI y EIC.

A) ab B) $\dfrac{ab}{2}$ C) $\dfrac{ab}{3}$

D) $\dfrac{ab}{4}$ E) 2ab

PROBLEMA Nº 154

Se tiene el triángulo equilátero ABC, una recta que pasa por el circuncentro y corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N. Si BM = a y BN = b, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^2\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^2$

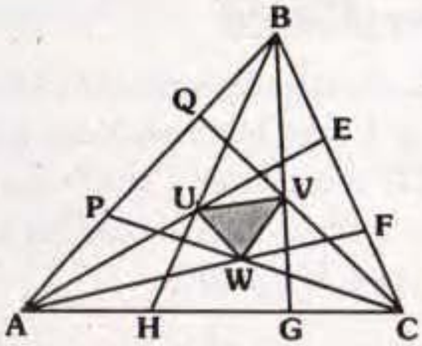
C) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^2$ D) $a^2b^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

E) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}a^2b^2$

PROBLEMA Nº 155

En el gráfico, AP=PQ=QB; BE=EF=FC y AH=HG=GC.

Calcule $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}}$



A) 9 B) 12 C) 16

D) 25 E) 36

PROBLEMA Nº 156

En el gráfico, halle el área de la región sombreada en función de R.

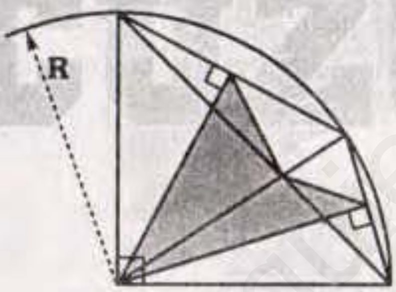
A) R^2

B) $R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $R^2\frac{\sqrt{2}}{8}$

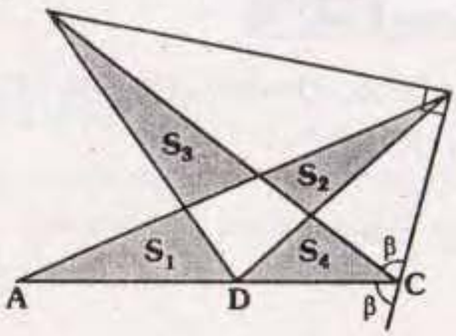
D) $\frac{R^2}{2}$

E) $\frac{R^2}{4}$



PROBLEMA Nº 157

En el gráfico, AD = 2(DC). Indique la relación entre las áreas de las regiones indicadas.



A) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

B) $S_1S_2 = S_3S_4$

C) $S_4 = S_1 + S_2 + S_3$

D) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

E) $S_1^2 + S_2^2 = S_3^2 + S_4^2$

PROBLEMA Nº 158

En el gráfico, M, N y P son puntos de tangencia. Si $\frac{1}{S_{\Delta AMN}} + \frac{1}{S_{\Delta MNC}} = \frac{1}{k}$.

Calcule $S_{\Delta MNP}$

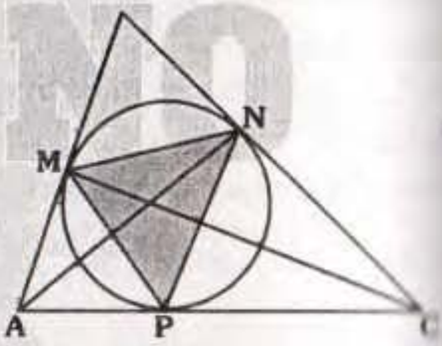
A) k

B) k/2

C) 2k

D) 1,5

E) $k\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 159

En el triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente. Si AM = m, MB = n, NC = ℓ, y $\frac{1}{mn} + \frac{1}{n\ell} + \frac{1}{m\ell} = 0{,}25$; calcule el inradio del triángulo ABC.

A) 1 B) 2 C) 0,25

D) 1,5 E) 4

PROBLEMA Nº 160

Sean L, M y N los pies de las perpendiculares del baricentro G del triángulo ABC a los lados BC, AC y AB. Demostrar:

$$S_{\Delta LMN}=\frac{4(S_{\Delta ABC})^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA Nº 161

Dado el triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, se trazan $\overline{PH}\perp\overline{BC}$ y $\overline{QM}\perp\overline{BC}$ ($H\in\overline{BM}$ y M en $\overline{HC}$); calcule el área de la región PQMH si $BH=MH=MC$; $BQ=6u$, $PC=8u$ y $m\sphericalangle BAC=60°$.

A) $10\sqrt{3}u^2$ B) $6\sqrt{3}u^2$ C) u^2

D) $12\sqrt{3}u^2$ E) $24\sqrt{3}u^2$

PROBLEMA Nº 162

Dado el trapecio ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$). Calcule el área de la región trapecial ABCD si $(BM)(AM)=20u^2$; $m\sphericalangle BCD=120°$ y $m\sphericalangle BMC=m\sphericalangle MAD$

A) $5\sqrt{3}u^2$ B) $20\sqrt{3}u^2$ C) $20\ u^2$

D) $10\sqrt{2}u^2$ E) $10\sqrt{3}u^2$

PROBLEMA Nº 163

Se tiene el triángulo ABC, de circuncentro O, ortocentro H y circunradio a, donde $m\sphericalangle BAC=45°$, si la distancia de H hacia $\overline{AB}$ es b, calcule el área de la región BOHC.

A) $2b\sqrt{2a^2-b^2}$ B) $b\sqrt{2a^2-b^2}$

C) $\frac{b}{2}\sqrt{2a^2+b^2}$ D) $\frac{b}{2}\sqrt{2a^2-b^2}$

E) $\frac{b}{3}\sqrt{2a^2-b^2}$

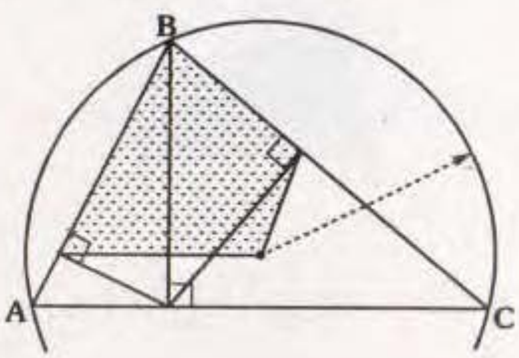
PROBLEMA Nº 164

Se tiene el ángulo DOB, se ubica C y A en los lados OD y OB respectivamente. Sea E el punto de intersección de los segmentos AD y BC. Se traza por C la recta paralela a AB y se traza por A la recta paralela a CD. Sea F el punto de intersección de las dos rectas trazadas. Demostrar que

$$\text{Área(OAEC)} = \text{Área(BFDE)}$$

PROBLEMA Nº 165

Si el área de la región ABC es S, calcule el área de la región sombreada.

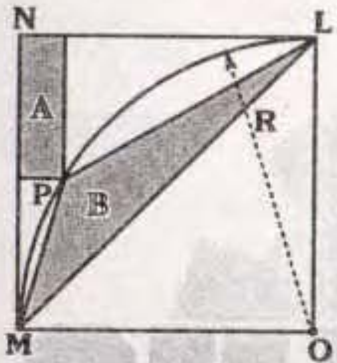


A) S/2 B) S/3 C) S/4

D) $S\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $S\frac{\sqrt{2}}{4}$

PROBLEMA Nº 166

Calcule "R", en función de las áreas $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ indicadas, si MNLO es un cuadrado.

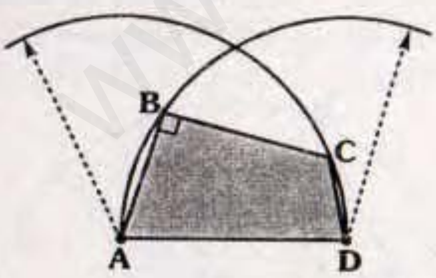


A) $\sqrt{\frac{2\mathbb{A}^2}{\mathbb{B}}}$ B) $\sqrt{\frac{2\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$ C) $2\sqrt{\frac{\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$

D) $\sqrt{\frac{\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$ E) $\sqrt{\frac{\mathbb{A}^2}{\mathbb{B}}}$

PROBLEMA Nº 167

En el gráfico, $AB = \sqrt{3}$ y $CD = 1$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $6\sqrt{5}$ B) $\frac{7}{2}\sqrt{13}$ C) $6\sqrt{3}$

D) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{4}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 168

En el gráfico, $AD = 5(AN)$ y $AM = k$. Calcule el área de la región rectangular ABCD.

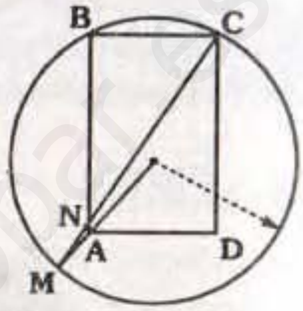
A) $4k^2$

B) $5k^2$

C) $6k^2$

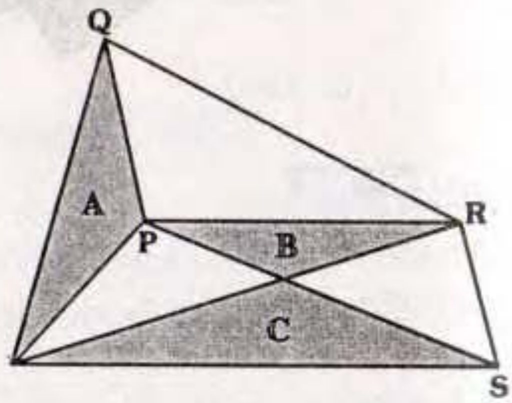
D) $10k^2$

E) $\frac{5}{2}k^2$



PROBLEMA Nº 169

En el gráfico, PQRS es un paralelogramo. Si $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ son las áreas de las regiones sombreadas, indique la relación entre $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$.



A) $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$ B) $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \mathbb{C}$

C) $\mathbb{A}\mathbb{B} = 2\mathbb{C}$ D) $\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \mathbb{C}$

E) $\sqrt{\mathbb{A} + \mathbb{B}} = \mathbb{C}$

PROBLEMA Nº 170

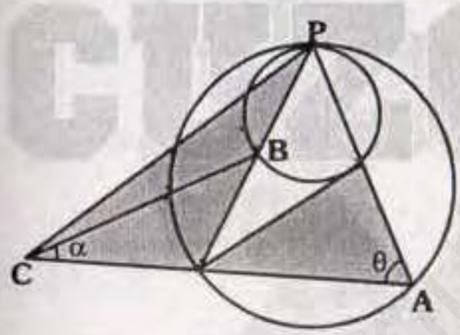
Se tiene el triángulo ABC de baricentro G. Si $m\measuredangle AGC=120°$ y $(AC)^2-(BG)^2=16$. Halle el área de la región cuadrangular no convexa ABGC.

A) $4\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $16\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 171

En el gráfico, P es punto de tangencia, $\alpha+\theta=90°$; AP = a y CB = b. Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) ab

B) 2ab

C) $\frac{ab}{2}$

D) $\frac{ab}{4}$

E) $\frac{ab}{4}$

PROBLEMA Nº 172

Se tiene el cuadrado ABCD, en la parte interna se traza una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, se ubica E en $\overline{AB}$ tal que $\overline{EC}$ es tangente a la circunferencia en P. Si $m\measuredangle PCB=37°$ y PC = 7. Halle el área de la región cuadrada ABCD.

A) 36 B) 54 C) 72

D) $36\sqrt{2}$ E) $54\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 173

En un triángulo ABC ($m\measuredangle B=45°$) de ortocentro "H", en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, tal que PBQH es un paralelogramo. Si AC = a, calcule el área de la región APQC.

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2}{3}$

PROBLEMA Nº 174

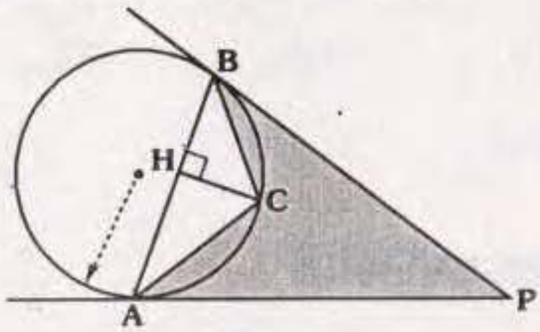
Una de las bases de un trapecio mide 7u y la circunferencia inscrita determina en uno de los lados no paralelos segmentos cuyas longitudes son 4 y 9u. Calcule el área de la región trapecial.

A) $168u^2$ B) $204u^2$ C) $176u^2$

D) $156u^2$ E) $144u^2$

PROBLEMA Nº 175

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si AP=a y HC=b. Halle el área mínima de la región sombreada.



A) ab B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{ab}{4}$

D) $ab\sqrt{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 176

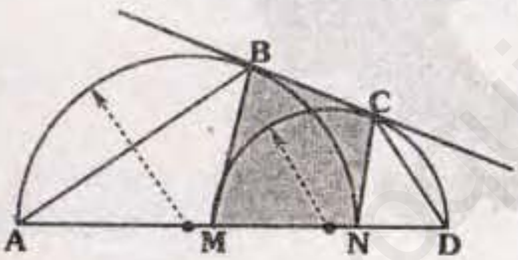
Se tiene el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B). M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, E es un punto de $\overline{AD}$ tal que $m\measuredangle BEN = 90°$, $AM=BC$ y $m\measuredangle MEB = m\measuredangle BEC$. Si $(AE)(ED)=16$, calcule el área de la región ABCD.

A) 8 B) 16 C) $16\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 177

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia y $(AB)(CD) = 16$, halle el área de la región MBCN.



A) 16 B) 8 C) 32

D) $8\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 178

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia y DBCE es un paralelogramo. Si $AT=6$, halle el área de la región sombreada.

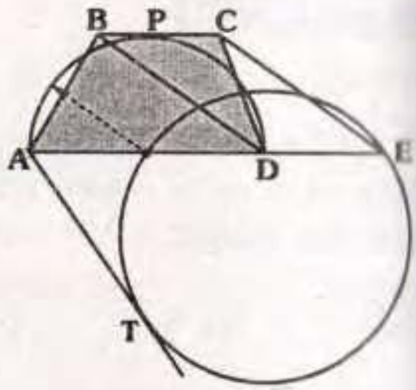
A) 18

B) 20

C) 24

D) 36

E) 9



PROBLEMA Nº 179

Se tiene el paralelogramo ABCD en AB se ubica el punto M, $\overline{MC} \cap \overline{BD} = \{N\}$, si las áreas de las regiones BCN y NCD son $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$. Halle el área de la región triangular MAD en función de $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$.

A) $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$ B) $\sqrt{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2}$ C) $2\sqrt{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2}$

D) $\dfrac{\mathbb{A}_2^2-\mathbb{A}_1^2}{\mathbb{A}_2}$ E) $\dfrac{\mathbb{A}_2^2-\mathbb{A}_1^2}{\mathbb{A}_1}$

PROBLEMA Nº 180

En el pentágono ABCDE se cumple que las regiones triangulares ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son equivalentes, si $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ cortan a $\overline{BE}$ en M y N respectivamente. Halle BM/NE.

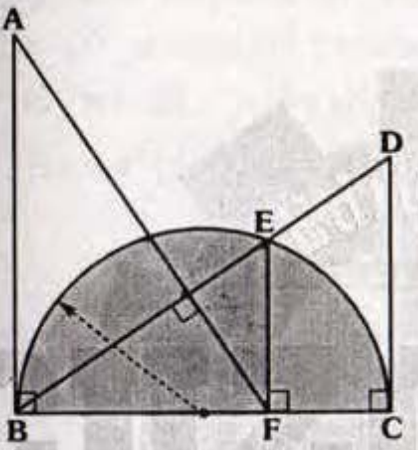
A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº 181

En el gráfico, AB = a, EF = b y DC = c, calcule el área del semicírculo.



A) $\frac{ab^2}{c}\pi$

B) $\frac{\sqrt{ab}}{c}\pi$

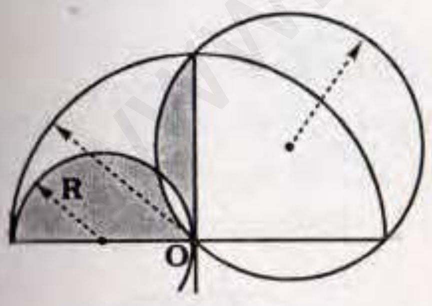
C) $\frac{ac^2}{8b}\pi$

D) $\frac{bc^2}{8a}$

E) $\frac{\sqrt{bc}}{a}\pi$

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, O es punto de tangencia. Halle la diferencia de áreas de las regiones sombreadas.

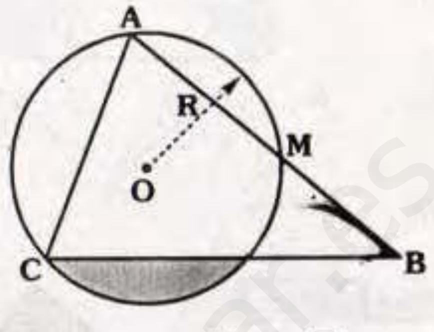


A) $\frac{3}{7}R^2$ B) $\frac{1}{4}R^2$ C) $\frac{1}{2}R^2$

D) R^2 E) $2R^2$

PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, O es ortocentro del triángulo ABC, 3(AM)=2(BM) y R=5. Calcule el área de la región sombreada.



A) $37\pi-4$ B) $4\sqrt{3}\pi-3$

C) $2\sqrt{3}\pi-3$ D) $\frac{185}{36}\pi-12$

E) $\frac{185}{18}\pi-8$

PROBLEMA Nº 184

En el triángulo acutángulo ABC, con centro en B se traza el arco de circunferencia que contiene al circuncentro y ortocentro de dicho triángulo el cual corta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N. Si AC = b, calcule el área del sector circular MBN.

A) $\frac{\pi}{3}b^2$ B) $\frac{\pi}{6}b^2$ C) $\frac{\pi}{12}b^2$

D) $\frac{\pi}{16}b^2$ E) $\frac{\pi}{18}b^2$

PROBLEMA Nº 185

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

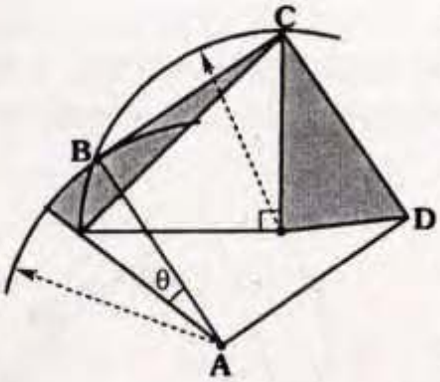
A) $\pi\dfrac{\theta}{180°}$

B) $\pi\dfrac{\theta}{270°}$

C) $\pi\dfrac{\theta}{90°}$

D) $\pi\dfrac{\theta}{135°}$

E) $\pi\dfrac{\theta}{143°}$



PROBLEMA Nº 186

En el gráfico, A es punto de tangencia calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

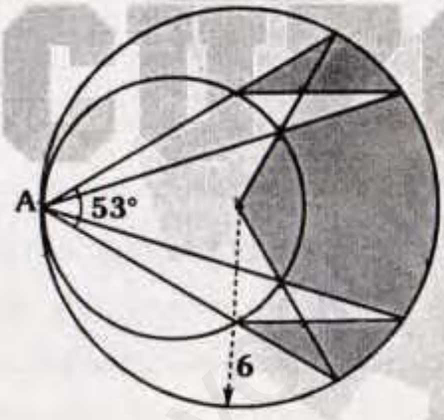
A) $\dfrac{53}{3}\pi$

B) $\dfrac{53}{4}\pi$

C) $\dfrac{53}{10}\pi$

D) $\dfrac{53}{5}\pi$

E) $\dfrac{53}{8}\pi$



PROBLEMA Nº 187

En el gráfico, AB=4; BC=AE=2 y ED=10. Calcule $\dfrac{S_1}{S_2}$.

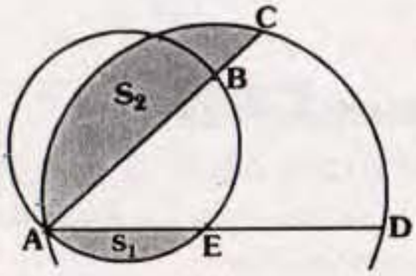
A) 4

B) 2

C) 3

D) 9

E) 6



PROBLEMA Nº 188

En un triángulo rectángulo ABC, $m\measuredangle B=90°$ y $m\measuredangle C=53°$, se tiene la circunferencia inscrita de centro "O" tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Se traza la secante AST que contiene al centro. Si la diferencia entre el semiperímetro del triángulo ABC y BC es 12, calcule el área de la región limitada por la circunferencia y las cuerdas $\overline{PQ}$ y $\overline{ST}$.

A) $2(\pi+4)$ B) $4(\pi-2)$ C) $6(\pi+3)$

D) $8(\pi+4)$ E) $4(\pi+2)$

PROBLEMA Nº 189

Halle la razón entre las áreas de las regiones sombreadas, si ABCD es un cuadrado.

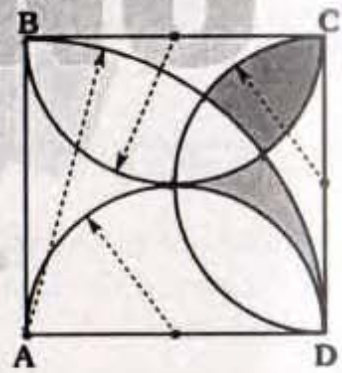
A) π

B) $\pi/3$

C) 1/3

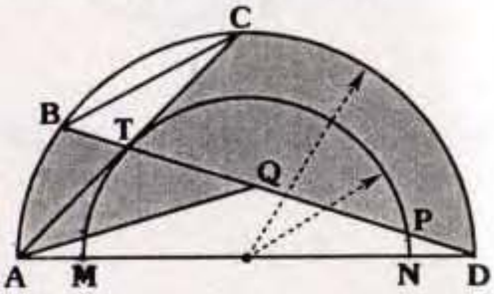
D) 1/2

E) 1



PROBLEMA Nº 190

En la figura, T es punto de tangencia, TQ=QP, BC=6 y $m\overset{\frown}{TP}=120°$, calcule el área de la región sombreada.

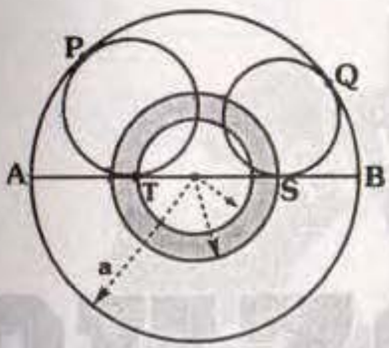


A) 6π B) 9π C) 12π

D) 15π E) 18π

PROBLEMA Nº 191

En el gráfico, $m\widehat{AP} = 53°$ y $m\widehat{BQ} = 37°$. Si a = 72, calcule el área de la región sombreada.(T y S son puntos de tangencia)



A) 600π

B) 400π

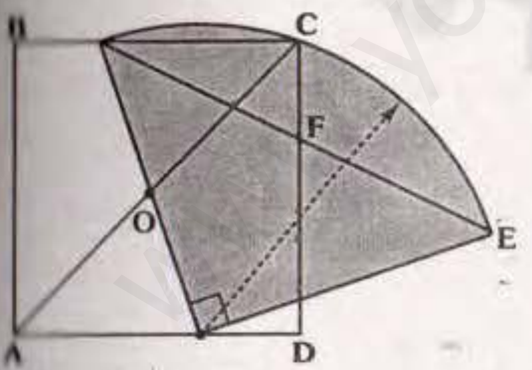
C) 500π

D) 480π

E) 720π

PROBLEMA Nº 192

En el gráfico, O es centro del cuadrado ABCD, si EF = a, halle el área de la región sombreada.

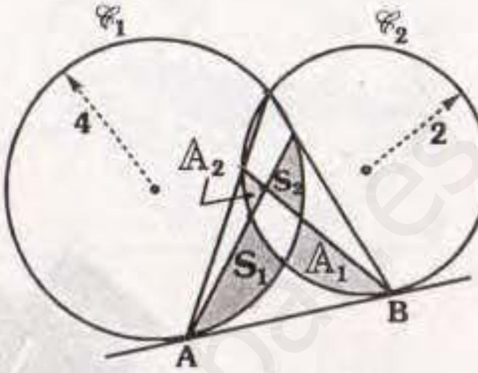


A) $\frac{\pi a^2}{8}$ B) $\frac{\pi a^2}{6}$ C) $\frac{\pi a^2}{4}$

D) $\frac{\pi a^2}{2}$ E) $\frac{\pi a^2}{5}$

PROBLEMA Nº 193

En el gráfico $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales, A y B son puntos de tangencia. Halle: $S_1 - \mathbb{A}_1 + S_2 - \mathbb{A}_2$.

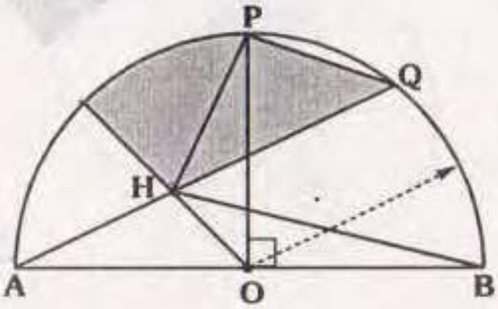


A) $2(\pi-1)$ B) $\pi-2$ C) $2(\pi-2)$

D) $4(\pi-1)$ E) $3(\pi-2)$

PROBLEMA Nº 194

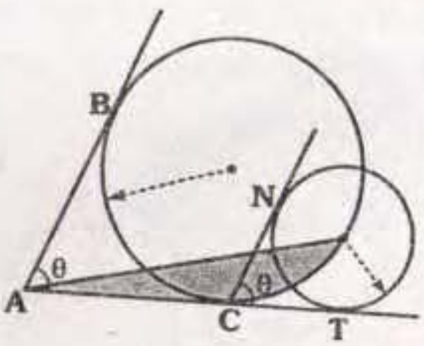
En el gráfico, $m\sphericalangle HPO = m\widehat{PQ} = 30°$ y la distancia de P a $\overline{HB}$ es 2u, calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3}{2}\pi$ D) $\frac{3}{4}\pi$ E) 2π

PROBLEMA Nº 195

En el gráfico, B, C, N y T son puntos de tangencia. Si AC = 2(CT) = $2\sqrt{3}$. Calcule el área de la región sombreada.

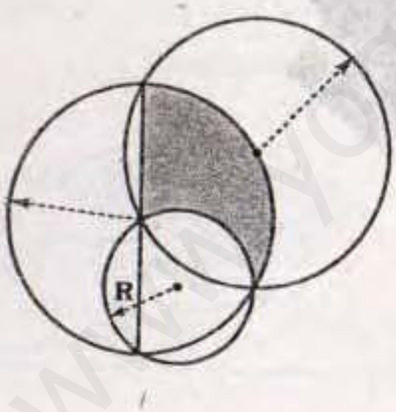


A) $\frac{4}{3}\pi$ B) $\pi-2$ C) $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{2}{3}\pi$ E) $\frac{3\pi-\sqrt{3}+2}{4}$

PROBLEMA Nº 196

En el gráfico, $R=2\sqrt{3}$, halle el área de la región sombreada.



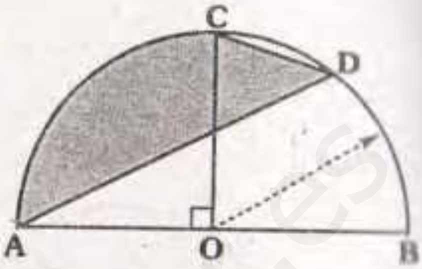
A) $8\sqrt{3}+3\pi$ B) $4\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

C) $8\pi+3\sqrt{3}$ D) $8\pi+\sqrt{3}$

E) $8\pi-3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 197

En la figura el área de la región sombreada es igual a la suma de las áreas de las regiones no sombreadas. Calcule m



A) 30° B) 60° C) 45°

D) 72° E) 36°

PROBLEMA Nº 198

Se tiene una circunferencia de centro O y radio R, $\overline{AB}$ es una cuerda, M está en $\overline{AB}$ tal que $m\sphericalangle OMA=45°$, la prolongación de $\overline{MO}$ corta a la circunferencia en N. Si $AB = \sqrt{2}(MN)$. Halle el área del menor segmento circular AN.

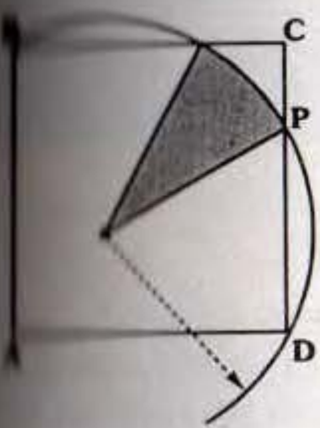
A) $R^2(\pi-\sqrt{2})$ B) $\frac{R^2}{6}(\pi-2)$

C) $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12}(\pi-3)$

E) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$

PROBLEMA Nº 199

En el gráfico PD = 6(PC), calcule la razón entre las áreas de la región sombreada y la región cuadrada ABCD.

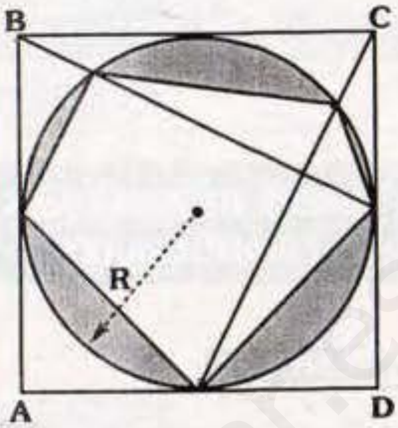


A) $\frac{10}{441}\pi$ B) $\frac{5}{441}\pi$ C) $\frac{5}{221}\pi$

D) $\frac{10}{221}\pi$ E) $\frac{16}{441}\pi$

PROBLEMA Nº 200

En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita el cuadrado ABCD, halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) $\frac{R^2}{5}(5\pi-11)$ B) $\frac{R^2}{10}(10\pi-11)$

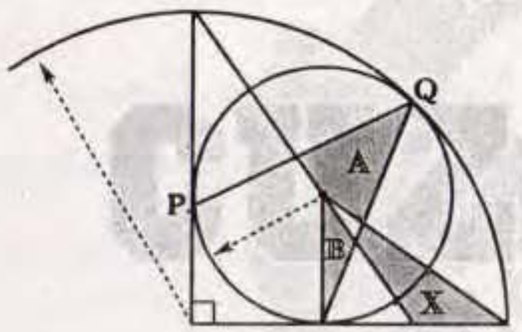
C) $\frac{R^2}{5}(10\pi-11)$ D) $\frac{R^2}{5}(5\pi-8)$

E) $\frac{R^2}{10}(5\pi-11)$

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº 201

Si P, Q y T son puntos de tangencia, calcule $\mathbb{X}$ en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.



A) $\mathbb{A}-\mathbb{B}$ B) $\dfrac{2\mathbb{A}+\mathbb{B}}{2}$ C) $\dfrac{\mathbb{A}+2\mathbb{B}}{2}$

D) $\dfrac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{2}$ E) $2\mathbb{A}-\mathbb{B}$

PROBLEMA Nº 202

Dado el triángulo rectángulo isósceles ABC (recto en C). Sea P en BC, M es el punto medio de AB y sea L y N puntos del segmento $\overline{AP}$ tal que $\overline{CN}$ es perpendicular a $\overline{AP}$ y AL=CN. Si el área ABC es 4 veces el área de LMN. Calcule m∢CAP.

A) 15° B) 30° C) 45°

D) 22,5° E) 18°

PROBLEMA Nº 203

En el triángulo ABC se trazan la mediana AM y las cevianas BD y CE concurrentes en P, si los inradios de los triángulos BEP y CDP son iguales. Calcule AB/AC.

A) 1 B) 0,5 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 204

El triángulo ABC tiene m∢ACB=120° y el lado AC mayor que el lado BC. Sabiendo que el área del triángulo equilátero de lado AB es 31 y el área del triángulo equilátero de lado AC–BC es 19, hallar el área de ABC.

A) 3 B) 4 C) 6

D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 205

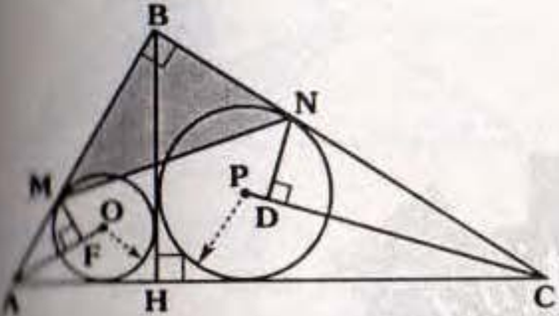
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD; se ubican M y N en las prolongaciones de $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ tal que $\overline{MB}//\overline{AD}//\overline{NC}$. Si el área de la región triangular ABC es $\mathbb{A}$. Calcule el área de la región MDN.

A) $\mathbb{A}$ B) $2\mathbb{A}$ C) $3\mathbb{A}$

D) $\dfrac{3}{2}\mathbb{A}$ E) $4\mathbb{A}$

PROBLEMA Nº 206

En el gráfico, se muestran las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y BHC. Si (AO)(AF)(PC)(CD) = k, calcule el área de la región sombreada.



A) $\sqrt{k}$ B) $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ C) $2\sqrt{k}$

D) $\dfrac{\sqrt{k}}{4}$ E) $\sqrt{\dfrac{k}{2}}$

PROBLEMA Nº 207

En un triángulo ABC: r_a, r_b y r_c son las medidas de los exradios.

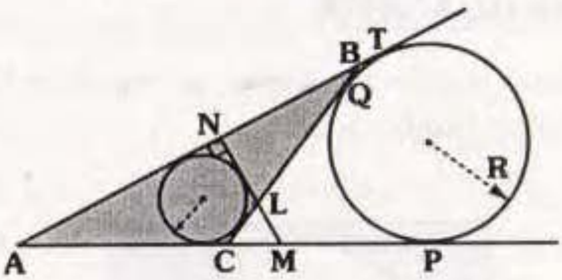
Si $r_a.r_b+r_a.r_c+r_b.r_c=100$, calcule el perímetro del triángulo.

A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) 20

D) 50 E) 25

PROBLEMA Nº 208

En la figura se muestra la circunferencia inscrita en el cuadrilátero ANLC, además B, Q y T son puntos de tangencia. Si la m∢BAC = 37° y R(AM) = 25, calcule el área de la región sombreada.



A) 2 B) 10 C) 15

D) 20 E) 18

PROBLEMA Nº 209

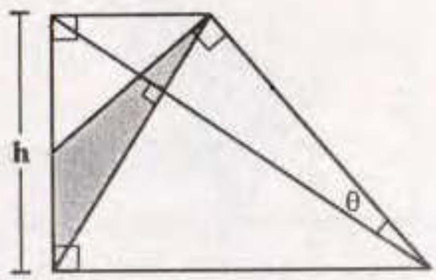
Se tiene el triángulo ABC (AB = BC), P es un punto de la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que m∢ABC = 2(m∢BPA), m∢PAC = 15° y AB = 8. Calcule el área de la región triangular APC.

A) 8 B) 16 C) 24

D) $8(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ E) $16(8-\sqrt{2})$

PROBLEMA Nº 210

Halle el área de la región sombreada en función de h y θ.

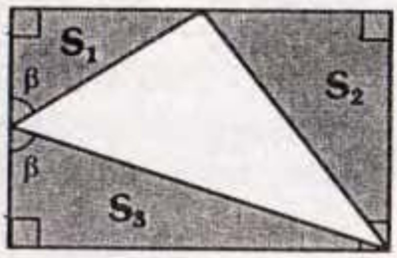


A) $h^2\text{sen}\theta$ B) $h^2\text{tg}\theta$ C) $\dfrac{h^2\text{tg}\theta}{2}$

D) $h^2\cos\theta$ E) $\dfrac{h^2\text{sen}\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 211

Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



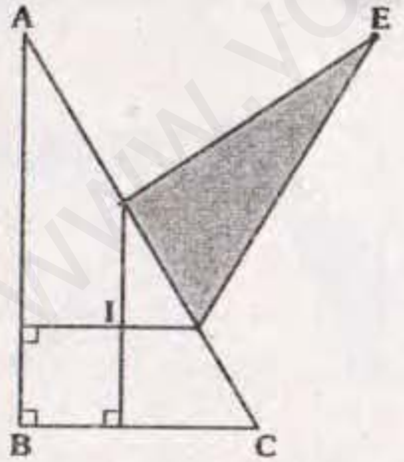
A) $S_3 = S_1 + S_2$ B) $S_3 = \sqrt{S_1S_2}$

C) $S_3^2 = S_1^2 + S_2^2$ D) $2S_3 = S_1 + S_2$

E) $2S_3 = \sqrt{S_1S_2}$

PROBLEMA Nº 212

En el gráfico, I es incentro y E es uno de los excentros del triángulo ABC. Si AC=k, calcule el área de la región sombreada.

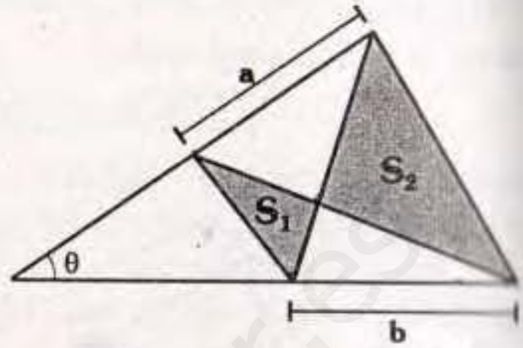


A) k^2 B) $2k^2$ C) $0,5k^2$

D) $0,25k^2$ E) $4k^2$

PROBLEMA Nº 213

Calcule S_2 - S_1 en función de a, b y θ.

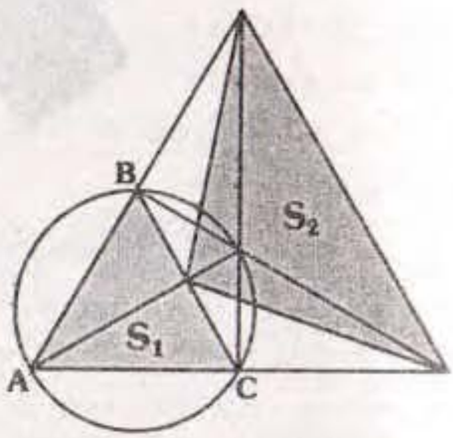


A) absenθ B) abtgθ C) absen2θ

D) $\frac{ab}{2}$senθ E) $\frac{ab}{2}$sen2θ

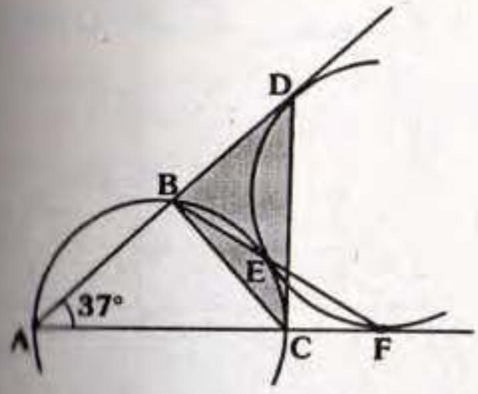
PROBLEMA Nº 214

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, demuestre que $S_2 = 2S_1$.



PROBLEMA Nº 215

En el gráfico, D, E y F son puntos de tangencia y AB = 10. Calcule el área de la región sombreada.

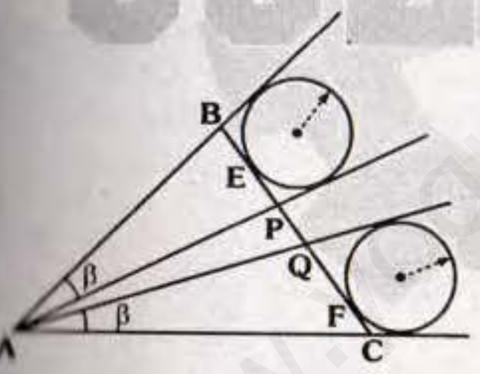


A) 40 B) 20 C) 30 D) 24 E) 48

PROBLEMA Nº 216

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias exinscritas en los triángulos ABP y AQC.

Si $\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{EP}=k$. Calcule: $\dfrac{1}{QF}+\dfrac{1}{FC}$



A) k B) k/2 C) 2k D) k/4 E) k/3

PROBLEMA Nº 217

En el triángulo ABC, se cumple que AB=c, BC=a y AC=b, si $S_{ABC}=\dfrac{(p-a)(p-c)+p(p-a)}{4}$ donde **p** es el semiperímetro. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 45° D) 90° E) 53°

PROBLEMA Nº 218

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{PC}$, S y M en $\overline{AC}$ tal que $S\in\overline{AM}$. Si AM=MC, $\overline{SP}//\overline{MQ}$, las regiones ABPS y SPC son equivalentes, BC=a y QC=b. Calcule PC.

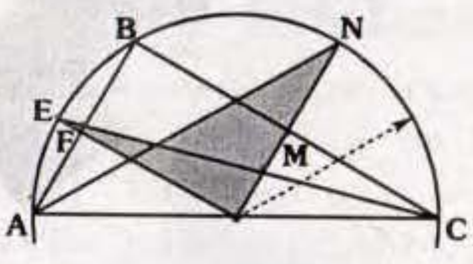
A) $\sqrt{ab}$ B) $\dfrac{a+b}{2}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

E) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

PROBLEMA Nº 219

En el gráfico, $\overline{EF}$ y $\overline{MN}$ son flechas de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si EF=1, MN=7. Calcule el área de la región sombreada.



A) 26 B) 52 C) 40 D) 50 E) 60

PROBLEMA Nº 220

Se tiene el pentágono ABCDE convexo, tal que AB=BC, CD=DE, $m\measuredangle ABC=120°$ y $m\measuredangle CDE=60°$. Si BD=2, calcule el área de la región pentagonal ABCDE.

A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 4

D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA Nº 221

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), tal que AB=3 y BC=4, la circunferencia exinscrita respecto a $\overline{AB}$ es tangente a $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ en P y Q respectivamente, mientras que la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ es tangente a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{AC}$ en N $\overline{PQ}\cap\overline{AB}=\{E\}$ y $\overline{BC}\cap\overline{MN}=\{F\}$. Calcule el área de la región cuadrangular EACF.

A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) 12

D) 8 E) $8\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 222

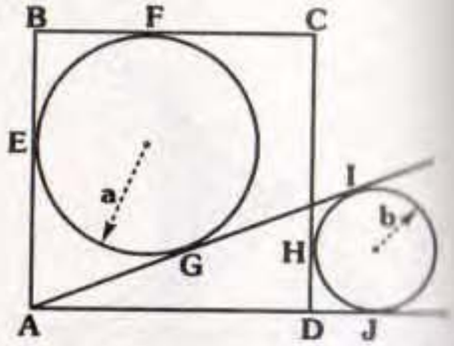
Se tiene el paralelogramo ABCD se ubica E en $\overline{BC}$ y F en $\overline{AD}$, tal que $\overline{EF}//\overline{AB}$ y $\overline{EF}\cap\overline{BD}=\{L\}$. Si $S_{\triangle ABLF}=16$ y $S_{\triangle LECD}=21$. Calcule el área de la región ABCD.

A) 60 B) 50 C) 44

D) 70 E) 80

PROBLEMA Nº 223

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y a=2(b)=4. Calcule el área de la región ABCD (E, F, G, H, I y J: puntos de tangencia)



A) $8(3+2\sqrt{2})$ B) $16(3+2\sqrt{2})$

C) $32(3+2\sqrt{2})$ D) $8(\sqrt{2}+1)$

E) $16(\sqrt{2}+1)$

PROBLEMA Nº 224

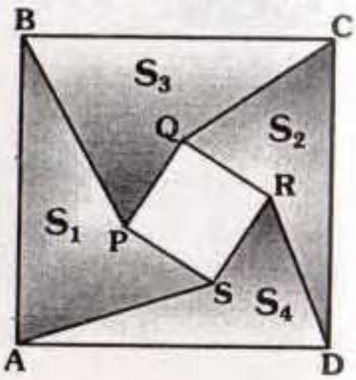
Se tiene el triángulo CED inscrito en la circunferencia de centro O. Las mediatrices de $\overline{EC}$ y $\overline{ED}$ cortan a $\overline{ED}$ y $\overline{EC}$ en B y A respectivamente, $\overline{EM}$ es diámetro, si $m\overset{\frown}{CD}=60°$ y AB=3. Calcule el área de la región MBOA.

A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$

D) $9\sqrt{3}$ E) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

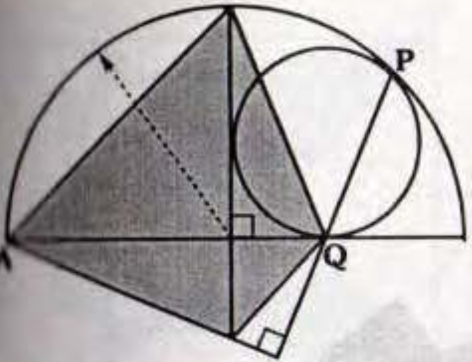
PROBLEMA Nº 225

En el gráfico, ABCD y PQRS son cuadrados. Demuestre que $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$



PROBLEMA Nº 226

Según el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AQ = a, calcule el área de la región sombreada.



A) a^2 B) $\frac{a^2}{2}$ C) $2a^2$

D) $\frac{a^2}{4}$ E) $\frac{a^2}{3}$

PROBLEMA Nº 227

En el gráfico, calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

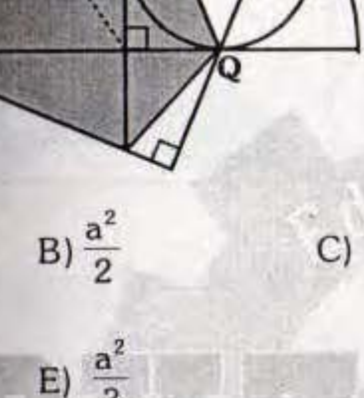
A) sen2θ

B) 1

C) 1/2

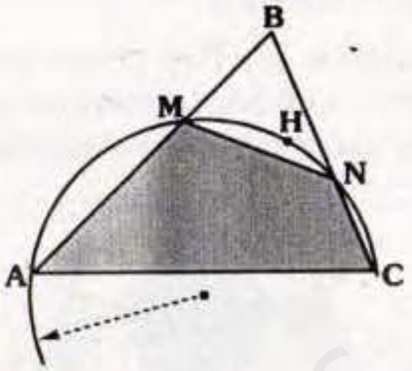
D) tgθ

E) senθ



PROBLEMA Nº 228

En el gráfico, $m\widehat{MN} = 2\beta$ y H es ortocentro del triángulo ABC, calcule la razón de áreas de las regiones AMNC y ABC.



A) $2\cos\beta+2$ B) $2\cos\beta+1$

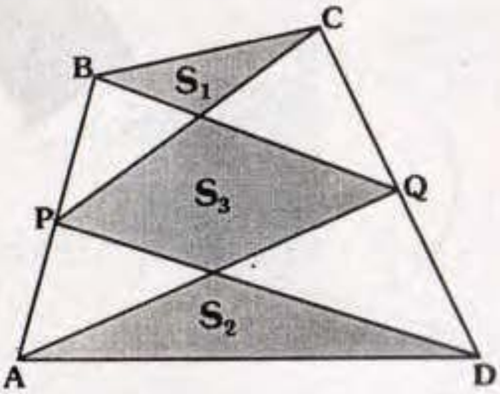
C) $2\cos\beta$ D) $2\cos\beta-1$

E) $\cos 2\beta$

PROBLEMA Nº 229

En el gráfico, S_1, S_2 y S_3 son las áreas de las regiones sombreadas. Si $(AP)(QD)=(PB)(CQ)$, demuestre :

$$S_3=S_1+S_2.$$

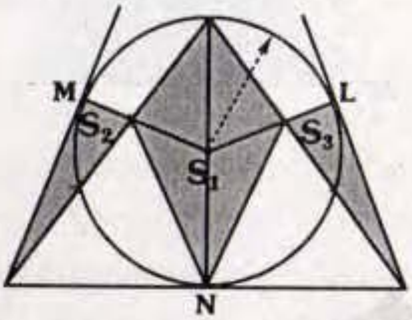


PROBLEMA Nº 230

Se tiene una región cuadrangular inscrita en una circunferencia, cuya área es $\mathbb{A}$ y semiperímetro p. Demuestre $4\mathbb{A} \le p^2$.

PROBLEMA Nº 231

En el gráfico, M, N y L son puntos de tangencia. Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



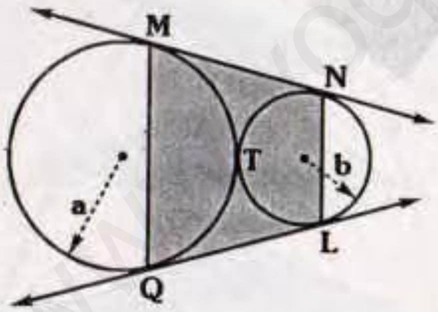
A) $S_1 = S_2 + S_3$ B) $S_1 = 2(S_2 + S_3)$

C) $S_1^2 = S_2S_3$ D) $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2$

E) $S_1 = \dfrac{S_2S_3}{S_2 + S_3}$

PROBLEMA Nº 232

En el gráfico, M, N, L, Q y T son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.



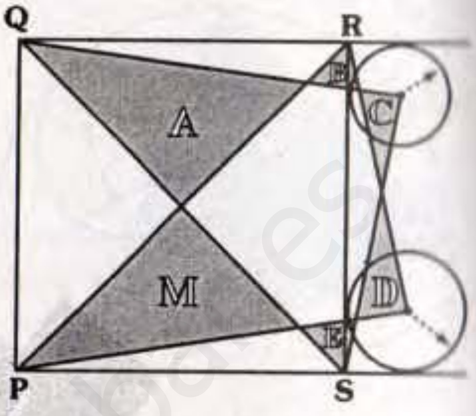
A) $\dfrac{ab\sqrt{ab}}{a+b}$ B) $\dfrac{ab}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{4ab\sqrt{ab}}{a+b}$ D) $\dfrac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$

E) $\dfrac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$

PROBLEMA Nº 233

En el gráfico, PQRS es un cuadrado, halle la relación entre las áreas de las regiones sombreadas indicadas.



A) $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}=\mathbb{D}+\mathbb{E}+\mathbb{M}$

B) $\mathbb{A}+\mathbb{E}+\mathbb{D}=\mathbb{M}+\mathbb{B}+\mathbb{C}$

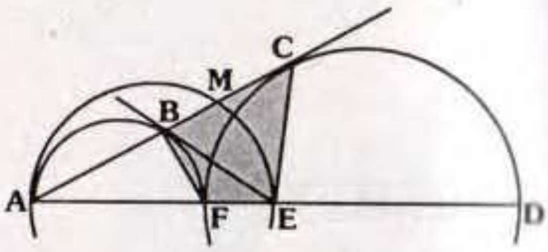
C) $\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{E}=\mathbb{M}+\mathbb{B}+\mathbb{D}$

D) $\mathbb{A}+\mathbb{M}=2(\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{E})$

E) $\mathbb{A}+\mathbb{M}=\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{E}$

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, A, B, C y F son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AM} = m\widehat{CD}$, BF=5 y EC=7. Calcule el área de la región sombreada.

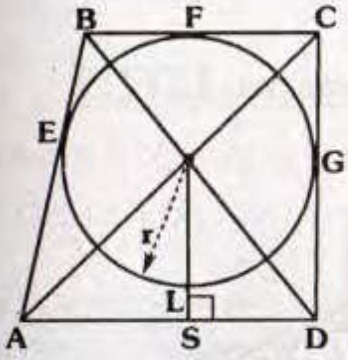


A) $8\sqrt{3}$ B) $16\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{3}$

D) $14\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 235

En el gráfico, E, F y G son puntos de tangencia. Si $\frac{(AB)(CD)}{(BC)(AD)}=a$. Calcule LS.



A) ar

B) $(a-1)r$

C) $(a-2)r$

D) $3(a-1)r$

E) $2(a-1)r$

PROBLEMA Nº 236

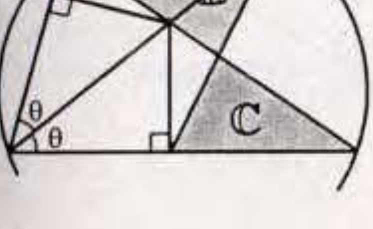
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita de centro I es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. La prolongación de PI corta a $\overline{AC}$ en F y la prolongación de $\overline{QI}$ corta a $\overline{AC}$ en E. Halle $\frac{S_{\square EPQF}}{S_{\Delta ABC}}$

A) 1 B) 1/2 C) $\sqrt{2}/2$

D) $\sqrt{2}/4$ E) $\sqrt{3}/4$

PROBLEMA Nº 237

En el gráfico, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Demostrar que $\mathbb{B}=\mathbb{A}+\mathbb{C}$.



PROBLEMA Nº 238

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si el cuadrilátero ABCD es circunscriptible, AB=12, CD=6 y BC=8. Calcule el área de la región ABCD.

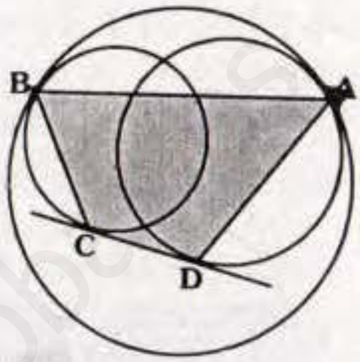
A) $24\sqrt{10}$

B) $12\sqrt{10}$

C) $6\sqrt{10}$

D) $18\sqrt{10}$

E) $36\sqrt{10}$



PROBLEMA Nº 239

En el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica los puntos M y N en $\overline{AB}$ tal que AM=MN=NB y los puntos P y Q en $\overline{CD}$ tal que CP=PQ=QD. Halle $\frac{S_{\square AMCP}}{S_{\square MNPQ}}$

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3

D) 1/5 E) 1

PROBLEMA Nº 240

Se tiene el cuadrilátero ABCD, tal que $m\measuredangle ABC=90°$, $m\measuredangle ACB=m\measuredangle BDC$, $m\measuredangle DBC=m\measuredangle ACD+m\measuredangle ADC$, AC=BD y CD=3. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

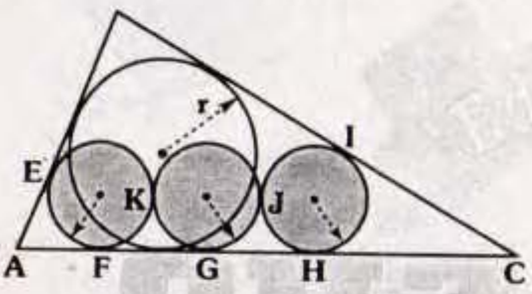
A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{4}\sqrt{3}$

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº 241

En el gráfico, los círculos sombreados son congruentes, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita y E, F, G, H, I, J y K son puntos de tangencia. Si AC = 8 y r = 1, halle el área de uno de los círculos sombreados.



A) π B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{9}$

D) $\frac{2}{3}\pi$ E) $\frac{4}{9}\pi$

PROBLEMA Nº 242

Sobre los lados AB y BC del triángulo ABC se construyen exteriormente los cuadrados ABPQ y BNMC, de centros O_1 y O_2 respectivamente. Calcule la razón de áreas de los círculos inscritos en los triángulos O_1BO_2 y ABN.

A) 1 B) 1/2 C) 1/3

D) 2/5 E) 1/4

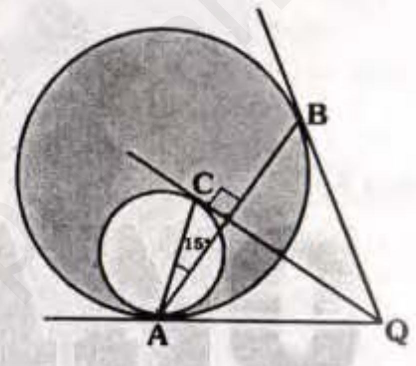
PROBLEMA Nº 243

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), $m\measuredangle BAC = 30°$, con centro en C y radio CB se traza el arco de circunferencia que corta a AC en D. Calcule el área del círculo inscrito en el triángulo mixtilíneo ABD, si $BC = 7 + 4\sqrt{3}$.

A) 9π B) 16π C) 12π D) 4π E)

PROBLEMA Nº 244

En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Si $AQ = 3 + 2\sqrt{3}$.



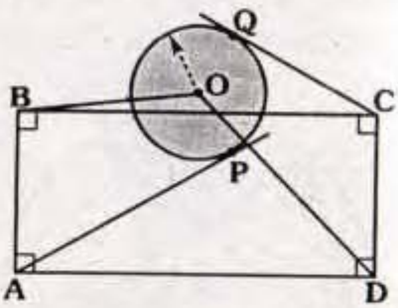
A) $2\pi(2+\sqrt{3})$ B) $(2+\sqrt{3})\pi$

C) $2(5+2\sqrt{3})\pi$ D) $4\pi(\sqrt{3}+1)$

E) $3\sqrt{3}\pi$

PROBLEMA Nº 245

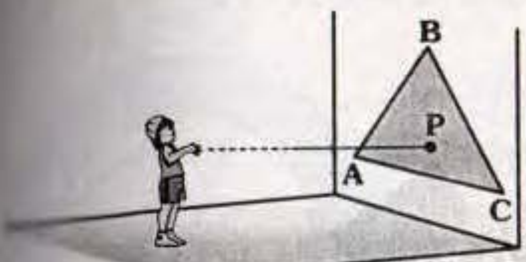
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, si $(OB)^2 + (OD)^2 - (AP)^2 - (CQ)^2 = 8$. Calcule el área de la región sombreada.



A) 2π B) 4π C) 5π D) 6π E) 8π

PROBLEMA Nº 246

En el gráfico, se muestra a Miguelito lanzando dardos sobre la placa triangular equilátera ABC. Si todos los dardos caen en la región interior, calcule la probabilidad que con los lados PA, PB y PC se forme un triángulo no acutángulo.



A) $\frac{\sqrt{3}}{9}(2\pi-3\sqrt{3})$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}(2\pi-3\sqrt{3})$

C) 1 D) $\frac{1}{6}(\pi\sqrt{3}-3)$

E) $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\pi-3\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº 247

En el gráfico, B y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TP}=60°$ y $AC=2\sqrt{3}$. Calcule el área de la región sombreada.

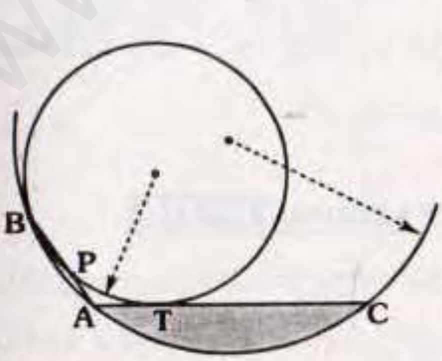
A) $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

B) $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

C) $\frac{5}{3}\pi-\sqrt{3}$

D) $\pi-\sqrt{3}$

E) $2\pi-\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 248

Se tienen tres círculos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ secantes dos a dos y con un punto común y congruentes de radio r. Si: $\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2)}=53\pi$; $\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_3)}=49\pi$; $\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_2\cap\mathscr{C}_3)}=47\pi$ y $A_{(\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\mathscr{C}_3)}=823\pi$. Halle r.

A) 18 B) 19 C) 23 D) 29 E) 31

PROBLEMA Nº 249

Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia de centro O y radio R, con centro en el vértice A se trazan los arcos BO y CLE respectivamente. Calcule el área de la región limitada por $\overline{BC}$, $\widehat{CLE}$, $\overline{EO}$ y $\widehat{BO}$.

A) $\frac{1}{6}\pi R^2$ B) $\frac{1}{4}\pi R^2$ C) $\frac{1}{3}\pi R^2$

D) πR^2 E) $2\pi R^2$

PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $m\sphericalangle BAE=45°$ y $DE=\sqrt{8-4\sqrt{3}}$. Halle el área de la región sombreada.

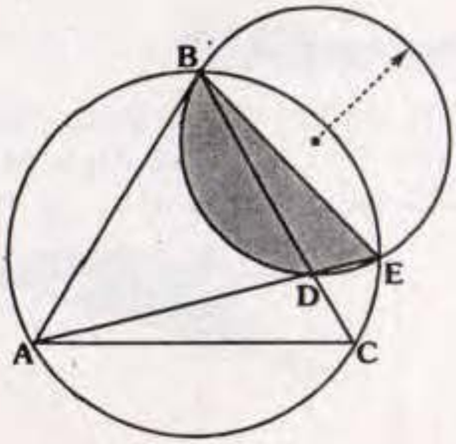
A) $\frac{4}{3}\pi$

B) $\frac{2}{3}\pi$

C) $\frac{3}{4}\pi$

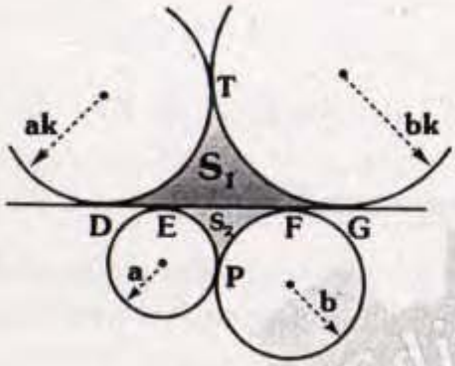
D) $\frac{5}{3}\pi$

E) 2π



PROBLEMA Nº 251

En el gráfico, D, E, F, G, P y T son puntos de tangencia. Halle $\frac{S_1}{S_2}$



A) k

B) $\sqrt{k}$

C) k^2

D) $(a/b)^2$

E) a/b

PROBLEMA Nº 252

En un triángulo rectángulo, las áreas de los círculos exinscritos relativos a los catetos y el círculo inscrito son $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Calcule el área del círculo exinscrito relativa a la hipotenusa.

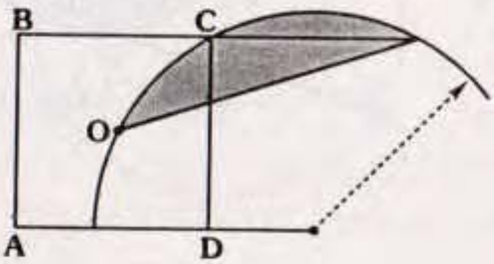
A) $\frac{\mathbb{A}\mathbb{B}}{\mathbb{C}}$ B) $\frac{(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}+\sqrt{\mathbb{C}})^2}{2}$

C) $\sqrt[3]{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}}$ D) $(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}-\sqrt{\mathbb{C}})^2$

E) $(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}+\sqrt{\mathbb{C}})^2$

PROBLEMA Nº 253

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O. Calcule el área de la región sombreada. (AB = 4)

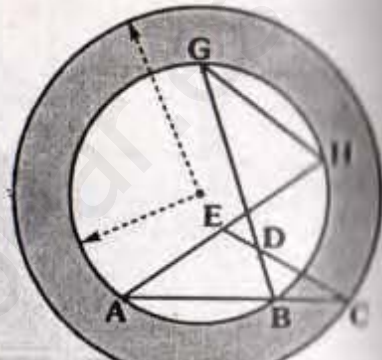


A) $5(\pi-2)$ B) $4(\pi-2)$ C) $6\pi-8$

D) $3(\pi-2)$ E) $10(\pi-1)$

PROBLEMA Nº 254

En el gráfico, $\overline{GH} // \overline{EC}$ y $DC = 4(ED) = 4$. Calcule el área de la región sombreada.



A) 16π

B) 4π

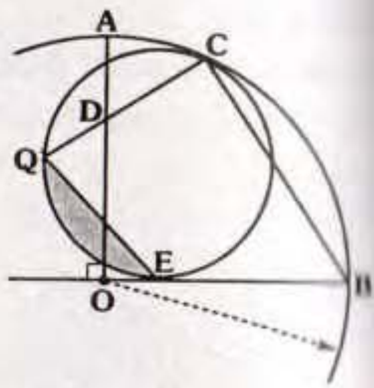
C) 20π

D) 12π

E) 25π

PROBLEMA Nº 255

En el gráfico, E y C son puntos de tangencia, si $m\measuredangle ADC = m\measuredangle OBC$; $m\widehat{QC} = \frac{217^\circ}{2}$ y OE = 2. Halle el área de la región sombreada.



A) $9(\pi-2)$

B) $8(\pi-2)$

C) $6(\pi-2)$

D) $9\pi-2$

E) $8\pi-3$

PROBLEMA Nº 256

Se tiene el triángulo equilátero ABC cuyo lado mide "a", P varía en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AB}$, sea $\overline{AP} \cap \overline{CQ} = \{S\}$, tal que $m\measuredangle ASQ = 60^\circ$, Calcule el área mínima del círculo circunscrito al triángulo QSP.

A) $\frac{\pi a^2}{12}$ B) $\frac{\pi a^2}{6}$ C) $\frac{\pi a^2}{3}$

D) $\frac{\pi a^2}{9}$ E) πa^2

PROBLEMA Nº 257

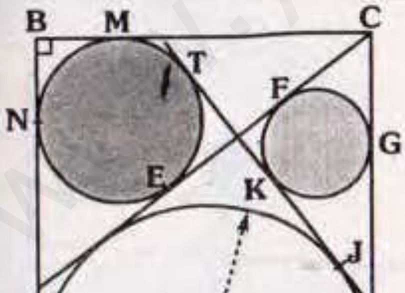
Se tienen los pentágonos regulares coplanares ABCDE y AEFGH, se traza la circunferencia que pasa por F, D y C. Calcule la razón de los círculos inscritos en el triángulo rectilíneo HAB y mixtilíneo FED.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, ABCD cuadrado y N, M, T, E, H, F, G, K y J son puntos de tangencia, halle la razón de áreas de dicho círculos.



A) 9/4

B) 4

C) 3/2

D) 6

E) 1/2

PROBLEMA Nº 259

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AQ y BP que se intersecan en H. Si $m\sphericalangle ACB = \theta$ y el circunradio del triángulo ABC es R. Calcule el área del círculo circunscrito al triángulo PHQ.

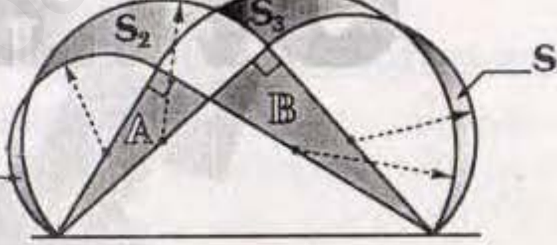
A) $\pi R^2 \operatorname{sen}\theta$ B) $\pi R^2 \operatorname{sen}^2\theta$

C) $\pi R^2 \cos^2\theta$ D) $\pi R^2(1+\cos\theta)$

E) $\pi R^2(1-\operatorname{sen}\theta)$

PROBLEMA Nº 260

Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



A) $\mathbb{A}+\mathbb{B} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

B) $\mathbb{A}+\mathbb{B} = S_2 + S_3 - S_1 - S_4$

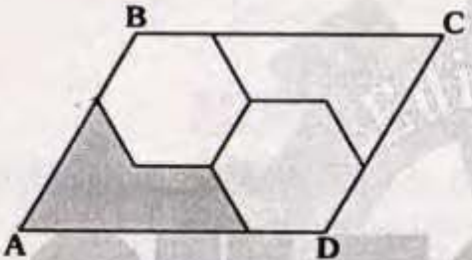
C) $\mathbb{A}-\mathbb{B} = S_1 + S_3 - S_2 - S_4$

D) $\mathbb{A}-\mathbb{B} = S_1 + S_2 - S_3 - S_4$

E) $\mathbb{A}-\mathbb{B} = S_2 - S_1 + S_3 - S_4$

PROBLEMA Nº 261

En el gráfico, los hexágonos mostrados son regulares. Calcule la razón de áreas de la región sombreada y la región ABCD.



A) 1/3

B) 1/4

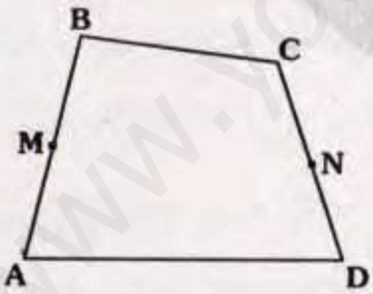
C) 1/8

D) 1/6

E) 2/9

PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, AM = MB y CN = ND indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.



I) Si $S_{(\square ABCD)} = 2(S_{\Delta ABN})$, entonces ABCD es un trapecio;

II) Si $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta CMD}$, entonces ABCD es un trapecio;

III) Si $S_{(AMCN)} = S_{(BNDM)}$, entonces ABCD es un trapecio.

A) VFV B) VVV C) FFF

D) VVF E) FFV

PROBLEMA Nº 263

¿Cuántos puntos P del plano del triángulo ABC existen, tal que

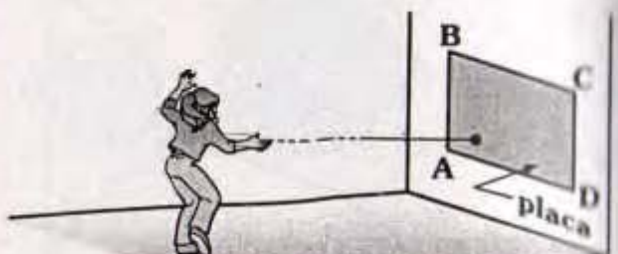
$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta PBC} = S_{\Delta PAC}\ ?$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) infinitos

PROBLEMA Nº 264

En el gráfico, se muestra a Dianita lanzando dardos a una placa cuadrada. Si todos los dardos llegan a la región interior, calcule la probabilidad que la distancia del punto dejado por el dardo, al lado más próximo sea menor o igual a la distancia a la diagonal.



A) $\sqrt{2}-1$ B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

PROBLEMA Nº 265

En el gráfico, $\alpha+\theta=45°$ y $(HD)(GD)=10\sqrt{2}$. Si ABCD, AEFG y FHCI son cuadrados. Halle el área de la región sombreada.

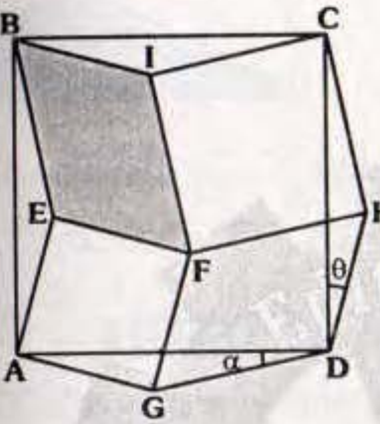
A) 20

B) 10

C) 15

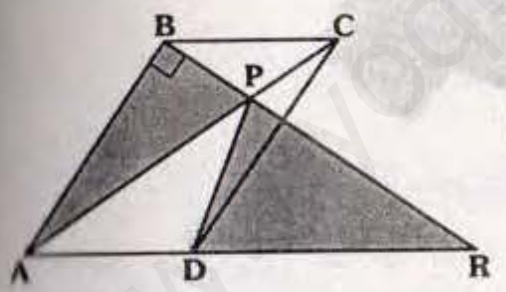
D) $10\sqrt{2}$

E) $20\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 266

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo y $(AB)(PR)=k$. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) k B) 2k C) 4k

D) k/2 E) k/4

PROBLEMA Nº 267

En el gráfico, Q, T y M son puntos de tangencia. Si AB=5; BC=6 y AC=7. Calcule la razón de inradios de los triángulos ABT y ATC.

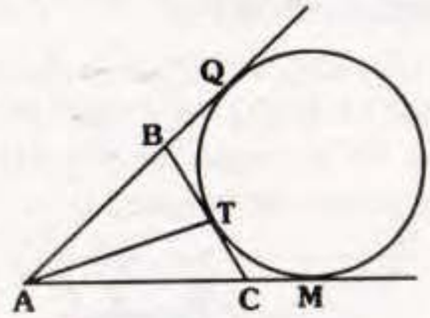
A) 1

B) 1/2

C) 2

D) 2/3

E) 3/2



PROBLEMA Nº 268

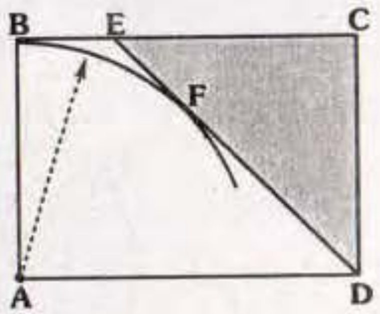
En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la mediana BM. Si $12(AB)=5(BC)$, calcule la razón de inradios de los triángulos AMB y MBC.

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{10}{13}$ C) $\frac{5}{13}$

D) $\frac{25}{18}$ E) $\frac{16}{25}$

PROBLEMA Nº 269

En el gráfico, ABCD es un rectángulo, si EF=4 y FD=6, calcule el área de la región sombreada.



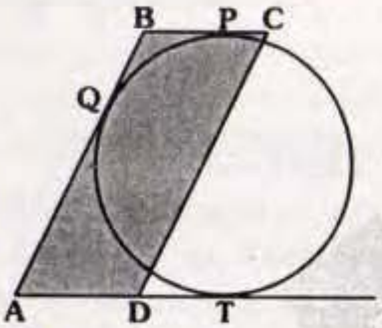
A) 20 B) 16

C) 12 D) 48

E) 24

PROBLEMA Nº 270

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, si PC=DT, BQ=a y QA=b. Calcule el área de la región sombreada (P, Q y T son puntos de tangencia)



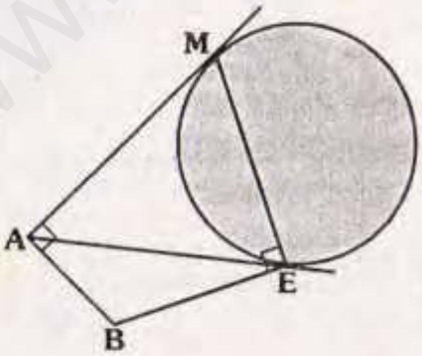
A) ab B) $(a+b)^2$

C) $\frac{(a+b)^2}{2}$ D) $(a+b)\sqrt{ab}$

E) $\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{2}$

PROBLEMA Nº 271

En el gráfico, E y M son puntos de tangencia. Si AB = k, halle el área de la región sombreada.



A) πk^2

B) $2\pi k^2$

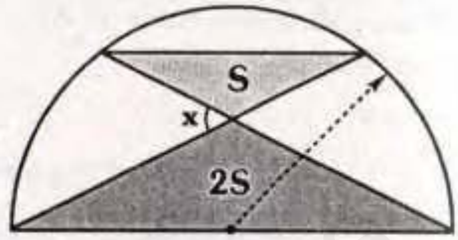
C) $\frac{\pi k^2}{2}$

D) $\frac{\pi k^2}{4}$

E) $\pi\sqrt{2}k^2$

PROBLEMA Nº 272

En el gráfico, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

PROBLEMA Nº 273

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro), se ubica P en $\overset{\frown}{AB}$, Q en $\overline{AO}$ y T en $\overline{OB}$ tal que OQPT es rectángulo. Si $\overline{AB}$ corta a $\overline{QP}$ en E y a $\overline{TP}$ en F, AE=a y FB=b. Halle el área de la región EPF.

A) ab B) $\frac{ab}{2}$ C) 2ab

D) $ab\sqrt{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 274

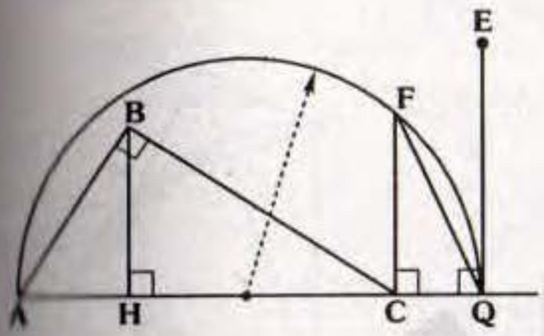
En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ de un paralelogramo ABCD se ubican los puntos P y Q tal que el cuadrilátero PCDQ es un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez. Calcule la razón de áreas de las regiones ABCD y PCDQ, sabiendo que AD=4(AB) y $m\sphericalangle BAD=60$.

A) 3 : 1 B) 5 : 3 C) 4 : 1

D) 7 : 5 E) $\sqrt{3}$: 2

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico, E es excentro del triángulo ABC. Si AC=m y FQ=n, calcule BH.

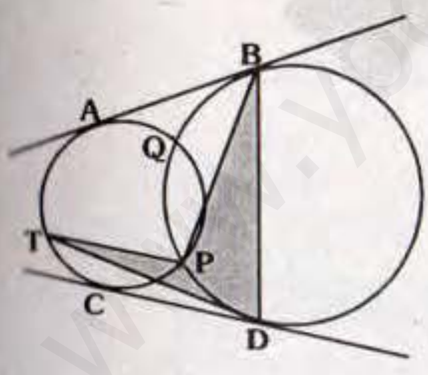


A) m + n B) $\frac{m+n}{2}$ C) $\sqrt{m^2+n^2}$

D) $\frac{2m^2}{n}$ E) $\frac{2n^2}{m}$

PROBLEMA Nº 276

Calcule el área de la región sombreada si AB=a y $m\overset{\frown}{TCP}=m\overset{\frown}{QPD}=\theta$ (A, B, C y D son puntos de tangencia)



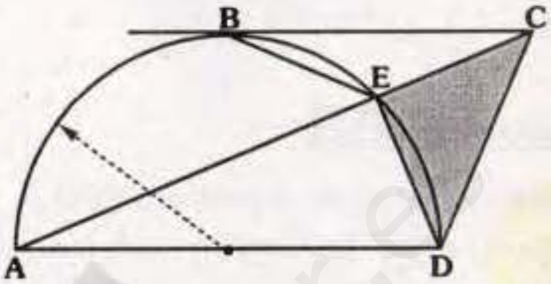
A) $a^2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ B) $\frac{a^2}{2}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

C) $2a^2\text{sen}\theta$ D) $\frac{a^2}{2}\text{sen}\theta$

E) $a^2\cos\theta$

PROBLEMA Nº 277

En el gráfico, B es punto de tangencia y BE = a, calcule el área de la región sombreada, si $\overline{AD}//\overline{BC}$.

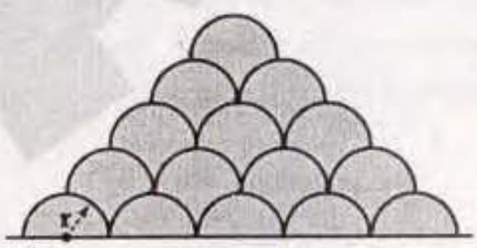


A) a^2 B) $2a^2$ C) $4a^2$

D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2}{4}$

PROBLEMA Nº 278

En el gráfico, se muestra un conjunto de semicircunferencias congruentes de radio **r**. Calcule el área de la región sombreada.



A) $5r^2(8+\pi)$ B) $2r^2(8+\pi)$

C) $\frac{5r^2}{2}(8+\pi)$ D) $3r^2(8+\pi)$

E) $\frac{3r^2}{2}(8+\pi)$

PROBLEMA Nº 279

En la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, en cuya prolongación se ubica P, luego se traza la secante PCB. Si $m\widehat{AB} = 90°$ y $(BC)(CP) = k$, halle el área de la región triangular ACD.

A) k B) $k/2$ C) $2k$

D) $\dfrac{k}{4}$ E) $k\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 280

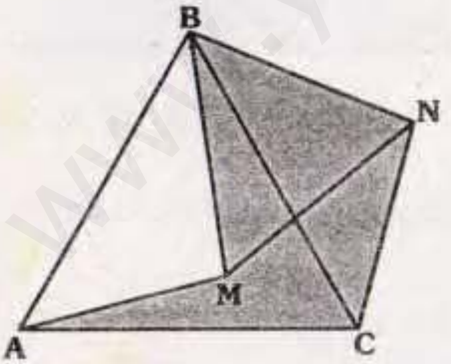
Se tiene el triángulo equilátero EFG, L es un punto de la región interior. Si $m\measuredangle FEL = m\measuredangle EGL$ y las áreas de las regiones triangulares ELF y LFC son $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ respectivamente. Calcule el área de la región ELC.

A) $\mathbb{A}+\mathbb{B}$ B) $\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ C) $\sqrt{2\mathbb{A}\mathbb{B}}$

D) $2\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ E) $\sqrt{3\mathbb{A}\mathbb{B}}$

PROBLEMA Nº 281

En el gráfico, los triángulos ABC y MBN son equiláteros. Si AC = 8, calcule el área de la región sombreada.



A) $16\sqrt{3}$ B) 16 C) 64

D) $24\sqrt{3}$ E) 32

PROBLEMA Nº 282

Del gráfico, si $AM = \sqrt{2}$ y MB = 2, calcular el área de la región sombreada.

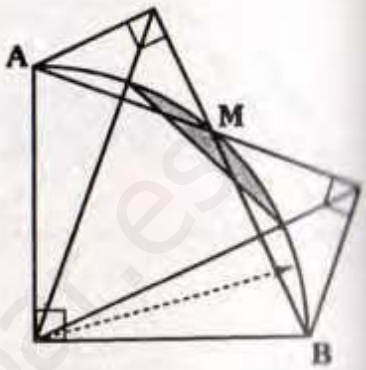
A) $\dfrac{5(\pi-\sqrt{2})}{4}$

B) $\dfrac{3(\pi-2\sqrt{2})}{8}$

C) $\dfrac{(\pi-\sqrt{2})}{8}$

D) $\dfrac{5(\pi-2\sqrt{2})}{8}$

E) $\dfrac{5(\pi-2\sqrt{2})}{4}$



PROBLEMA Nº 283

En el triángulo rectángulo ABC, (recto en B), se traza la circunferencia inscrita de radio r, la cual es tangente a $\overline{AB}$ en P y a $\overline{BC}$ en Q. E es excentro del triángulo ABC relativa a BC, calcule el área de la región PQE.

A) r^2 B) $\dfrac{r^2}{2}$ C) $r^2\sqrt{2}$

D) $r^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $2r^2$

PROBLEMA Nº 284

Dado el paralelogramo ABCD, AB = 10 se ubica T en $\overline{BC}$ tal que las regiones TCD y ABD están en la razón de 1 a 3, además el cuadrilátero ABTD es bicéntrico.

Calcule el área de la región ABCD.

A) $37\sqrt{6}$ B) $39\sqrt{6}$ C) $40\sqrt{6}$

D) $48\sqrt{6}$ E) $\frac{3200}{49}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 285

Desde un punto "P" exterior a una circunferencia de centro "O", se traza la tangente PT y la secante PAB tal que la medida del arco AB es "θ", en $\overline{PO}$ se ubica el punto "R" tal que la $m\measuredangle TRP=90°$ y TR = 4. Calcule el área de la región triangular ARB.

A) $8\operatorname{sen}\theta$ B) $8\cos\theta$ C) $8\tan\theta$

D) $(8\operatorname{sen}\theta)/3$ E) $(8\cos\theta)/3$

PROBLEMA Nº 286

En la figura mostrada ABCD es un cuadrado de lado "ℓ". Calcule el área de la región sombreada (O; O_1; O_2; O_3 son centros de las semicircunferencia)

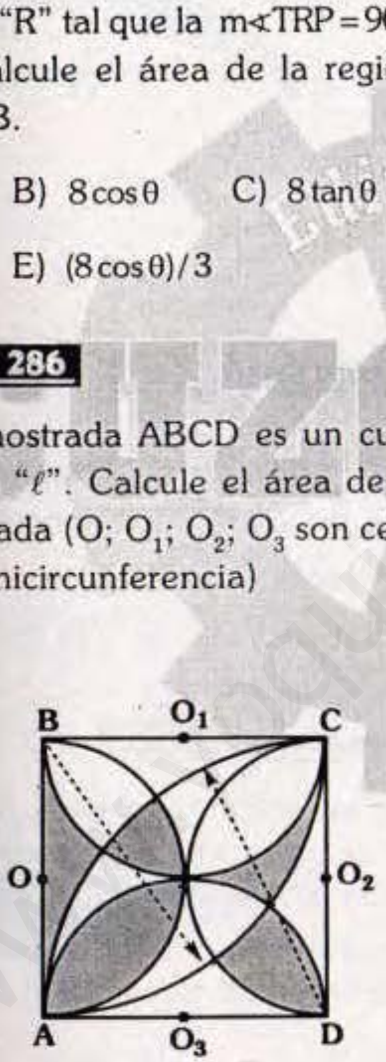
A) $\pi\ell^2/2$

B) $\pi\ell^2/4$

C) $\pi\ell^2/8$

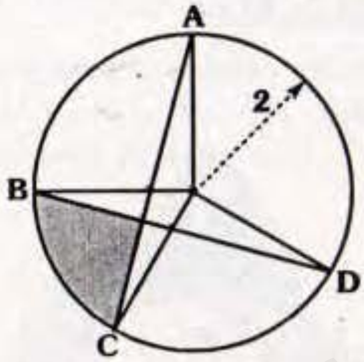
D) $\pi\ell^2/16$

E) $\pi\ell^2/32$



PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, $m\widehat{AB}=m\widehat{CD}=90°$ y $m\widehat{BC}=60°$. Halle el área de la región sombreada.



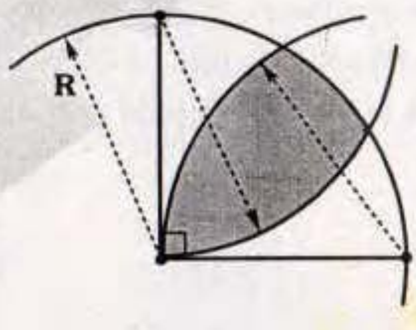
A) $\frac{1}{3}(\pi+\sqrt{3})$ B) $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\pi+4)$ D) $\frac{1}{3}(2\pi+3-3\sqrt{3})$

E) $3\pi\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 288

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.



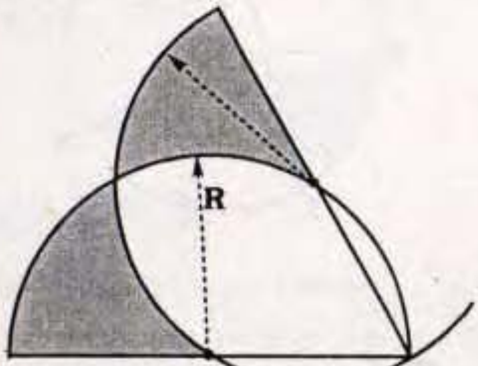
A) $\frac{R^2}{3}\left(\frac{4}{5}\pi-\sqrt{3}\right)$ B) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$

C) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{4}\pi-\sqrt{3}\right)$ D) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

E) $\frac{R^2}{3}\left(\frac{5}{4}\pi-\sqrt{3}\right)$

PROBLEMA Nº 289

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada.



A) $R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $R^2\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $R^2\frac{\sqrt{6}}{2}$

D) $R^2\frac{\sqrt{3}}{8}$ E) $R^2\frac{\sqrt{2}}{5}$

PROBLEMA Nº 290

En una circunferencia de radio 1, se ubican los puntos A, B y C, (B en $\overset{\frown}{AC}$) tal que $m\overset{\frown}{AB}=40°$ y $m\overset{\frown}{BC}=100°$. Calcule el área de la región limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overset{\frown}{BC}$.

A) $\frac{5}{18}\pi$ B) $\frac{7}{18}\pi$ C) $\frac{5}{13}\pi$

D) $\frac{4}{9}\pi$ E) $\frac{5}{6}\pi$

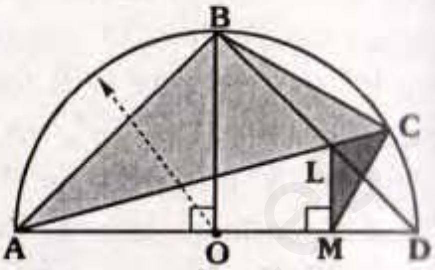
PROBLEMA Nº 291

Se tiene un trapecio isósceles ABCD en el cual se traza la altura $\overline{CH}$; si el área de la región triangular ACH es 12; calcule el área de la región trapecial.

A) 12 B) 24 C) 18 D) 20 E) 15

PROBLEMA Nº 292

Según el gráfico, calcule la razón de las áreas de las regiones triangulares ABC y MLC, si: BL = LD.



A) $2\sqrt{2}$ B) 8 C) 6

D) 4 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 293

Los lados de un rectángulo miden 10+senx y 16–senx, halle el área máxima de la región rectangular.

A) 160 B) 165 C) 187

D) 169 E) 178,25

PROBLEMA Nº 294

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, P es un punto interior tal que AD=AP, PB=BC, AB=6 y $m\sphericalangle DAP = m\sphericalangle PBC = 90°$. Calcule el área de la región pentagonal APBCD.

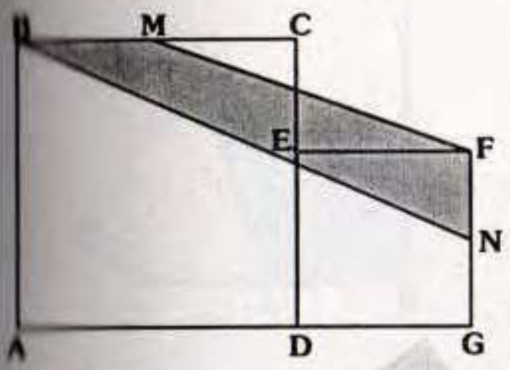
A) 12 B) 36 C) 24

D) 9 E) 18

PROBLEMA Nº 295

En el gráfico, ABCD y DEFG son cuadrados, M y N son puntos medios de BC y

FG respectivamente. Si GC = k, calcule el área de la región sombreada.

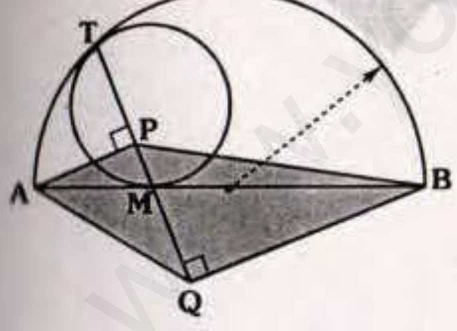


A) k^2 B) $k^2\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $k^2\sqrt{2}$

D) $\frac{k^2}{2}$ E) $\frac{k^2}{4}$

PROBLEMA Nº 296

En el gráfico, T y M son puntos de tangencia. Si AP=a y BQ=b, calcule el área de la región sombreada.



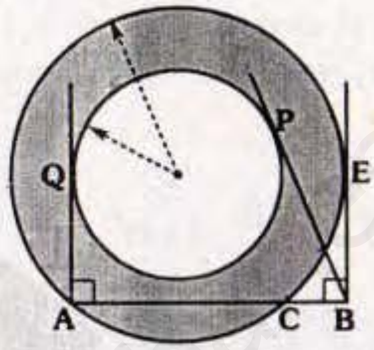
A) $\frac{(b^2-a^2)}{2}\sqrt{2}$ B) $\frac{2}{3}(b^2-a^2)$

C) $\frac{ab}{2}$ D) $b^2 - a^2$

E) $\frac{b^2-a^2}{2}$

PROBLEMA Nº 297

Según la figura, el área de la región sombreada es πa^2. Calcule "BP", si E, P y Q son puntos de tangencia.



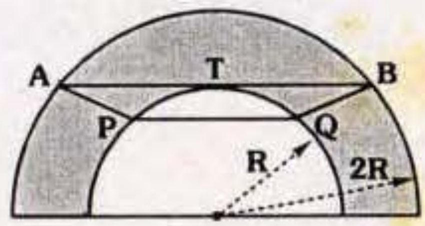
A) $a\sqrt{6}$ B) $a\sqrt{5}$

C) $a\sqrt{3}$ D) $a\sqrt{2}$

E) a

PROBLEMA Nº 298

Calcule el área de la región sombreada si $\overline{PQ} // \overline{AB}$, PQ = R y "T" es punto de tangencia.



A) $\frac{R^2}{6}(7\pi-6)$ B) $\frac{R^2}{3}(2\pi-3)$

C) $\frac{R^2}{4}(3\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{5}(5\pi-3)$

E) $\frac{R^2}{7}(2\pi-1)$

PROBLEMA Nº 299

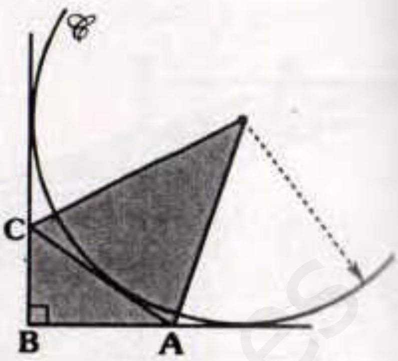
En un triángulo ABC sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y N respectivamente de modo que: $\frac{PA}{PB}=\frac{NC}{NA}=k$. Calcule el área de la región triangular APN, si el área de la región triangular ABC es "S".

A) $\frac{3Sk}{(1+k)^2}$ B) $\frac{2Sk}{(1+k)^2}$ C) $\frac{Sk}{(1+k)^2}$

D) $\frac{5k}{(1+k)^2}$ E) $\frac{4Sk}{(1+k)^2}$

PROBLEMA Nº 300

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita del triángulo ABC, si AB+BC=a y AC=b. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{a(a+b)}{4}$ B) $\frac{(a+b)^2}{4}$

C) $\frac{b(a+b)^2}{4}$ D) $\frac{a^2+b^2}{2}$

E) $\frac{a^2+b^2}{4}$

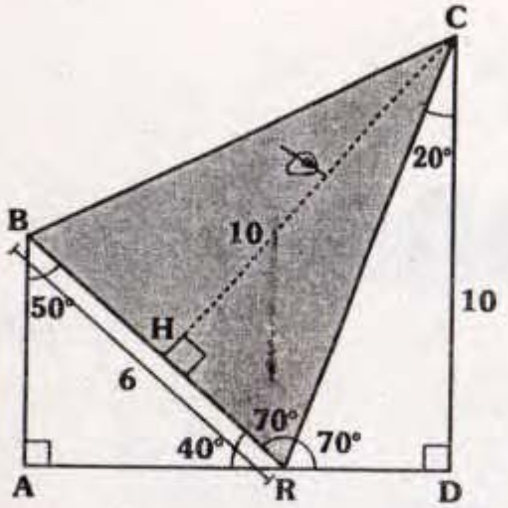
Geometría

SOLUCIONARIO

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

ÁREAS
DE REGIONES PLANAS

RESOLUCIÓN N° 1



Nos piden $S_{\Delta BRC}$

- Como BR=6, ya tendríamos la base, solo nos falta "la altura".
- Al completar "ángulos", nos damos cuenta que:

$$m\measuredangle DRC = m\measuredangle CRB = 70°$$

- Por teorema de la bisectriz:

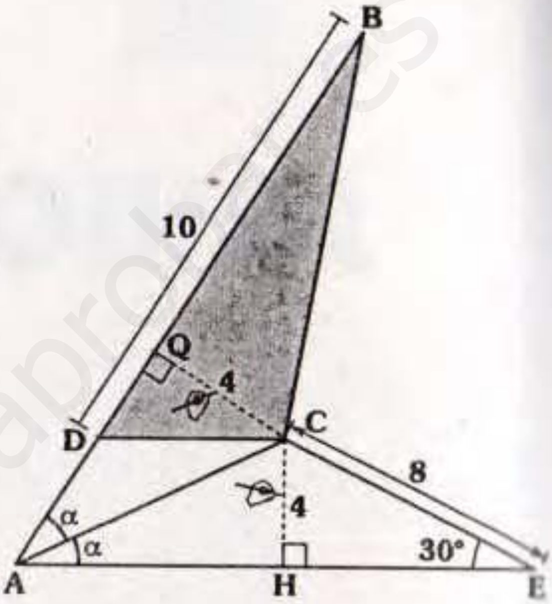
$$CH = CD = 10$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta BRC} = \frac{(6)(10)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta BRC} = 30}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 2



Nos piden $S_{\Delta DBC}$

- Como se conoce DB (la base), nos falta "la altura".
- Se traza $\overline{CQ} \perp \overline{DB}$. Por teorema de la bisectriz:

$$CQ = CH$$

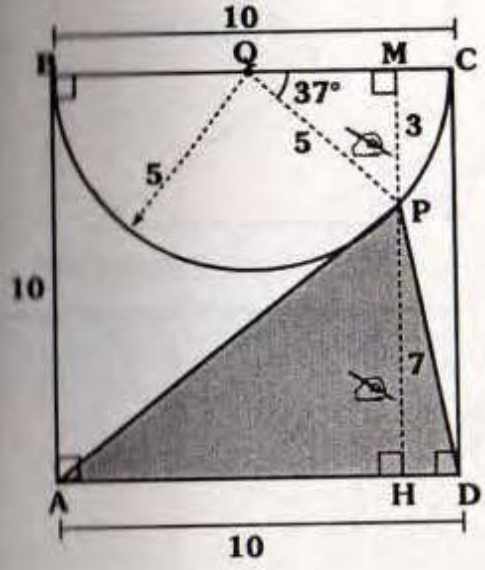
- ⊿CHE: Notable de 30° $\Rightarrow$ HC = 4

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta DBC} = \frac{(10)(4)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta DBC} = 20}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 3



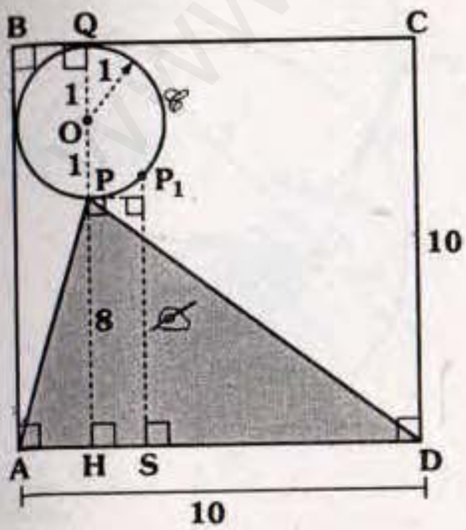
Piden $S_{\Delta APD}$

- Trazamos $\overline{PH} \perp \overline{AD}$ y se prolonga $\overline{HP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en M.
- ◺QMP: notable de 37° $\Rightarrow$ PM = 3
- Luego: PH = 7

$$\Rightarrow \ S_{\Delta APD} = \frac{(10)(7)}{2} = 35$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 4



Nos piden $S_{\Delta APD}$, tal que sea mínima.

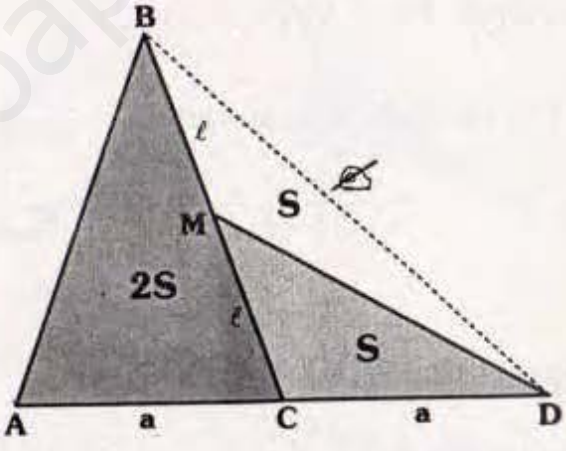
- Como $P \in \mathscr{C}$, analicemos cuando la altura es mínima.
- Notemos que P debe estar en la prolongación de $\overline{QO}$, pues para otro punto distinto de P, por ejemplo P_1.
- Vemos que: $P_1S > PH$

$$\Rightarrow \ S_{APD} = \frac{(10)(8)}{2}$$

$$\therefore \ S_{APD} = 40$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 5



Piden $S_{\Delta MCD}$

Dato $S_{\Delta ABC} = 8m^2$

- Sea $S_{\Delta MCD} = S$

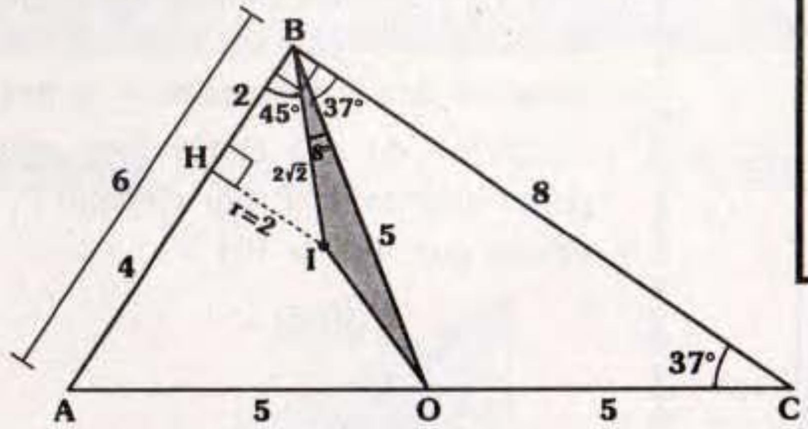
Por razón de áreas: $S_{\Delta BMD} = S$ y $S_{\Delta ABC} = 2S$

$$\Rightarrow 2S = 8m^2$$

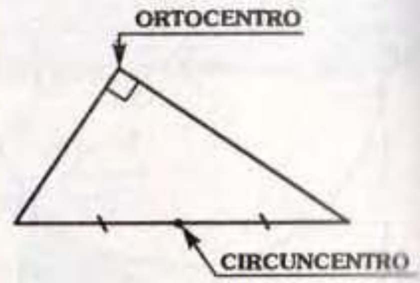
$$\therefore \ S = 4m^2$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 6



Recordar



Nos piden $S_{\Delta OIB}$

- Notamos que $m\sphericalangle IBO = 8°$
- Por teorema de la Poncelet: $6 + 8 = 10 + 2r \Rightarrow r = 2$
- $\triangle$IHB: $IB = 2\sqrt{2}$
- Por fórmula trigonométrica: $S_{\Delta OIB} = \dfrac{(2\sqrt{2})(5)}{2}\underbrace{\text{sen}8°}_{\frac{1}{5\sqrt{2}}}$

$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta OIB} = 1}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 7

Nos piden $S_{\Delta AMP}$

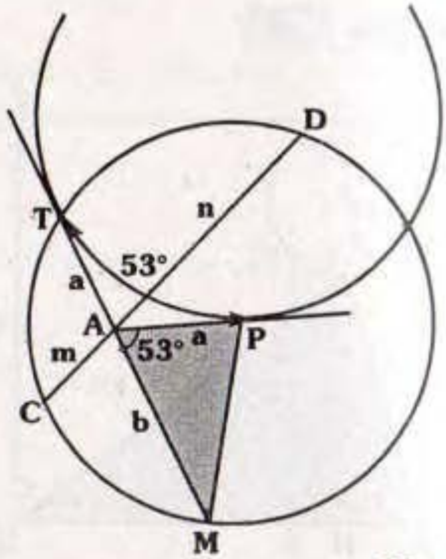
Dato: $mn = 20$ y $m\widehat{TP} = 53°$

Por teorema: $m\sphericalangle MAP = m\widehat{TP}$ y $AT = AP$

Por t. de las cuerdas: $ab = mn = 20$

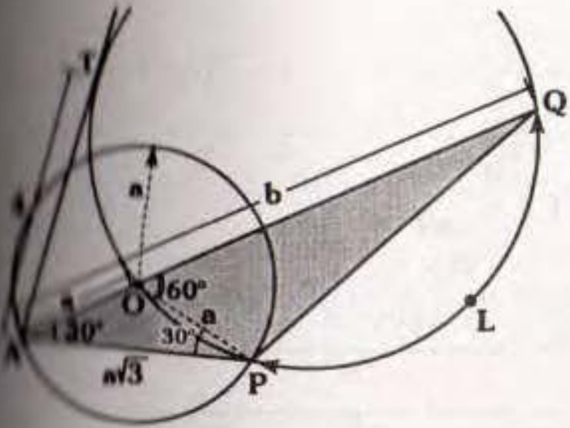
$$\Rightarrow S_{\Delta AMP} = \frac{ab}{2}\text{sen}53° = \frac{20}{2}\cdot\frac{4}{5}$$

$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta AMP} = 8}$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 8



Nos piden: $S_{\Delta APQ}$

• Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle QOP = 60°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle OAP = 30°$$

• En ΔAOP: $AO = OP = a$ y $AP = a\sqrt{3}$

• Por teorema de la tangente:

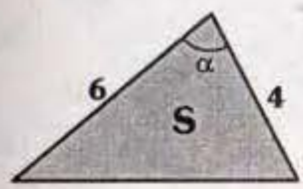
$$ab = 4^2 = 16$$

$$S_{\Delta APQ} = \frac{a\sqrt{3}b}{2}\text{sen}30°$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta APQ} = 4\sqrt{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 9



Nos piden $S_{\text{máxima}}$

• Por fórmula trigonométrica:

$$S = \frac{(6)(4)}{2}\cdot\text{sen}\alpha$$

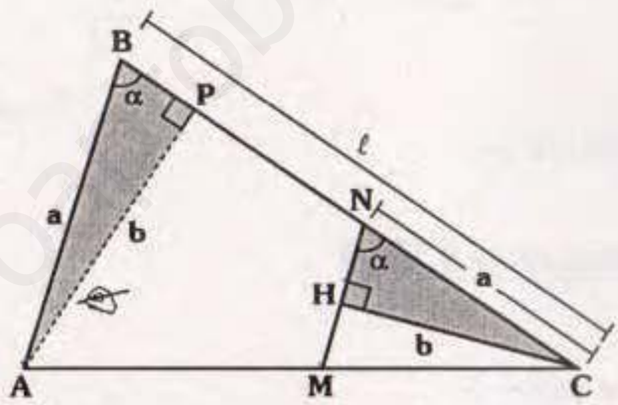
• Como el área debe ser máxima entonces, "$\text{sen}\alpha$" es máximo, es decir:

$$\text{sen}\alpha = 1$$

$$\therefore\ \mathbf{S = 12}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 10



Nos piden: $S_{\Delta ABC}$

• Datos $AB = NC$; $\overline{AB} // \overline{MN}$ y $b\ell = 10$

• Trazamos la altura $\overline{AP}$ del ΔABC

• $\measuredangle APB \cong \measuredangle CHN \Rightarrow AP = HC = b$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\ell b}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC} = 5}$$

Clave A

Resolución N° 11

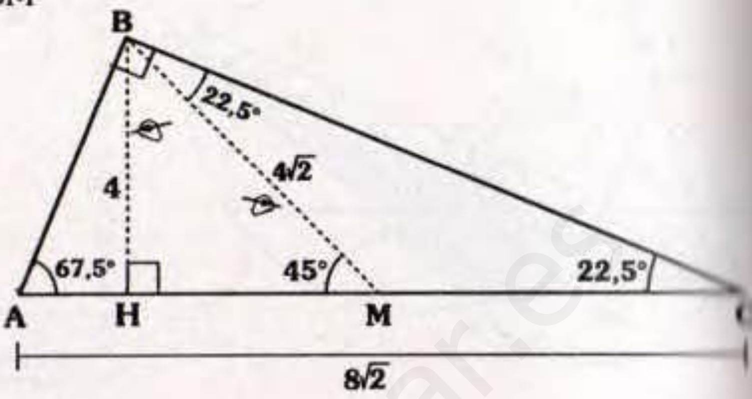
- Nos piden $S_{\triangle ABC}$
- En el $\triangle ABC$, se traza la mediana BM entonces:

$$BM = MC = MA = 4\sqrt{2}$$

- Se traza la altura BH del $\triangle ABC$.
- En el $\triangle BHM$ notable de 45°

$$\Rightarrow BH = 4$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABC} = \frac{(8\sqrt{2})(4)}{2}$$



$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle ABC} = 16\sqrt{2}}$$

Clave

Resolución N° 12

Nos piden S

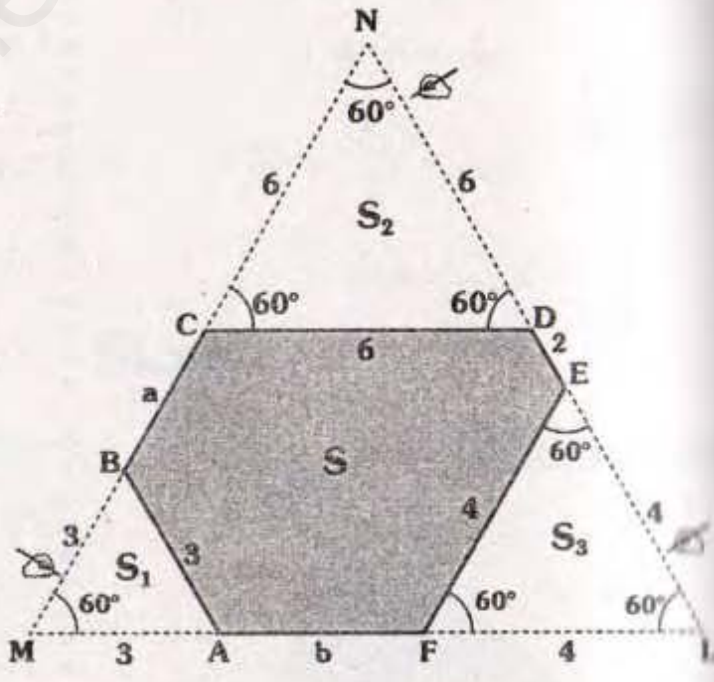
- Por propiedad de polígonos, su ángulo exterior mide 60°, entonces:

ΔMBA, ΔCND, ΔFEL y ΔMNL

son equiláteros.
- Como $NL = 12 \Rightarrow a = 3$ y $b = 5$
- $S = S_{\Delta MNL} - (S_1 + S_2 + S_3)$

$$\Rightarrow S = 12^2\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(3^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 6^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\therefore\ S = \frac{83}{4}\sqrt{3}$$



Clave

RESOLUCIÓN Nº 13

Piden $S_{\Delta MNT}$

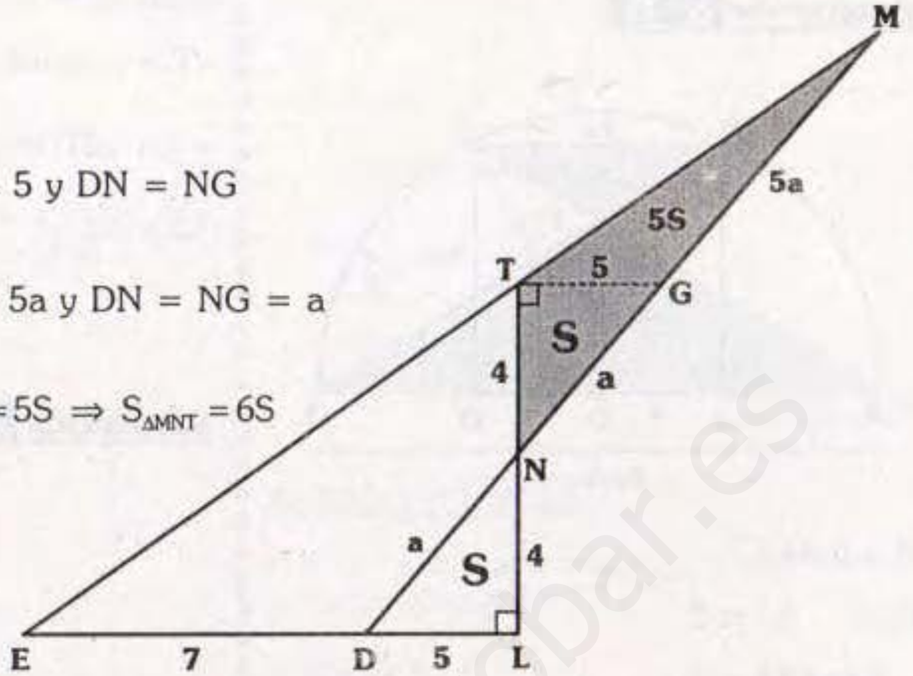
- Se traza $\overline{TG}//\overline{EL} \Rightarrow TG = 5$ y $DN = NG$

$$\Rightarrow \frac{MG}{MD}=\frac{5}{7} \Rightarrow MG = 5a \text{ y } DN = NG = a$$

- Sea $S_{\Delta TNG}=S \Rightarrow S_{\Delta TGM}=5S \Rightarrow S_{\Delta MNT}=6S$

$$S=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNT}=60}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 14

Nos piden $S_{\Delta BRM}$

- Dato $S_{\Delta ABR}=10$ y $AM = MC$

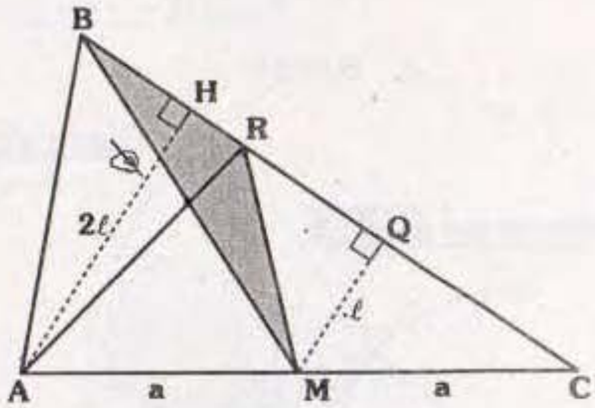
- Como las regiones triangulares BRM y ABR tienen igual base, entonces la razón de áreas es la razón de alturas.

- En $\triangle$AHC, por base media:

$$AH = 2(MQ)$$

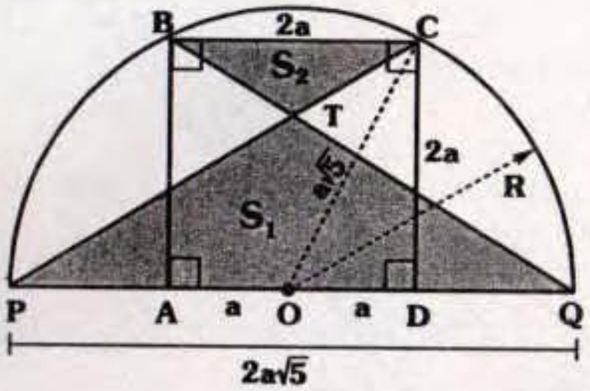
- Entonces: $$\frac{S_{BRM}}{S_{ABR}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{BRM}=5}$$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 15



Nos pide S_1

Dato $S_2 = 2$

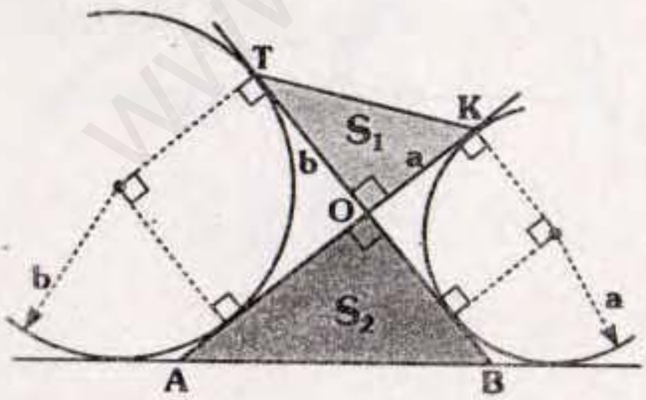
- Sea $OD = a$
- ⊿ODC: $DC = 2a$; $R = a\sqrt{5}$ y $PQ = 2a\sqrt{5}$
- $\Delta PTQ \sim \Delta CTB$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{2a\sqrt{5}}{2a}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 = 10}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 16



Nos piden S_1

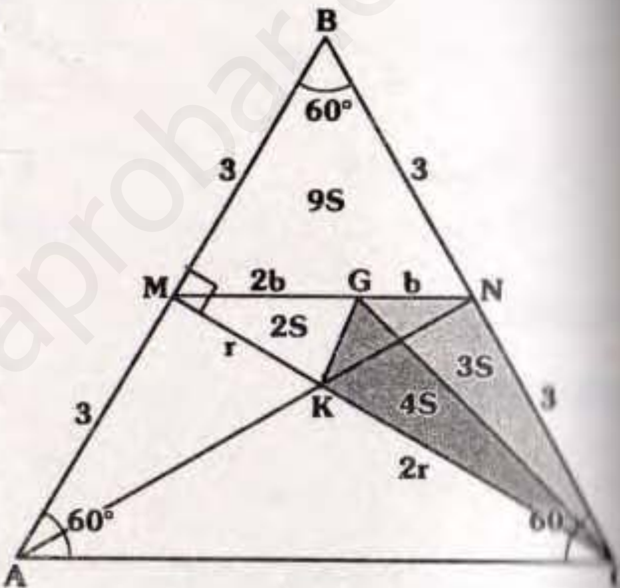
Dato $S_2 = 6$

- Por propiedad (pág.18–19) $S_2 = ab$
- En ⊿TOK: $S_1 = \frac{ab}{2}$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{S_2}{2} \qquad \therefore \ \mathbf{S_1 = 3}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 17



Piden $S_{\Delta CGK}$

- Como el ΔABC es equilátero, entonces su ortocentro K también es baricentro, luego:

  $CK = 2(KM)$, $AM = MB$ y $CN = NB$

- G es baricentro del ΔBMC, entonces:

  G está en $\overline{MN}$ y $MG = 2(GN)$

- Sea $S_{\Delta MGK} = 2S$, entonces:

  $S_{\Delta CGK} = 4S$, $S_{\Delta GNC} = 3S$ y $S_{\Delta MBN} = 9S$

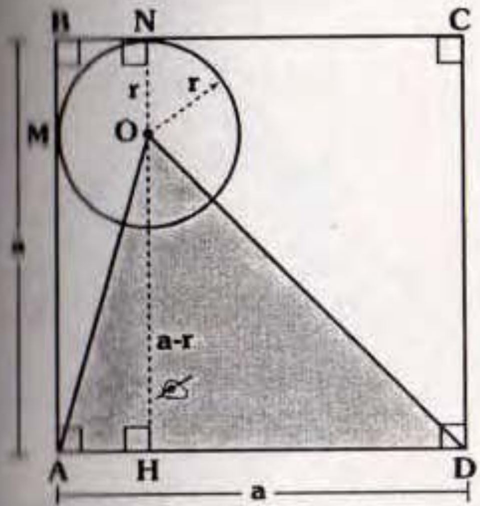
$$\Rightarrow S_{\Delta MBN} = 9S = 3^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta CGK} = \sqrt{3}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 18



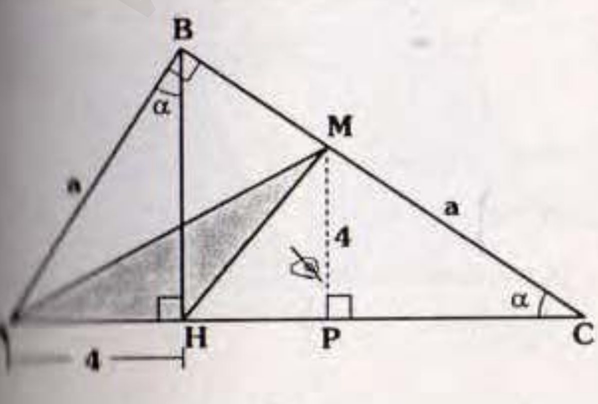
Nos piden $S_{\Delta AOD}$

Se nota que ABNH es rectángulo, entonces OH = a - r

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta AOD} = \frac{a(a-r)}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 19



Nos piden $S_{\Delta AMH}$

- Se traza $\overline{MP} \perp \overline{HC}$

$$\Rightarrow \measuredangle BHA \cong \measuredangle CPM \ \Rightarrow MP = 4$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta AMH} = \frac{(4)(4)}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta AMH} = 8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 20

Sea "p" el semiperímetro y "r" su inradio del mismo triángulo.

Nos piden: r

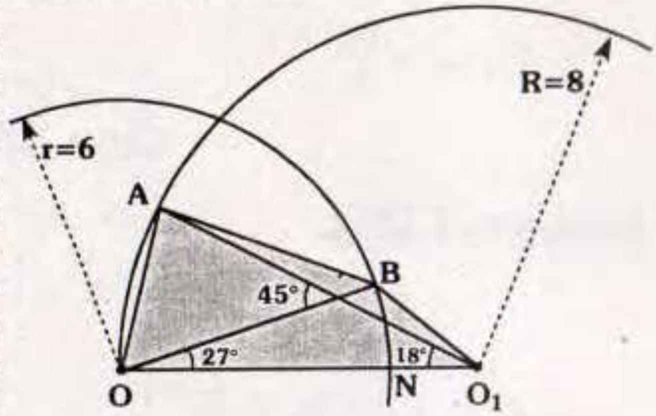
Dato: $\quad S = 3(2p)$

Sabemos: $\quad S = pr \ \Rightarrow pr = 6p$

$$\therefore \ \mathbf{r = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 21



Nos piden $S_{\square OABO_1}$

- Como tenemos OB y AO_1 (diagonales del cuadrilátero) optemos por la fórmula general.
- Como $m\widehat{BN} = 27°$ y $m\widehat{AO} = 18°$

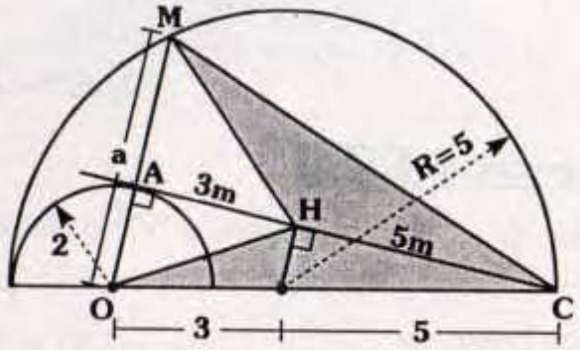
$$\Rightarrow m\measuredangle BON = 27° \quad y \quad m\measuredangle AO_1O = 18°$$

- $S_{\triangle OABO_1} = \dfrac{(6)(8)}{2}\text{sen}45°$

$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle OABO_1} = 12\sqrt{2}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 22



Piden $S_{\measuredangle OHMC}$

Dato: (OM)(AC) = 24

$\Rightarrow a(8m) = 24 \Rightarrow am = 3$

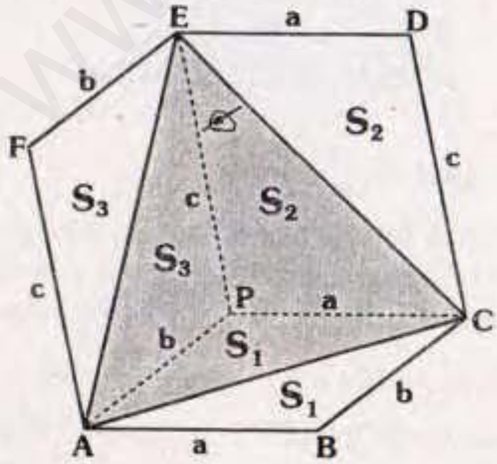
Por fórmula general:

$$S_{\measuredangle OHMC} = \frac{a(5m)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\measuredangle OHMC} = \frac{15}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 23



Nos piden $\dfrac{S_{\triangle ACE}}{S_{\bigcirc ABCDEF}}$

- Ubiquemos P tal que APCB sea paralelogramo, entonces:

APEF y PCDE son paralelogramos

- Por teorema:

$$S_{\triangle APC} = S_{\triangle ABC} = S_1$$

$$S_{\triangle APE} = S_{\triangle AEF} = S_3$$

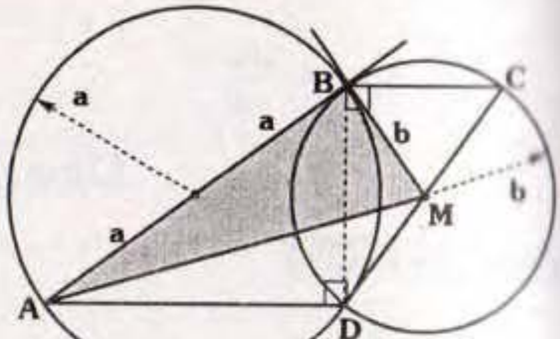
$$S_{\triangle EDC} = S_{\triangle ECP} = S_2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\bigcirc ABCDEF}} = \frac{S_1+S_2+S_3}{2(S_1+S_2+S_3)}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\bigcirc ABCDEF}} = \frac{1}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 24



Piden: $S_{\triangle ABCD}$

Dato: ab = 40

- Notemos que ABCD es un trapecio, pues $\overline{AD} // \overline{BC}$

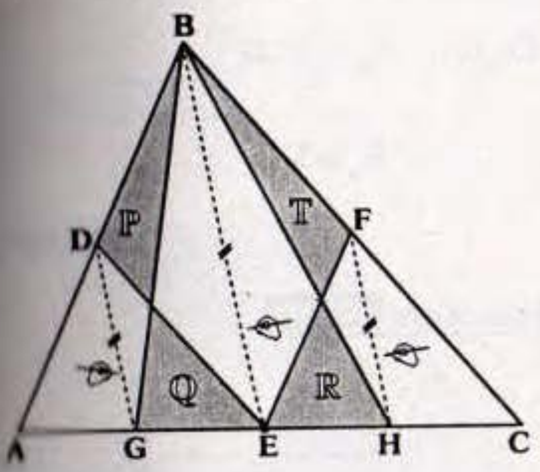
Por teorema: $S_{\square ABCD} = 2(S_{\Delta ABM})$

$$S_{\Delta ABM} = \frac{2ab}{2} = 40$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD} = 80}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 25



Nos piden: $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}} + \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{T}}$

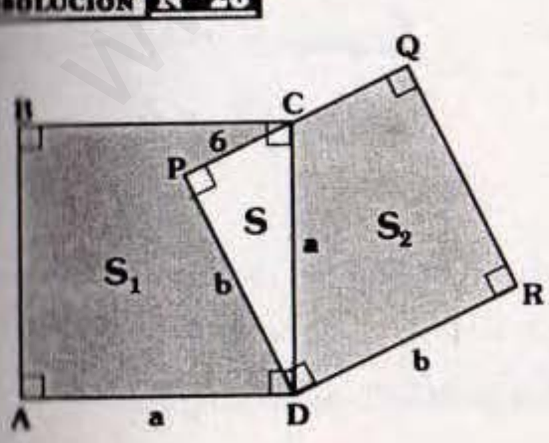
Por t. de la base media: $\overline{GD} // \overline{BE} // \overline{HF}$

Por propiedad: $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} = \mathbb{T}$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}} + \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{T}} = \mathbf{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 26



Nos piden $S_1 - S_2$

- Notemos: $S_1 + S = a^2$

$S_2 + S = b^2$

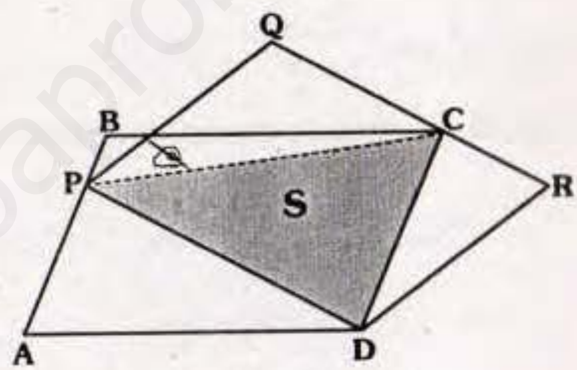
$\Rightarrow\ S_1 - S_2 = a^2 - b^2$

- En $⊿$DPC: $a^2 - b^2 = 6^2$

$$\therefore\ \mathbf{S_1 - S_2 = 36}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 27



Piden $\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square PQRD}}$

Sea $S_{\Delta PCD} = S$

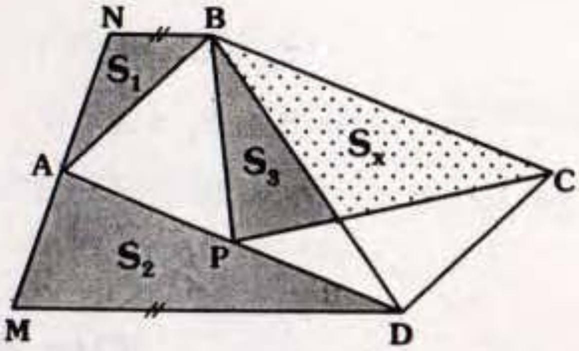
Por teorema:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\square ABCD} = 2S \\ S_{\square PQRD} = 2S \end{array}\right\} S_{\square ABCD} = S_{\square PQRD}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square PQRD}} = 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 28



Nos piden la relación entre S_1, S_2, S_3 y S_x

• Como $\overline{MD} // \overline{NB}$ y MA=AN, entonces

$$S_{\Delta ABD} = \frac{S_{\square MNBD}}{2} = S_1 + S_2$$

• ABCD es paralelogramo, entonces:

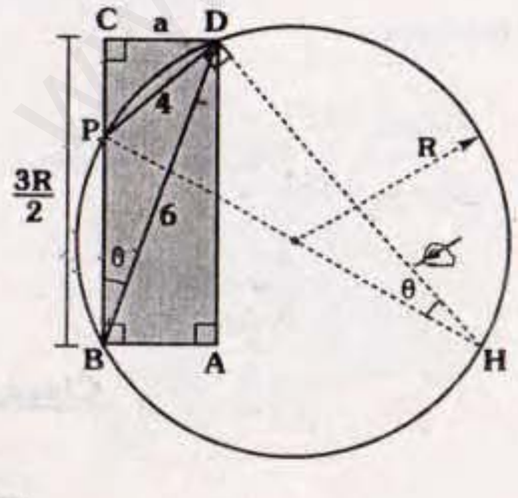
$$S_{\Delta ABD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2} = S_{\Delta PBC} = S_3 + S_x$$

$$\Rightarrow \quad S_3 + S_x = S_1 + S_2$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = S_1 + S_2 - S_3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 29



Sea S_x el área de la región ABCD

• $S_x = a.\frac{3R}{2} = \frac{3}{2}aR$ ...(I)

• $\triangle BCD \sim \triangle HDP$

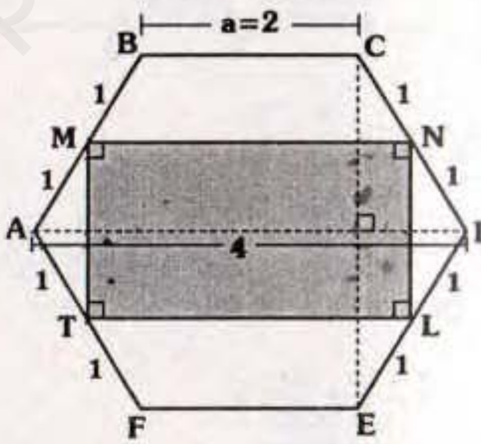
$$\Rightarrow \quad \frac{4}{2R} = \frac{a}{6} \Rightarrow aR = 12$$

• En (I): $S_x = \frac{3}{2}(12)$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = 18}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 30



Nos piden $S_{\square MNLT}$

Dato: $S_{\text{⬡}ABCDEF} = 6\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad a=2$$

Como ABCDEF es regular, entonces

$CE = 2\sqrt{3}$, $AD = 4$ y $\overline{AD} \perp \overline{CE}$

• Luego MNLT es rectángulo.

• Por base media:

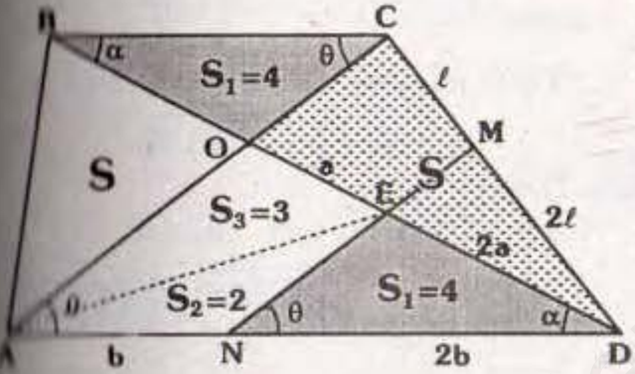
$$MN=\frac{AD+BC}{2} \Rightarrow MN=3$$

$$NL=\frac{CE}{2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ S_{\square MNLT}=3\sqrt{3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 31



Nos piden $S_{(\triangle ABCD)}$

• Dato $S_1=4$ y $MD=2(MC)$

• Por teorema de Tales:

$DE=2(EO)$ y $ND=2(NA)$

• Luego por razón de áreas

$S_2=2$ y $S_3=3 \Rightarrow S_{(\Delta AOD)}=9$

• Por propiedad de trapecio:

$$S_{(\Delta BOC)}=S_{(\Delta DOC)}=S$$

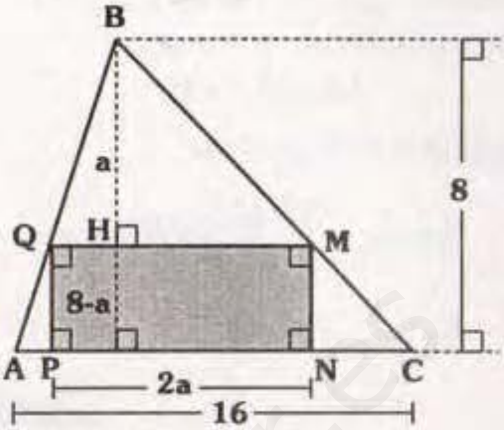
$$S^2=S_{(\Delta BOC)}\cdot S_{(\Delta AOD)}$$

$$\Rightarrow\ S=6$$

$$\therefore\ S_{(\triangle ABCD)}=25$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 32



Nos piden QM

Dato $S_{(PQMN)}=32$

• Como $\Delta ABC \sim \Delta QBM \Rightarrow QM=2(BH)$

• Sea $BH=a \Rightarrow QM=PN=a$ y

$QP=8-a$

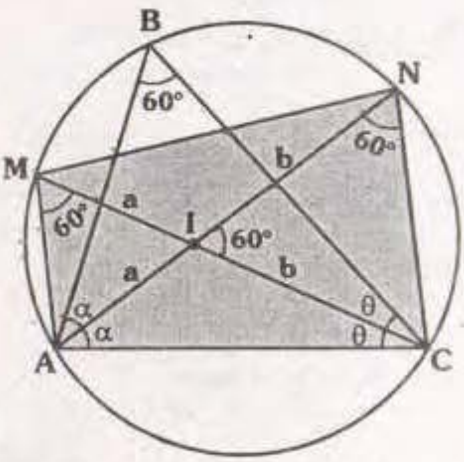
• Del dato:

$$2a(8-a)=32 \quad \Rightarrow \quad a=4$$

$$\therefore\ QM=8$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 33



Piden: $S_{\square AMNC}$

Dato: $a+b = 12$

- Notemos que los triángulos AIM y NIC son equiláteros, entonces:

$$AN=MC=12$$

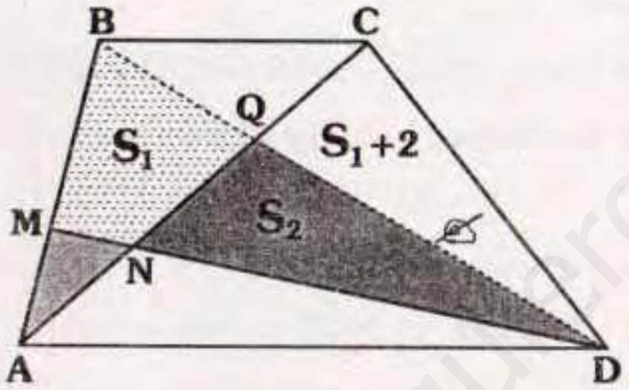
- Por la fórmula general:

$$S_{\square AMNC}=\frac{(12)(12)}{2}\text{sen}60°$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square AMNC}=36\sqrt{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 34



Piden $S_{\Delta MBD}$

Datos $S_{\Delta AMN}=2cm^2$; $S_{\Delta NCD}=10cm^2$ y

$\overline{AD}//\overline{BC}$

- Sea $S_{\square BQNM}=S_1$ y $S_{\Delta NQD}=S_2$

$\Rightarrow\ S_{\Delta MBD}=S_1+S_2$

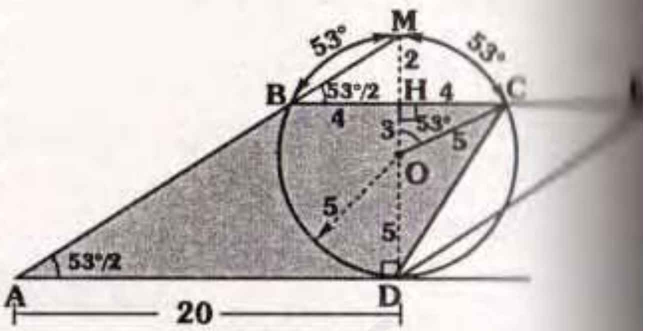
- Como $\overline{AD}//\overline{BC}\Rightarrow S_{\Delta ABQ}=S_{\Delta CQD}=S_1+2$

- Del dato: $\underbrace{S_{\Delta NCD}}_{10}=S_1+S_2+2$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=8cm^2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 35



Nos piden $S_{\square ABCD}$

- Notemos que ABCD es un trapecio, pues $\overline{AD}//\overline{BC}$.

- $\triangle$OHC notable de 53° $\Rightarrow$ OH=3 y HC=4 $\Rightarrow$ HD=8

- Como $\overline{OM}\perp\overline{BC}\ \Rightarrow\ BC=8$

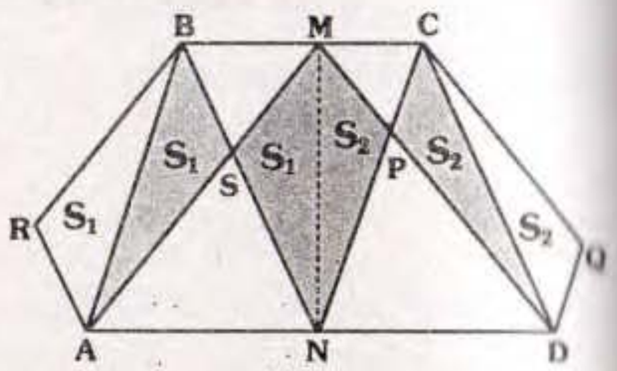
- $\triangle$ADM: notable de $\frac{53°}{2}\Rightarrow AD=20$

$$\Rightarrow\ S_{\square ABCD}=\left(\frac{20+8}{2}\right)\cdot 8$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD}=112}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 36



Piden $S_{(\square ARBS)}+S_{(\square PCQD)}$

Dato: $\underbrace{S_{(\square SMPN)}}_{S_1+S_2} = 6$

- Como $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow S_{(\Delta ABS)} = S_1$ y

$$S_{(\Delta CDP)} = S_2$$

- Por propiedad del paralelogramo:

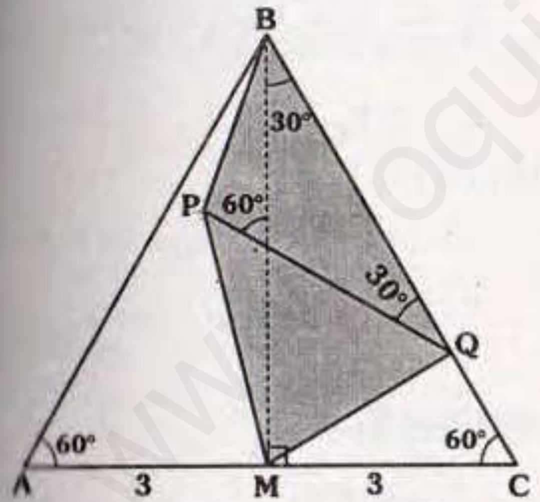
$$S_{(\square ARBS)} = 2S_1$$
$$S_{(\square PCQD)} = 2S_2$$

$$\Rightarrow S_{(\square ARBS)} + S_{(\square PCQD)} = 2\underbrace{(S_1 + S_2)}_{6}$$

$$\therefore \mathbf{S_{(\square ARBS)} + S_{(\square PCQD)} = 12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 37



Nos piden $S_{\square BPMQ}$

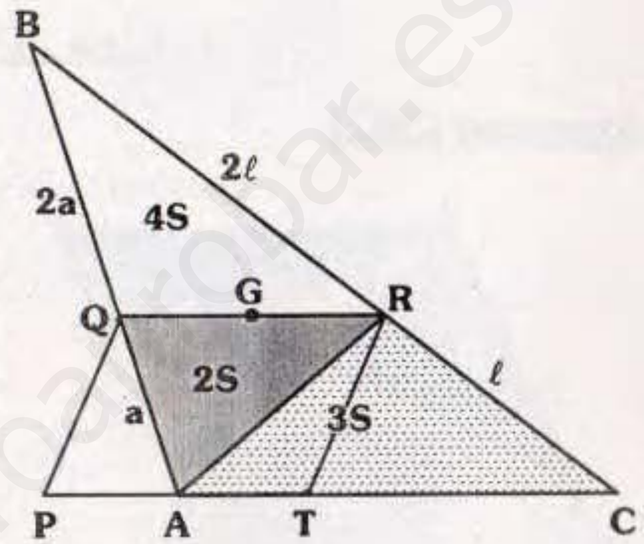
- Como el ΔABC es equilátero, entonces $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $m\measuredangle CBM = 30°$ y $BM = 3\sqrt{3}$
- Por fórmula general:

$$S_{\square BPMQ} = \frac{(4)(3\sqrt{3})}{2}\,\text{sen}60°$$

$$\therefore \mathbf{S_{\square BPMQ} = 9}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 38



Piden $S_{\square PQRT}$

Datos: $AB=7$, $BC=9$ y $AC=4$

- Como PQRT es paralelogramo:

$$\Rightarrow S_{\square PQRT} = 2(S_{\Delta AQR})$$

- Al ser G baricentro $\Rightarrow$

$$BQ=2(QA) \quad y \quad BR=2(RC)$$

- Sea $S_{\Delta AQR} = 2S \Rightarrow S_{\Delta QRB} = 4S$ y

$$S_{\Delta ARC} = 3S \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 9S$$

- Por teorema de Herón:

$$\underbrace{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{10(10-9)(10-7)(10-4)}$$

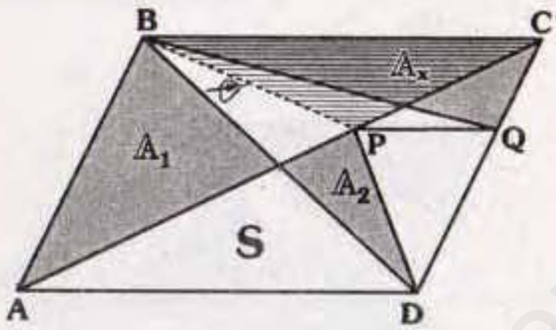
$$9S = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\ S = \frac{2}{3}\sqrt{5}\ \Rightarrow\ S_{\Delta AQR} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square PQRT} = \frac{8}{3}\sqrt{5}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 39



Nos piden $\mathbb{A}_x$ en función de $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$

- Por propiedad: $\mathbb{A}_1 + S = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$ ...(I)
- Como $\overline{PQ} // \overline{BC}\ \Rightarrow\ S_{\Delta PBC} = \underbrace{S_{\Delta BQC}}_{\mathbb{A}_x}$
- Al ser P un punto interior, entonces:

$$S_{\Delta APD} + S_{\Delta PBC} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\Rightarrow\ S + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_x = \frac{S_{\square ABCD}}{2} \quad \text{...(II)}$$

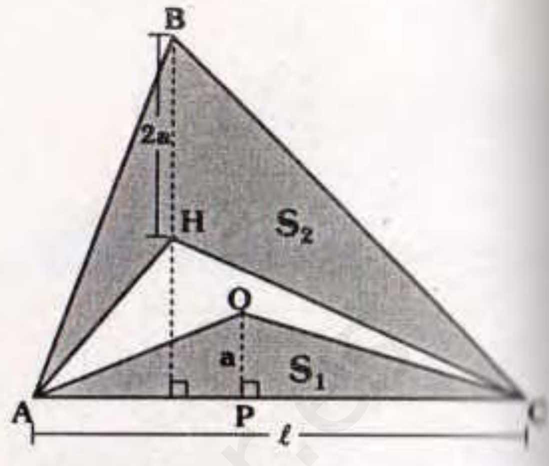
- De (I) y (II):

$$S + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_x = \mathbb{A}_1 + S$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_x = \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 40



Nos piden $\dfrac{S_2}{S_1}$

- Por propiedad de puntos notables:

$$HB = 2(OP)$$

- Por fórmula general en $\triangle$ABCH:

$$S_2 = \frac{\ell \cdot 2a}{2} \quad \text{...(I)}$$

- Por fórmula básica en ΔAOC:

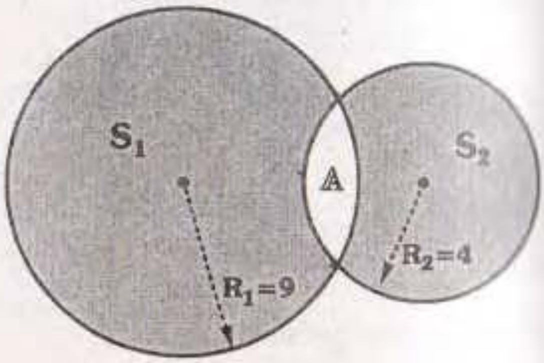
$$S_1 = \frac{a\ell}{2} \quad \text{...(II)}$$

- De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_2}{S_1} = 2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 41



Piden $S_1 - S_2$

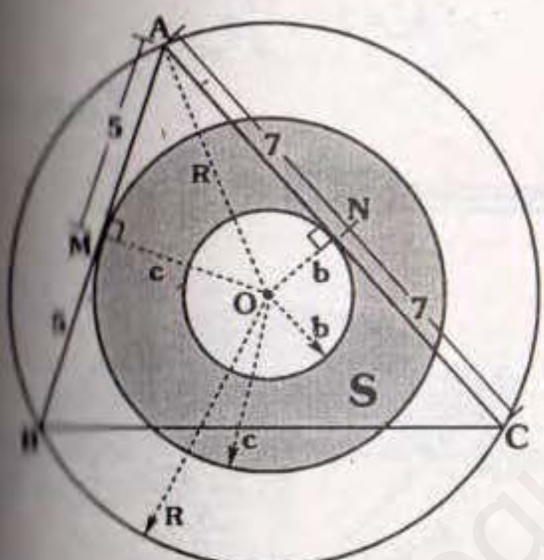
Sabemos que: $S_1 + \mathbb{A} = \pi R_1^2 = 81\pi$

$$S_2 + \mathbb{A} = \pi R_2^2 = 16\pi$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 - S_2 = 65\pi}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 42



Sea S el área de la corona circular.

$$\Rightarrow \ S = \pi(c^2 - b^2)$$

En ⊿OMA y ⊿ONA:

$$c^2 + 5^2 = R^2$$

$$b^2 + 7^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \ c^2 + 5^2 = b^2 + 7^2$$

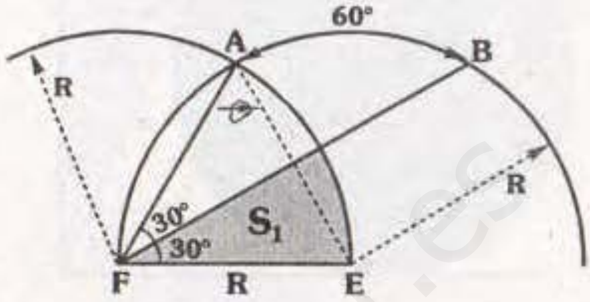
$$\Rightarrow \ c^2 - b^2 = 24$$

$$\therefore \ \mathbf{S = 24\pi}$$

Clave A

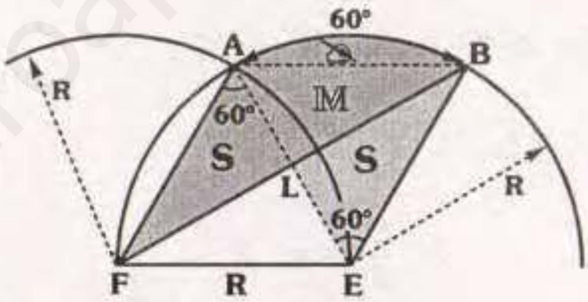
RESOLUCIÓN Nº 43

Nos piden la razón de áreas de las regiones sombreadas (analicemos por separado)



ΔAFE: Equilátero

$$\Rightarrow \ S_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ}\pi R^2 = \frac{1}{12}\pi R^2 \quad \ldots(\alpha)$$



Sea $S_2 = S + \mathbb{M}$

- Como FABE es rombo

$$\Rightarrow \ S_{\Delta LAF} = S_{\Delta LEB} = S$$

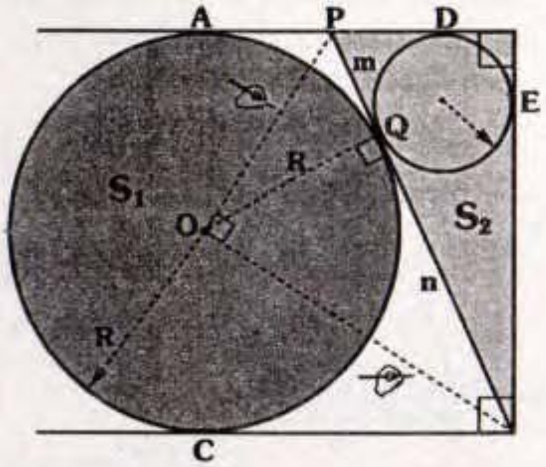
$$\Rightarrow \ S_2 = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi R^2 \quad \ldots(\beta)$$

- De (α) y (β):

$$\mathbf{\frac{S_2}{S_1} = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 44



Nos piden $\dfrac{S_1}{S_2}$

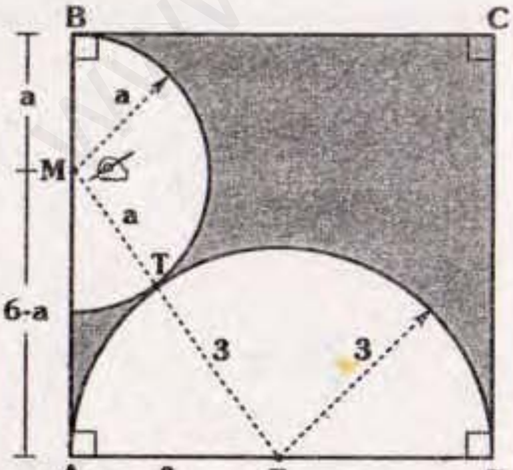
- $S_1=\pi R^2$
- Sea QB=n y QP=m, entonces: $S_2=mn$
- En ⊿POQ: $mn=R^2$

$$\Rightarrow\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi R^2}{mn}$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\pi$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 45



- Piden el área de la región sombreada.
- Es fácil darnos cuenta, que el área pedida, es una diferencia de áreas de la región cuadrada y los dos semicírculos, para ello; hallemos "a".
- En ⊿MAF:

$$(a+3)^2=a^2+(6-a)^2\ \Rightarrow\ a=2$$

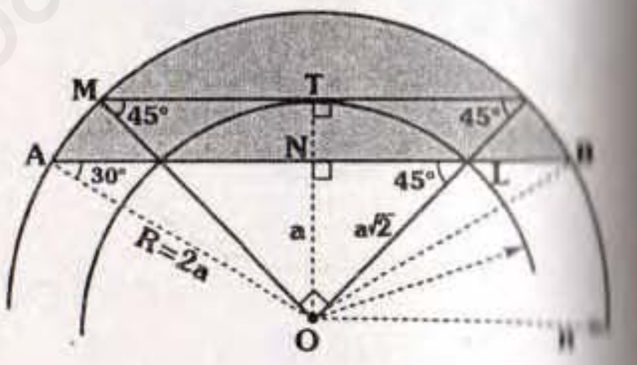
- Sea $\mathbb{A}_x$ el área pedida:

$$\Rightarrow\ \mathbb{A}_x=6^2-\frac{\pi 3^2}{2}-\frac{\pi 2^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_x=36-\frac{13}{2}\pi$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 46



Sea S el área de la región sombreada (corresponde a un segmento circular)

- ⊿LNO: ON=a y OL= $a\sqrt{2}$
- ⊿MTO: OT= $a\sqrt{2}$ y OM=2a
- ⊿ONA: notable de 30° ⇒ OA=2(ON)
- $S=S_{\triangledown AOB}-S_{\Delta AOB}$

$$\Rightarrow\ S=\frac{120°}{360°}\pi R^2-R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S=\frac{1}{3}\pi R^2-R^2\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{Como } R=2\sqrt{2}$$

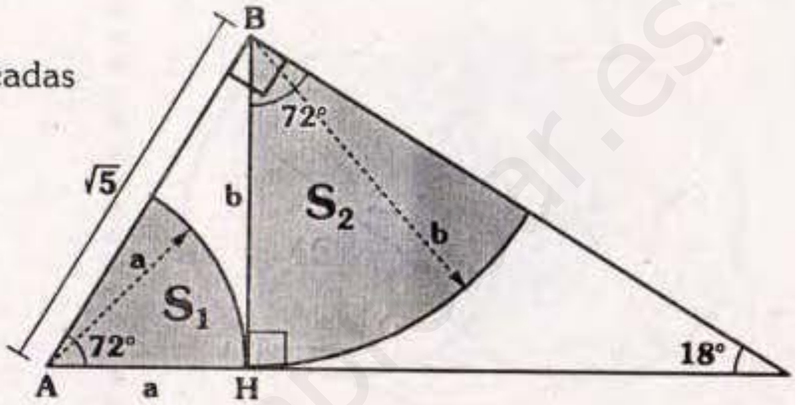
$$\therefore \quad \mathbf{S=\frac{2}{3}(4\pi-3\sqrt{3})}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 47

Nos piden $S_1 + S_2$

- Notemos que las regiones sombreadas son sectores circulares.



$$\rightarrow \quad S_1=\frac{72°}{360°}\pi a^2 \quad y \quad S_2=\frac{72°}{360°}\pi b^2$$

$$\rightarrow \quad S_1+S_2=\frac{1}{5}\pi(a^2+b^2)$$

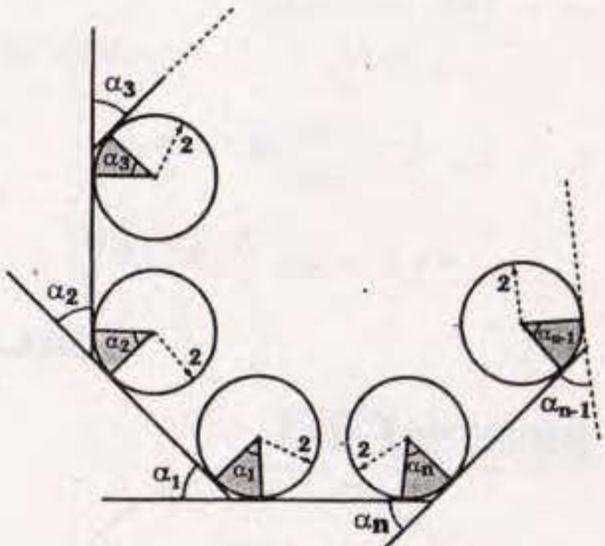
- En $\triangle AHB$: $a^2+b^2=(\sqrt{5})^2$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1+S_2=\pi}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 48

Nos piden la suma de áreas de los sectores circulares, sea S dicha suma:



$$\bullet \quad S=\frac{\alpha_1}{360°}\pi 2^2+\frac{\alpha_2}{360°}\pi 2^2+\alpha_3\pi 2^2+...+\frac{\alpha_n}{360°}\pi 2^2$$

$$\rightarrow \quad S=\frac{\pi}{90°}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n)$$

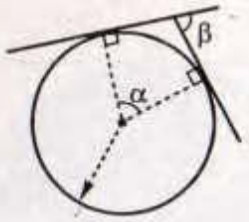
- Usando la observación (siguiente página) y que en todo polígono convexo se cumple:

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=360°$$

$$\therefore \quad \mathbf{S=4\pi}$$

Clave C

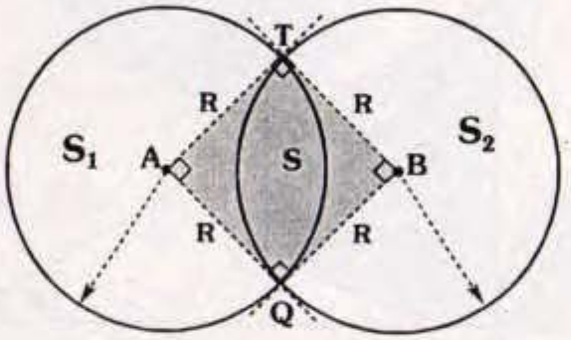
Observación



Se cumple:

$\boxed{\alpha=\beta}$

RESOLUCIÓN Nº 49



Nos piden: $S+S_1+S_2$

- Como son ortogonales:

$$m\measuredangle ATB = m\measuredangle AQB = 90°$$

$\Rightarrow$ ATBQ: cuadrado

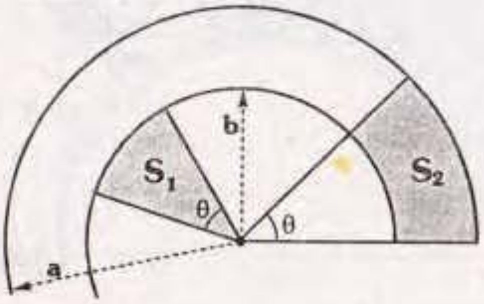
- $S = R^2$

- $S_1 = S_2 = \dfrac{270°}{360°}\pi R^2 = \dfrac{3}{4}\pi R^2$

$$\therefore\ \mathbf{S+S_1+S_2 = \frac{3}{2}\pi R^2 + R^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 50



Nos piden a/b

Dato: $S_1=S_2$

- Como S_1 es el área del sector circular, entonces:

$$S_1 = \frac{\theta}{360°}\pi b^2$$

- S_2 es el área de un trapecio circular

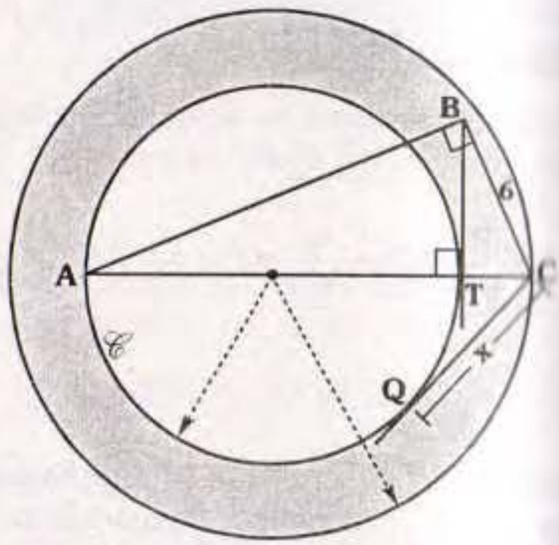
$$S_2 = \frac{\theta}{360°}\pi(a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow\ \cancel{\frac{\theta}{360°}}\pi b^2 = \cancel{\frac{\theta}{360°}}\pi(a^2-b^2)$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{a}{b} = \sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 51



Sea A_{cc} el área de la corona circular

- Se traza el segmento tangente $\overline{CQ}$
- Se sabe $A_{cc} = \pi x^2$.

- En ⊙, por teorema de la tangente

$$x^2=(CT)(CA) \qquad ...(I)$$

- En ⊿ABC: por teorema de relaciones métricas:

$$6^2=(CT)(CA) \qquad ...(II)$$

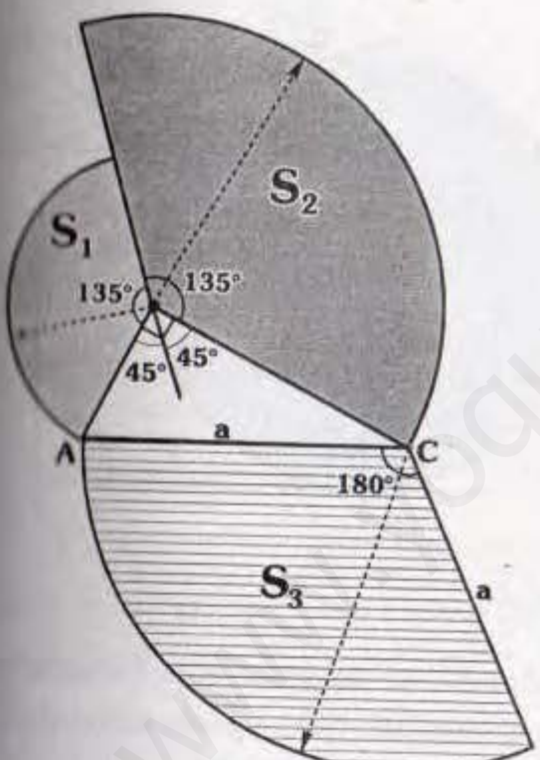
- De (I) y (II): $x=6$

$$\therefore\ A_{cc} = \mathbf{36\pi u^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 52

Nos piden $S_1 + S_2$



Podríamos resolver mediante la suma por separado y el teorema de Pitágoras, pero optemos por el teorema sobre semejanza de áreas (página Nº39)

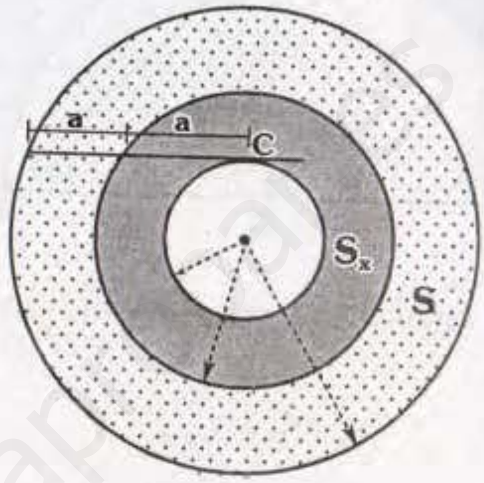
$$S_1+S_2=S_3$$

$$\Rightarrow\ S_1+S_2=\frac{135°}{360°}\pi a^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=\frac{3}{8}\pi a^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 53



Piden S_x en función de S

- Notemos que S_x y S son las áreas de las coronas circulares.
- Por teorema: $\quad S_x = \pi a^2$

$$S_x + S = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2$$

$$\Rightarrow\ S_x + S = 4S_x$$

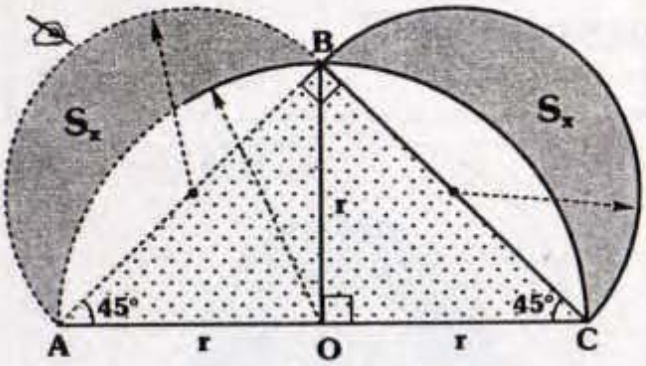
$$\therefore\ \mathbf{S_x = \frac{S}{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 54

Piden S_x en función de r.

- Para su resolución se podría optar por una diferencia, pero optemos por el teorema sobre las lúnulas de hipócrates, para ellos completemos.



- Las lúnulas son congruentes, entonces:

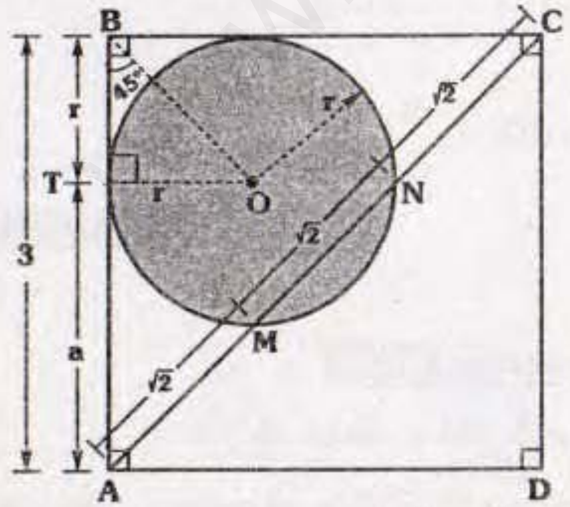
$$S_x + S_x = S_{\Delta AOB}$$

$$2S_x = \frac{(2r)r}{2}$$

$$\therefore\ S_x = \frac{r^2}{2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 55



Nos piden $S_\bullet$

- Como $AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = 3$
- Sea AT=a, por teorema de la tangente,

$$a^2 = \sqrt{2}(2\sqrt{2}) \Rightarrow a = 2$$

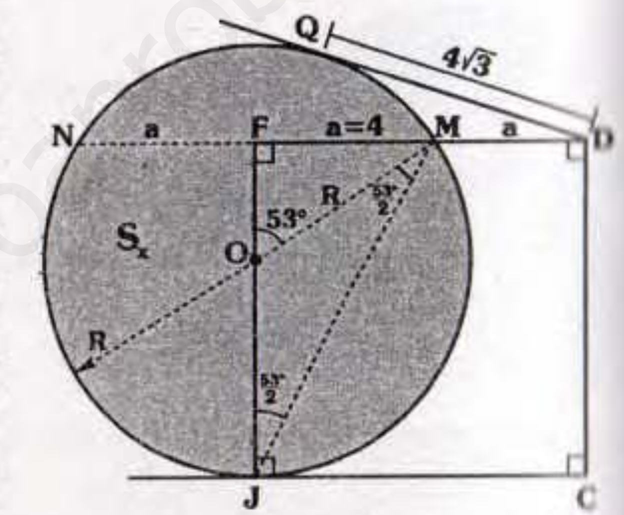
- Como $a + r = 3 \quad \Rightarrow \quad r = 1$

$$\Rightarrow S_\bullet = \pi R^2$$

$$\therefore\ S_\bullet = \pi$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 56



Piden S_x

- Como $\overline{JC}$ es tangente a la circunferencia y $m\measuredangle FJC = 90° \Rightarrow$ el centro O pertenece a $\overline{JF} \Rightarrow FM = FN$
- Por teorema de la tangente.

$$(4\sqrt{3})^2 = a(3a) \Rightarrow a = 4$$

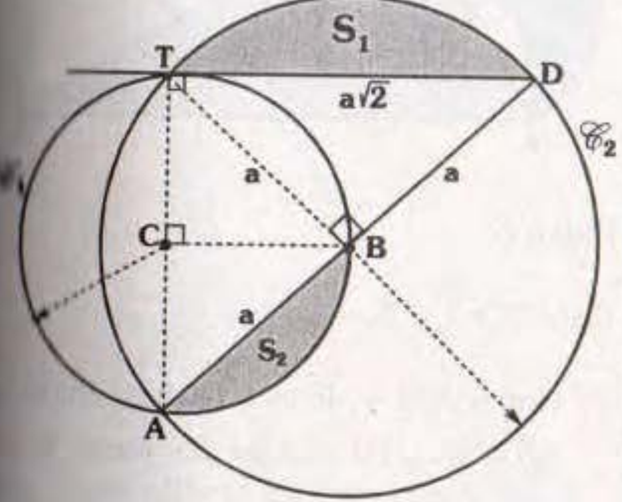
- Como $m\measuredangle MJF = \dfrac{53°}{2} \Rightarrow m\measuredangle FOM = 53°$

- En $\measuredangle$FOM: $R=5 \Rightarrow S_x=\pi 5^2$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=25\pi}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 57



Piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

- En $\mathscr{C}_2$, como $\overline{AD}$ es diámetro

$\Rightarrow m\sphericalangle ATD=90°$

- En $\mathscr{C}_1$, como T es punto de tangencia y $m\sphericalangle ATD=90° \Rightarrow$ el centro de $\mathscr{C}_1$ está en $\overline{AT}$

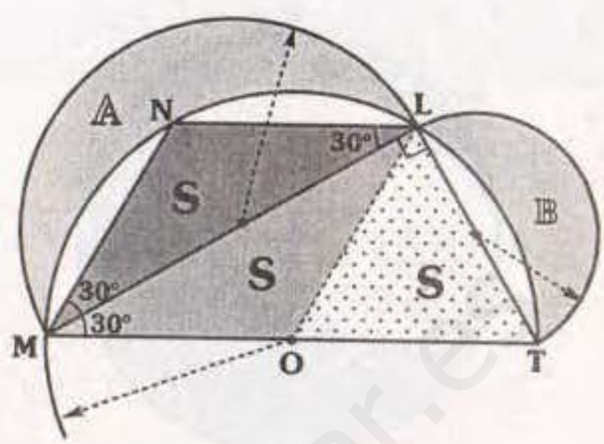
- Luego las regiones sombreadas son semejantes; entonces.

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{a}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_1}{S_2}=2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 58



Sea $S_{\square MNLT}=\mathbb{C}$

Nos piden: $\dfrac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{S_{(MNLT)}}$

- Por teorema de las lúnulas de Hipócrates:

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=S_{\triangle MLT}$$

- Sea $S_{\triangle MNL}=S$

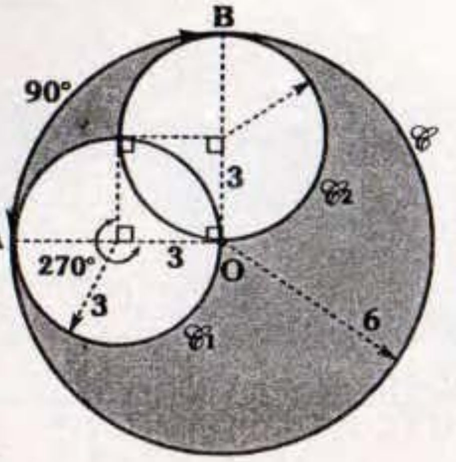
$$\Rightarrow S_{\triangle MOL}=S_{\triangle LOT}=S$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}+\mathbb{B}=2S \text{ y } S_{(MNLT)}=3S$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{S_{(MNLT)}}=\frac{2}{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 59



Nos piden el área de la región sombreada.

- Sea S_x el área de la región sombreada y $\mathbf{A}$ el área no sombreada.

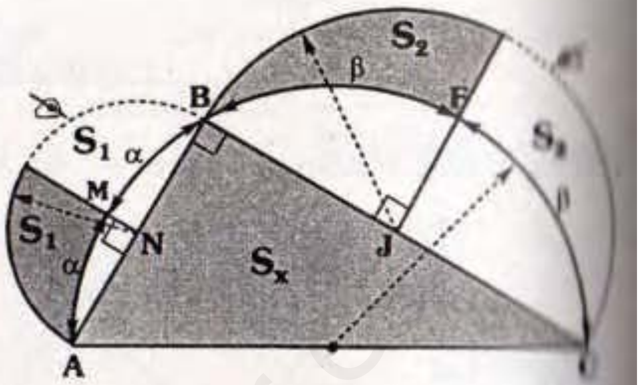
- $\mathbf{A}=3^2+2\left(\dfrac{270^\circ}{360^\circ}\pi\cdot 3^2\right)=9+\dfrac{27}{2}\pi$

$$\Rightarrow\ S_x=\pi 6^2-\mathbf{A}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{45}{2}\pi-9}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 60



Piden S_x

Dato $S_1=3$ y $S_2=4$

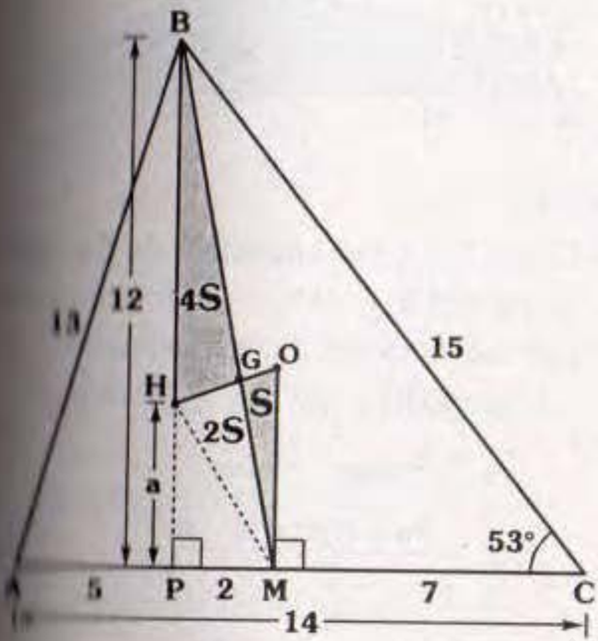
- Como $\overline{MN}$ y $\overline{JF}$ son flechas, entonces AN=NB y BJ=JC, al completar los arcos se apreciará las lúnulas cuyas áreas serán $2S_1$ y $2S_2$.

$$\Rightarrow\ S_x=2S_1+2S_2=2(S_1+S_2)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=14}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 61



Nos piden $S_{\Delta OGM} + S_{\Delta HBG}$

• Como $HG = 2(GO)$ y

$BG = 2(GM)$

Sea $S_{\Delta OGM} = S$ y

$\Rightarrow S_{\Delta HGM} = 2S$

$S_{\Delta HBG} = 4S$

• Por teorema de relaciones métricas:

$BP = 12$

• Por teorema de semejanza:

$(PB)(PM) = (AP)(PC)$

$$\Rightarrow 12a = (5)(9) \Rightarrow a = \frac{15}{4}$$

• Luego: $BH = \dfrac{33}{4}$

• $\underbrace{S_{\Delta MHB}} = \dfrac{(BH)(PM)}{2}$

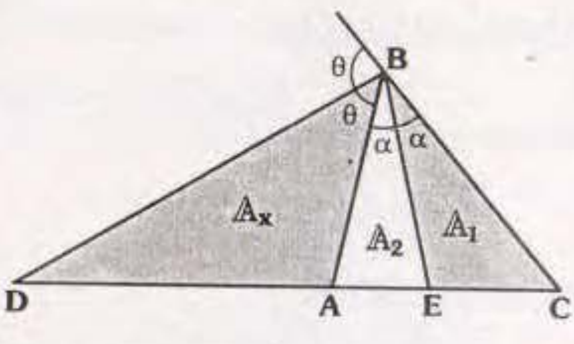
$$6S = \frac{33}{4} \Rightarrow S = \frac{11}{8}$$

• Finalmente:

$$S_{\Delta OGM} + S_{\Delta HBG} = 5S = \mathbf{\frac{55}{8}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 62



Piden demostrar:

$$\mathbb{A}_x = \mathbb{A}_2 \left[\frac{\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2}\right]$$

Sabemos que D, A, E y C forman una

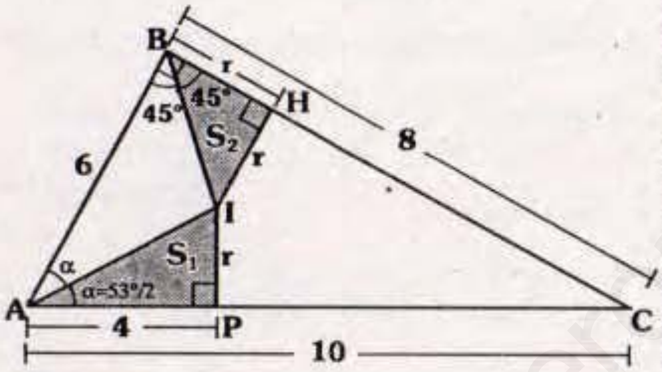
cuaterna:

$$\frac{DA}{AE}=\frac{DC}{EC}$$

$$\frac{\mathbb{A}_x}{\mathbb{A}_2}=\frac{\mathbb{A}_x+\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_x=\mathbb{A}_2\left[\frac{\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1-\mathbb{A}_2}\right]$$

RESOLUCIÓN Nº 63



Nos piden S_1+S_2

- como $AB=6$ y $BC=8$ $\Rightarrow AC=10$ y $m\sphericalangle BAC=53°$ en consecuencia: $\alpha=\frac{53°}{2}$
- Por teorema de Poncelet:

$$6+8=10+2r \Rightarrow r=2$$

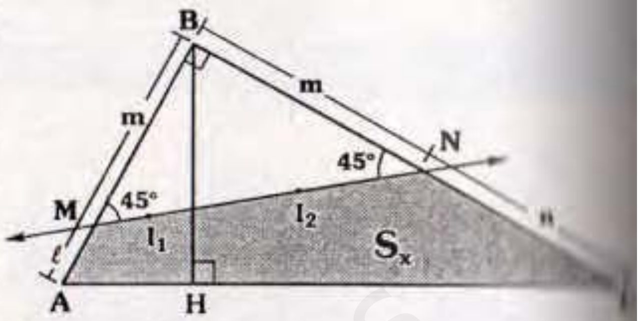
- En $\triangle$API: $AP=4$

$$\Rightarrow \quad S_1+S_2=\frac{(2)(4)}{2}+\frac{(2)(2)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1+S_2=6u^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 64



Piden S_x

- Como I_1 e I_2 son incentros de los triángulos AHB y BHC respectivamente por teorema de puntos notables:

$$m\sphericalangle BMN=45° \Rightarrow \quad MB=NB=m$$

- $S_x=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABN}$

$$S_x=\frac{(m+\ell)(m+n)}{2}-\frac{m^2}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x=\frac{\ell}{2}(m+n)+\frac{mn}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 65

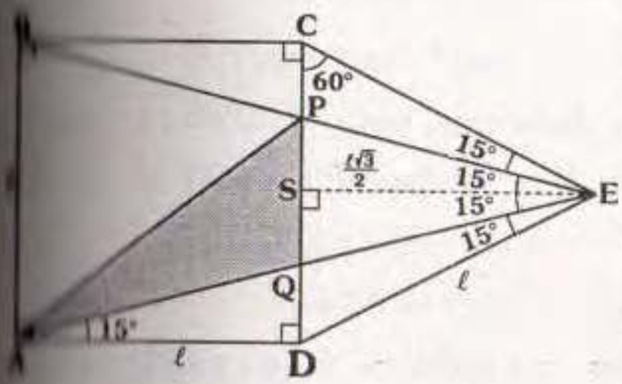
Sea S el área de la región triangular ABC entonces:

$$\left.\begin{array}{l} S=\dfrac{ah_1}{2} \\ S=\dfrac{bh_2}{2} \\ S=\dfrac{ch_3}{2}\end{array}\right\} \quad S^3=\frac{abch_1h_2h_3}{8}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S=\frac{\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 66



Piden $S_{\Delta APQ}$

- Notemos que $AD=DE=CE=\ell \Rightarrow$ los Δs BCE y ADE son isósceles
- En ⊿ESQ: $SE=\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$
- En ⊿SQE: de la observación

$$SQ=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$$

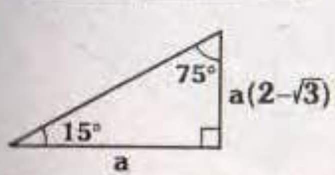
$$\Rightarrow PQ=\ell\sqrt{3}\;(2-\sqrt{3})$$

$$S_{\Delta APQ}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$$

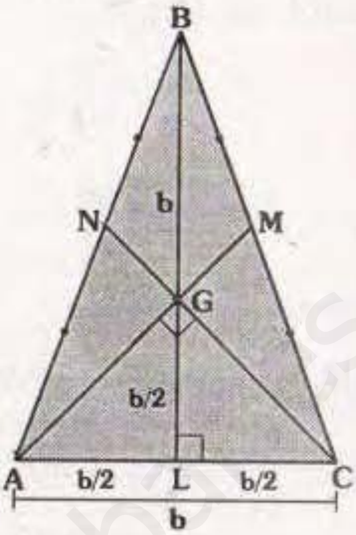
$$\therefore\; \mathbf{S_{\Delta APQ}=\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-3)}$$

Clave B

Observación



RESOLUCIÓN Nº 67



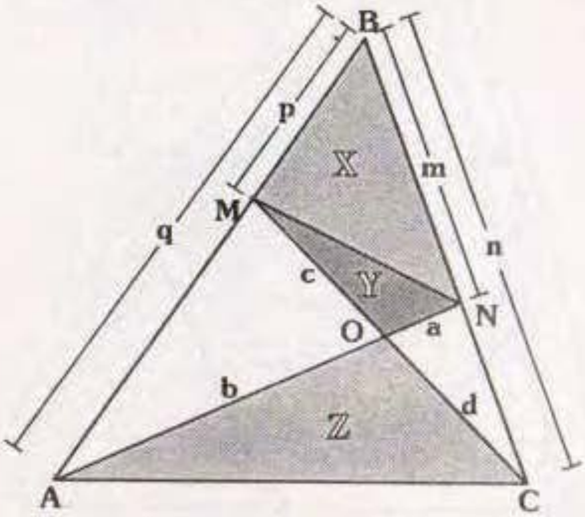
Piden $S_{\Delta ABC}$

- Como G es baricentro, entonces $\overline{BL}$ es mediana y altura por ser AB=BC
- En ⊿AGC: $AL=LC=GL=\dfrac{b}{2} \Rightarrow BG=b$
- $$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}b\left(\frac{3b}{2}\right)$$

$$\therefore\; \mathbf{S_{\Delta ABC}=\frac{3}{4}b^2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 68



Sea S el área de la región triangular ABC

- Por relación de áreas:

$$\frac{S}{X}=\frac{mp}{nq} \qquad ...(I)$$

$$\frac{Z}{Y}=\frac{bd}{ac} \qquad ...(II)$$

- Por teorema de Menelao

– En ΔANB: $\quad bp(NC) = a(AM)n$

– En ΔMBC: $\quad cq(NC) = d(AM)m$

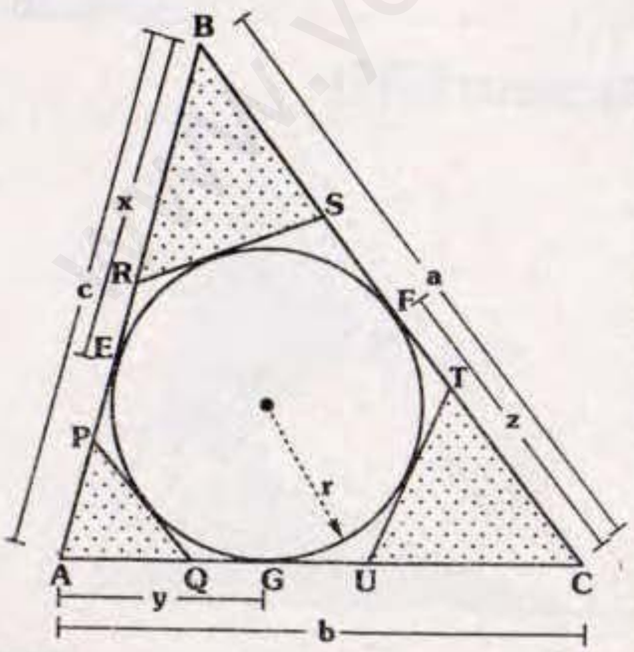
$$\Rightarrow \frac{bp}{cq}=\frac{an}{dm} \Rightarrow \frac{mp}{nq}=\frac{bd}{ac} \qquad ...(III)$$

- De (I), (II) y (III): $\dfrac{S}{X}=\dfrac{Z}{Y}$

$$\therefore \quad \mathbf{S=\frac{XZ}{Y}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 69



Piden r

Dato: $(p_{APQ})(p_{RBS})(p_{TCU})=336$

$$p_{APQ}+p_{RBS}+p_{TCU}=21$$

- Sabemos, para el ΔRBS : $x=p_{RBS}$
- Para los Δs APQ y TCU:

$$y=p_{APQ}$$
$$z=p_{TCU}$$

$\Rightarrow \quad xyz=336 \ \wedge \ x+y+z=21$

- Para el ΔABC : $p=x+y+z$

$$pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \ pr^2=\underbrace{(p-a)}_{y}\underbrace{(p-b)}_{x}\underbrace{(p-c)}_{z}$$

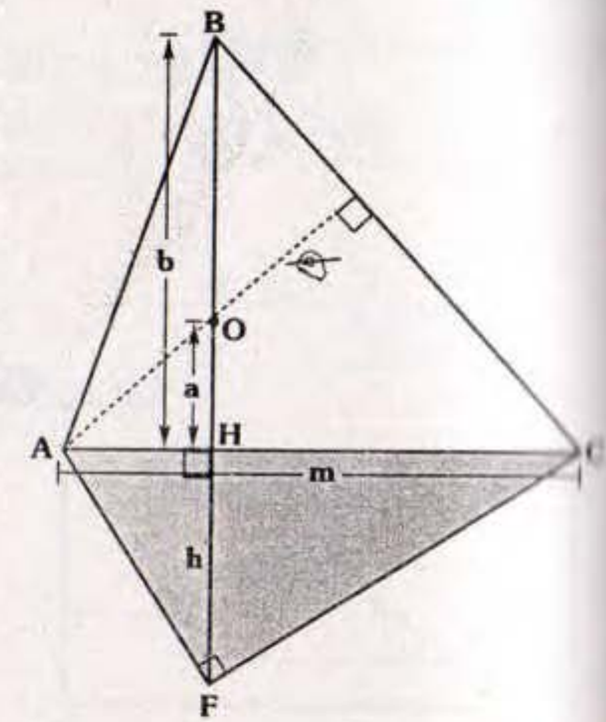
p es el semiperímetro de ΔABC

$$\Rightarrow 21r^2=336$$

$$\therefore \quad \mathbf{r=4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 70



Nos piden $S_{\triangle AFC}$

Datos: $mb=32$ y $ma=8$

- $S_{\triangle AFC}=\dfrac{mh}{2}$

- Como O es ortocentro, entonces:

$$(AH)(HC)=ab \qquad ....(I)$$

- En el $\triangle AFC$: $\quad h^2=(AH)(HC)...(II)$

- De (I) y (II): $\quad h^2=ab$

- De los datos: $m^2\underbrace{ab}_{h^2}=32\times 8$

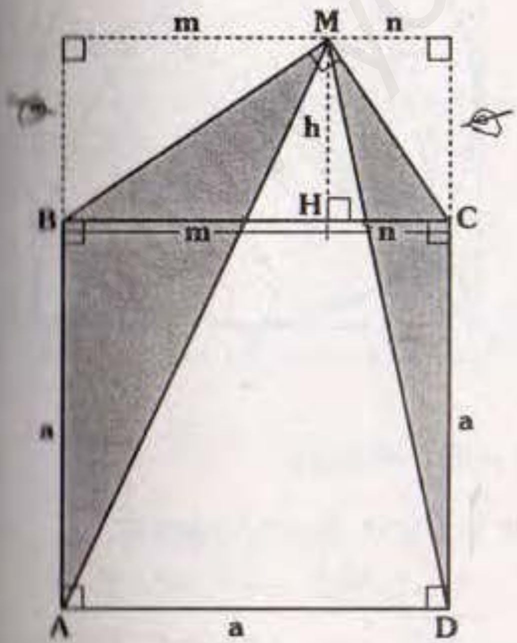
$$\Rightarrow mh=16$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AFC}=\frac{mh}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle AFC}=8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 71



Piden $S_{\triangle BMC}$

Datos: $(S_{\Delta ABM})(S_{\Delta MCD})=36$

- $S_{\triangle BMC}=\dfrac{ah}{2}$

- En el $\triangle BMC$: $\qquad h^2=mn$

- Por fórmula básica:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABM}=\dfrac{am}{2} \\ S_{\Delta MCD}=\dfrac{an}{2}\end{array}\right\}(S_{\Delta ABM})(S_{\Delta MCD})=\frac{a^2mn}{4}=\frac{a^2h^2}{4}$$

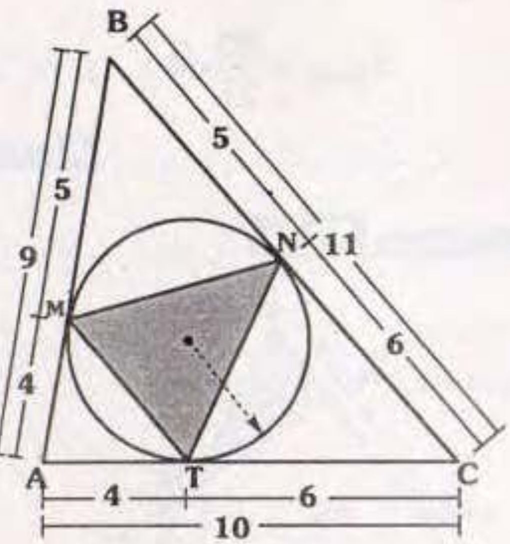
Finalmente:

$$\underbrace{(S_{\Delta ABM})(S_{\Delta MCD})}_{36}=\left(\frac{ah}{2}\right)^2=\left(S_{\triangle BMC}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle BMC}=6}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 72



Nos piden $S_{\Delta MNT}$

- $p=\dfrac{10+11+9}{2}=15 \Rightarrow AT=15-11=4$
- Por relación de áreas.

$$\frac{S_{\Delta AMT}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4\times4}{9\times10}$$

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{5\times5}{9\times11}$$

$$\frac{S_{\Delta CNT}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{6\times6}{10\times11}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta AMT}+S_{\Delta MBN}+S_{\Delta CNT}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4\times4}{9\times10}+\frac{5\times5}{9\times11}+\frac{6\times6}{10\times11}\ ...(I)$$

- Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{(15)(5)(4)(6)}=30\sqrt{2}$$

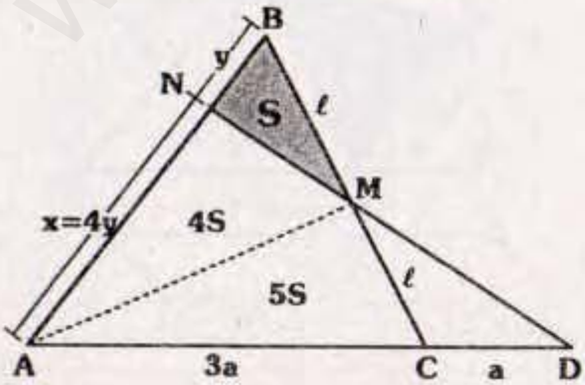
- En (I):
- $S_{\Delta AMT}+S_{\Delta MBN}+S_{\Delta CNT}=\dfrac{25}{33}S_{\Delta ABC}$
- $S_{\Delta MNT}=S_{\Delta ABC}-(S_{\Delta AMT}+S_{\Delta MBN}+S_{\Delta CNT})$

$$S_{\Delta MNT}=30\sqrt{2}-\frac{250}{11}\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNT}=\frac{80}{11}\sqrt{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 73



Piden: $\dfrac{S_{\Delta BMN}}{S_{ANMC}}$

- Para el ΔABC, usemos el teorema d
Menelao:

$$x\ell(a)=y\ell(4a)\Rightarrow x=4y$$

- Por relación de áreas:

Sea $S_{\Delta BMN}=S \Rightarrow S_{\Delta ANM}=4S$ y

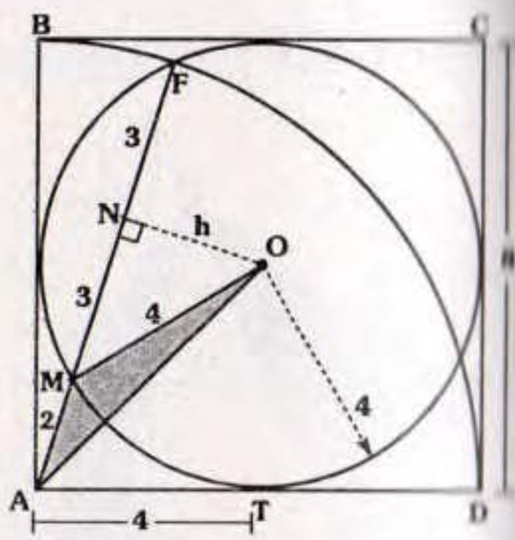
$$S_{\Delta AMC}=5S$$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{\Delta BMN}}{S_{ANMC}}=\frac{S}{9S}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{ANMC}}=\frac{1}{9}}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 74



Nos piden $S_{\Delta AOM}$

- Por teorema de la tangente:

$$4^2=(AM)8\ \Rightarrow\ AM=2$$

$$\Rightarrow MF=6\ \text{ y }\ MN=NF=3$$

• En $\triangle$ONM:

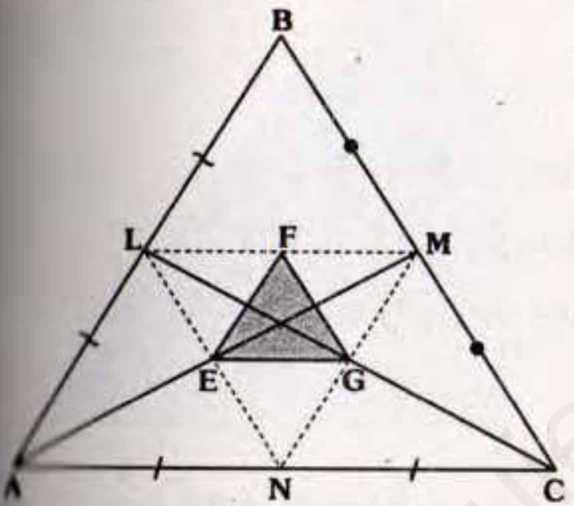
$$h^2+3^2=4^2 \quad \Rightarrow h=\sqrt{7}$$

$$S_{\Delta AOM}=\frac{(2)(\sqrt{7})}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta AOM}=\sqrt{7}}$$

Clave A

Resolución Nº 75



Nos piden $S_{\Delta EFG}$

Dato: $S_{\Delta ABC}=\mathbb{A}$

• Como M, L y N son puntos medios, entonces:

$$S_{\Delta MNL}=\frac{\mathbb{A}}{4}$$

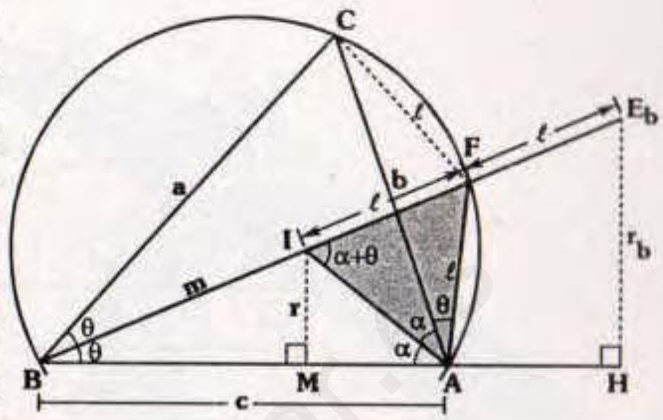
• Para el ΔMNL , E, F y G son puntos medios entonces:

$$S_{\Delta EFG}=\frac{1}{4}S_{\Delta MNL}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta EFG}=\frac{\mathbb{A}}{16}}$$

Clave D

Resolución Nº 76



Nos piden probar: $S_{\Delta AIF}=\dfrac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$

• Por relación de áreas:

$$\frac{S_{\Delta AIF}}{S_{\Delta BIA}}=\frac{\ell}{m} \Rightarrow S_{\Delta AIF}=\frac{\ell}{m}\cdot\left(\frac{cr}{2}\right) \quad \ldots(I)$$

• Por teorema de Ptolomeo:

$$b(\ell+m)=a\ell+c\ell \Rightarrow \frac{\ell+m}{\ell}=\frac{a+c}{b} \quad \ldots(II)$$

• $\triangle BMI \sim \triangle BHE_b$:

$$\frac{r_b}{r}=\frac{m+2\ell}{m} \Rightarrow \frac{r+r_b}{r}=\frac{2(m+\ell)}{m} \quad \ldots(III)$$

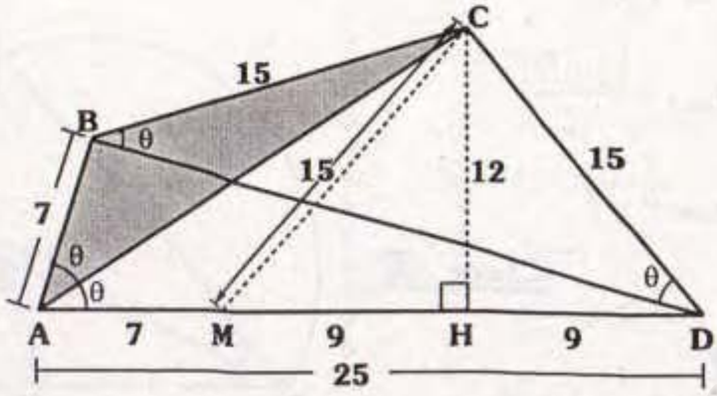
• De (II) y (III):

$$\frac{r+r_b}{r}=\frac{2(a+c)}{b}\cdot\frac{\ell}{m} \Rightarrow \frac{\ell}{m}=\frac{b(r+r_b)}{2r(a+c)} \ldots(IV)$$

• De (IV) y (I):

$$S_{\Delta AIF}=\frac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$$

RESOLUCIÓN Nº 77



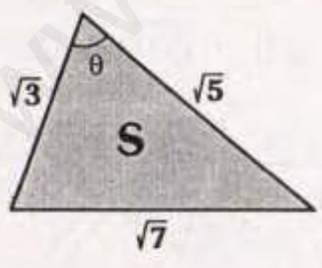
Nos piden $S_{\Delta ABC}$

- Se traza $\overline{CM}$ tal que $AM=AB=7 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AMC \Rightarrow MC=15$
- ΔMCD: isósceles, con $MC=CD=15$ y $MD=18$
- En ΔMCD, se traza la altura CH $\Rightarrow MH=HD=9 \Rightarrow CH=12$
- Como $\Delta ABC \cong \Delta AMC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMC}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(7)(12)}{2} \qquad \therefore \ \mathbf{S_{\Delta ABC} = 42\ cm^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 78



Nos piden S

- Usemos: $S = \dfrac{(\sqrt{3})(\sqrt{5})}{2}\operatorname{sen}\theta$ ...(I)
- Por teorema de cosenos:

$$\sqrt{7}^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{5})\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{15}}$$

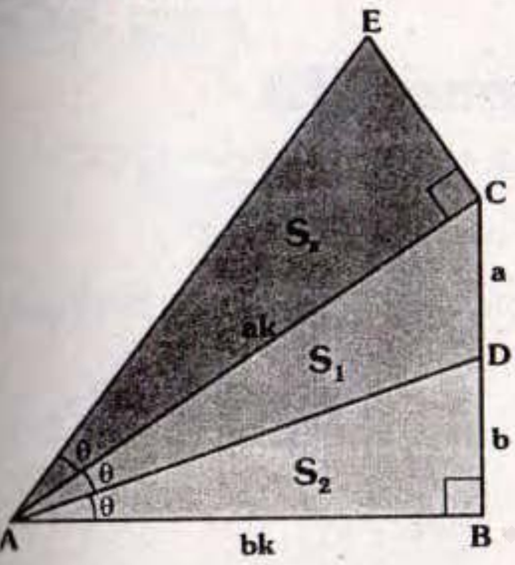
- Como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}}$

• En (I): $S=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}}$

$$\therefore\ \mathbf{S=\dfrac{\sqrt{59}}{4}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 79



Piden S_x en función de S_1 y S_2

• En ⊿ABC: $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{a}{b}$

• Por teorema de la bisectriz en ⊿ABC:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{a}{b}$$

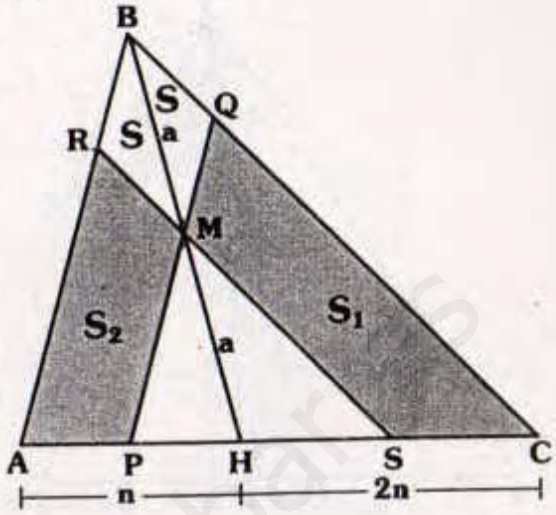
• ⊿ABD ~ ⊿ACE $\Rightarrow\ \dfrac{S_x}{S_2}=\left(\dfrac{ak}{bk}\right)^2=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

$$\Rightarrow\ \frac{S_x}{S_2}=\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{S_1{}^2}{S_2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 80



Nos piden: S_1-S_2

• Dato: $S_{\Delta ABC}=120$

• Como $HC=2(AH)\Rightarrow S_{\Delta ABH}=80$ y $S_{\Delta HBC}=40$

• De la observación:

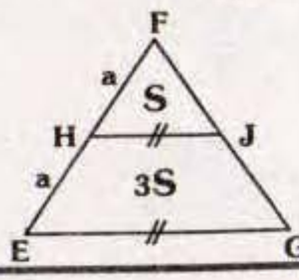
$$S_1+S=\frac{3}{4}(80)=60$$

$$S_2+S=\frac{3}{4}(40)=30$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1-S_2=30}$$

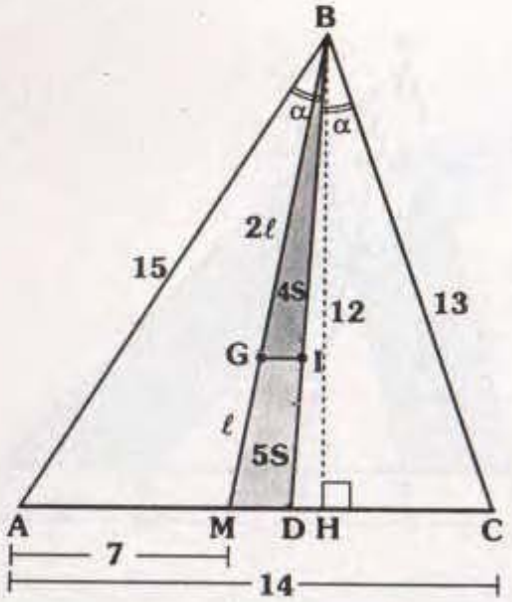
Clave E

Observación



$$S_{EHJG}=\frac{3}{4}S_{\Delta EFG}$$

RESOLUCIÓN Nº 81



Piden $S_{\Delta BGI}$

- Por teorema del incentro:

$$\frac{BI}{ID}=\frac{15+13}{14}=2$$

- Como G es baricentro $\Rightarrow$ BG=2(GM)

$$\Rightarrow \overline{GI}//\overline{MD} \Rightarrow \Delta GBI \sim \Delta MBD$$

- Por teorema:

$$\frac{S_{\Delta GBI}}{S_{\Delta MBD}}=\left(\frac{2\ell}{3\ell}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta GBI}=4S \;\; y \;\; S_{\Delta MBD}=9S$$

- Por teorema de la bisectriz.

$$\frac{AD}{DC}=\frac{15}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\underbrace{AD+DC}_{14}}=\frac{15}{15+13}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{15}{2} \Rightarrow MD=\frac{1}{2}$$

- $S_{\Delta MBD}=9S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(12) \Rightarrow S=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta GBI}=\frac{4}{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 82

Sea p el semiperímetro de ABC

Nos piden $S_{\Delta ABC}$

Datos: inradio : 2; AB+BC=18 y AC=6

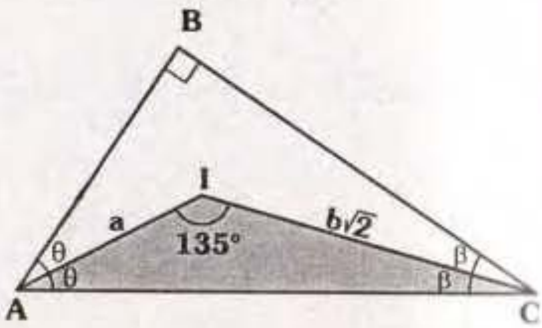
- $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=12$

- $S_{\Delta ABC}=p\underset{\substack{\downarrow\\ \text{inradio}}}{r}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC}=24}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 83



Piden $S_{\Delta AIC}$

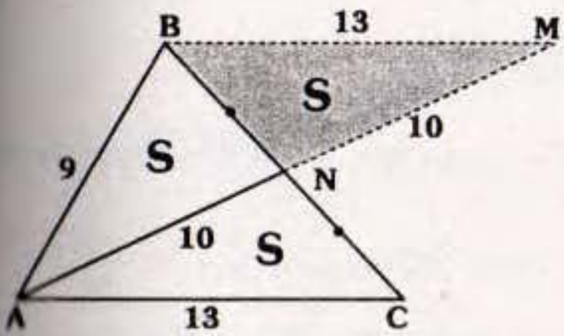
• Como I es incentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle AIC=135°$

$$S_{\Delta AIC}=\frac{ab\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}135°$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\Delta AIC}=\frac{ab}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 84



Nos piden $S_{\Delta ABC}$

• Se prolonga $\overline{AN}$ hasta M tal que NM=10

$$\Rightarrow \Delta ANC\cong\Delta MNB \Rightarrow BM=13$$

• $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABM}$

• Por teorema de Herón:

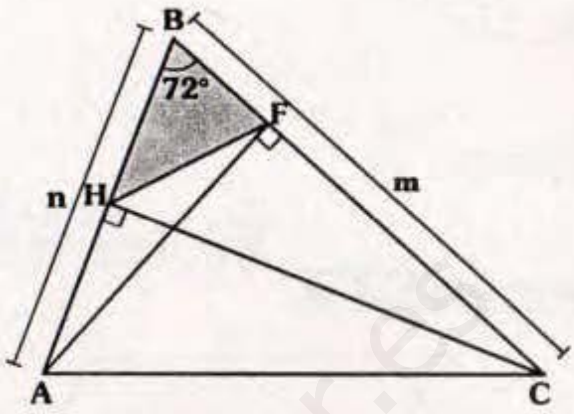
• Semiperímetro del ΔABM: **21**

$$\Rightarrow S_{\Delta ABM}=\sqrt{21(1)(12)(8)}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\Delta ABC}=12\sqrt{14}}$$

Clave C

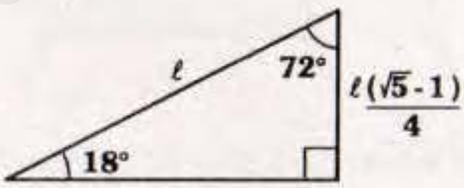
RESOLUCIÓN Nº 85



Dato: $S_{\Delta HBF}=(a-b\sqrt{5})S_{\Delta ABC}$

Nos piden: $\frac{a}{b}$

Usemos:



• En ⊿AFB y ⊿CHB:

$$BF=\frac{n(\sqrt{5}-1)}{4}\quad y\quad BH=\frac{m(\sqrt{5}-1)}{4}$$

• Por razón de áreas:

$$\frac{S_{\Delta HBF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(BF)(BH)}{mn}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{5}$$

• Del dato: $a=\frac{3}{8}$ y $b=\frac{1}{8}$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{a}{b}=3}$$

Clave B

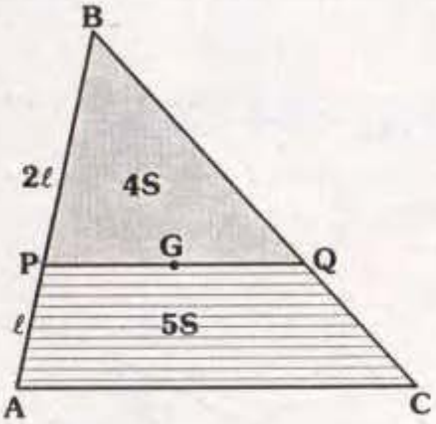
RESOLUCIÓN Nº 86

Como el inradio es 1, entonces su lado mide $2\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow\ S_{\Delta ABC}=(2\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 87



Piden $S_{\triangle APQC}$

Datos: $S_{\Delta ABC}=ku^2$

- Como G es baricentro y $\overline{AC}//\overline{PQ}$

$$\Rightarrow\ BP=2(AP)$$

- $\Delta PBQ\sim\Delta ABC\Rightarrow\ \dfrac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\dfrac{2\ell}{3\ell}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

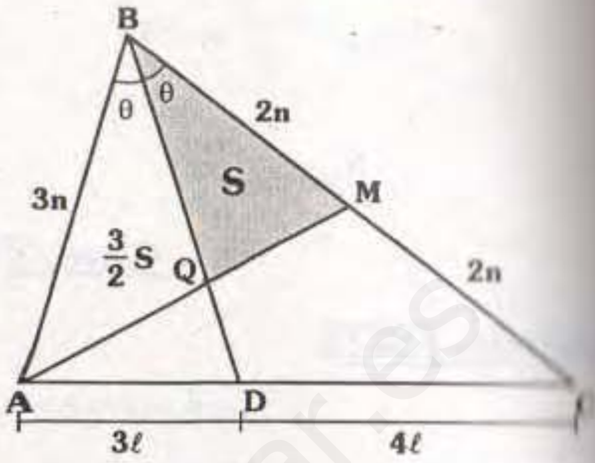
$$\Rightarrow\ S_{\Delta PBQ}=4S\ \text{ y }\ S_{\triangle APQC}=5S$$

- Como $\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{9S}=k\ \Rightarrow\ S=\dfrac{1}{9}k$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle APQC}=\frac{5}{9}k}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 88



Nos piden $S_{\Delta ABC}$

Dato: $S_{\Delta BQM}=S$

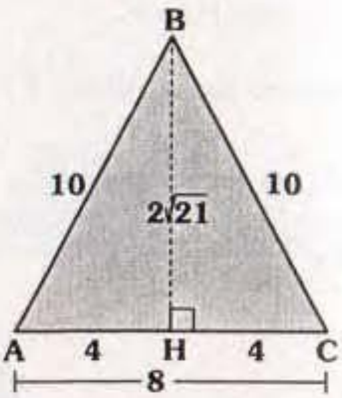
- Como $\overline{BD}$ es bisectriz $\Rightarrow\ \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{4}$
- Sea $BM=MC=2n\ \Rightarrow\ AB=3n$
- Por relación de áreas en ΔABM:

$$S_{\Delta ABQ}=\frac{3}{2}S\ \Rightarrow\ S_{\Delta ABM}=\frac{5}{2}S$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC}=5S}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 89



Nos piden $S_{\Delta ABC}$

- Se podría optar por el teorema de Herón, pero como el ΔABC es isósceles, optemos por la altura $BH \Rightarrow AH=HC=4$.

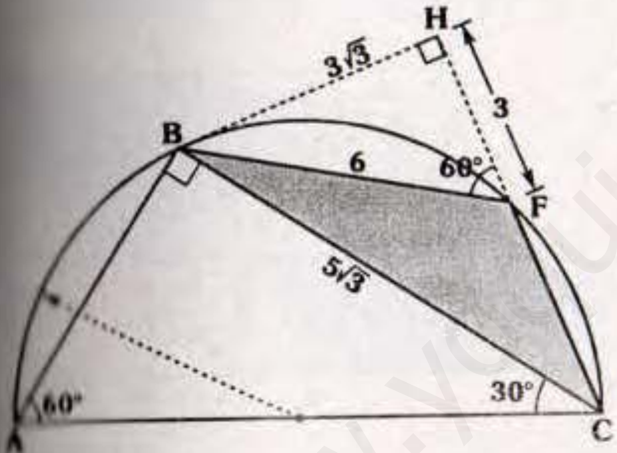
- En $\measuredangle CHB$: $BH = 2\sqrt{21}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{(8)2\sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{21}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 90



Nos piden $S_{\Delta BFC}$

- Se prolonga $\overline{CF}$ y se traza $\overline{BH} \perp \overline{CF}$ (H en $\overline{FC}$)

- $\measuredangle BHF$: notable de 30° y 60°

$$\Rightarrow BH = 3\sqrt{3} \quad y \quad HF=3$$

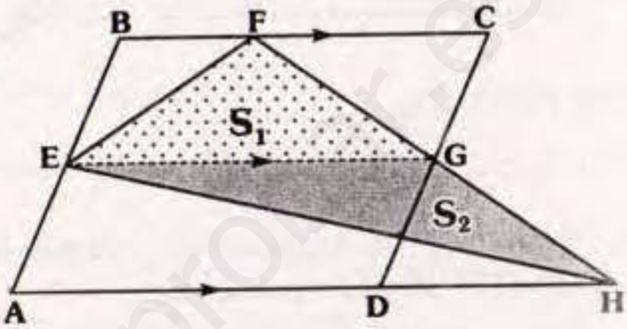
- $\measuredangle BHC$: $HC = 4\sqrt{3} \ \Rightarrow \ FC = 4\sqrt{3} - 3$

- $$S_{\Delta BFC} = \frac{(4\sqrt{3}-3)3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta BFC} = \frac{9}{2}(4 - \sqrt{3})}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 91



Nos piden $S_{\Delta EFG}$

Dato: $S_{\square ABCD} = S$

- Como $AE=DG \Rightarrow$ AEGD y EBCG son paralelogramos.

- Sea $S_1 = S_{\Delta EFG}$ y $S_2 = S_{\Delta EGH}$

- Por teorema:

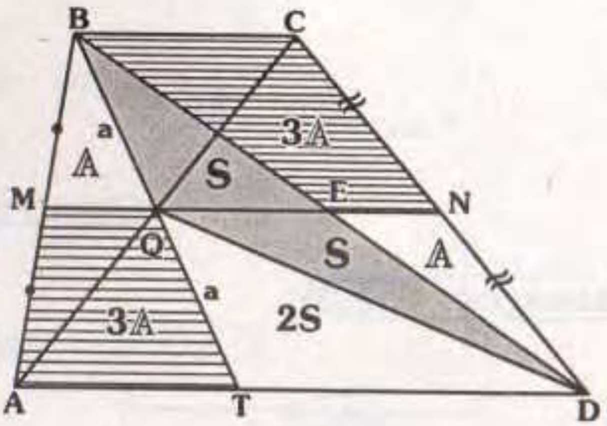
$$S_1 = \frac{S_{\square EBCG}}{2} \quad y \quad S_2 = \frac{S_{\square AEGD}}{2}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{S_{\square EBCG} + S_{\square AEGD}}{2} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 + S_2 = \frac{S}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 92



Nos piden $S_{\Delta BDQ}$

Datos: $S_{\triangle MBCN}=S_2$ y $S_{\triangle AMND} = S_1$

- Como $\overline{MN}$ es base media, entonces BQ=QT, BE=ED y MQ=EN.
- Como consecuencia de lo anterior:

$$S_{\Delta MBQ} = S_{\Delta NDE} = \mathbb{A}$$

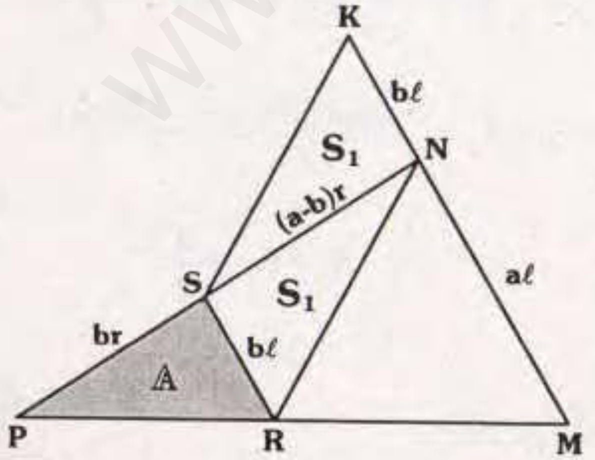
$$\Rightarrow S_{\triangle AMQT} = S_{\triangle BCNE} = 3\mathbb{A}$$

- $$\left.\begin{array}{l} S_1 = 4\mathbb{A}+3S \\ S_2 = 4\mathbb{A}+S \end{array}\right\} S_1 - S_2 = \underbrace{2S}_{S_{\Delta BQD}}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta BQD} = S_1 - S_2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 93



Nos piden $S_{\square RSKN}$

- En $\square$RSKN: $\quad S_{\square RSKN} = 2S_1$
- Como $\overline{RS} // \overline{MN} \Rightarrow \dfrac{PS}{PN} = \dfrac{b}{a}$

$$\Rightarrow PS = br \ \wedge \ SN = (a-b)r$$

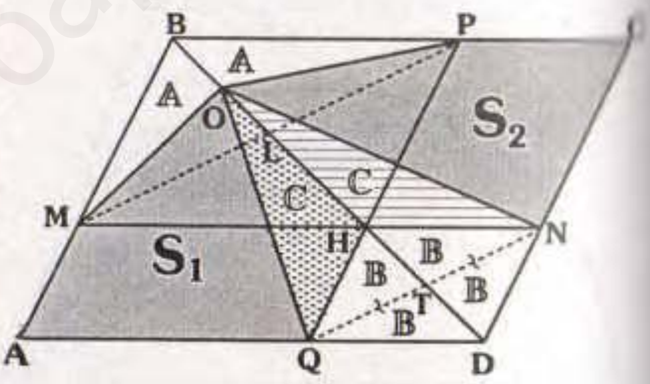
- Por razón de áreas:

$$\frac{S_1}{\mathbb{A}} = \frac{a-b}{b} \Rightarrow S_1 = \left(\frac{a-b}{b}\right)\mathbb{A}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square RSKN} = \frac{2(a-b)}{b}\mathbb{A}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 94



Nos piden S_2

Dato: $S_1 = 17u^2$

- Como BPH y QHND son paralelogramos, entonces: ML=LP y QT=TN
- Luego: $\quad S_{\Delta OMB} = S_{\Delta OPB} = \mathbb{A}$

$$S_{\Delta OQH} = S_{\Delta ONH} = \mathbb{C}$$

- Finalmente:

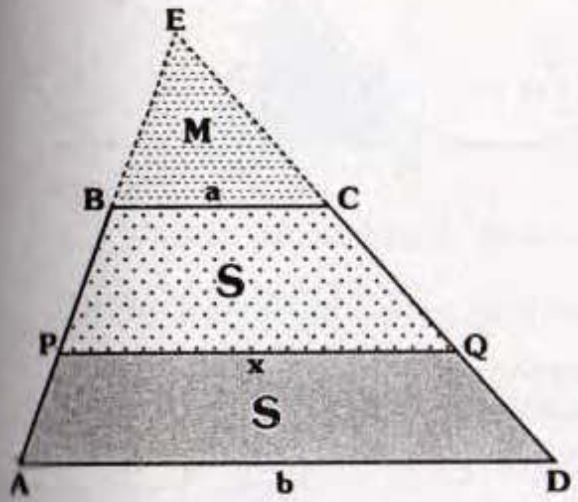
$$S_1 + \mathbb{A} + \mathbb{C} + 2\mathbb{B} = S_2 + \mathbb{A} + \mathbb{C} + 2\mathbb{B}$$

$\Rightarrow \quad S_1 = S_2$

$\therefore \quad \mathbf{S_2 = 17u^2}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 95



Piden x en función de a y b.

- $\Delta PEQ \sim \Delta BEC$

$$\Rightarrow \frac{S+M}{M} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{S}{M} = \frac{x^2-a^2}{a^2} \quad ...(I)$$

- $\Delta AED \sim \Delta BEC$

$$\Rightarrow \frac{2S+M}{M} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{2S}{M} = \frac{b^2-a^2}{a^2} \quad ...(II)$$

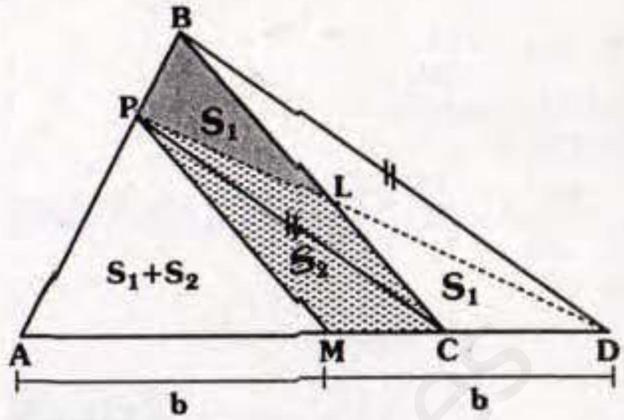
- De (I) y (II):

$$2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right) = \frac{b^2-a^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 96



Piden $S_{\triangle MPBC}$

Dato: $S_{\Delta ABC} = 16$

- Sea $S_{\triangle MPBC} = S_{\Delta PBL} + S_{\triangle MPLC} = S_1 + S_2$
- Como $\overline{PC} // \overline{BD} \Rightarrow S_{\Delta PLB} = S_{\Delta CLD} = S_1$
- Debido a que AM=MD

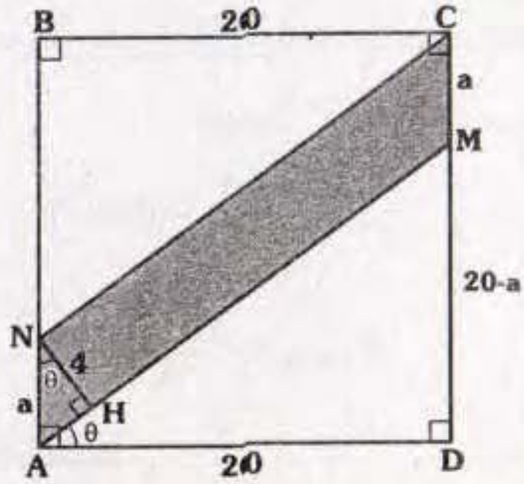
$$\Rightarrow S_{\Delta APM} = S_{\Delta MPD} = S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow 2(S_1 + S_2) = 16 \Rightarrow S_1 + S_2 = 8$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\triangle MPBC} = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 97



Nos piden $S_{\square AMCN}$

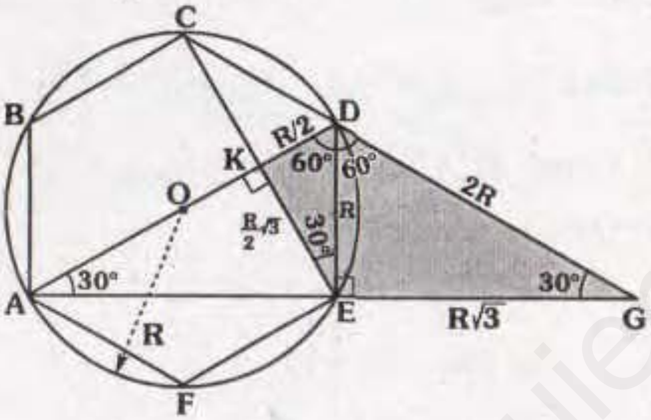
- $S_{\square AMCN} = 20a$
- $\measuredangle AHN \sim \measuredangle ADM$

$$\Rightarrow \frac{20-a}{20} = \frac{\sqrt{a^2-16}}{4} \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\square AMCN} = 100}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 98



Nos piden $S_{(EKDG)}$

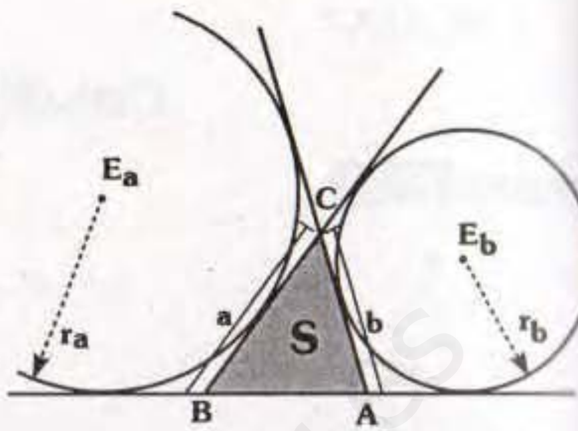
- Como ABCDEF es un hexágono regular, entonces AD=2R, DE=R, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ y $m\measuredangle ADE = m\measuredangle EDG = 60°$
- ΔADG: isósceles
- $S_{(EKDG)} = S_{\measuredangle EKD} + S_{\measuredangle DEG}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}(R)(R\sqrt{3})$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{(EKDG)} = \frac{5R^2\sqrt{3}}{8}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 99



Nos piden S en función de a, b, r_a y r_b

- Sea p el semiperímetro del ΔABC
- Entonces:

$$S = r_b(p-b) \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{r_b} = p - b \quad ...(I)$$

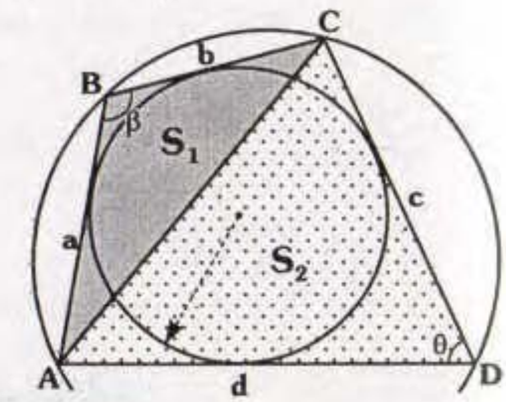
$$S = r_a(p-a) \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{r_a} = p - a \quad ...(II)$$

- De (I) y (II): $\quad \dfrac{S}{r_b} - \dfrac{S}{r_a} = a - b$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{r_a r_b (a-b)}{r_a - r_b}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 100



Sea S_1: área de ABC

S_2: área de ADC

Nos piden S_1

- Como $\beta + \theta = 180° \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{ab}{cd}$

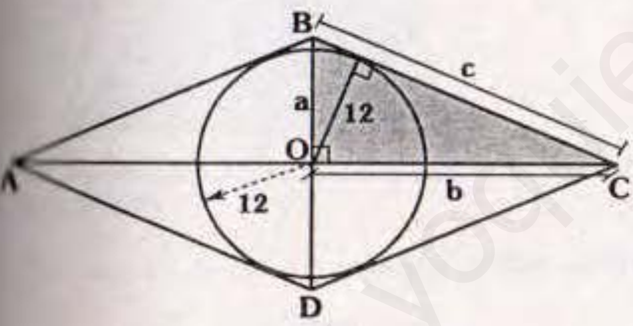
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{ab}{ab + cd}$$

- Como $S_1 + S_2 = \sqrt{abcd}$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 = \frac{ab\sqrt{abcd}}{ab + cd}}$$

Clave B

Resolución Nº 101



Nos piden $S_{(ABCD)}$

Dato $AC + BD = 70$

- Como "O" es centro, entonces: $a + b = 35$

- En $\triangle BOC$: $ab = 12c$

También: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

$$35^2 = c^2 + 24c$$

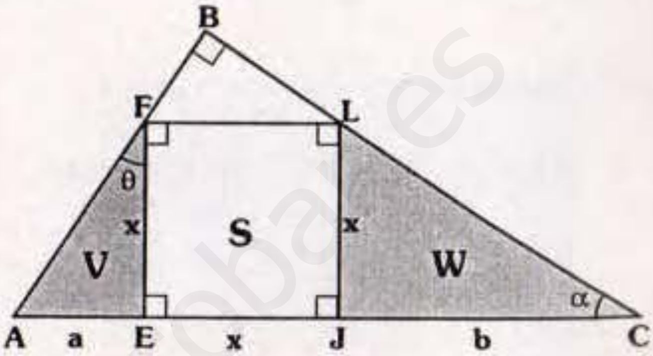
$$25(25+24) = c(c+24) \Rightarrow c = 25$$

- $$S_{(ABCD)} = 4S_{\Delta BOC} = 4\frac{(25)(12)}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{(ABCD)} = 600}$$

Clave D

Resolución Nº 102



Nos piden S

- $S = x^2$; $V = \dfrac{ax}{2}$ y $W = \dfrac{bx}{2}$

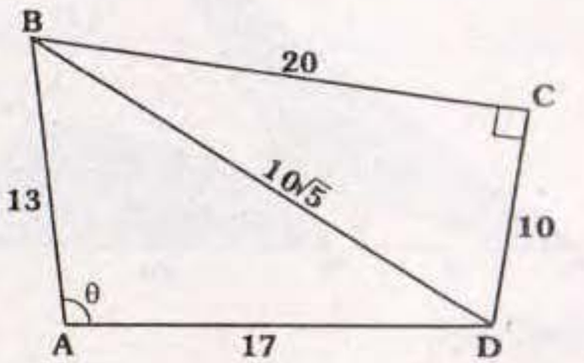
- $\triangle AEF \sim \triangle LJC$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab \Rightarrow 4VW = \underbrace{ab \cdot x^2}_{S^2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S = 2\sqrt{VW}}$$

Clave D

Resolución Nº 103



Nos piden $S_{(ABCD)}$

- $S_{(ABCD)} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$ ...(I)

- $S_{\Delta BCD} = \dfrac{(10)(20)}{2} = 100$ ...(II)

- $S_{\Delta ABD} = \dfrac{(13)(17)}{2}\text{sen}\theta$ ...(III)

- En ΔABD:

$$(10\sqrt{5})^2 = 13^2 + 17^2 - 2(13)(17)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{21}{(13)(17)}$$

- Como

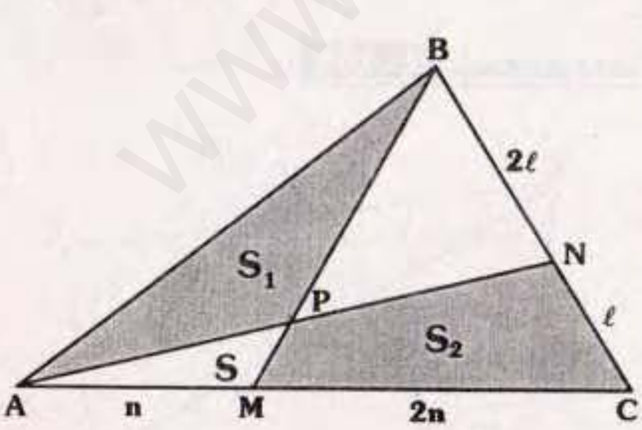
$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{220}{(13)(17)}$$

- En (III): $S_{\Delta ABD} = 110$ ...(IV)
- De (IV), (II) y (I):

$$\mathbf{S_{(ABCD)} = 210}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 104



Nos piden S_2

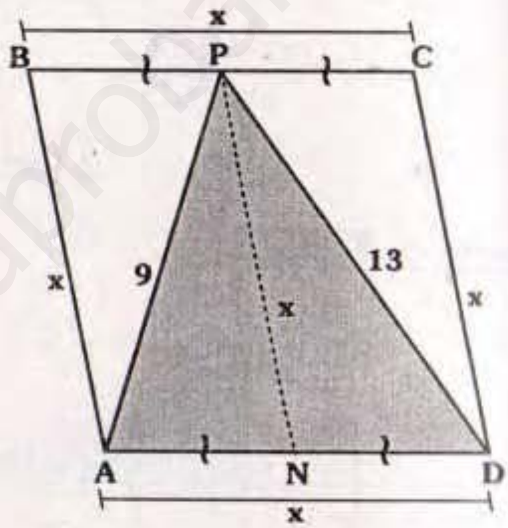
- Dato $S_1 = 10$
- Del gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 + S = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \\ S_2 + S = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \end{array}\right\} S_1 = S_2$$

$$\therefore \mathbf{S_2 = 10}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 105



Nos piden $S_{(ABCD)}$

- Se traza $\overline{PN} // \overline{CD}$ (N en $\overline{AD}$)
- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$9^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = 10$$

- Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta APD} = \sqrt{16(3)(7)(6)}$$

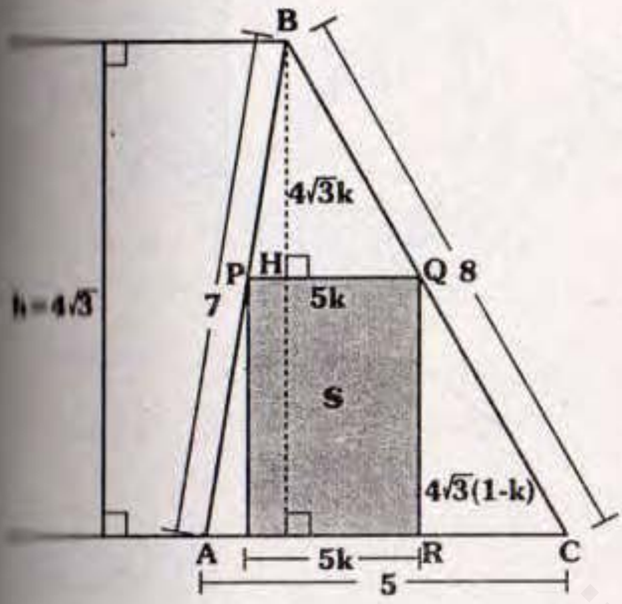
$$S_{\Delta APD} = 12\sqrt{14}$$

Como $S_{(ABCD)} = 2(S_{\Delta APD})$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)} = 24\sqrt{14}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 106



Nos piden el área máxima de la región sombreada.

- Por teorema del cálculo de la altura:

$$h = \frac{2}{5}\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)} = 4\sqrt{3}$$

- $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$

$$\Rightarrow PQ = 5k \ \text{ y } \ BH = 4\sqrt{3}k$$

- Sea S el área de la región sombreada.

$$S = 5k.4\sqrt{3}(1-k) = 20\sqrt{3}(k-k^2)$$

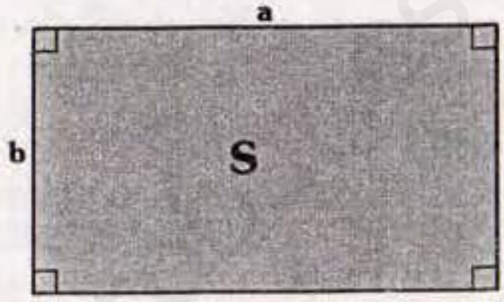
$$\Rightarrow S = 20\sqrt{3}\left[\frac{1}{4} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

- Como S es máximo $\Rightarrow k - \frac{1}{2} = 0$

$$\therefore\ \mathbf{S = 5\sqrt{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 107



Datos $S = 60$ y $a \wedge b \in \mathbb{Z}$

Nos piden el perímetro máximo.

- Como $ab=60$, sin pérdida de generalidad: $a>b$
- Como a y b son enteros analicemos los divisores; así:

a	60	30	20	15	12	10
b	1	2	3	4	5	6

- Notemos que el perímetro máximo es para: $a=60$ y $b=1$

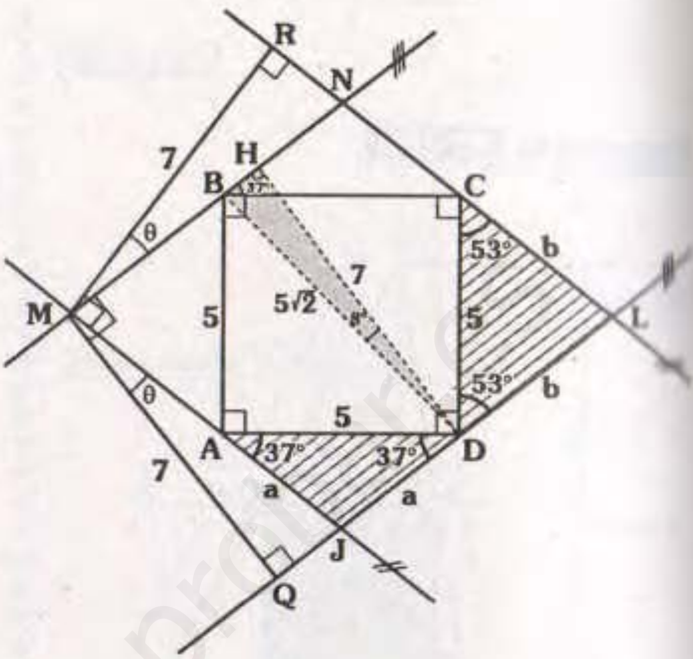
$\therefore$ Perímetro máximo: **122u**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 108

Nos piden $S_{(MNLJ)}$

- $\measuredangle MQJ \cong \measuredangle MRN \Rightarrow MN = MJ$, es decir MNLJ es un rombo.
- Se traza $\overline{DH} \perp \overline{MN} \Rightarrow \measuredangle BHD$ notable de 8°
- Si hacemos algo parecido desde "C", al trazar la perpendicular habrán dos posibilidades, si el pie esta en $\overleftrightarrow{AM} \Rightarrow$ MNLJ es cuadrado, si dicho pie está en $\overline{AJ} \Rightarrow \Delta AJD$: isósceles
- En ΔAJD y ΔDCL:



$$a = \frac{25}{8} \text{ y } b = \frac{25}{6} \Rightarrow a + b = \frac{175}{24}$$

$$\Rightarrow S_{(MNLJ)} = 7\left(\frac{175}{24}\right) = \mathbf{\frac{1225}{24}}$$

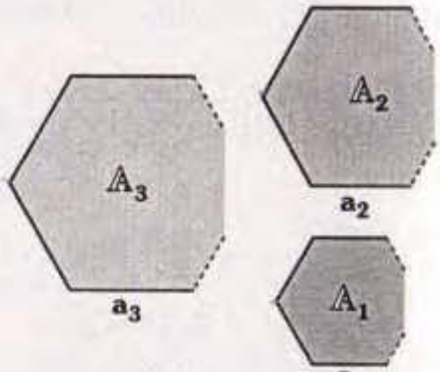
Clave E

RESOLUCIÓN Nº 109

Piden a_3

Dato: $\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$

- Como los tres polígonos tienen igual cantidad de lados, entonces son semejantes.
- Por teorema:



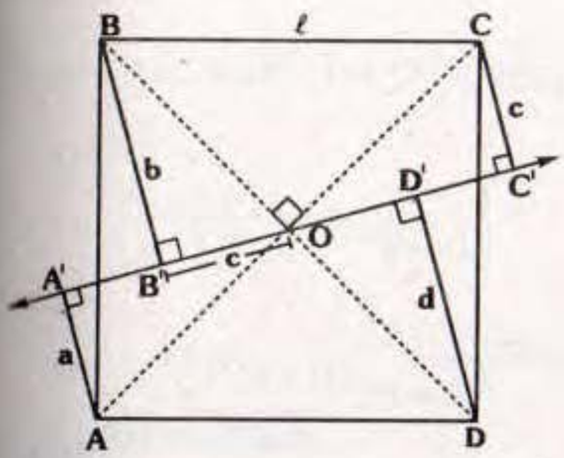
$$\frac{\mathbb{A}_3}{(a_3)^2} = \frac{\mathbb{A}_2}{(a_2)^2} + \frac{\mathbb{A}_1}{(a_1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{\mathbb{A}_3}}{(a_3)^2} = \frac{\cancel{\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1}}{(a_2)^2 + (a_1)^2}$$

$$\therefore \; \mathbf{a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 110



Piden $S_{(ABCD)}$

Dato: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$

- Notemos: $a=c$ y $b=d$
- $\triangle BB'O \cong \triangle OC'C \Rightarrow OB'=c$

$$\Rightarrow (OB)^2 = b^2 + c^2$$

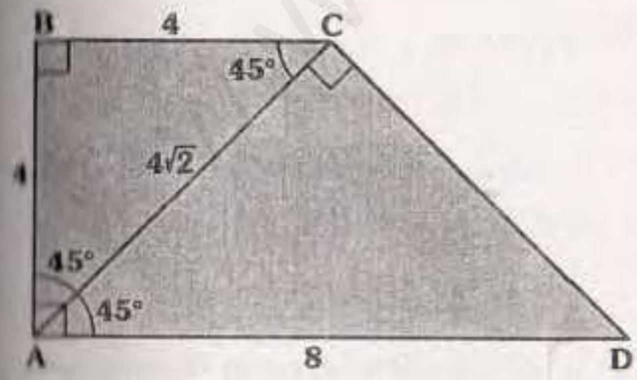
- Del dato: $b^2 + c^2 = 50$

$$\Rightarrow OB = 5\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 10$$

$$\therefore \mathbf{S_{(ABCD)} = 100}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 111



Piden $S_{(ABCD)}$

- Como ABCD es trapecio y $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ (pues $m\measuredangle ABC = 90°$ y $m\measuredangle BCD = 135°$)

$$\Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$$

- $$S_{(ABCD)} = \left(\frac{8+4}{2}\right).4$$

$$\therefore \mathbf{S_{(ABCD)} = 24}$$

Clave B

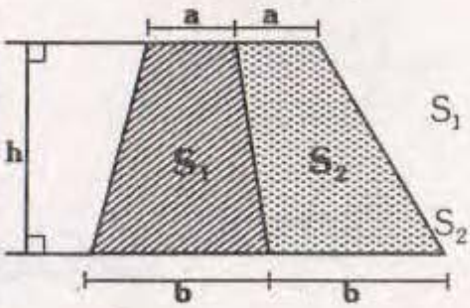
RESOLUCIÓN Nº 112

I. Es verdadero

Estamos considerando porsupuesto un cuadrilátero plano, ya fue demostrado en la página N°29.

II. Es verdadero

Veamos el gráfico:

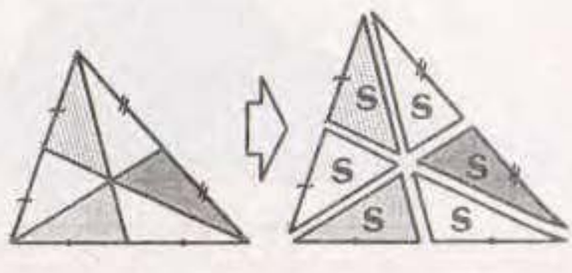


$$S_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

$$S_2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

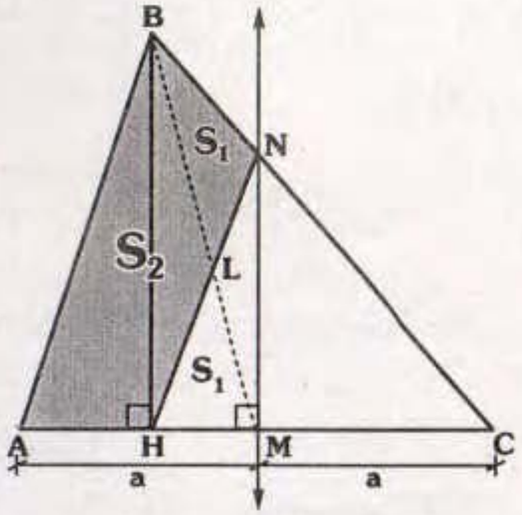
De donde: $S_1 = S_2$

III. Es Verdadero



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 113



Nos piden: $S_{\triangle ABNH}$

Dato: $S_{\Delta ABC} = 18$

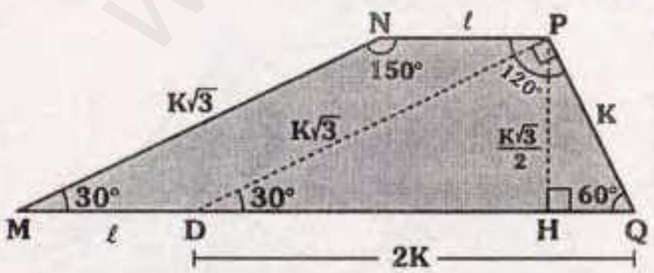
• Como $\overline{BH} // \overline{NM} \Rightarrow S_{\Delta HLM} = S_{\Delta BLN} = S_1$

• $$S_{\triangle ABNH} = \underbrace{S_1 + S_2}_{\underbrace{S_{\Delta ABM}}_{\frac{S_{\Delta ABC}}{2}}}$$

$\therefore$ $\mathbf{S_{\triangle ABNH} = 9}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 114



Piden $S_{\triangle MNPQ}$

• Se traza $\overline{PD} // \overline{NM} \Rightarrow PD = k\sqrt{3}$

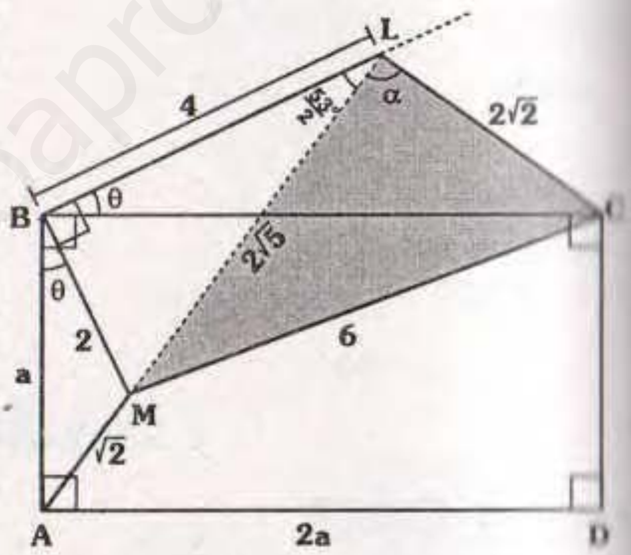
• $\triangle$DPQ: PQ = k, DQ = 2k y PH = $\frac{k\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\triangle MNPQ} = \frac{(\ell + \ell + 2k)}{2}\frac{k\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\triangle MNPQ} = (\ell + k)\frac{k\sqrt{3}}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 115



Piden $S_{(ABCD)}$

• $S_{(ABCD)} = 2a^2$

• Se traza exteriormente el ΔBLC tal que $m\sphericalangle CBL = m\sphericalangle ABM$ y BL=4

$$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta CBL \Rightarrow LC = 2\sqrt{2}$$

• En ΔMLC : Por teorema de cosenos:

$$\alpha = 180° - \frac{143°}{2}$$

$\Rightarrow m\measuredangle BLC = 135°$

• En ΔBLC:

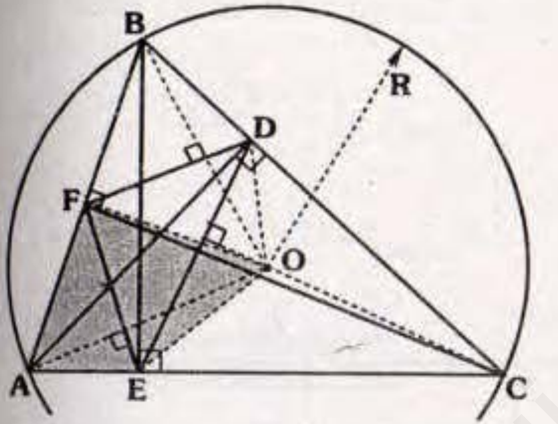
$$(2a)^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(4)(2\sqrt{2})\cos 135°$$

$\Rightarrow a^2 = 10$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)} = 20}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 116



Sea $p = \dfrac{EF + FD + DE}{2}$

Por demostrar: $S_{\Delta ABC} = pR$

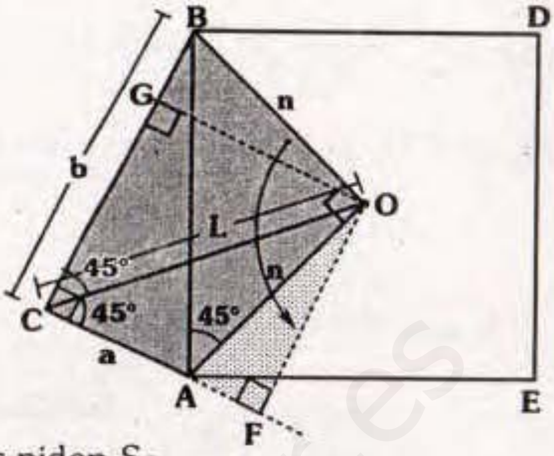
• Por teorema de puntos notables:

$\overline{OB} \perp \overline{FD}$, $\overline{OA} \perp \overline{EF}$ y $\overline{OC} \perp \overline{ED}$

• $S_{\Delta ABC} = \underbrace{S_{(AFOE)}}_{\frac{(EF)R}{2}} + \underbrace{S_{(OFBD)}}_{\frac{(FD)R}{2}} + \underbrace{S_{(CDOE)}}_{\frac{(ED)R}{2}}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC} = R\left(\frac{EF + FD + ED}{2}\right)}$$

RESOLUCIÓN Nº 117



Nos piden $S_{(ACBO)}$

• Se traza $\overline{OG} \perp \overline{OB}$ y $\overline{OF} \perp \overline{CA}$

• Como ⏢ACBO es inscriptible, entonces: $⊿OGB \cong ⊿AFO$

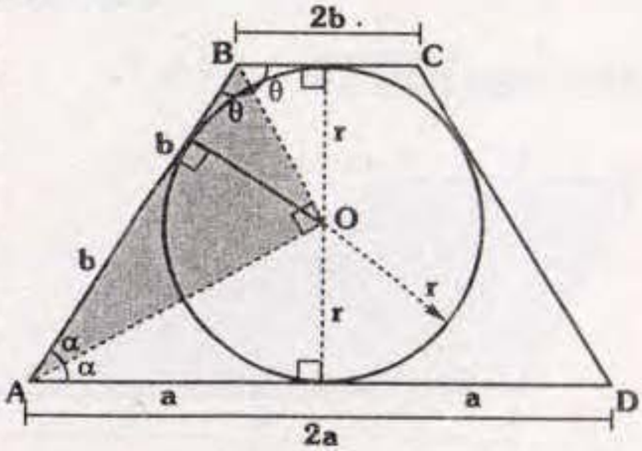
• Luego $S_{(ACBO)} = S_{(CGOF)}$

• Pero CGOF es un cuadrado cuya diagonal mide L, entonces:

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ACBO)} = S_{(CGOF)} = \frac{L^2}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 118



Piden S_{ABCD}

- $S_{(ABCD)} = \left(\dfrac{2a+2b}{2}\right)2r = 2r(a+b)$

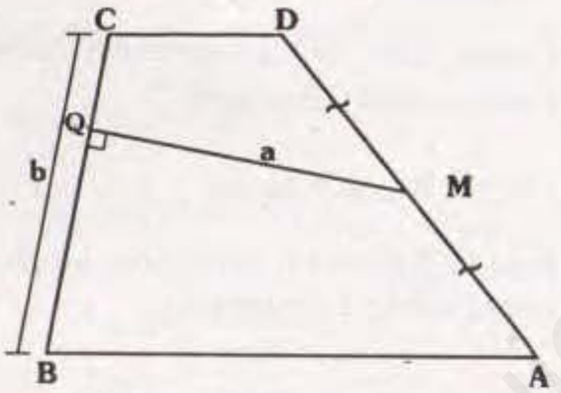
- En ⊿AOB, por relaciones métricas:

$$r^2 = ab \Rightarrow r = \sqrt{ab}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)} = 2\sqrt{ab}(a+b)}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 119



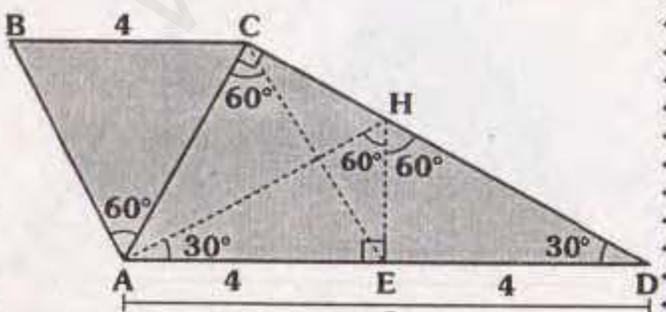
Piden $S_{\triangle ABCD}$

- Ya fue demostrado (ver pág. Nº29 y 30)

$$\therefore \mathbf{S_{\triangle ABCD} = ab}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 120



Piden $S_{\triangle ABCD}$

- Se traza $\overline{CE} // \overline{BA} \Rightarrow AE = BC = 4$

- Desde E se traza $\overline{EH} \perp \overline{AD} \Rightarrow$

$$m\measuredangle AHE = m\measuredangle EHD = 60°$$

- △ACHE: inscriptible, entonces:

$$m\measuredangle ACD = 90°$$

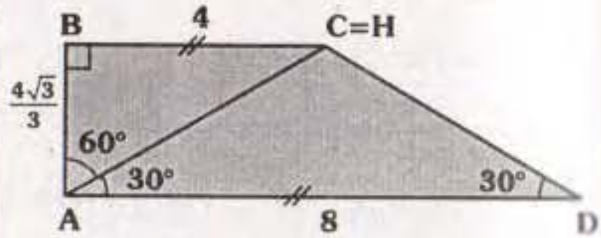
- Como $m\measuredangle CAD = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero, entonces su altura mide $2\sqrt{3}$

- $S_{\triangle ABCD} = \left(\dfrac{8+4}{2}\right)2\sqrt{3}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle ABCD} = 12\sqrt{3}}$$

Observación

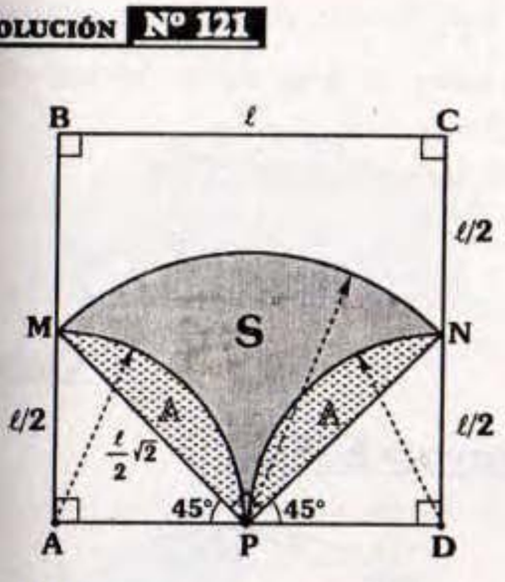
Puede ocurrir: H=C, el gráfico, quedará así:



$$S_{\triangle ABCD} = \left(\dfrac{8+4}{2}\right)\dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 121



Nos piden S.

- Del gráfico:

$$S+2A=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi\ell^2}{8} \qquad ...(I)$$

$$A=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{\pi\ell^2}{16}-\frac{\ell^2}{8} \quad ...(II)$$

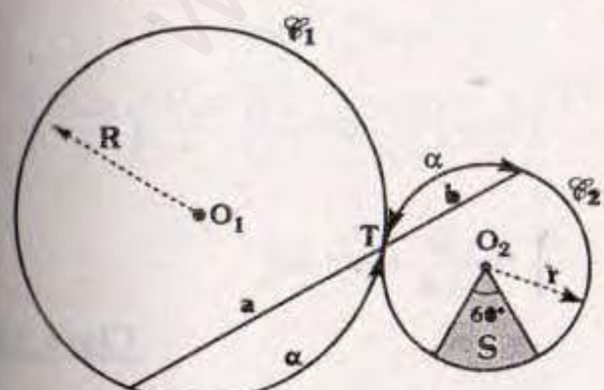
- De (I) y (II):

$$S+2\left(\frac{\pi\ell^2}{16}-\frac{\ell^2}{8}\right)=\frac{\pi\ell^2}{8}$$

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\ell^2}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 122



Nos piden S

- $$S=\frac{60°}{360°}\times\pi r^2=\frac{1}{6}\pi r^2 \qquad ...(I)$$

- Como $\mathscr{C}_1 \sim \mathscr{C}_2 \Rightarrow \dfrac{r}{R}=\dfrac{b}{a}$

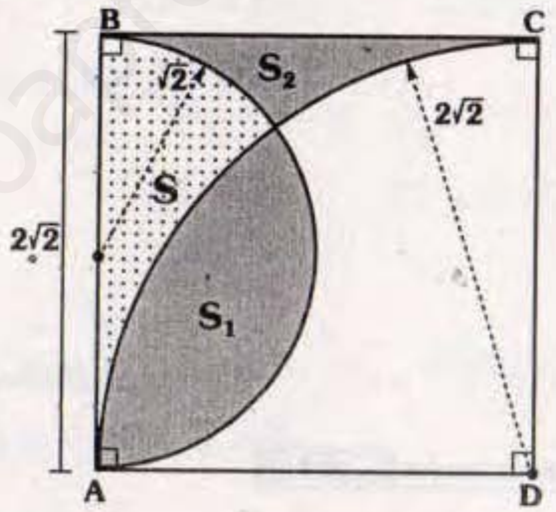
$$\Rightarrow r=\left(\frac{b}{a}\right)R \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\pi b^2R^2}{6a^2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 123



Nos piden $S_1 - S_2$

$$S_1+S=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2=\pi \qquad ...(I)$$

- $$S_2+S=S_{(ABCD)}-S_{\triangle}$$

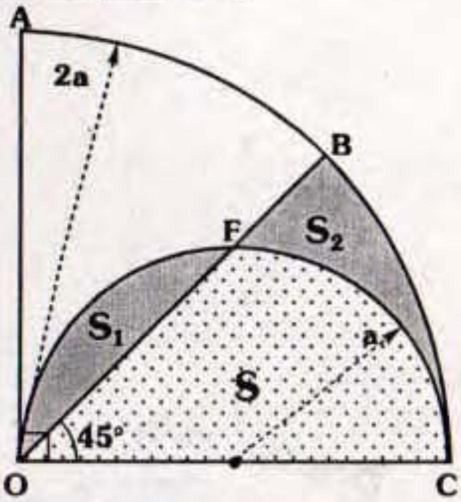
$$S_2+S=(2\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\pi(2\sqrt{2})^2=8-2\pi \ ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{S_1-S_2=3\pi-8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 124



Nos piden S_2

Dato: $S_1 = 36cm^2$

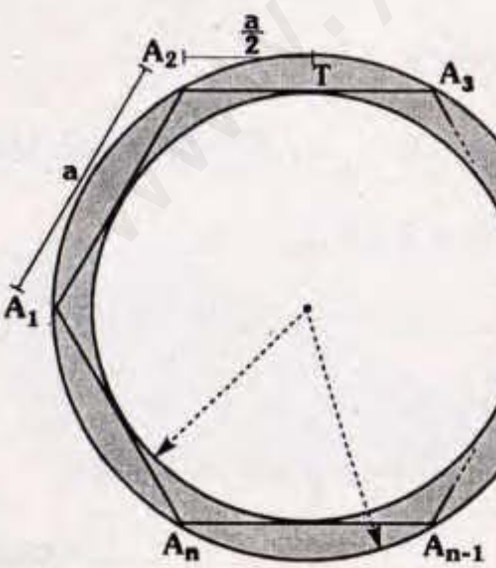
- $$S_1 + S = \frac{1}{2}\pi a^2 \qquad ...(I)$$
- $$S_2 + S = \frac{45°}{360°}\cdot\pi(2a)^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 \qquad ...(II)$$
- De (I) y (II): $S_1 + S = S_2 + S$

$$\Rightarrow S_1 = S_2$$

$$\therefore \mathbf{S_2 = 36cm^2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 125



Sea $A_1A_2A_3....A_n$ el polígono regular.

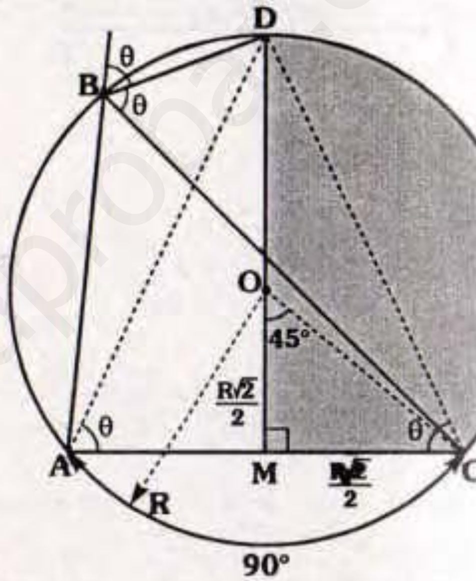
Nos piden el área de la corona circular (A_{cc}).

- Por teorema (pág. Nº38)

$$\therefore \quad \mathbf{A_{cc}} = \pi\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \frac{\pi \mathbf{a}^2}{\mathbf{4}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 126



Sea S el área de la región sombreada.

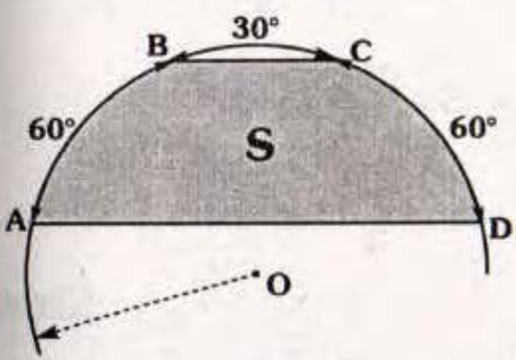
- Como $\overline{BD}$ es bisectriz exterior, entonces ΔDAC es isósceles, luego $\overline{DM}$ es mediana y altura y está contenido en la mediatriz $\Rightarrow \quad O \in \overline{DM}$
- $$S = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle OMC}$$

$$S = \frac{135°}{360°}\pi R^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{R^2}{8}(3\pi + 2)}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 127



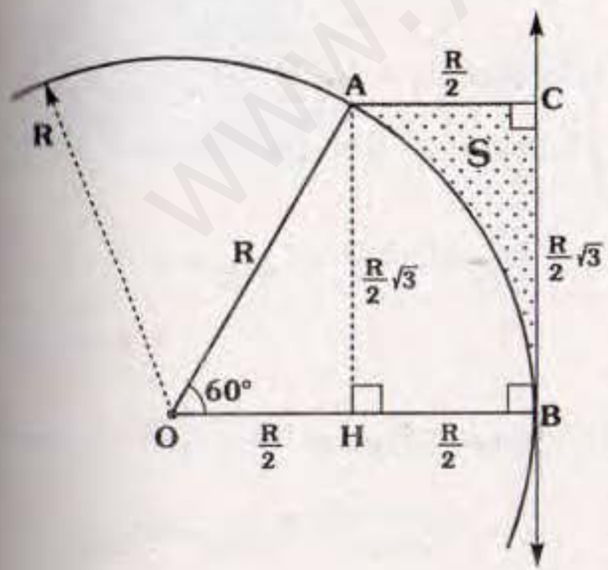
Nos piden el área de la región sombreada: S.

- $S = S_{\frown AD} - S_{\frown BC}$
- $S_{\frown AD} = \dfrac{150°}{360°}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{2}\operatorname{sen}150° = \dfrac{5}{12}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{4}$ ...(I)
- $S_{\frown BC} = \dfrac{30°}{360°}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{2}\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{12}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{4}$ ...(II)
- De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{S = \frac{1}{3}\pi R^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 128



Nos piden S

- $S = S_{(\square OACB)} - S_{\measuredangle AOB}$

$$S_{(\square OACB)} = \frac{1}{2}\left(R + \frac{R}{2}\right).\frac{R}{2}\sqrt{3} = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{8}$$

- $S_{\measuredangle AOB} = \dfrac{1}{6}\pi R^2$

$$\Rightarrow\ S = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{6}\pi R^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}}$$

Clave B

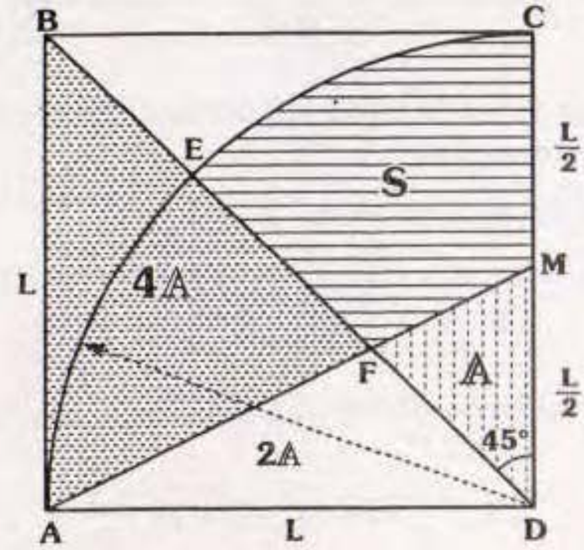
RESOLUCIÓN Nº 129

Por teorema:

$$A_{\substack{\text{corona}\\\text{circular}}} = \frac{\pi(2^2)}{4} = \pi$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 130



Nos piden S

- $\Delta AFB \sim \Delta MFD \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta DMF}}{S_{\Delta BFA}} = \dfrac{1}{4}$

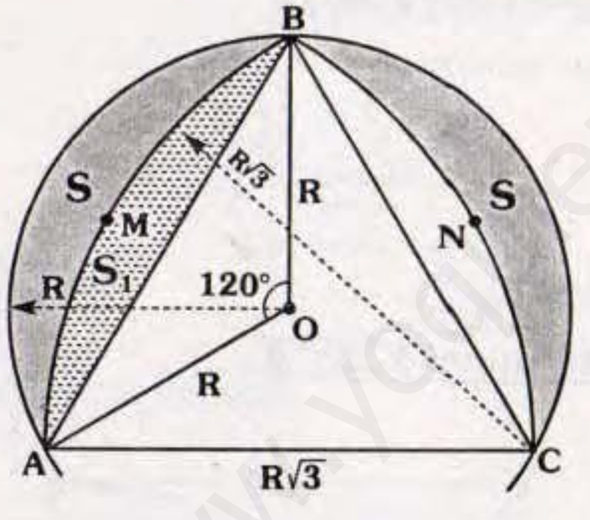
- Como $6\mathbf{A} = \dfrac{L^2}{2} \Rightarrow S_{\Delta DMF} = \dfrac{1}{12}L^2$

- $S = \dfrac{45°}{360°}\pi L^2 - \dfrac{1}{12}L^2$

$$\therefore \ \mathbf{S = \frac{L^2}{24}(3\pi - 2)}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 131



Nos piden la suma de áreas de las regiones sombreadas: 2S

- Hallemos primero: $S + S_1$

$$S + S_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Hallemos ahora: S_1

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi(R\sqrt{3})^2 - (R\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

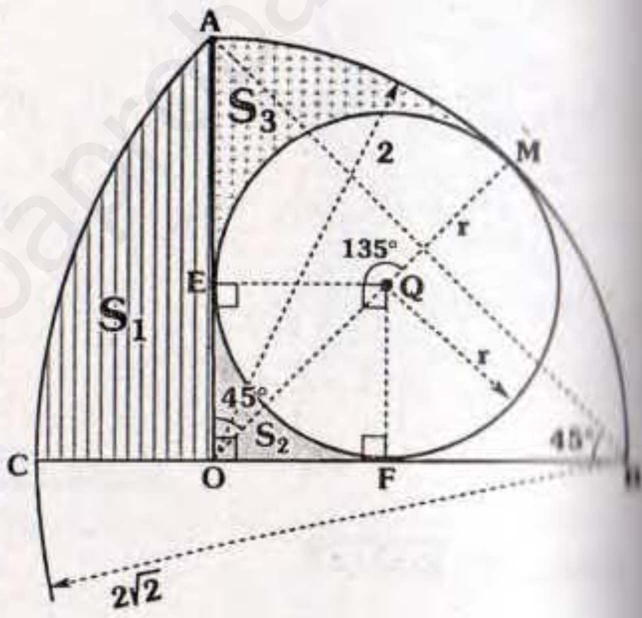
$$S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ S = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

$$\therefore \ \mathbf{2S = \frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 132



Nos piden $S_1 + S_2 + S_3$

- Hallemos el área por separado:

$$S_1 = \frac{45°}{360°}\pi(2\sqrt{2})^2 - \underbrace{S_{\triangle AOB}}_{2} = \pi - 2 \quad \text{...(I)}$$

$$S_2 = S_{(EOFQ)} - S_{\triangle EQF} = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 \quad \text{...(II)}$$

$$S_3 = S_{(\triangle AOM)} - S_{\triangle OEQ} - S_{\triangle EQM}$$

⇒ $S_3 = \frac{45°}{360°}\pi(2)^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{135°}{360°}\pi r^2$

⇒ $S_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{3}{8}\pi r^2$ ...(III)

• Sumando (I), (II) y (III)

$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3\pi}{2} - 2 + \frac{r^2}{2} - \frac{5}{8}\pi r^2$ ...(IV)

• Pero $r + r\sqrt{2} = 2 \Rightarrow r = 2(\sqrt{2} - 1)$

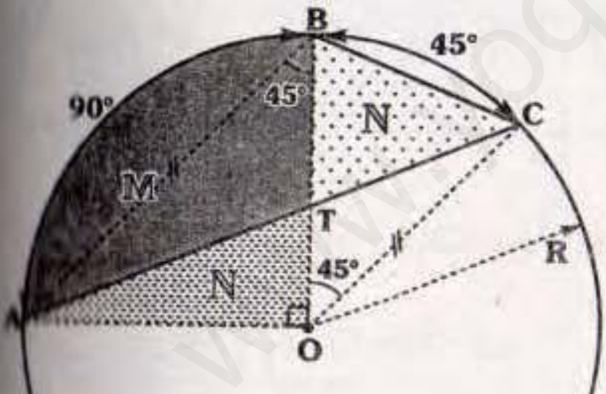
$\Rightarrow r^2 = 4(3 - 2\sqrt{2})$

• Reemplazando en (IV):

$S_1 + S_2 + S_3 = \mathbf{(4 + 5\pi\sqrt{2} - 6\pi - 4\sqrt{2})u^2}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 133



Piden $\mathbb{M} + \mathbb{N}$

• Como $m\widehat{AB} = 90°$ y $m\sphericalangle\widehat{BC} = 45° \Rightarrow$

$m\sphericalangle BOC = m\sphericalangle ABO = 45°$

$\Rightarrow \overline{AB} // \overline{OC}$

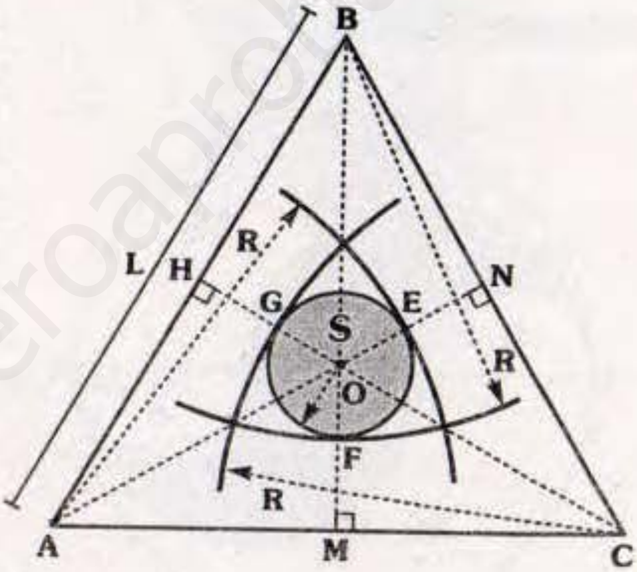
• Por teorema:

$S_{\triangle BTC} = S_{\triangle AOT} = \mathbb{N}$

• $\mathbb{M} + \mathbb{N} = \mathbf{S_{\triangle AOB}} = \frac{1}{4}\pi R^2$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 134



Nos piden S

• $\triangle ABC$: Equilátero con AB = L

$\Rightarrow AN = CH = BM = \frac{L}{2}\sqrt{3}$

• Al trazar los arcos de centros A, B y C de radios $R = \frac{2}{5}L\sqrt{3}$ cada dos arcos concurren con la altura.

• Como OG=OE=OF= $\underbrace{R}_{\frac{2}{5}L\sqrt{3}} - \underbrace{AO}_{\frac{L}{3}\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \ OG = \frac{L}{15}\sqrt{3}$

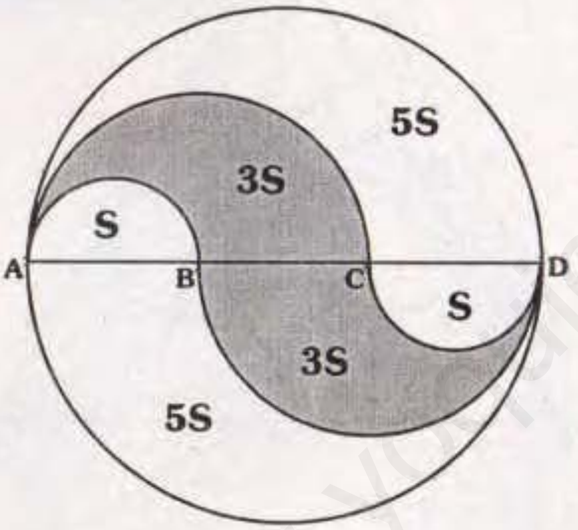
- Nos piden el área del círculo de radio OG

$$\Rightarrow \ S = \pi\left(\frac{L}{15}\sqrt{3}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{S = \frac{\pi L^2}{75}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 135



- Sea S_x el área de la parte sombreada
- S_y el área de la parte no sombreada
- Nos piden $\frac{S_x}{S_y}$
- Como los semicírculos son semejantes

$$\Rightarrow \ \frac{S_{\frown AB}}{(AB)^2} = \frac{S_{\frown AC}}{(AC)^2} = \frac{S_{\frown AD}}{(AD)^2} = S$$

$\Rightarrow \ S_{\frown AB} = S \ ; \ S_{\frown AC} = 4S$ y

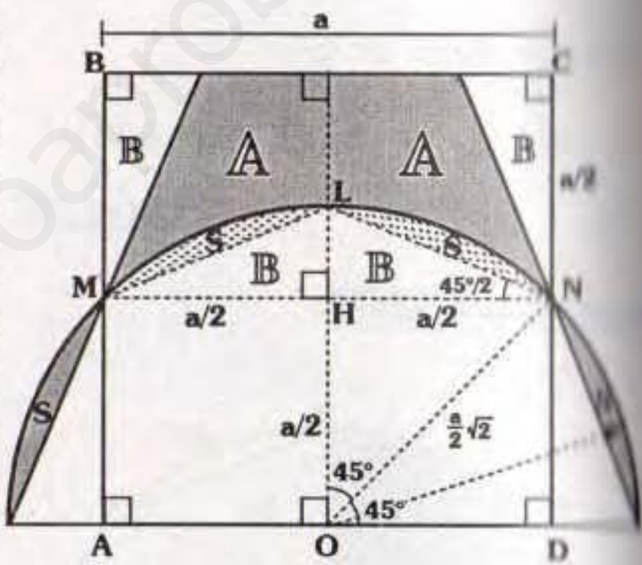
$S_{\frown AD} = 9S$

- Análogamente para la parte inferior
- Luego: $S_x = 6S$ y $S_y = 12S$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{S_x}{S_y} = \frac{1}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 136



Nos piden: $2(\mathbb{A} + S)$

- $2(\mathbb{A} + 2\mathbb{B} + S) = a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow \ \mathbb{A} + S = \frac{a^2}{4} - 2\mathbb{B}$$

- Como

$$ON = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad y \quad OH = \frac{a}{2}$$

$\Rightarrow$ $HL = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{B} = \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1) = \frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)$

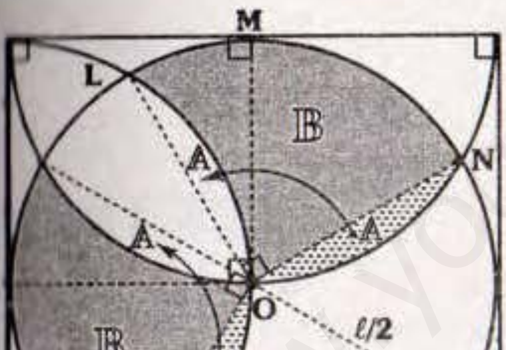
Luego: $\mathbb{A} + S = \frac{a^2}{4} - 2\frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)$

$$\Rightarrow \mathbb{A} + S = \frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2})$$

$$\therefore\ \mathbf{2(\mathbb{A}+S) = \frac{a^2}{2}(3-2\sqrt{2})}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 137



Nos piden el área de la región sombreada

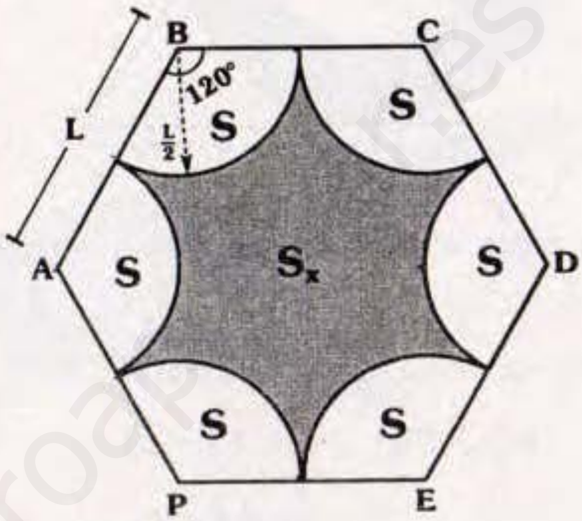
- Notemos que los Δ_s EOF y MON son equiláteros.
- Por traslado de áreas, tenemos:

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = S_{\text{D}} = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\pi\ell^2}{16}$$

$$\therefore\ \mathbf{2(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \frac{\pi\ell^2}{8}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 138



Nos piden S_x

- Hallemos S_x por diferencia:

$$S_x = S_{(ABCDEF)} - 6S$$

- $S_{(ABCDEF)} = 6\left(L^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2}L^2\sqrt{3}$

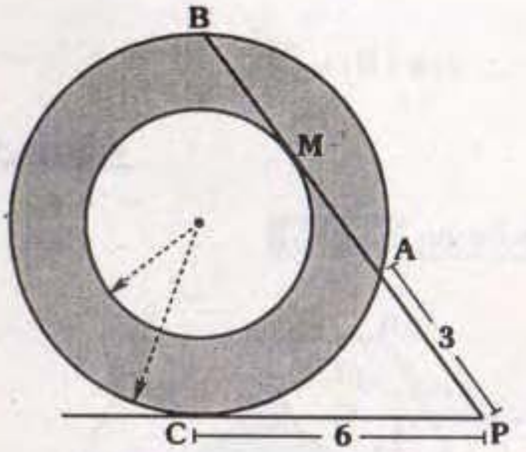
- $$S = \frac{120°}{360°}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\pi L^2$$

$$\Rightarrow\ S_x = \frac{3}{2}L^2\sqrt{3} - 6\left(\frac{1}{12}\pi L^2\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x = \frac{L^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 139



Nos piden el área de la corona circular (A_{cc})

- Por teorema de la tangente:

$$6^2=3(PB) \Rightarrow PB=12$$

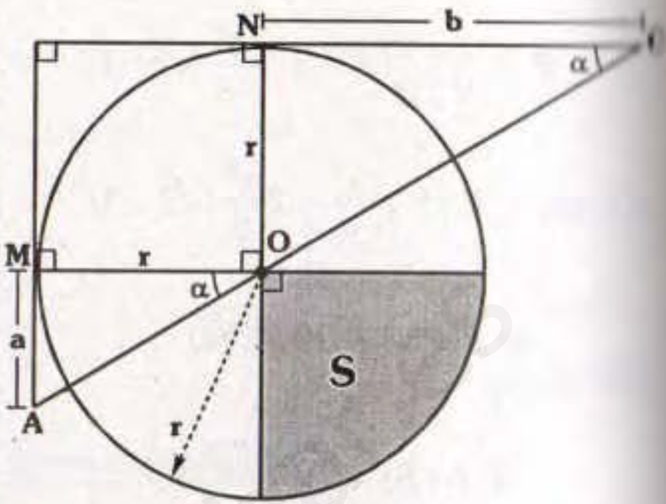
$$\Rightarrow AB=9$$

- Luego: $A_{cc}=\pi\frac{(AB)^2}{4}$

$$\therefore\ \mathbf{A_{cc}=\frac{81}{4}\pi u^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 140



Piden S

- Conocemos que $S=\frac{1}{4}\pi r^2$
- $\measuredangle OMA \sim \measuredangle CNO$

$$\frac{r}{a}=\frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow r^2=ab$$

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\pi}{4}ab}$$

Clave D

❖❖❖❖❖

RESOLUCIÓN Nº 141

Nos piden la relación entre S_1, S_2, S_3 y S_4

Sea el área de la región MNLB: S

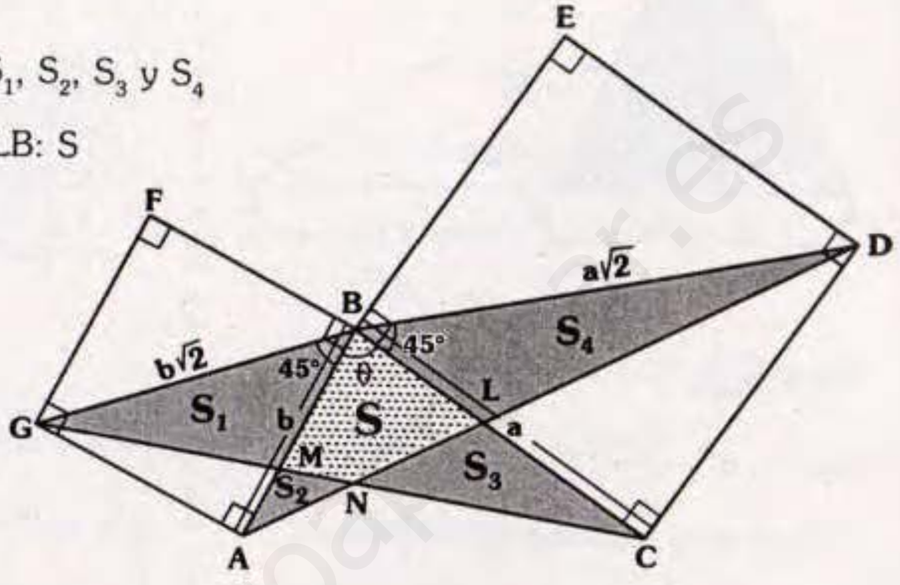
Del gráfico:

$$S_{\Delta GBC}=\frac{(b\sqrt{2})a}{2}\operatorname{sen}(45°+\theta)$$

$$S_{\Delta ABD}=\frac{b(a\sqrt{2})}{2}\operatorname{sen}(45°+\theta)$$

$\Rightarrow\ S_{\Delta GBC}=S_{\Delta ABD}$

$\Rightarrow\ S_1+S+S_3=S_2+S+S_4$



$\therefore\ \mathbf{S_1+S_3=S_2+S_4}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 142

Nos piden x

- Notemos que: ⊿PDC~⊿EAP

$$\Rightarrow\ \frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{\ell}{a}\right)^2$$

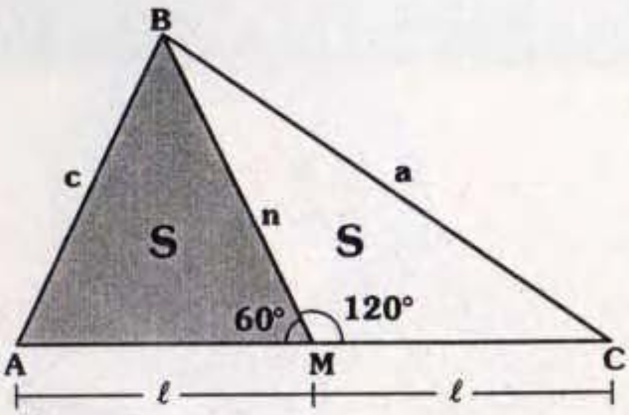
$$\Rightarrow\ \ell=4a$$

- Luego: $PD=3a$
- ⊿PDC: notable

$$\therefore\ \mathbf{x=37°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 143



Piden $S_{\Delta ABC}$

Dato: $a^2 - c^2 = 12$

- Usemos el teorema de cosenos en

$\Delta MBC: \quad a^2 = \ell^2 + n^2 + \ell n$

$\Delta ABM: \quad c^2 = \ell^2 + n^2 - \ell n$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a^2 - c^2}_{12} = 2\ell n$$

$$\Rightarrow \quad \ell n = 6$$

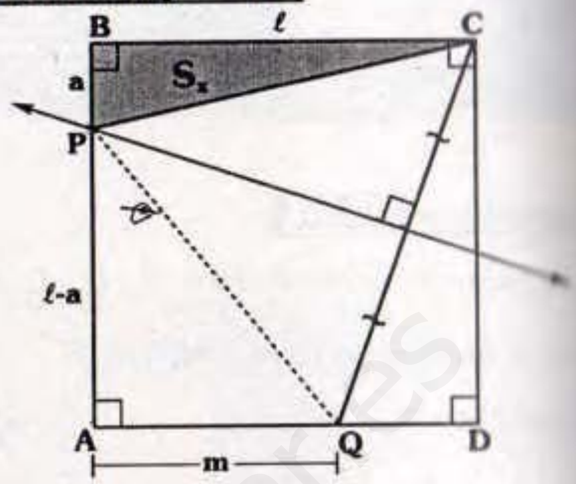
- $$S_{\Delta ABM} = S = \frac{\ell n}{2}\text{sen}60°$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 144



Nos piden S_x

- En ⊿PBC: $\quad S_x = \dfrac{a\ell}{2}$ ...(I)

- Por teorema de la mediatriz:

$$PC = PQ$$

- Por teorema de Pitágoras en:

⊿PBC: $\quad a^2 + \ell^2 = (PC)^2$

⊿PAQ: $\quad m^2 + (\ell - a)^2 = (PQ)^2$

$$\Rightarrow \quad a^2 + \ell^2 = m^2 + (\ell - a)^2$$

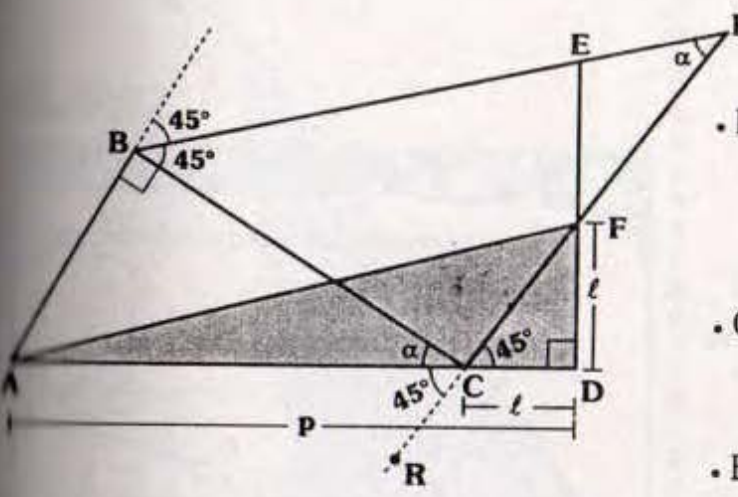
$$\Rightarrow \quad a\ell = \frac{m^2}{2}$$

- En (I): $\quad S_x = \dfrac{1}{2}(a\ell) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m^2}{2}\right)$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{m^2}{4}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 145



Nos piden: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}}$

- Del gráfico:

$$S_{\triangle ADF} = \frac{p\ell}{2} \qquad \ldots(I)$$

- Como E es excentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ m∢LBE = m∢CBE = 45°

- En $\triangle BPC$, por ∢ exterior:

m∢RCA = 45°

- En $\triangle CDF$: CD = DF = ℓ

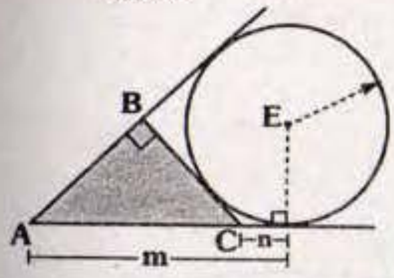
- Del gráfico: $S_{\triangle ABC} = p\ell \qquad \ldots(II)$

- De (I) y (II):

$$\therefore \ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}} = 2$$

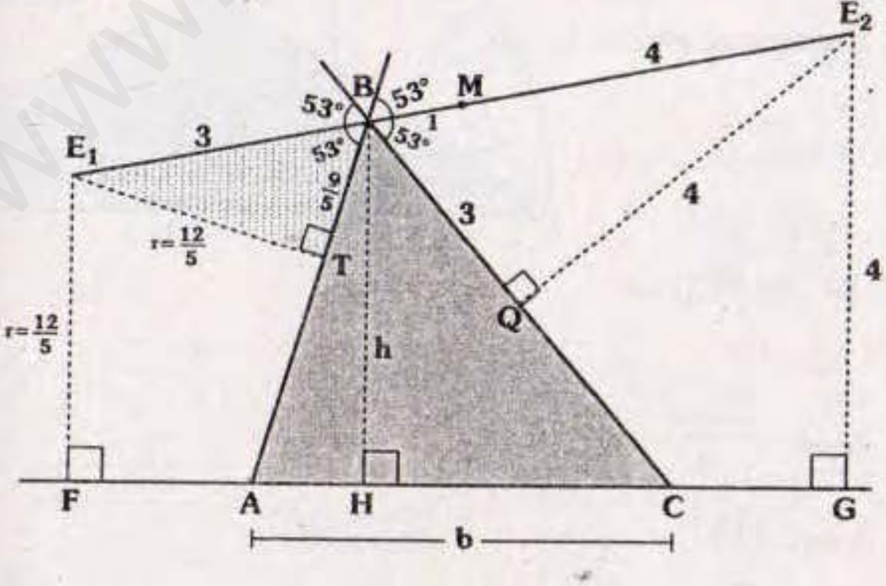
Recordar

$S_{\triangle ABC} = mn$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 146



Piden $S_{\Delta ABC}$

- Sea $AB = c$; $BC = a$ y $AC = b$
- Como E_1 y E_2 son excentros, entonces:

$$\left.\begin{aligned} BQ &= p-c \\ BT &= p-a \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3+\frac{9}{5} &= \underbrace{2p-a-c} \\ \frac{24}{5} &= \quad b \end{aligned}$$

- En el trapecio FE_1E_2G; por teorema de semejanza:

$$h = \frac{4(3)+\frac{12}{5}(5)}{3+5}$$

$$\Rightarrow \quad h = 3$$

- Finalmente:

$$\mathbf{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right)3 = \frac{36}{5}}$$

Clave A

Nota

También se podría trazar la circunferencia inscrita:

$$S_{\Delta ABC} = (p-a)(p-c).\text{ctg}\frac{74°}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{9}{5}.3.\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ S_{\Delta ABC} = \frac{36}{5}$$

RESOLUCIÓN Nº 147

Nos piden $S_{\Delta AMD}$

- Por teorema de circunferencia:

A, T y N colineales y

$$m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle BNA$$

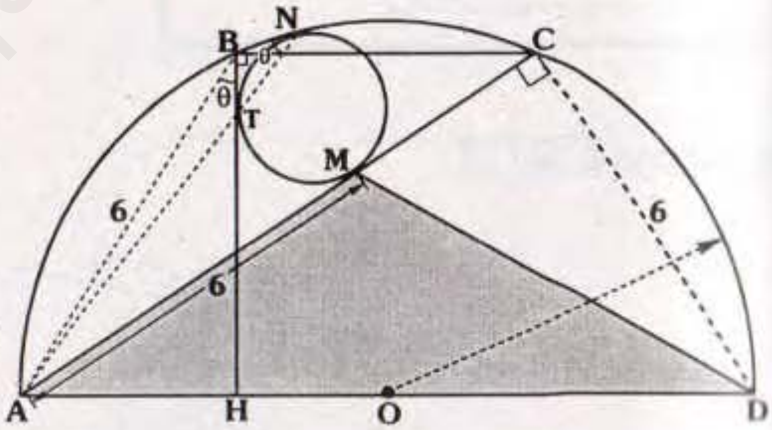
- Por teorema de la tangente:

$$(AM)^2 = (AT)(AN) \qquad ...(I)$$

- Por teorema de semejanza en el ΔABN:

$$(AB)^2 = (AT)(AN) \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II): $\quad AM = AB$
- Como $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow AB = CD = 6$
- Finalmente:

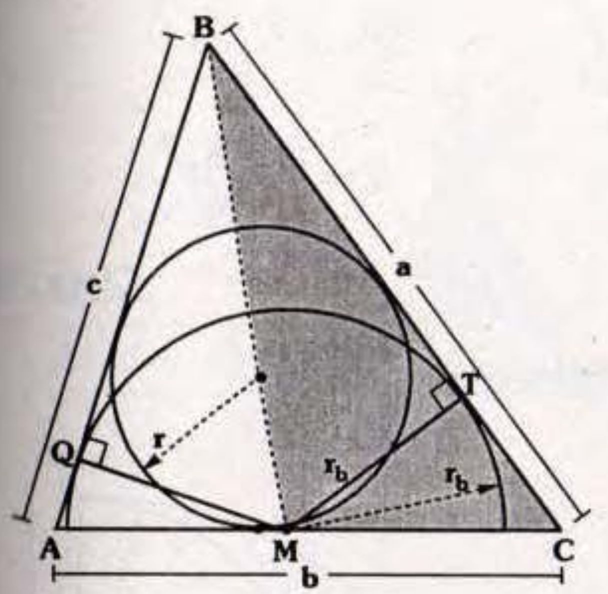


$$S_{\Delta AMD} = \frac{(6)(6)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta AMD} = 18}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 148



Sea S el área de la región ABC

Dato: $\frac{x}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$; piden x

$$\Rightarrow \; S=S_{(\Delta AMB)}+S_{(\Delta MBC)}$$

$$S=\frac{cr_b}{2}+\frac{ar_b}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r_b}=\frac{a+c}{2S}$$

Análogamente: $\frac{1}{r_a}=\frac{b+c}{2S}$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{a+b}{2S}$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{\cancel{2}(a+b+c)}{\cancel{2}S}=2\frac{p}{S}$$

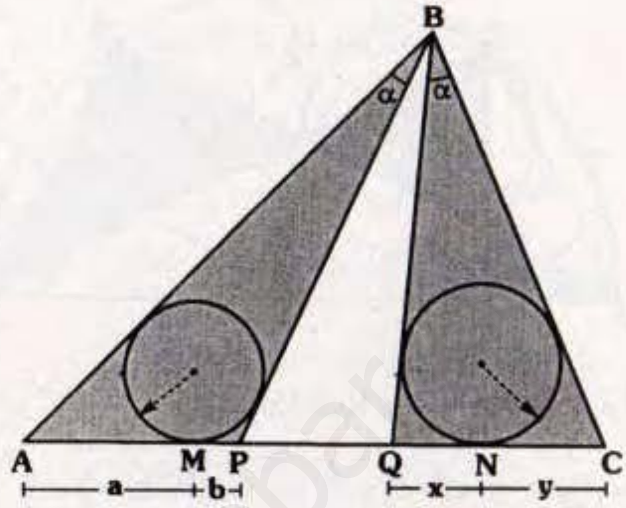
Pero: $\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

Finalmente: $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{r}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 149



Por demostrar: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Por teorema (página Nº43):

$$S_{\Delta ABP}=(ab)\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta QBC}=(xy)\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta QBC}}=\frac{ab}{xy}$$

Por relación de áreas:

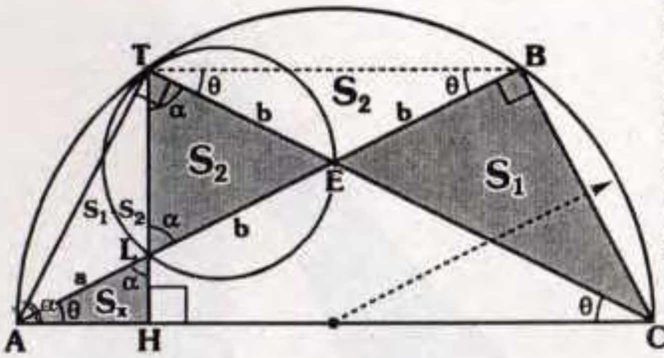
$$\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta QBC}}=\frac{a+b}{x+y}$$

$$\Rightarrow \; \frac{ab}{xy}=\frac{a+b}{x+y}$$

$$\Rightarrow \; \frac{x+y}{xy}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

RESOLUCIÓN Nº 150



Nos piden S_x en función de S_1 y S_2

- Sea $m\sphericalangle BAC = \theta \Rightarrow m\sphericalangle BTE = \theta$
- Como: $m\overset{\frown}{TE} = m\overset{\frown}{TC}$

  $\Rightarrow m\sphericalangle TLE = m\sphericalangle TAC = \alpha$
- Como: $\alpha + \theta = 90°$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ACT = \theta = m\sphericalangle ABT$

  $\Rightarrow \overline{TB} // \overline{AC} \Rightarrow S_{\triangle ATE} = S_{\triangle EBC} = S_1$

  $\Rightarrow S_{\Delta ALT} = S_1 - S_2$
- Por razón de áreas:

$$\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{a}{b} \qquad \ldots(\text{I})$$

- Por teorema de semejanza:

$$\frac{S_x}{2S_2} = \left(\frac{a}{2b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2S_x}{S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad \ldots(\text{II})$$

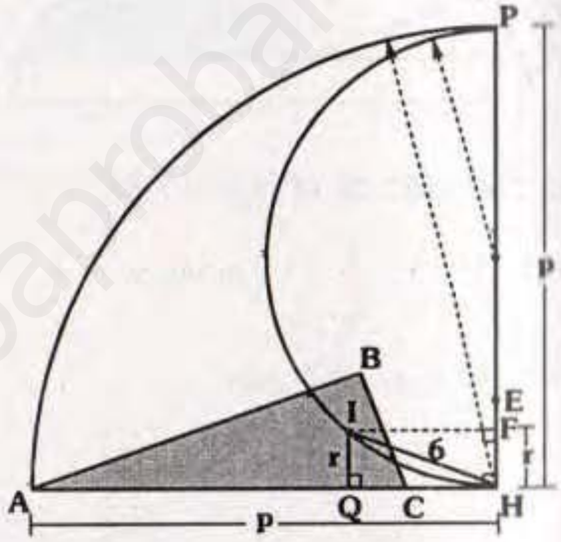
- De (I) y (II):

$$\frac{2S_x}{S_2} = \left(\frac{S_1 - S_2}{S_2}\right)^2$$

$$\therefore \mathbf{S_x = \frac{(S_1 - S_2)^2}{2S_2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 151



Nos piden $S_{\Delta ABC}$

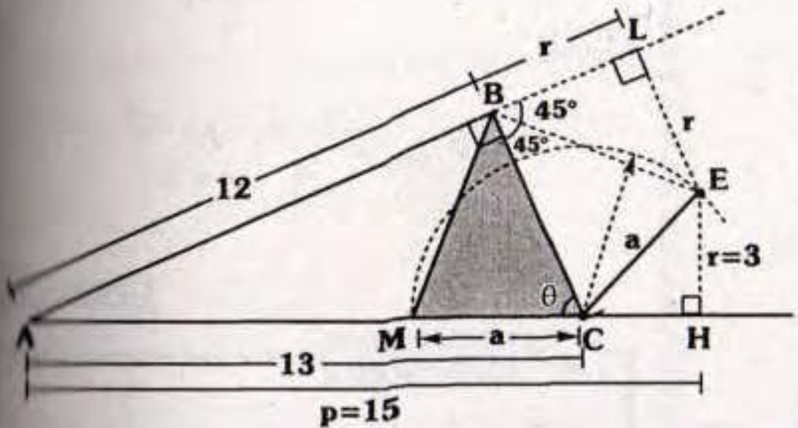
- Sabemos que AH=HP representa el semiperímetro del triángulo ABC
- Se traza $\overline{IF} \perp \overline{HP}$ (F en $\overline{HP}$)

  $\Rightarrow HF = r$
- En ⌓: $6^2 = \underbrace{rp}_{S_{\Delta ABC}}$

$$\therefore \mathbf{S_{\Delta ABC} = 36}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 152



Nos piden $S_{\Delta CMB}$

- Por fórmula trigonométrica:

$$S_{\Delta CMB}=\frac{(a)(5)}{2}\operatorname{sen}\theta \qquad ...(I)$$

- En $\measuredangle$ABC: $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{12}{13}$

- Por teorema de circunferencia:

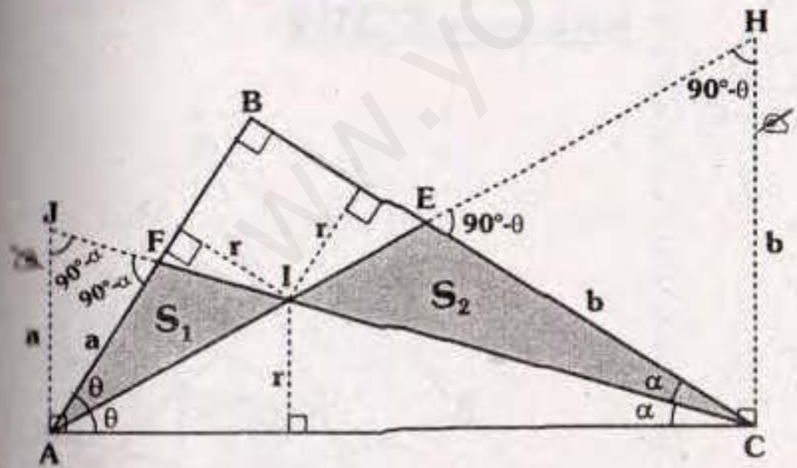
$$AL=AH=p=\frac{13+12+15}{2}=15 \quad \Rightarrow \quad CH=2 \text{ y } BL=r=3$$

- En $\measuredangle$CHE: $a^2=3^2+2^2 \;\Rightarrow\; a=\sqrt{13}$
- En (I):

$$S_{\Delta CMB}=\frac{(\sqrt{13})(5)}{2}\cdot\frac{12}{13} \qquad \therefore\; \mathbf{S_{\Delta CMB}=\frac{30}{13}\sqrt{13}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 153



Nos piden: S_1+S_2

Sea r el inradio del triángulo ABC

$$\Rightarrow S_1+S_2=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{r}{2}(a+b) \;...(II)$$

- Se trazan las perpendiculares a $\overline{AC}$ por A y C las cuales cortan a las prolongaciones de $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$ en J y H respectivamente.

- Luego los Δs JAF y ECH son isósceles
- Por teorema de semejanza:

$$r=\frac{ab}{a+b}$$

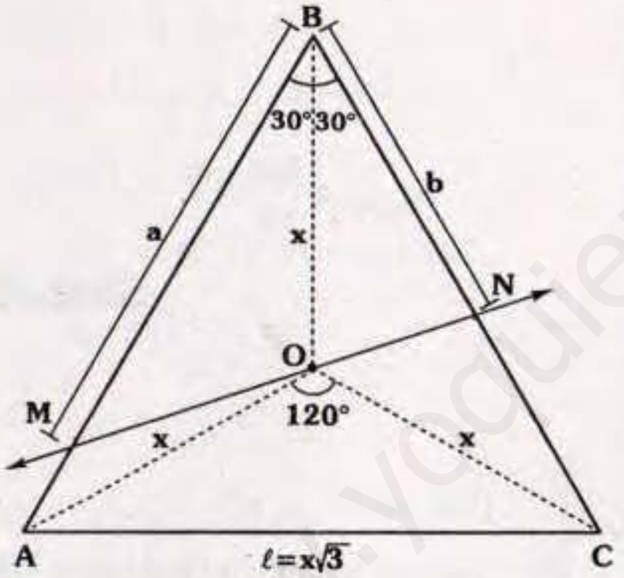
- En (I):

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\frac{ab}{(a+b)}(a+b)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=\frac{ab}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 154



Nos piden $S_{\Delta ABC}$

- Como es equilátero, entonces:

$$S_{\Delta ABC}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}\qquad ...(I)$$

- En ΔMBN, de la observación:

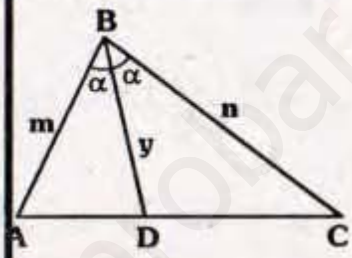
$$x=\frac{2ab}{a+b}\cos 30°=\frac{ab}{a+b}\sqrt{3}$$

- En ΔAOC: $\ell=x\sqrt{3}=\dfrac{3ab}{a+b}$
- En(I):

$$\mathbf{S_{\Delta ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2}$$

Clave C

Observación



Se cumple:

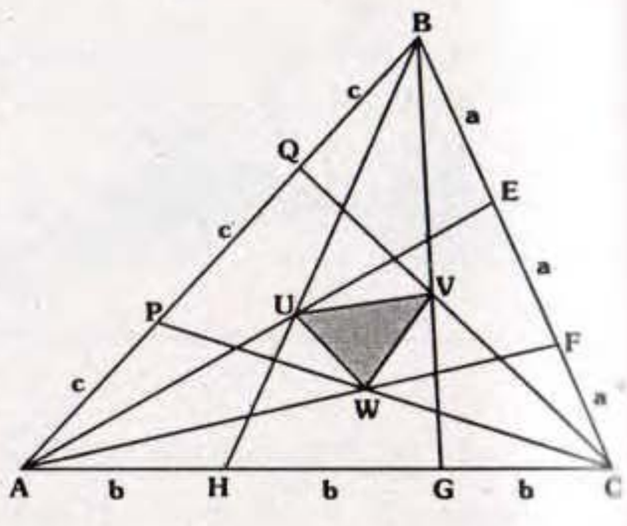
$$\boxed{y=\frac{2mn}{m+n}\cos\alpha}$$

Prueba: $S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BDC}=S_{\Delta ABC}$

$$\frac{my}{2}\operatorname{sen}\alpha+\frac{ny}{2}\operatorname{sen}\alpha=\frac{mn}{2}\operatorname{sen}2\alpha$$

$$\therefore\ y=\frac{2mn}{m+n}\cos\alpha$$

RESOLUCIÓN Nº 155



Nos piden $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}}$

- En el ΔABG, usemos el teorema de Menelao ($\overline{QC}$ es la recta secante)

$$(2c)(BV)b = c(VG)3b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BV}{VG} = \frac{3}{2} \qquad \ldots(\text{I})$$

- En ΔHBG, $\overleftrightarrow{AE}$ es la recta secante también por teorema de Menelao:

$$\frac{BU}{UH} = \frac{3}{2} \qquad \ldots(\text{II})$$

- De (I) y (II): $\overline{UV} // \overline{HG}$
- Análogamente se prueba:

$$\overline{UW} // \overline{EF} \quad \text{y} \quad \overline{WV} // \overline{PQ}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta UVW$$

- Como $\Delta UBV \sim \Delta HBG \Rightarrow \dfrac{UV}{b} = \dfrac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{UV}{AC} = \frac{1}{5}$$

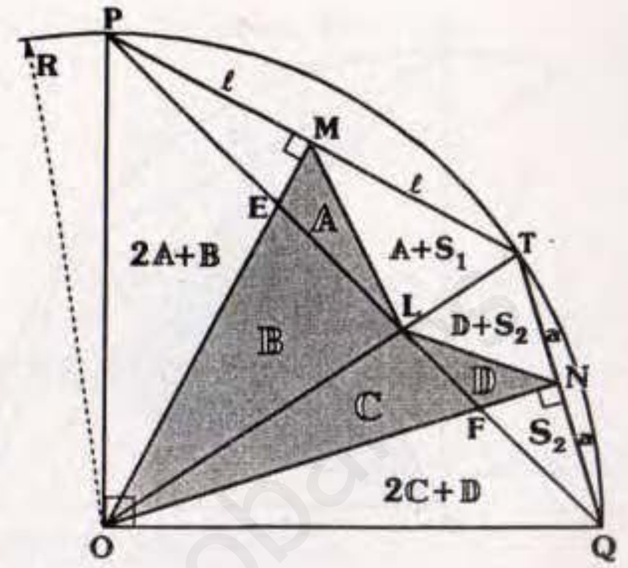
- Por teorema de semejanza de áreas.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}} = \left(\frac{AC}{UV}\right)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}} = 25}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 156



Nos piden $S_{\measuredangle MLNO}$

- Del gráfico tenemos que M y N son puntos medios de $\overline{PT}$ y $\overline{TQ}$ respectivamente.
- Luego:

$$S_{\Delta LMT} = S_{\Delta LMP} = \mathbb{A} + S_1$$

$$S_{\measuredangle OMP} = S_{\measuredangle OMT} \Rightarrow S_{\Delta OEP} = 2\mathbb{A} + \mathbb{B}$$

Análogamente: $S_{\Delta OFQ} = 2\mathbb{C} + \mathbb{D}$

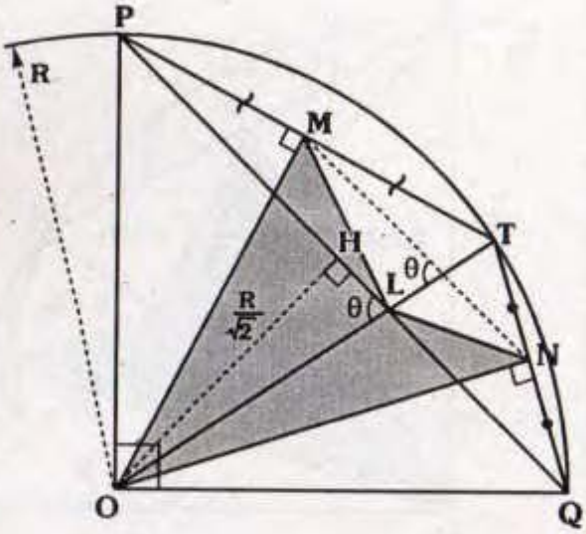
- Finalmente:

$$\underbrace{2\mathbb{A} + 2\mathbb{B} + 2\mathbb{C} + 2\mathbb{D}}_{2S_{\measuredangle MLNO}} = \frac{R^2}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\measuredangle MLNO} = \frac{R^2}{4}}$$

Clave E

Otro método



Usando la fórmula general:

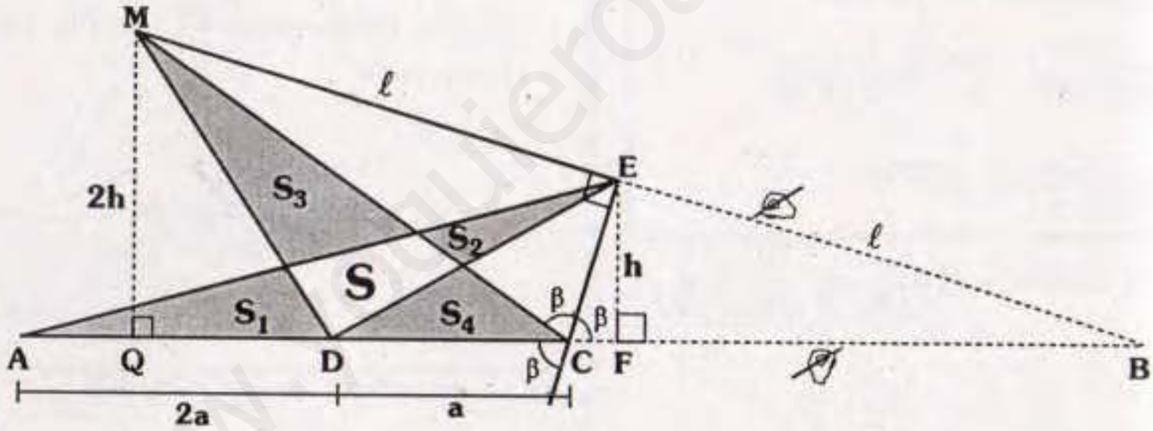
$$S_{\measuredangle MLNO}=\frac{(OL)(MN)}{2}\operatorname{sen}\theta \quad \ldots(I)$$

- Por base media: $MN=\frac{R\sqrt{2}}{2}$
- En $\triangle$OHL:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{R}{\sqrt{2}(OL)}$$

- En (I): $S_{\measuredangle MLNO}=\frac{R^2}{4}$

Resolución Nº 157



Nos piden la relación entre S_1; S_2; S_3 y S_4

- Al prolongar $\overline{ME}$ y $\overline{AC}$ notemos que el ΔMCB es isósceles $\Rightarrow ME = EB$
- Tracemos $\overline{EF}$ y $\overline{MQ}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB} \Rightarrow MQ = 2(EF)$
- Finalmente:

$$S_{\Delta ADE}=\frac{(2a)h}{2}=ah$$

$$S_{\Delta CDM}=\frac{(a)2h}{2}=ah$$

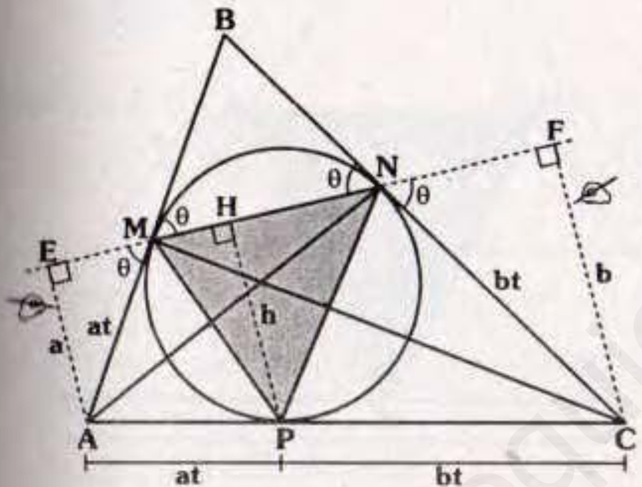
$$\Rightarrow\ S_{\Delta ADE}=S_{\Delta CDM}$$

$$S_1+S+S_2=S_3+S+S_4$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=S_3+S_4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 158



Piden $S_{\Delta MNP}$

Dato: $\dfrac{1}{S_{\Delta AMN}}+\dfrac{1}{S_{\Delta MNC}}=\dfrac{1}{k}$

- Como los tres triángulos (MNP, AMN y MNC) tienen igual base analicemos las alturas.
- $\measuredangle AEM \sim \measuredangle CFN \Rightarrow AM=at$ y $CN=bt$
- En el trapecio AEFC:

$$h=\frac{a(bt)+b(at)}{at+bt}=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

- Usemos la última expresión:

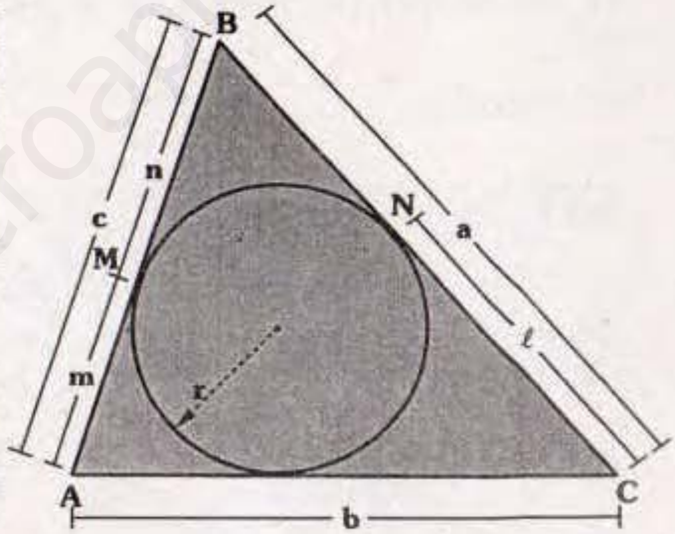
$$\frac{2}{\frac{h(MN)}{2}}=\frac{1}{\frac{a(MN)}{2}}+\frac{1}{\frac{b(MN)}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{S_{\Delta MNP}}=\frac{1}{S_{\Delta AMN}}+\frac{1}{S_{\Delta MNC}}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNP}=2k}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 159



Piden r.

Dato: $\dfrac{1}{mn}+\dfrac{1}{n\ell}+\dfrac{1}{m\ell}=\dfrac{1}{4}$

- Sea $p=\dfrac{a+b+c}{2}\Rightarrow m=p-a;\ n=p-b$ y $\ell=p-c\ \Rightarrow\ p=m+n+\ell$
- Usando la siguiente expresión del área:

$$S_{\Delta ABC} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \Rightarrow \quad pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \quad (m+n+\ell)r^2 = mn\ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{mn}+\frac{1}{n\ell}+\frac{1}{m\ell}} = \frac{1}{r^2}$$

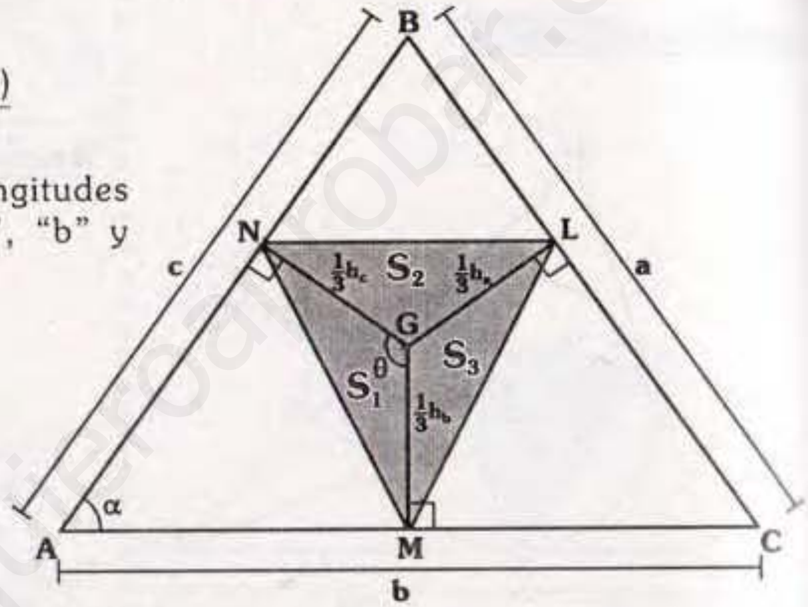
$$\therefore \ \mathbf{r = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 160

Nos piden probar:

$$S_{\Delta LMN} = \frac{4(S_{\Delta ABC})^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$$



- Sean "h_a", "h_b" y "h_c" las longitudes de las alturas relativas a "a", "b" y "c"
- Por teorema:

$$GN = \frac{1}{3}h_c \quad ; \quad GM = \frac{1}{3}h_b \ \text{ y}$$

$$GL = \frac{1}{3}h_a$$

- Como $\alpha + \theta = 180° \quad \Rightarrow \quad \dfrac{S_1}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{h_b h_c}{9bc}$

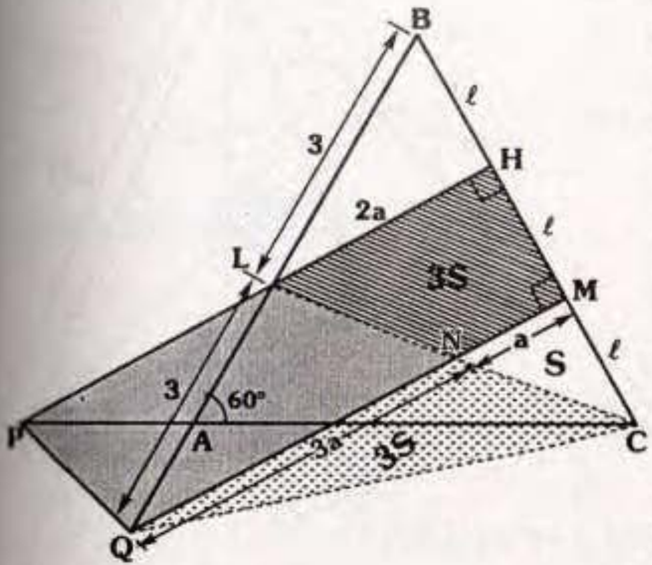
- Análogamente: $\dfrac{S_2}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{h_a h_c}{9ac}$ y $\dfrac{S_3}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{h_a h_b}{9ab}$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_1+S_2+S_3}{S_{\Delta ABC}} = \frac{h_b h_c}{9bc} + \frac{h_a h_c}{9ac} + \frac{h_a h_b}{9ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\Delta LMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(bh_b)(ch_c)}{9b^2c^2} + \frac{(ah_a)(ch_c)}{9a^2c^2} + \frac{(ah_a)(bh_b)}{9a^2b^2}$$

- Como: $2S_{\Delta ABC} = ah_a = bh_b = ch_c$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta LMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9b^2c^2} + \frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9a^2c^2} + \frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9a^2b^2} \qquad \therefore \quad \mathbf{S_{\Delta LMN} = \frac{4S^3_{\Delta ABC}(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}}$$

RESOLUCIÓN Nº 161



Nos piden $S_{(PQMH)}$

Dato: PC = 8 y BQ = 6

- Como BH=HM=MC $\Rightarrow \overline{NM}$ es base media en el $\triangle$LHC $\Rightarrow$ LH=2(MN)=2a; $\overline{LH}$ es base media en el $\triangle$QMB $\Rightarrow$ QM=2(LH)=4a
- Luego QN=3(NM)=3a
- Sea $S_{(MNC)}=S \Rightarrow S_{(QNC)}=3S$ y en el $\triangle$LHC: $S_{(LHMN)}=3S$

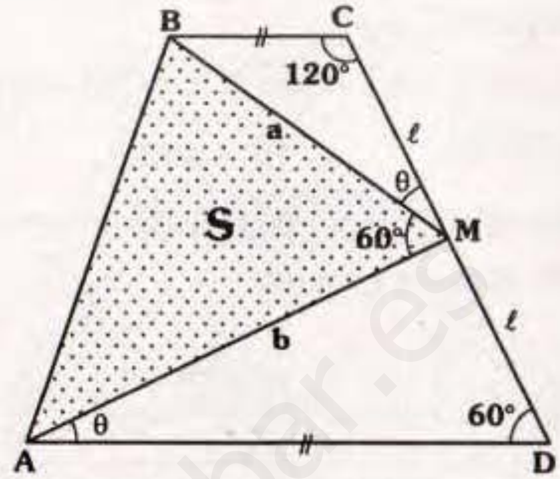
$\Rightarrow S_{(QNC)}=S_{(LHMN)}=3S$

- Notemos ahora: $S_{(PQMH)}=\underbrace{S_{(PLCQ)}}_{\frac{(8)(3)}{2}\text{sen}60°}$

$\therefore$ $\mathbf{S_{(PQMH)}=6\sqrt{3}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 162



Nos piden $S_{(ABCD)}$

Dato $ab=20u^2$

- Como $\overline{AD}//\overline{BC} \Rightarrow m\sphericalangle ADC=60°$
- En ΔADM por ángulo exterior:

$m\sphericalangle AMC=60°+\theta \Rightarrow m\sphericalangle AMB=60°$

$\Rightarrow S=\frac{ab}{2}\text{sen}60°$

$S=5\sqrt{3}$

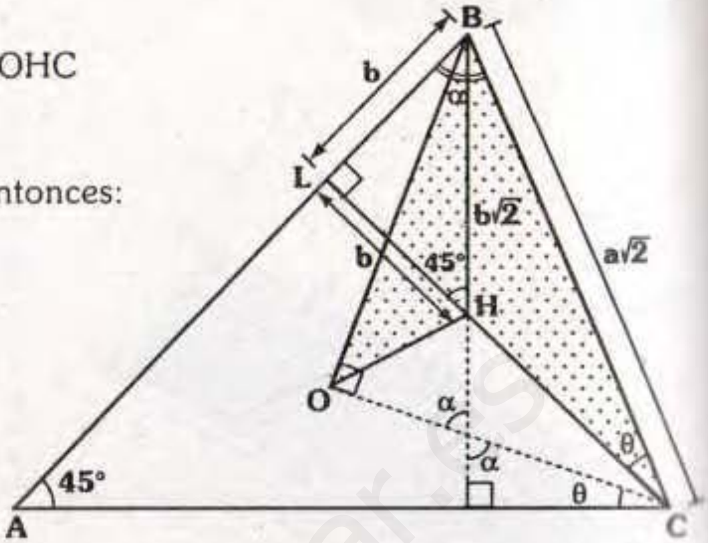
- Por propiedad:

$S_{(ABCD)}=2S$

$\therefore$ $\mathbf{S_{(ABCD)}=10\sqrt{3}\ u^2}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 163



Consideremos el orden de los vértices: BOHC

Nos piden $S_{(\measuredangle BOHC)}$

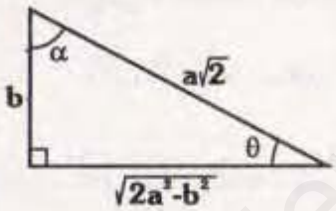
- Como el circunradio (OC=OB) es a, entonces:

$$BC = a\sqrt{2}$$

- En $\triangle$BLH: $\quad BH = b\sqrt{2}$
- Por fórmula general:

$$S_{(\measuredangle BOHC)} = \frac{(b\sqrt{2})\overbrace{(OC)}^{a}}{2}\operatorname{sen}\alpha \quad ...(I)$$

- Como $m\sphericalangle OCA = m\sphericalangle HCB = \theta$ y $\alpha + \theta = 90° \Rightarrow m\sphericalangle CBA = \alpha$
- En $\triangle$BLC:

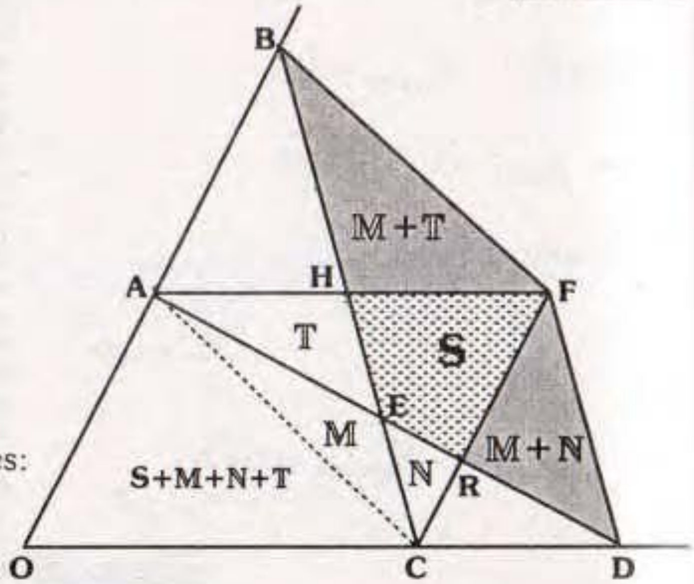


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{a\sqrt{2}}$$

- En (I): $\quad S_{(\measuredangle BOHC)} = \frac{b\cancel{\sqrt{2}}a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{\cancel{a\sqrt{2}}} \qquad \therefore \quad \mathbf{S_{(\measuredangle BOHC)} = \frac{b\sqrt{2a^2 - b^2}}{2}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 164



Por demostrar: $\text{Área}_{(OAEC)} = \text{Área}_{(BFDE)}$

- Como $\overline{OB} // \overline{CF}$ y $\overline{OC} // \overline{AF}$, entonces:

$- S_{(\Delta ARC)} = S_{(\Delta RFD)} = \mathbb{M} + \mathbb{N}$

$- S_{(\Delta AHC)} = S_{(\Delta BHF)} = \mathbb{M} + \mathbb{T}$

- Al ser OAFC un paralelogramo, entonces:

$- S_{(\Delta OAC)} = S_{(\Delta OFC)} = \mathbb{S} + \mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{T}$

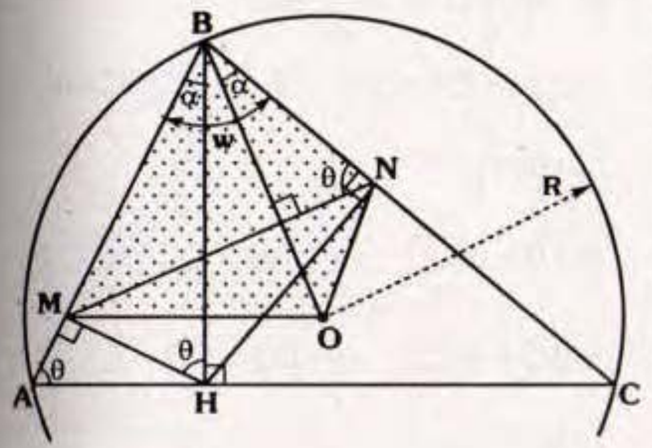
- Luego:

- $\text{Área}_{(OAEC)} = S + 2\mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{T}$ y

- $\text{Área}_{(BFDE)} = S + 2\mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{T}$

$$\therefore\ \textbf{Área}_{(OAEC)} = \textbf{Área}_{(BFDE)}$$

RESOLUCIÓN Nº 165



Piden $S_{(\square ONBM)}$

Dato: $S_{(\Delta ABC)} = S$

- Sea $m\measuredangle HAM = \theta \Rightarrow m\measuredangle MHB = \theta$
- Como $\square$MHNB es inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle MNB = \theta$
- Debido a que $\alpha + \theta = 90° \Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{MN}$
- Sea $BH = \ell$, de la observación:

$$MN = \ell \text{senw}$$

$$\Rightarrow S_{(\square ONBM)} = \frac{(\ell \text{senw})R}{2} \qquad ...(I)$$

- Como AC=2Rsenw

$$\Rightarrow S_{(\Delta ABC)} = \frac{(2R\text{senw})\ell}{2} \qquad ...(II)$$

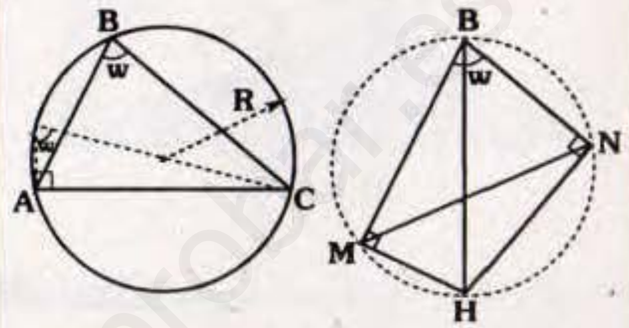
- De (I) y (II):

$$\underbrace{S_{(\Delta ABC)}}_{S} = 2S_{(\square ONBM)}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(\square ONBM)} = \frac{S}{2}}$$

Clave A

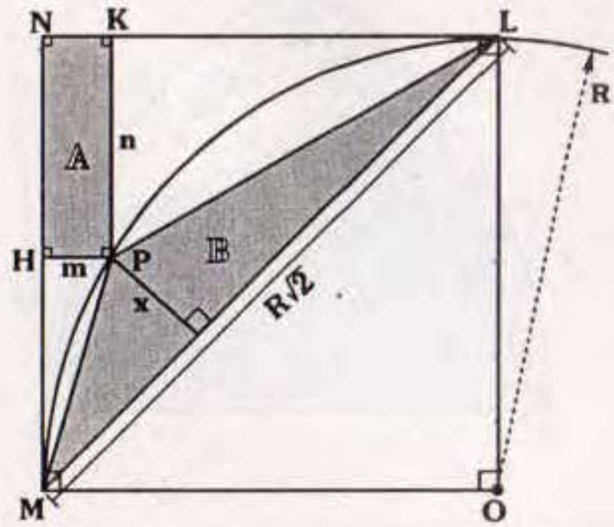
Observación



AC=2Rsenw

Como $\overline{BH}$ es diámetro MN=(BH) senw

RESOLUCIÓN Nº 166



Nos piden R en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$

- Por propiedad de semejanza:

$$x^2 = mn \qquad ...(I)$$

• Tenemos: $\mathbb{A} = mn$ ...(II)

$$\mathbb{B} = \frac{(R\sqrt{2})x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{B}^2 = \frac{R^2}{2}\cdot x^2 \quad ...(III)$$

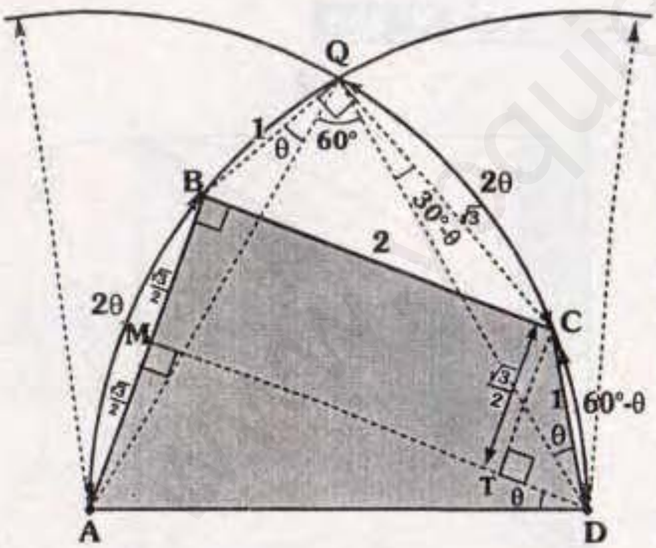
• De (I) , (II) y (III):

$$\mathbb{B}^2 = \frac{R^2}{2}\cdot \mathbb{A}$$

$$\therefore \quad \mathbf{R = \sqrt{\frac{2\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 167



Nos piden $S_{\triangle ABCD}$

• ΔAQD : equilátero

• Trazamos $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BQA = m\sphericalangle ADM = \theta \quad y$$

$$AM = MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Se traza $\overline{CT} \perp \overline{DM}$

$$\Rightarrow CT = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• El $\triangle CTD$ es notable

$\Rightarrow m\sphericalangle CDT = 60° \Rightarrow m\sphericalangle QDC = \theta$

• Luego:

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{QC} \Rightarrow AB = QC = \sqrt{3}$ y

$m\overset{\frown}{BQ} = m\overset{\frown}{CD} \Rightarrow BQ = CD = 1$

• También:

$m\sphericalangle BQC = 90° \Rightarrow BC = 2$

• Como MBCT es rectángulo $\Rightarrow MT = 2$

• $MD = MT + TD = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

• Luego:

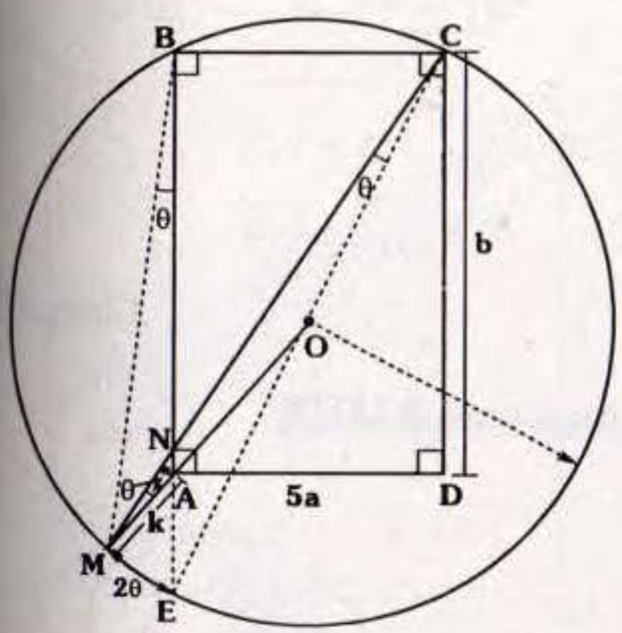
$$S_{\triangle ABCD} = S_{(MBCD)} + S_{(AMD)}$$

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{2}\left(2+\frac{5}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\triangle ABCD} = \frac{7}{4}\sqrt{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 168



Piden $S_{(ABCD)}$

- Se prolonga $\overline{BA}$ hasta que corte a la circunferencia en E, entonces: $\overline{CE}$ es diámetro, pues $m\sphericalangle CBE = 90°$
- ΔMCO: isósceles, entonces:

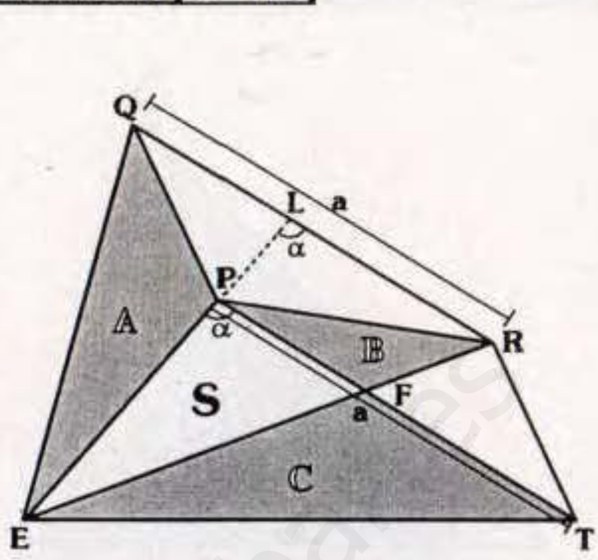
  $m\sphericalangle OMC = m\sphericalangle MCO = \theta$
- Por ángulo inscrito:

  $m\sphericalangle MBE = m\sphericalangle MCE = \theta$
- En ΔMAB: $k^2 = \underbrace{(AN)}_{a}\underbrace{(AB)}_{b}$
- Como $S_{(ABCD)} = (5a)b$

  $\therefore \quad \mathbf{S_{(ABCD)} = 5k^2}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 169



Nos piden la relación entre $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$.

- Sea $S_{(\Delta EPF)} = S$
- Como PQRT es paralelogramo

  $\Rightarrow m\sphericalangle EPT = m\sphericalangle PLR$ y $PT = QR = a$

- $S_{\measuredangle QPRE} = \mathbb{A} + \mathbb{B} + S = \dfrac{(EP)a}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad ...(I)$

- $S_{\Delta APT} = \mathbb{C} + S = \dfrac{a(EP)}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad ...(II)$

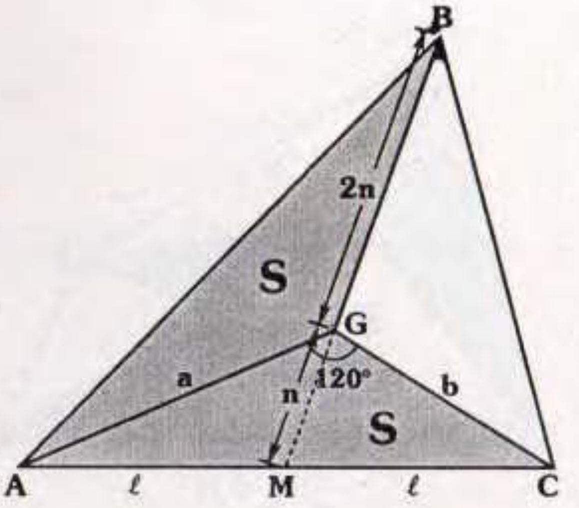
- De (I) y (II):

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} + S = \mathbb{C} + S$$

$$\therefore \quad \mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 170



Nos piden $S_{\measuredangle ABGC}$

Dato: $AC^2 - BG^2 = 16$

$$\Rightarrow \ell^2 - n^2 = 4$$

- Como G es baricentro, entonces:

$$S_{\Delta ABG} = S_{\Delta BGC} = S$$

$$\Rightarrow S_{\measuredangle ABGC} = 2S$$

- En ΔAGC:

$$S = \frac{ab}{2}\text{sen}120° = ab\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad ...(\theta)$$

- Por teorema de cosenos, en ΔAGC:

$$4\ell^2 = a^2 + b^2 + ab \qquad ...(\alpha)$$

- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$a^2 + b^2 = 2n^2 + \frac{(2\ell^2)}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2n^2 + 2\ell^2 \qquad ...(\beta)$$

- De (α) y (β):

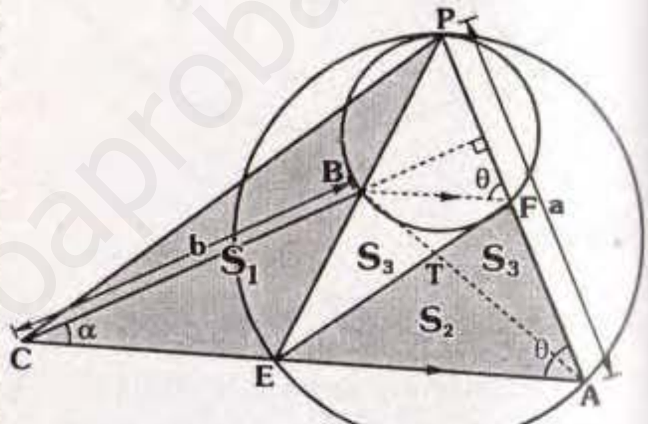
$$2(\underbrace{\ell^2 - n^2}_{4}) = ab \quad \Rightarrow \quad ab = 8$$

- En (θ): $S = 2\sqrt{3}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\measuredangle ABGC} = 4\sqrt{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 171



Nos piden $S_{\Delta CPE} + S_{\Delta EFA}$

- Por propiedad de circunferencia:

$$m\widehat{BP} = m\widehat{EP} \quad \Rightarrow \quad \overline{EA} \,//\, \overline{BF}$$

- Sea: $S_{\Delta FTA} = S_3 \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta BTE} = S_3$
- Luego:

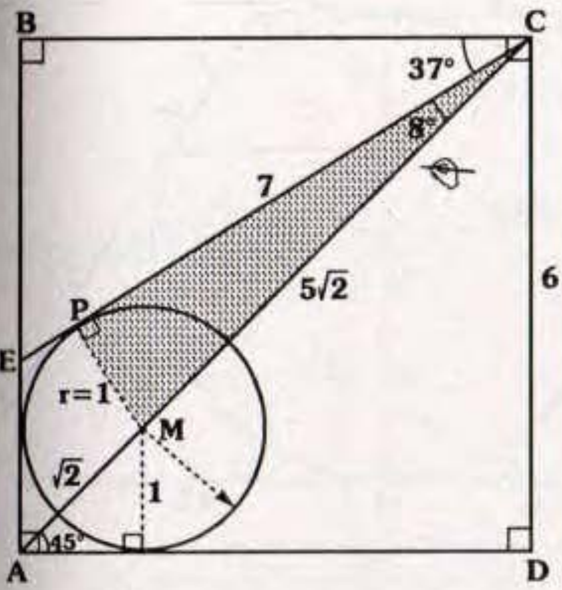
$$S_{\measuredangle CPBA} = S_{\Delta CPE} + S_{\Delta EBA} = S_1 + S_2 + S_3$$
$$= S_{\Delta CPE} + S_{\Delta EFA}$$

- En (I): Por fórmula general:

$$S_{\measuredangle CPBA} = \frac{ab}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 172



Nos piden $S_{(ABCD)}$

- Trazamos la diagonal AC, la cual pasará por M:

Como $m\measuredangle BCA = 45° \Rightarrow m\measuredangle ACP = 8°$

- En $\triangle$MPC:

Como $\quad PC = 7 \Rightarrow MP = 1$

$\Rightarrow \quad MC = 5\sqrt{2} \quad y \quad AM = \sqrt{2}$

- Como $\quad AC = 6\sqrt{2}$

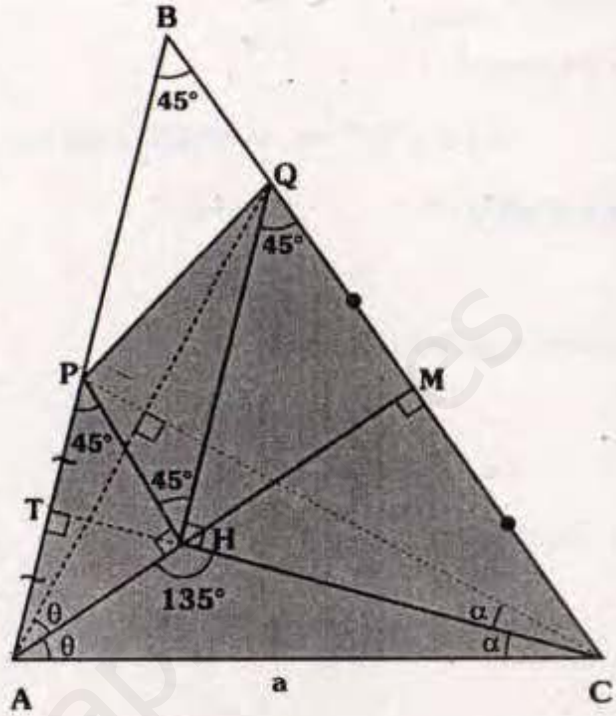
$\Rightarrow \quad CD = 6$

- Finalmente:

$$\mathbf{S_{(ABCD)} = 36}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 173



Nos piden $S_{\triangle APQC}$

- Como PBQH es un paralelogramo, entonces:

$m\measuredangle HQC = m\measuredangle HPA = 45° \quad y$

$m\measuredangle QHC = m\measuredangle AHP = 90°$

- En $\triangle$AHP y $\triangle$QHC:

$AT = TP \quad y \quad QM = MC$

$\Rightarrow \quad AC = CP = AQ = a$

- Como $\quad \alpha + \theta = 45° \Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 90°$, con ello $\overline{AQ} \perp \overline{CP}$

- Por fórmula general para APQC:

$$S_{\triangle APQC} = \frac{(AQ)(PC)}{2}$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{\triangle APQC} = \frac{a^2}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 174

Piden $S_{(ABCD)}$

- Notemos

$$\alpha+\theta=90° \Rightarrow m\measuredangle AOB=90°$$

- En $\triangle AOB$: $\quad r^2=(4)(9)$

$$\Rightarrow \; r=6$$

- Análogamente en $\triangle DOC$:

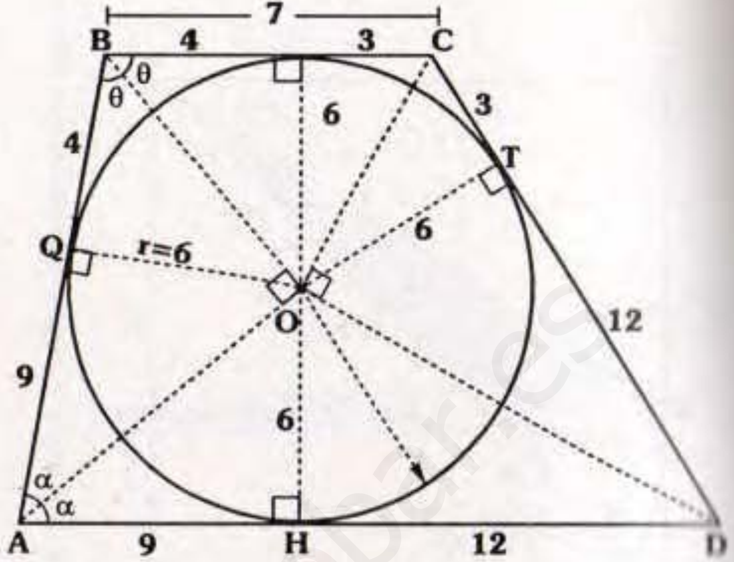
$$6^2=(3)(TD)$$

$$\Rightarrow \; TD=12$$

- Finalmente:

$$S_{(ABCD)}=\left(\frac{21+7}{2}\right)\cdot 12$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{(ABCD)}=168\ u^2}$$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 175

Nos piden el área mínima de la región APBC

- Analizando por partes:

$$S_{APBC}=\underbrace{S_{\Delta ACP}}+S_{\Delta PBC}$$

$$\frac{ax}{2}+\frac{bx}{2}$$

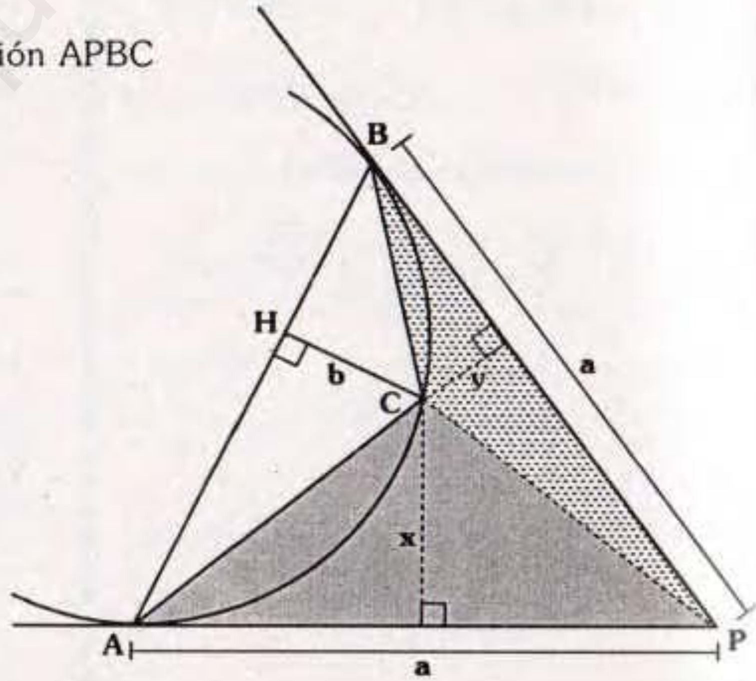
$$\Rightarrow \; S_{(APBC)}=\frac{a}{2}(x+y)$$

- Por propiedad de semejanza:

$$b^2=xy$$

- Usando M.A. ≥ M.G para x e y:

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$$

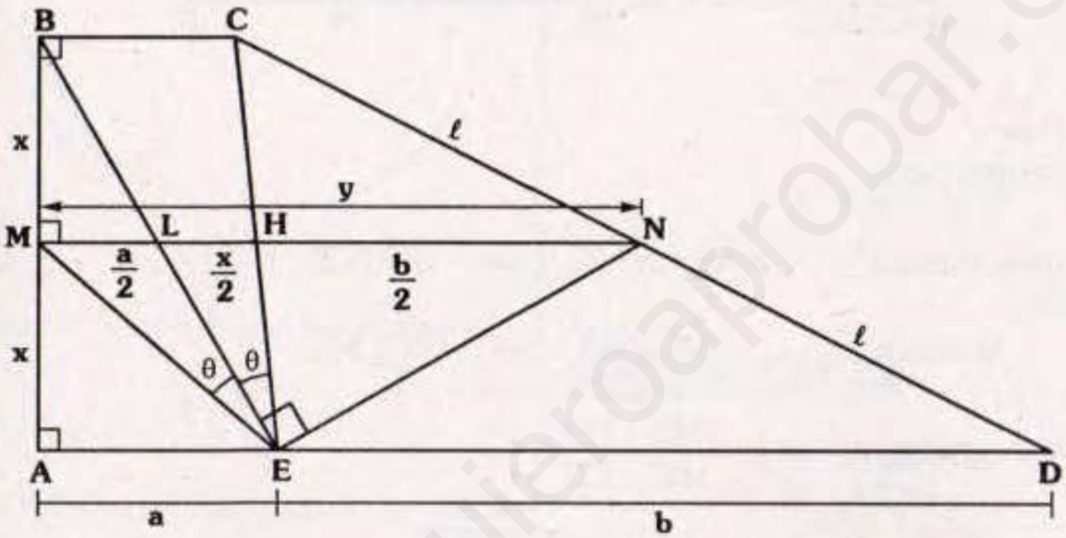


$$\Rightarrow \quad x+y \geq 2b \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{a}{2}(x+y)}_{S_{(APBC)}} \geq ab$$

$\therefore$ **El área mínima es : "ab"**

Clave A

Resolución N° 176



Nos piden $S_{\text{⏢} ABCD}$

Dato: $ab=16$

- Por propiedad $S_{\text{⏢} ABCD}=(AB)(MN)=2xy$

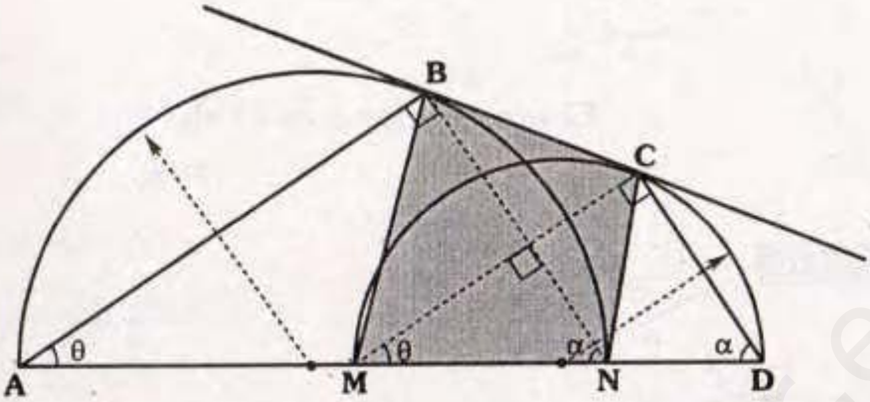
- Notemos que para el ΔMHE: $\overline{EL}$ y $\overline{EN}$ son bisectrices interior y exterior respectivamente, entonces: M, L, H y N son cuaterna armónica

$$\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{x}{2}y \quad \Rightarrow \quad xy=8$$

$$\therefore \quad S_{\text{⏢} ABCD}=16$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 177



Piden $S_{(\square MBCN)}$

Dato: $(AB)(CD)=16$

- Por la observación: $m\widehat{AB}=m\widehat{MC} \Rightarrow \overline{BN} \parallel \overline{CD}$

  también: $\overline{MC} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{BN} \perp \overline{MC}$

- $\triangle ABN \sim \triangle MCD \Rightarrow \dfrac{AB}{MC}=\dfrac{NB}{CD}$

  $\Rightarrow (AB)(CD)=(MC)(NB)$

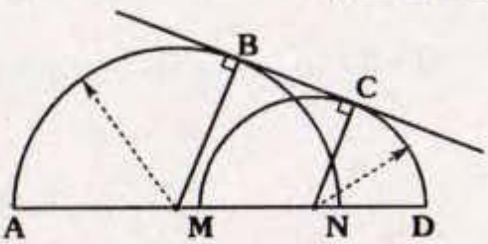
- De la fórmula general:

$$S_{(\square MBCN)}=\frac{(MC)(NB)}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{(\square MBCN)}=8}$$

Clave B

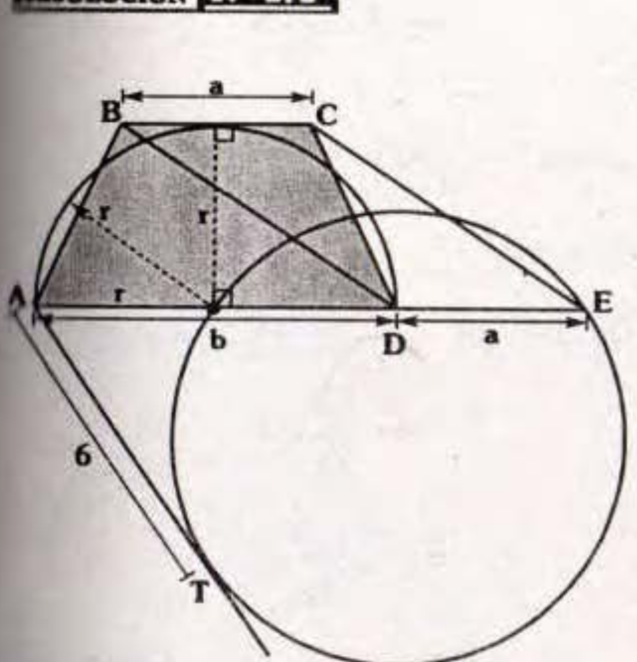
Observación



Se cumple : $m\widehat{AB}=m\widehat{MC}$

$m\widehat{BN}=m\widehat{CD}$

RESOLUCIÓN Nº 178



Piden $S_{(\square ABCD)}$

- Como ABCD es un trapecio, entonces:

$$S_{(\square ABCD)}=\left(\frac{a+b}{2}\right)r$$

- Al ser DBCD paralelogramo, se tiene BC=DE=a

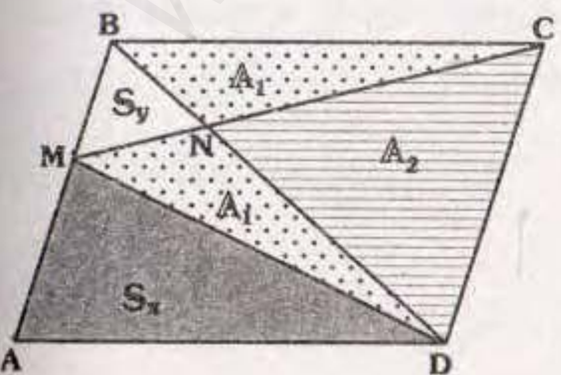
- Por teorema de la tangente:

$$6^2 = r(a+b)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(\square ABCD)}=18}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 179



Piden S_x en función de $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$

- Como $\overline{MB}//\overline{DC} \Rightarrow S_{\Delta MND}=\mathbb{A}_1$

- Por propiedad: $(S_y)\,\mathbb{A}_2=\mathbb{A}_1^2$

$$\Rightarrow\quad S_y=\frac{\mathbb{A}_1^2}{\mathbb{A}_2}$$

- Como $\overline{BD}$ es diagonal, entonces:

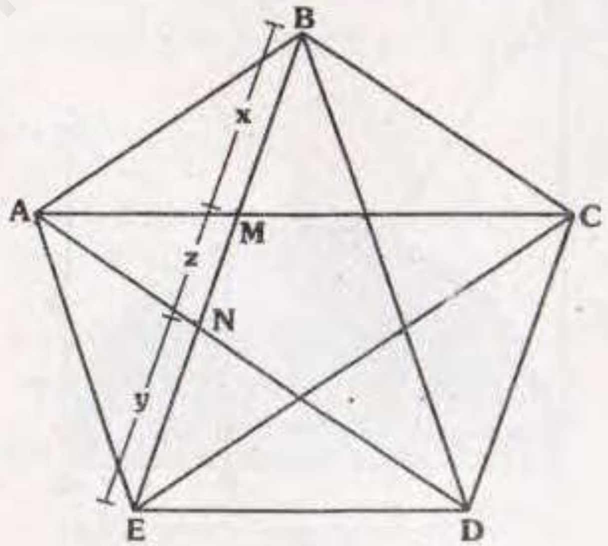
$$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BCD}$$

$$S_x+\mathbb{A}_1+S_y=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{\mathbb{A}_2^2-\mathbb{A}_1^2}{\mathbb{A}_2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 180



Piden $\frac{x}{y}$

Dato:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCD}=S_{\Delta CDE}=S_{\Delta DEA}=S_{\Delta EAB}$$

- Del dato podemos deducir:

– como $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$

– como $S_{\Delta CDE} = S_{\Delta DEA} \Rightarrow \overline{ED} // \overline{AC}$

$S_{\Delta CDE} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow \overline{DC} // \overline{EB}$

- Luego EMCD y NBCD son paralelogramos

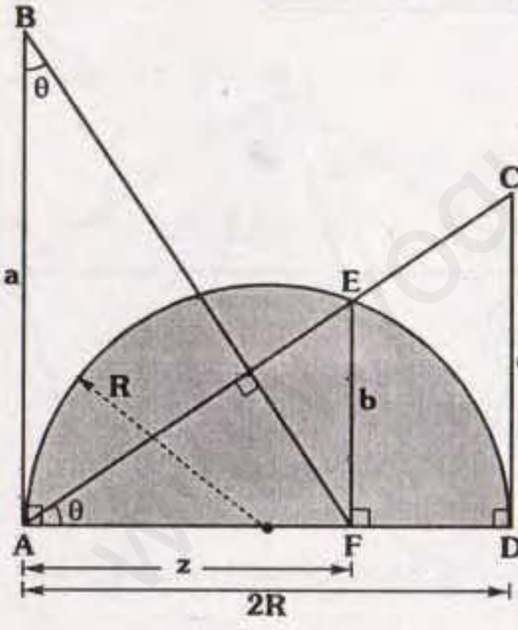
$\Rightarrow EM = CD = NB$

$\Rightarrow y+z = x+z \Rightarrow x = y$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 181



Piden $S_{\frown}$ en función de a, b y c

- $S_{\frown} = \dfrac{\pi R^2}{2}$

- $\measuredangle AFE \sim \measuredangle ADC \Rightarrow \dfrac{2R}{c} = \dfrac{z}{b}$

$$\Rightarrow R = \frac{c}{2b}.z \qquad ...(I)$$

- $\measuredangle BAF \sim \measuredangle AFE \Rightarrow \dfrac{z}{a} = \dfrac{b}{z}$

$$\Rightarrow z = \sqrt{ab} \qquad ...(II)$$

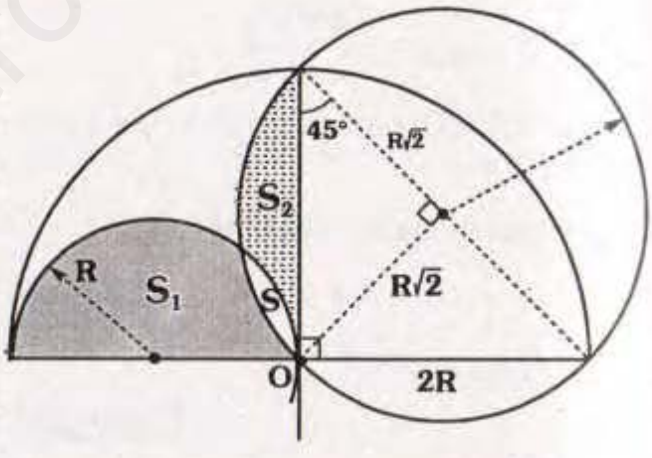
- De (I) y (II):

$$R = \frac{c}{2b}\sqrt{ab}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\frown} = \frac{ac^2}{8b}\pi}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 182



Nos piden $S_1 - S_2$

- Notemos: $S_1 - S_2 = (S_1+S) - (S_2+S)$
- Luego:

– $$S_1 + S = \frac{\pi R^2}{2} \qquad ...(I)$$

– $$S_2 + S = \frac{1}{4}\pi(R\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(R\sqrt{2})(R\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow\ S_2+S=\frac{\pi R^2}{2}-R^2 \qquad ...(II)$$

• De (I) y (II):

$$\mathbf{S_1-S_2=R^2}$$

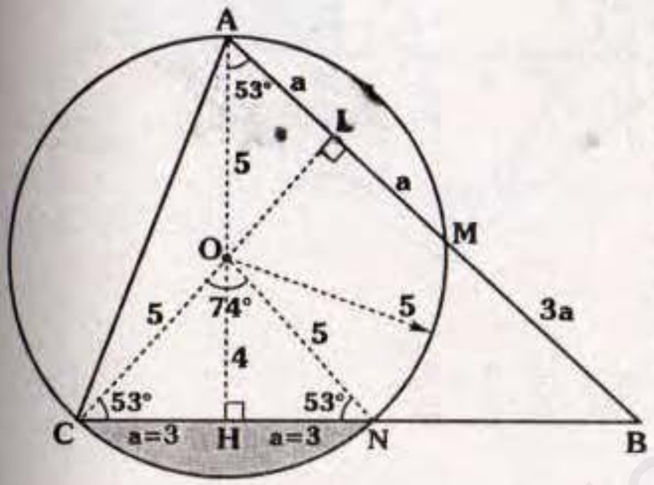
Clave D

$$\Rightarrow\ S_{\triangle}=\frac{74°}{360°}\pi 5^2-\frac{(6)4}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle}=\frac{185}{36}\pi-12}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 183



Sea $S_{\triangle}$ el área de la región sombreada

Nos piden $S_{\triangle}$

Dato: $3(AM)=2(BM) \Rightarrow AM=2a$ y $MB=3a$

• Como O es ortocentro del ΔABC, entonces $\overline{CL}$ y $\overline{AH}$ son alturas
$\Rightarrow \Delta ABC$; isósceles

• Tenemos entonces: $AL=LM=a$

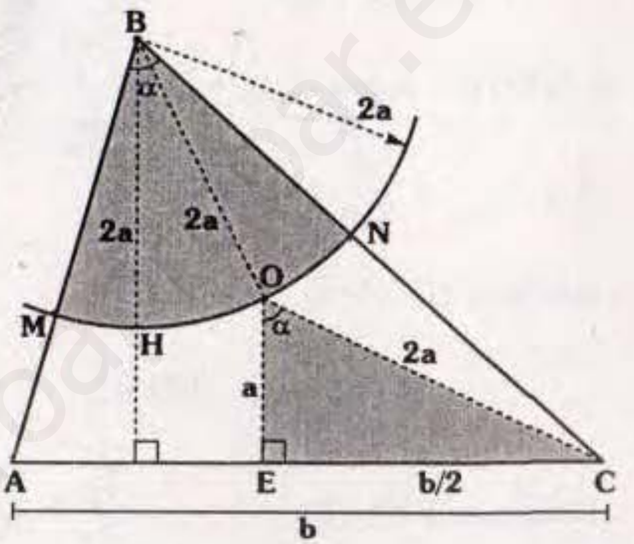
• $\measuredangle AHB$: notable de 37° y 53°

$\Rightarrow m\measuredangle OCN=53°$ y $m\measuredangle CON=74°$

• Finalmente:

$$S_{\triangle}=S_{\triangleleft NOC}-S_{\Delta NOC}$$

RESOLUCIÓN Nº 184



Nos piden $S_{\triangleleft MON}$

• Como $HB=OB$, al trazar $\overline{OE}\perp\overline{AC}$ se tendrá: $HB=2(OE)$

• Luego el $\measuredangle OEC$ es notable de 30° y 60°, entonces: $m\measuredangle EOC=m\measuredangle ABC=60°$

• En el $\measuredangle OEC$:

$$\frac{b}{2}=a\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{b}{2\sqrt{3}}$$

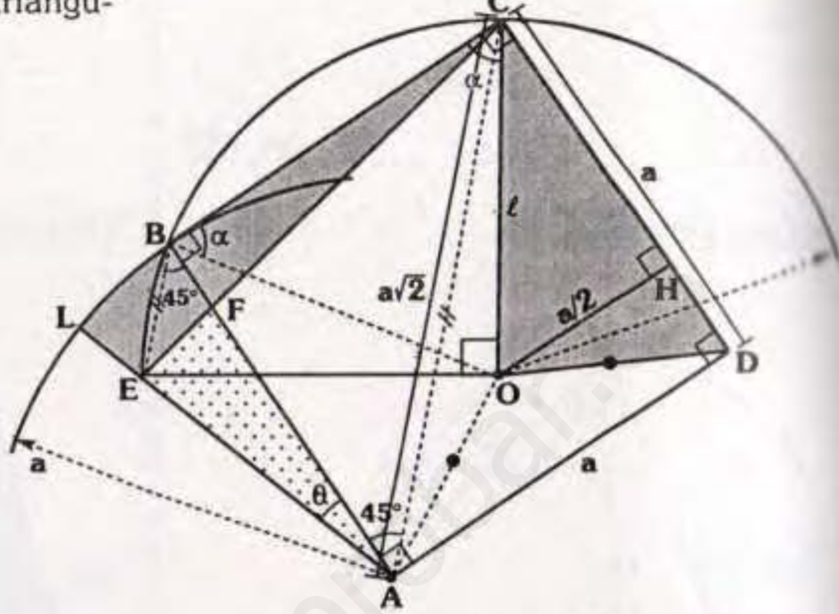
• $$S_{\triangleleft MON}=\frac{60°}{360°}\pi(2a)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangleleft MON}=\frac{\pi b^2}{18}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 185

Sea S_1 el área de la región mixtilínea LECB y S_2 el área de la región triangular CDO.



Nos piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

- Como $m\sphericalangle EBC = 135°$

$\Rightarrow m\sphericalangle EBA = 45°$

$\Rightarrow \overline{EB} // \overline{AC}$, luego $S_{\Delta FBC} = S_{\Delta EFA}$

- $S_1 = S_{\triangleleft LAB} = \dfrac{\theta}{360°}\pi a^2 \quad \ldots(I)$

- $\Delta AOB \cong \Delta COD \Rightarrow OA = OD$

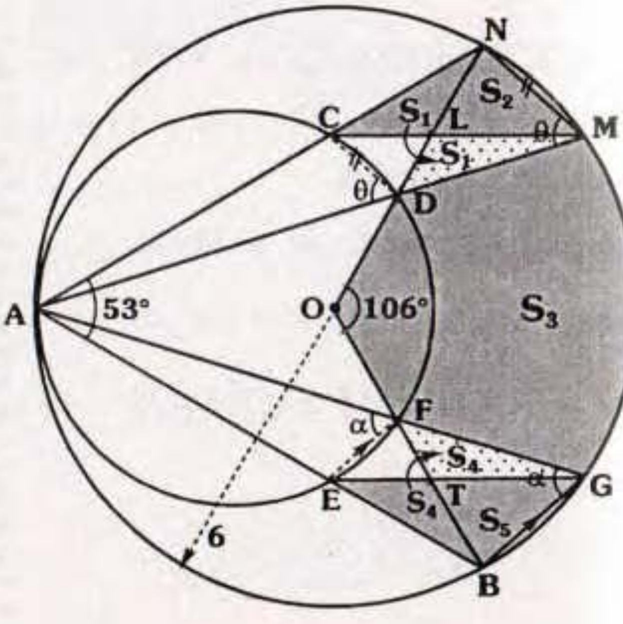
$$OH = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{1a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \quad \ldots(II)$$

- Finalmente (I)÷(II): $\quad \therefore \quad \boldsymbol{\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\pi\theta}{90°}}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 186

Nos piden $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$



- Como $m\widehat{AC} = m\widehat{AN} \Rightarrow \overline{DC} // \overline{MN}$

$m\widehat{AE} = m\widehat{AB} \Rightarrow \overline{EF} // \overline{BG}$

- Por propiedad de áreas:

$S_{\Delta CLN} = S_{\Delta DLM} = S_1$

$S_{\Delta ETB} = S_{\Delta FTG} = S_4$

- Luego:

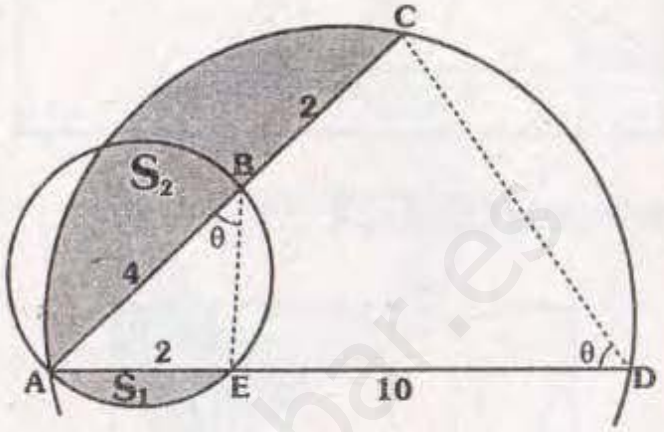
$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5 = S_{\triangle NOB}$

$$\Rightarrow\ S_{\triangle NOB}=\frac{106°}{360°}\pi 6^2 \qquad \therefore\ \mathbf{S_{\triangle NOB}=\frac{53}{5}\pi}$$

Clave D

Resolución Nº 187

Nos piden $\dfrac{S_1}{S_2}$



- Notemos (AB)(AC) = (AE)(AD)

  $\Rightarrow$ ⏢EBCD es inscriptible

- Luego $m\sphericalangle ABE = m\sphericalangle CDA$
- Las regiones sombreadas son semejantes, entonces:

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_2}{S_1}=9}$$

Clave D

Resolución Nº 188

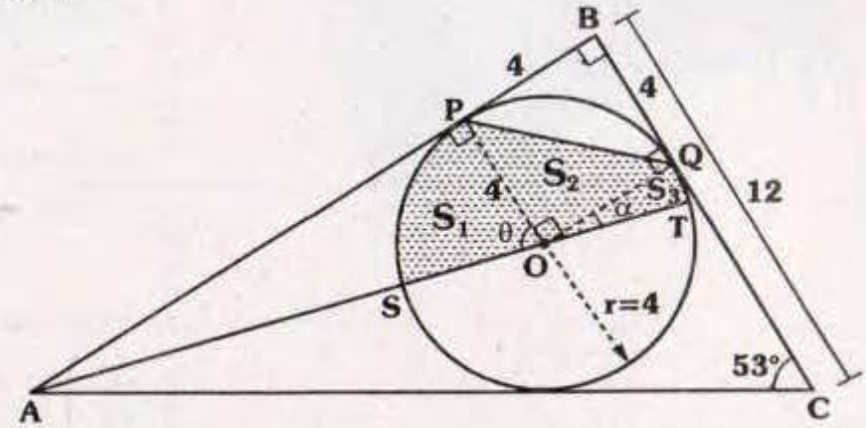
Nos piden el área de la región sombreada

- Optemos hallar el área por partes
- De la observación: r = 4
- Luego:

$$S_2=\frac{(4)(4)}{2}=8$$

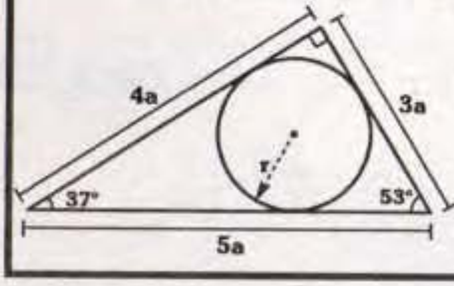
$$S_1+S_3=S_{\square}=\frac{1}{4}\pi(4)^2=4\pi$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2+S_3=4(\pi+2)}$$



Clave E

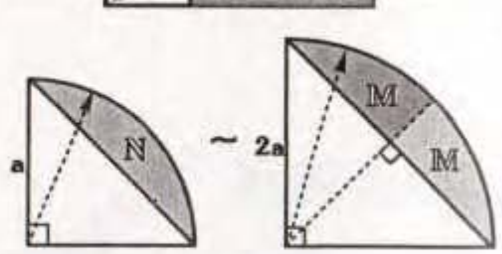
Observación



Se cumple:

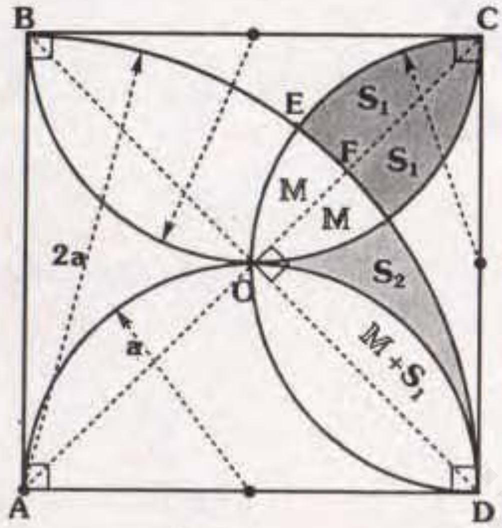
$r=a$

Observación



Se cumple: $M=2N$

RESOLUCIÓN Nº 189



Nos piden la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

- Notemos que el punto de concurrencias de las tres semicircunferencias es el centro del cuadrado.

- De la observación:

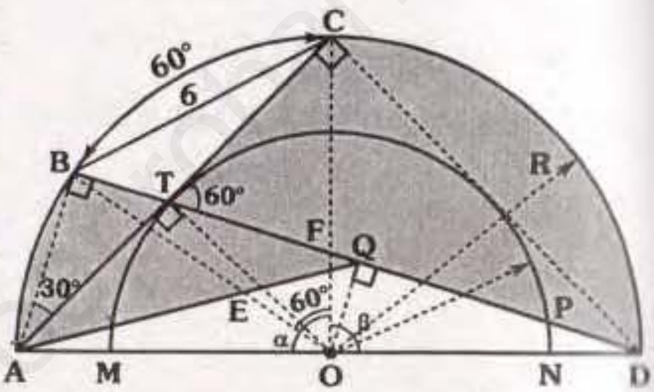
$$2M + S_1 + S_2 = 2(M + S_1)$$

$$\Rightarrow \; S_2 = S_1$$

$$\therefore \; \frac{S_2}{2S_1} = \frac{1}{2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 190



Nos piden el área de la región sombreada.

- Como $m\widehat{TP} = 120° \Rightarrow m\measuredangle CTP = 60°$, luego $m\measuredangle BAC = 30°$ y $m\widehat{BC} = 60°$

- ΔBOC: equilátero $\Rightarrow R=6$

- Como $\overline{AB} // \overline{OQ}$ y $\overline{OT} // \overline{DC}$

$$\Rightarrow \; S_{\Delta AEO} = S_{\Delta BEQ} \text{ y } S_{\Delta TFC} = S_{\Delta OFD}$$

- El área pedida es:

$$\underbrace{S_{\triangle AOB}}_{\frac{\alpha}{360°}\pi 6^2} + \underbrace{S_{\triangle DOC}}_{\frac{\beta}{360°}\pi 6^2}$$

- Como $\alpha + \beta = 120°$

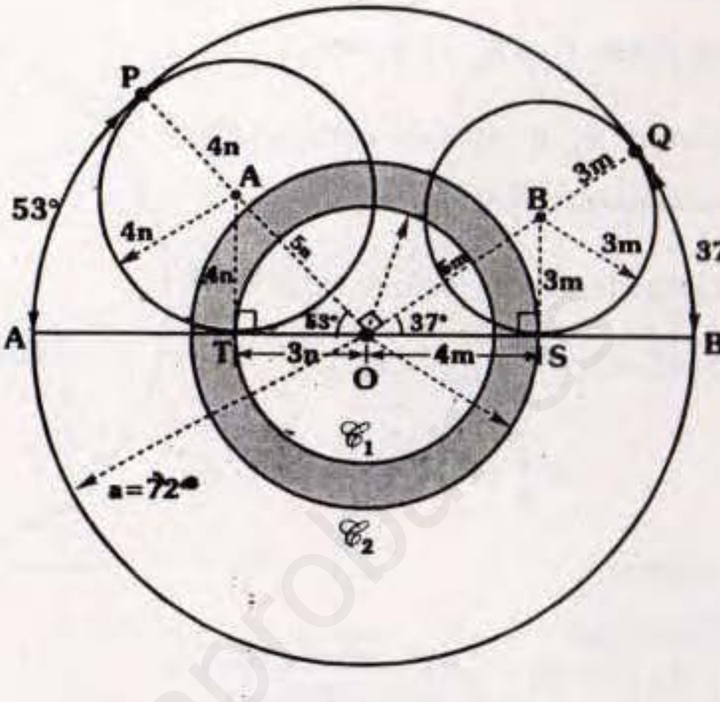
$$\therefore \; S_{\triangle AOB} + S_{\triangle DOC} = 12\pi$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 191

Sea A_{cc} el área de la corona circular

Nos piden A_{cc}



- Los ⊿s OSB y OTA son notables de 37° y 53°.
- Hallemos los radios de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$:

$$9n = 72 \Rightarrow n = 8$$

$$8m = 72 \Rightarrow m = 9$$

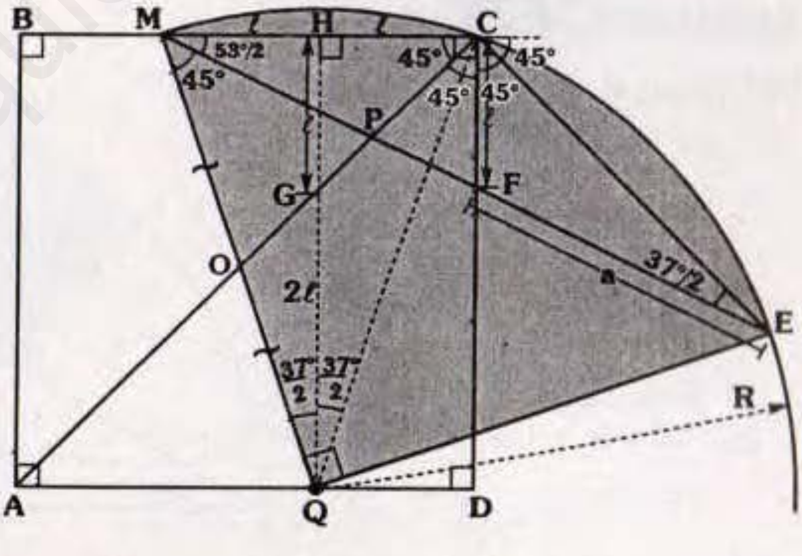
- $A_{cc} = \pi(4m)^2 - \pi(3n)^2$
- Finalmente tenemos:

$$\therefore \ \mathbf{A_{cc} = 720\pi}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 192

Nos piden $S_{\triangle}$



- Sabemos que $S_{\triangle} = \dfrac{1}{4}\pi R^2$
- En el $\triangle MQC$, se traza la altura $\overline{QH} \Rightarrow$ G es baricentro de dicho triángulo, luego QG=2(GH) y como $m\sphericalangle GCH = 45° \Rightarrow$ ⊿CHQ es notable de 37°/2
- Como $m\sphericalangle MCE = 135°$
  $\Rightarrow m\sphericalangle EMC = 53°/2$
- En ⊿MCF, como $\overline{CE}$ es bisectriz exterior: $\Rightarrow \dfrac{R\sqrt{2}}{a} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\triangle} = \frac{\pi a^2}{2}}$$

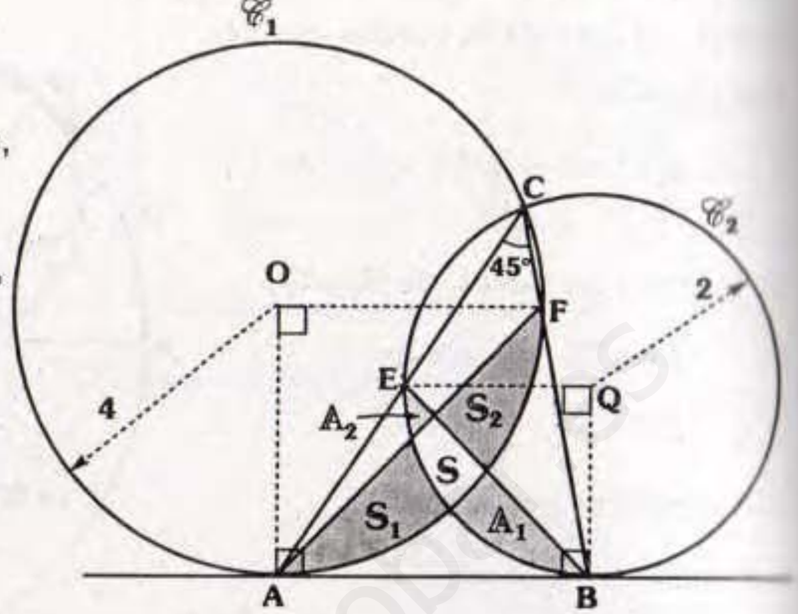
Clave D

RESOLUCIÓN N° 193

Nos piden $S_1 + S_2 - (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)$

- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales, entonces: $m\measuredangle ACB = 45°$
- Luego tenemos: $m\widehat{AF} = m\widehat{EB} = 90°$
- $S_1 + S + S_2 = S_{\triangle AOF} - S_{\Delta AOF}$

$$= \frac{1}{4}\pi 4^2 - \frac{(4)(4)}{2} = 4\pi - 8$$



- También:
- $\mathbb{A}_1 + S + \mathbb{A}_2 = \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{(2)(2)}{2} = \pi - 2$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 + S_2 - (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) = 3(\pi - 2)}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 194

Nos piden el área de la región sombreada.

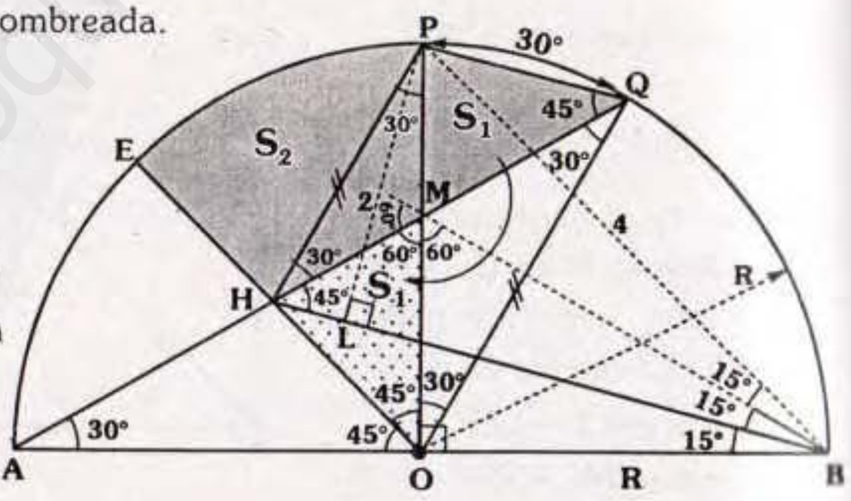
- Como

$$m\measuredangle PHQ = m\measuredangle HQO = 30°$$

$\Rightarrow \overline{HP} // \overline{OQ} \Rightarrow S_{\Delta HMO} = S_{\Delta MPQ} = S_1$

- El área de la región pedida es "$S_1 + S_2$", luego:

$$S_1 + S_2 = S_{\triangle POE}$$



- Notemos que H es excentro del $\triangle MOB$, entonces:

$$m\measuredangle OBH = m\measuredangle HBM = 15°$$

- En $\triangle PLB$: notable de 30°, entonces: $PB = 4$

- $\measuredangle$POB: notable de 45°:

$$\Rightarrow\ R\sqrt{2}=4\ \Rightarrow\ R=2\sqrt{2}$$

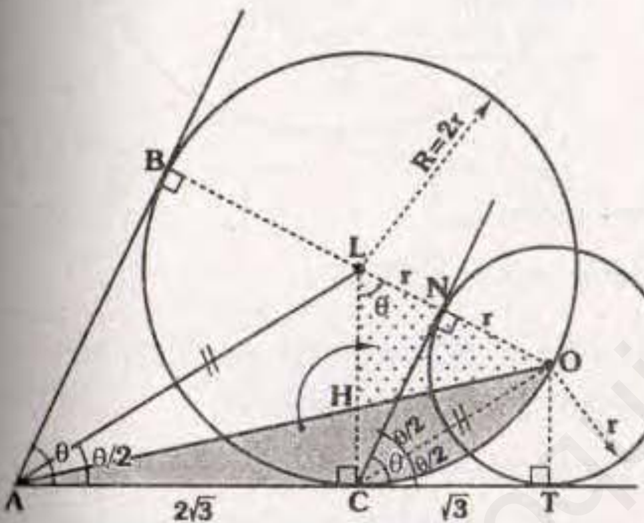
- Finalmente:

$$S_1+S_2=S_{\measuredangle POE}=\frac{45^\circ}{360^\circ}\pi(2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\measuredangle POE}=\pi}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 195



Nos piden el área de la región sombreada

- Como :

$m\widehat{BC}=180^\circ-\theta$ y $m\widehat{CO}=\theta \Rightarrow$

$m\widehat{BCO}=180^\circ$, luego $\overline{BO}$ es diámetro

- $m\measuredangle NOC=90^\circ-\dfrac{\theta}{2}$, es decir:

$m\measuredangle ONC=\dfrac{m\widehat{BC}}{2} \Rightarrow$ O; N; L y B son colineales

- Como

$\overline{AL}//\overline{CO}\ \Rightarrow\ S_{\measuredangle AHC}=S_{\Delta HLO}$ el área pedida es $S_{\measuredangle CLO}$

- $\measuredangle ACL \sim \measuredangle CTO\ \Rightarrow\ R=2r$

Luego:

$LN=NO=r\ \Rightarrow\ CL=CO \Rightarrow \Delta CLO$ es equilátero $\Rightarrow \theta=60^\circ$

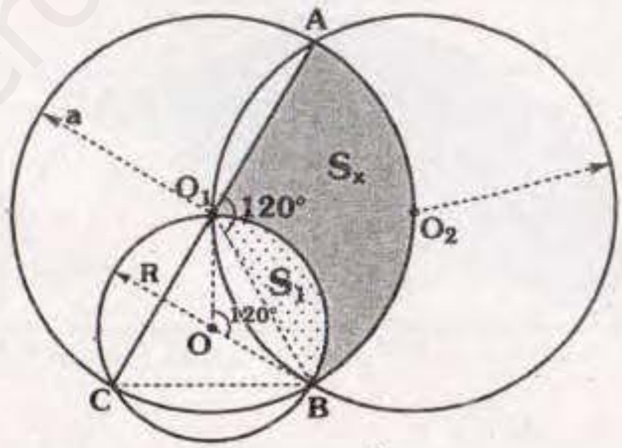
- $\measuredangle CTO$: notable de 30° $\Rightarrow$ r=1

- $$S_{\measuredangle CLO}=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi(2)^2$$

$$\therefore \mathbf{S_{\measuredangle CLO}=\frac{2}{3}\pi}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 196



Nos piden S_x

Dato: $R=2\sqrt{3}$

- Notemos primero que: ΔAO_1O_2, ΔO_1O_2B y ΔO_1CB son equiláteros

- En ΔOO_1B : $O_1B=R\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \; CB=6 \; \Rightarrow \; a=6$$

- $$S_x + S_1 = \frac{120^\circ}{360^\circ}\pi 6^2 = 12\pi \qquad ...(I)$$

- $$S_1 = S_{\triangleleft O_1OB} - S_{\Delta OO_1B}$$

$$\Rightarrow \; S_1 = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

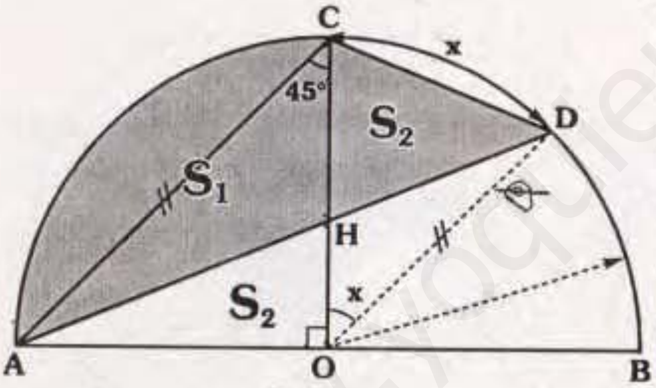
$$\Rightarrow \; S_1 = 4\pi - 3\sqrt{3} \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore \; \mathbf{S_x = 8\pi + 3\sqrt{3}}$$

Clave C

Resolución Nº 197



Piden $m\widehat{CD}$

- Sea $m\widehat{CD} = x \Rightarrow m\measuredangle COD = x$
- Como el área de la región sombreada es igual a la no sombreada, entonces la parte sombreada es la mitad del área total.

- $$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}S_{\bigtriangleup}$$

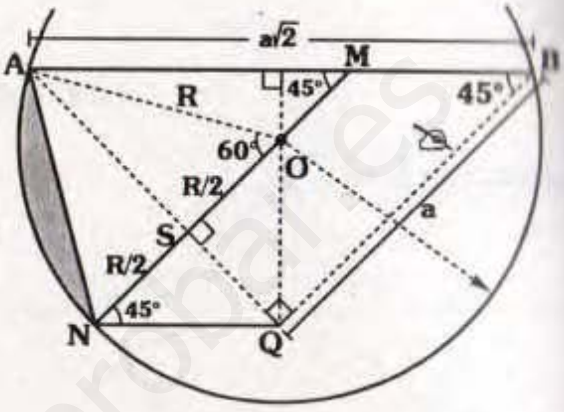
$$\Rightarrow S_{\triangle AOH} = S_{\Delta CHD} = S_2$$

$$\Rightarrow \overline{AC} // \overline{OD}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 45^\circ}$$

Clave C

Resolución Nº 198



Nos piden $S_{\blacktriangle}$

Dato: $AB = \sqrt{2}(BQ)$

- Se traza $\overline{BQ} // \overline{MN}$ tal que $BQ=MN \Rightarrow$ NMBQ es paralelogramo.
- Como $AB = \sqrt{2}(BQ)$ y

$$m\measuredangle ABQ = 45^\circ \Rightarrow m\measuredangle AQB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \; \overline{AQ} \perp \overline{NM}$$

- Debido a que $AQ=QB$

$$\Rightarrow \; \overline{QO} \perp \overline{AB}$$

- En $\triangle NQO$: $NS=SO \Rightarrow$ En el $\triangle ASO$:

$$AO=2(OS) \; \Rightarrow \; m\measuredangle AOS=60^\circ$$

- Finalmente:

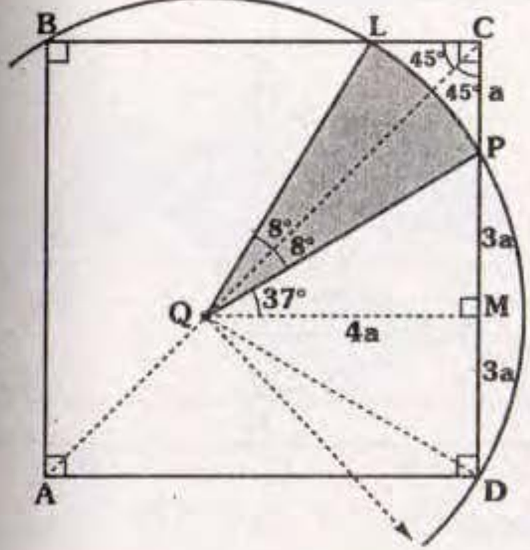
$$S_{\blacktriangle} = S_{\triangle AON} - S_{\Delta AON}$$

$$S_{\blacktriangle} = \frac{1}{6}\pi R^2 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad S = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 199



Nos piden $\dfrac{S_{\triangleleft LQP}}{S_{(ABCD)}}$

Dato: $PD = 6(CP)$

• Por teorema de la secante:

$(CL)(CB) = (CP)(CD) \Rightarrow CP = CL$, luego

QLCP: Trapezoide simétrico

• Sea $CP = a \rightarrow PD = 6a$, se traza $\overline{QM} \perp \overline{PD}$ (M en $\overline{PD}$)

$\rightarrow PM = MD = a$ y $QM = MC = 4a$

• $\triangle QMP$ es notable de 37°

$\rightarrow m\measuredangle LQP = 16°$

• Luego tenemos:

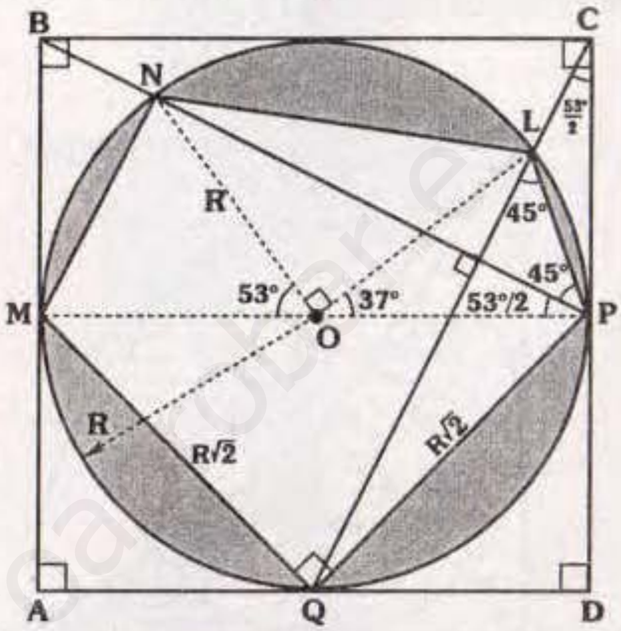
$$S_{\triangleleft LQP} = \frac{16°}{360°}\pi(5a)^2$$

$$S_{(ABCD)} = (7a)^2$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangleleft LQP}}{S_{(ABCD)}} = \frac{10\pi}{441}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 200



Nos piden la suma de áreas de las regiones sombreadas, sea S dicha suma.

• $$S = \pi R^2 - S_{(MNLPQ)} \qquad ....(I)$$

• Hallemos el área de MNLPQ

$$S_{(MNLPQ)} = S_{(MQP)} + S_{\triangle MON} + S_{\triangle NOL} + S_{\triangle LOP}$$

$$\Rightarrow S_{(MNLPQ)} = R^2 + \frac{R^2}{2}\text{sen}53° + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}\text{sen}37°$$

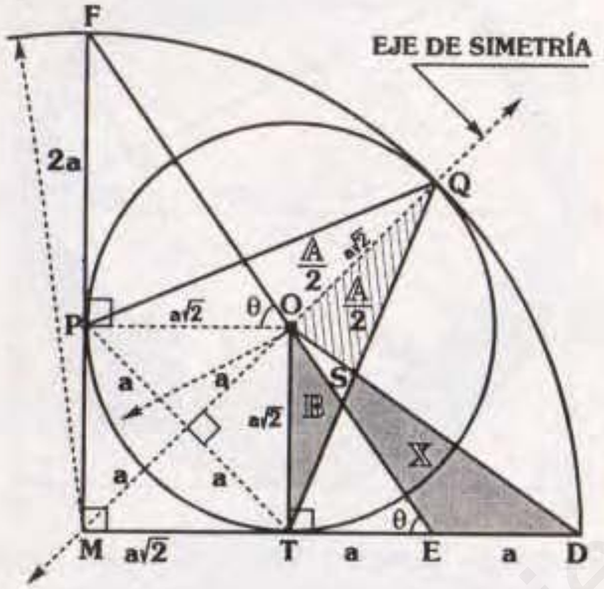
$$S_{(MNLPQ)} = \frac{11}{10}R^2$$

• En (I): $$S = \pi R^2 - \frac{11}{10}R^2$$

$$\therefore \quad S = \frac{R^2}{10}(10\pi - 11)$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 201



Nos piden $\mathbb{X}$ en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$

- $\triangle$OPF ~ $\triangle$ETO

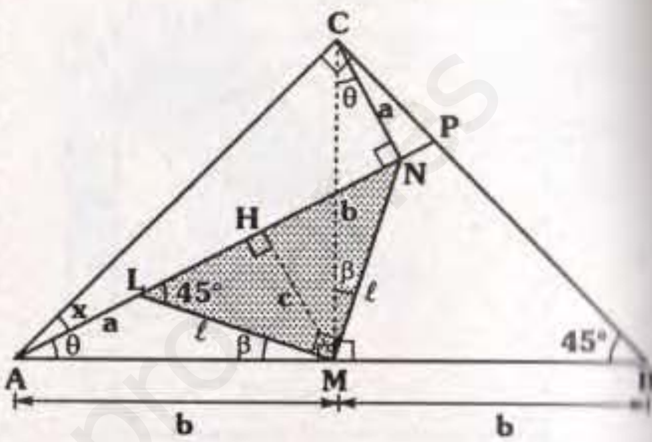
$$\Rightarrow \quad ET=a \;\Rightarrow\; ED=a$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}+S &= \frac{a(a\sqrt{2})}{2} \\ \frac{\mathbb{A}}{2}+\mathbb{B}+S &= \frac{a\sqrt{2}(a)}{2} \end{aligned}\right\} \mathbb{X}+S=\frac{\mathbb{A}}{2}+\mathbb{B}+S$$

$$\therefore \quad \mathbb{X}=\frac{\mathbb{A}+2\mathbb{B}}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 202



Piden x.

Dato $S_{(ACB)}=4(S_{(LMN)})$ y AL=CN

- Primero notemos que

$$m\sphericalangle AMC = m\sphericalangle ANC = 90°$$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle MAN = m\sphericalangle MCN = \theta$$

- $\Delta LAM \cong \Delta NCM$ (LAL) $\Rightarrow$ LM=MN y

$m\sphericalangle AML = m\sphericalangle CMN = \beta \Rightarrow m\sphericalangle LMN = 90°$

- Como LM=MN $\Rightarrow m\sphericalangle MLN = 45°$
- $\triangle$AOB ~ $\triangle$LMN

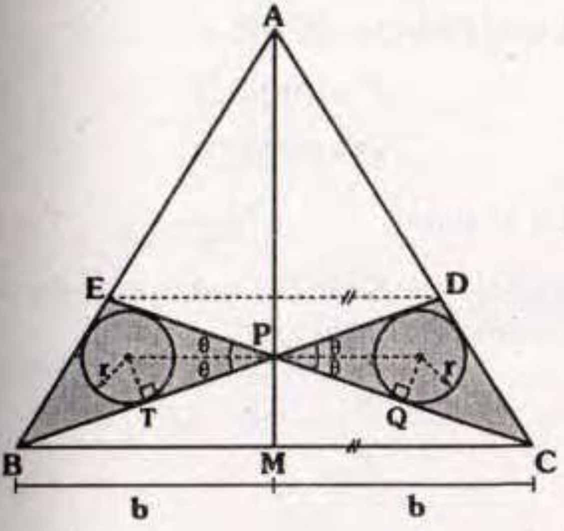
$$\Rightarrow \quad \frac{S_{(ACB)}}{S_{(LMN)}}=\left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad b=2c$$

- $\triangle$AHM: notable $\Rightarrow \theta = 30°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 15°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 203



Piden: $\dfrac{AB}{AC}$

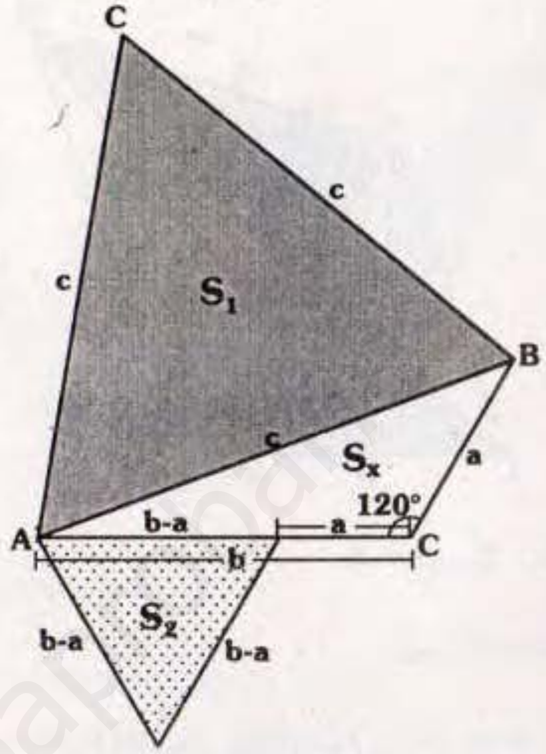
- Como $AM=MC$ y notamos las cevianas concurrentes $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ y $\overline{AM}$ $\Rightarrow$ por teorema de Ceva: $\overline{ED}/\!/\overline{BC}$
- Como $\overline{ED}/\!/\overline{BC} \Rightarrow S_{\Delta BEP}=S_{\Delta PDC}$
- Debido a que los triángulos BEP y PDC tienen igual inradio, entonces tienen igual semiperímetro (sea "ℓ" el semi-perímetro)
- Notemos que $PT=PQ$

  $\Rightarrow \ell-BE=\ell-CD \;\Rightarrow\; BE=CD$
- Luego BEDC es trapecio isósceles $\Rightarrow$ $AB=AC$

$$\therefore\; \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}}=\mathbf{1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 204



Datos: $S_1=31$ y $S_2=19$

Piden: S_x

- $$S_x=\frac{ab}{2}\text{sen}120°=ab\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1=c^2\frac{\sqrt{3}}{4} \quad y \quad S_2=(b-a)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- En ΔABC, por teorema de cosenos

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2+ab$$

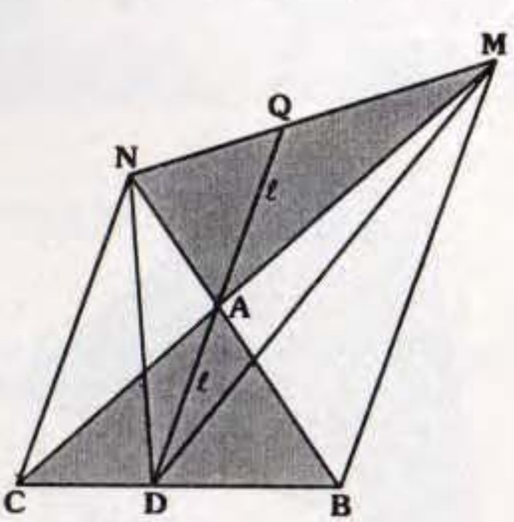
- Luego: $$S_1-S_2=3(ab)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_1-S_2=3S_x$$

$$\therefore\; \mathbf{S_x=4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 205



Dato $S_{(\Delta ABC)} = \mathbf{A}$

Piden: $S_{(\Delta MDN)}$

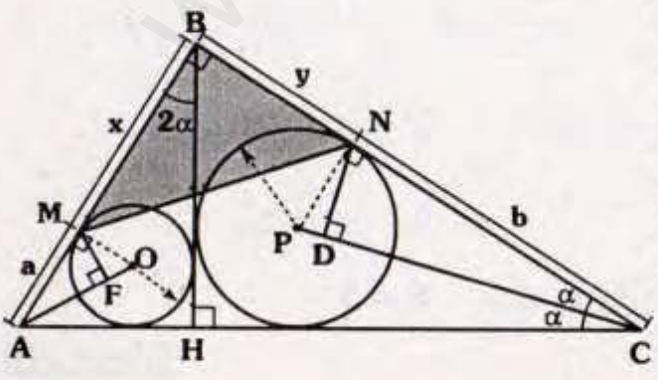
- Como $\overline{NC} // \overline{AD} // \overline{MB} \Rightarrow AD = AQ$
- Como $DQ = 2(AQ) \Rightarrow S_{(\Delta MDN)} = 2S_{\Delta AMN}$
- Debido a que $\overline{NC} // \overline{BM}$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMN}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{(\Delta MDN)} = 2A}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 206



Piden: $S_{\measuredangle MBN}$

Dato: $(AO)(AF)(PC)(CD) = k$

- En $\measuredangle OMA$ y $\measuredangle CNP$:

$$a^2 = (AF)(AO) \quad y$$
$$b^2 = (PC)(CD)$$

- En el dato: $\quad a^2b^2 = k \quad \ldots(I)$
- $\measuredangle AHB \sim \measuredangle BHC$, comparando elementos homólogos:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y} \Rightarrow ab = xy \quad \ldots(II)$$

- $S_{\measuredangle MBN} = \dfrac{xy}{2}$
- Usando (I) y (II):

$$\mathbf{S_{\measuredangle MBN} = \frac{\sqrt{k}}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 207

Para el ΔABC:

r_a, r_b y r_c son exradios

r es inradio

p: semiperímetro

Dato: $r_ar_b + r_ar_c + r_br_c = 100$

Nos piden: 2p

- Usemos los siguientes teoremas:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$S_{\Delta ABC} = pr = \sqrt{rr_ar_br_c} \Rightarrow p^2r = r_ar_br_c$$

- En el dato dividiendo entre $r_ar_br_c$, se tiene:

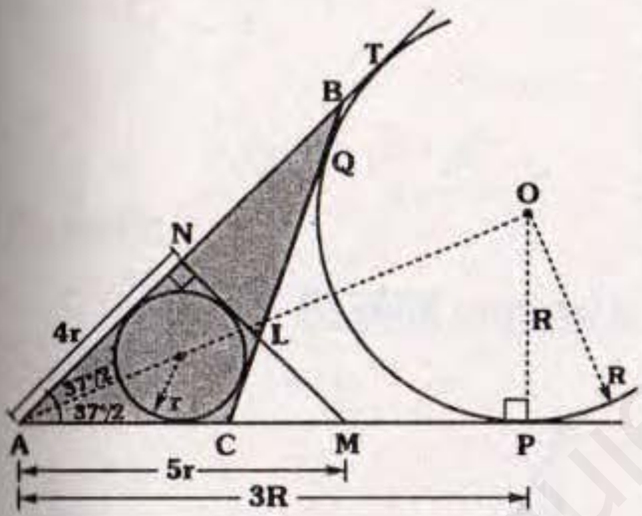
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{100}{r_a r_b r_c} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{100}{r_a r_b r_c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{100}{p^2 r} \Rightarrow p=10$$

$\therefore$ $\mathbf{2p=20}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 208



Piden: $S_{\Delta ABC}$; dato: $R(AM)=25$

- En el $\measuredangle$ANM que es notable de 37°, sea el inradio r, entonces:

$$AM=5r$$

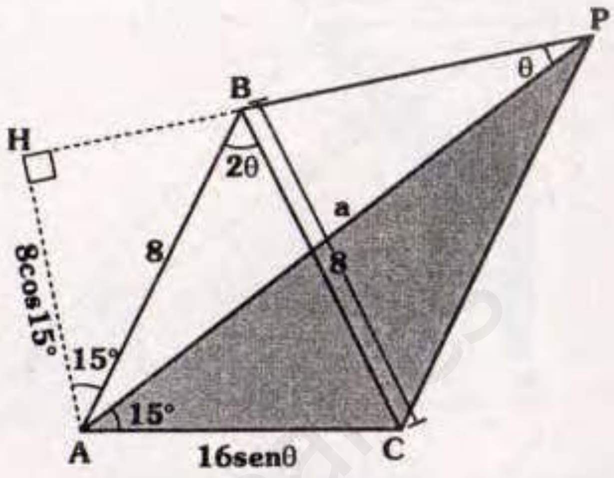
- En $\measuredangle$APO: $AP=3R$
- Por teorema AP es semiperímetro del $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta ABC}=(3R)r$
- Del dato: $R(5r)=25$

$$\Rightarrow Rr=5$$

$\therefore$ $\mathbf{S_{\Delta ABC}=15}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 209



Nos piden $S_{\Delta APC}$

- Por teorema, en el ΔABC:

$$AC=2(8)\operatorname{sen}\theta=16\operatorname{sen}\theta$$

- $$S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}(a16\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}15° \qquad ...(I)$$

- En $\measuredangle$AHP:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{8\cos 15°}{a}$$

- En (I):

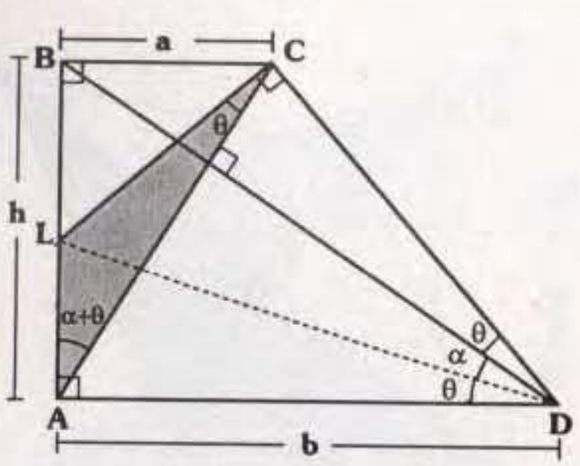
$$S_{\Delta ABC}=8\cancel{a}.\left(\frac{8\cos 15°}{\cancel{a}}\right)\cdot \operatorname{sen}15°$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=32\underbrace{(2\operatorname{sen}15°\cos 15°)}_{\operatorname{sen}30°}$$

$\therefore$ $\mathbf{S_{\Delta ABC}=16}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 210



Piden $S_{\Delta ALC}$ en función de h y θ.

- ⌂ALCD: inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle LDA=\theta$
- En ⊿LAD: $AL=b\,tg\theta$
- ⊿ABC ~ ⊿DAB:

$$\Rightarrow \frac{a}{h}=\frac{h}{b} \Rightarrow h^2=ab \qquad ...(I)$$

- $$S_{\Delta ALC}=\frac{(AL)(BC)}{2}$$

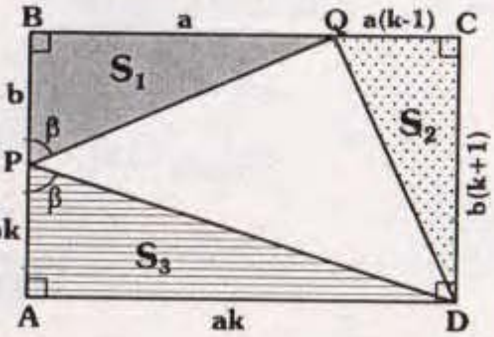
$$S_{\Delta ALC}=\frac{1}{2}(btg\theta).a=\frac{1}{2}abtg\theta$$

- De (I):

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ALC}=\frac{h^2tg\theta}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 211



Nos piden la relación entre S_1, S_2 y S_3

- Notemos que ⊿PAD ~ ⊿PBQ

Sea $PB=b$ y $BC=a$

$\Rightarrow AP=bk$ y $AD=ak$

- Luego $QC=a(k-1)$ y $CD=b(k+1)$

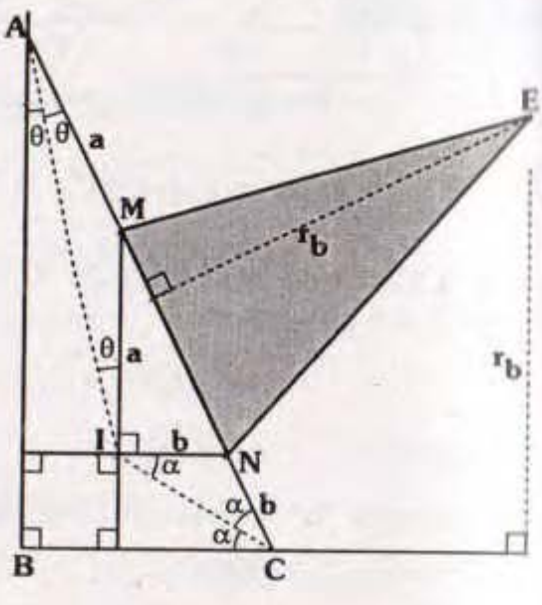
- $$S_1=\frac{ab}{2};\quad S_3=\frac{ab}{2}k^2 \text{ y}$$

$$S_2=\frac{ab}{2}(k^2-1)=\underbrace{\frac{ab}{2}k^2}_{S_3}-\underbrace{\frac{ab}{2}}_{S_1}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=S_3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 212



Piden $S_{(\Delta MNE)}$

Dato: $AC=k$

- Como I es incentro, entonces el ΔAIM y ΔCIN son isósceles.

$AM=MI=a$ y $NC=NI=b$

$\Rightarrow MN=k-a-b$

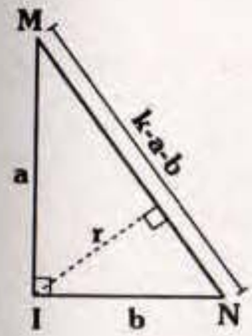
$S_{\Delta MNE}=(k-a-b)r_b$

- Por teorema $r_b-r=AC=k$
- $\triangle MIN$: $(k-a-b)^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow k^2-2ka-2kb+2ab=0$

$\Rightarrow 2k(k-a-b)=k^2-2ab \qquad ...(I)$

- $\triangle MIN$:



Por relaciones métricas:
$ab=r(k-a-b)$

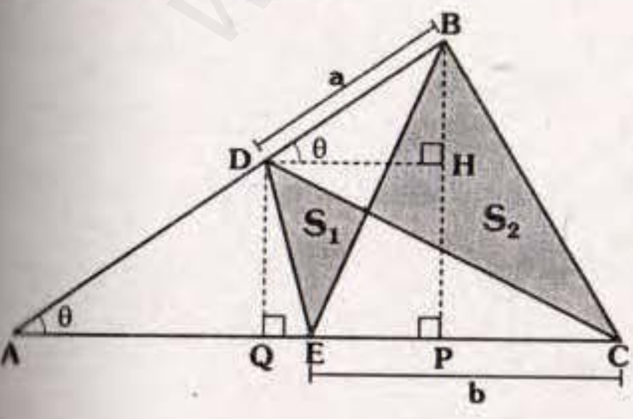
- En (I): $2(k-a-b)\underbrace{(k+r)}_{r_b}=k^2$

$\Rightarrow 2S_{\Delta MNE}=k^2$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNE}=\frac{k^2}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 213



Nos piden S_2-S_1

- Notemos que:

$$S_2-S_1=\underbrace{S_{\Delta EBC}}_{\frac{b(BP)}{2}}-\underbrace{S_{\Delta EDC}}_{\frac{b(DQ)}{2}}$$

$$\Rightarrow S_2-S_1=\frac{b}{2}\underbrace{(BP-DQ)}_{BH}$$

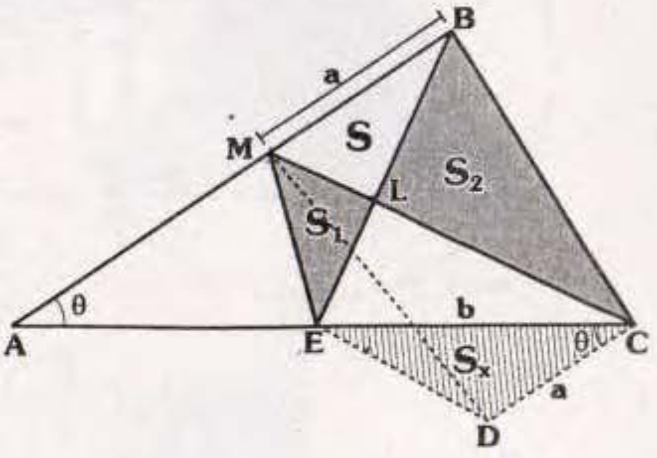
- Pero BH en $\triangle DHB$:

$$BH=a\operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore\ \mathbf{S_2-S_1=\frac{ab}{2}sen\theta}$$

Clave D

Otra forma de Resolver



- Sea el área de la región MLB : S
- Se traza $\overline{CD}//\overline{BM}$, tal que $CD=BM$
$\Rightarrow$ MBCD es paralelogramo.
- $S_x=S_{\Delta ECD}=\dfrac{ab\operatorname{sen}\theta}{2}$

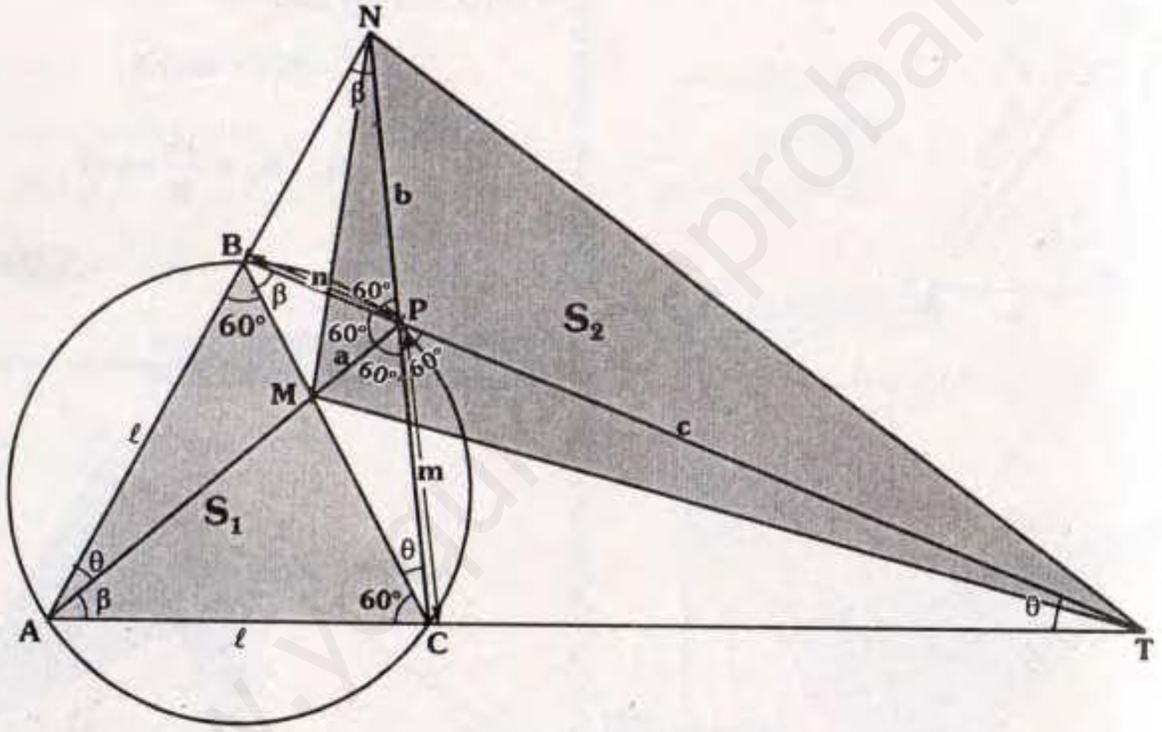
- Por propiedad:

$$S_x + S_1 + S = \frac{S_{\square MBCD}}{2}$$

$$S_2 + S = \frac{S_{\square MBCD}}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2 + S = S_x + S_1 + S \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_1 = S_x$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_2 - S_1 = \frac{absen\theta}{2}}$$

RESOLUCIÓN Nº 214



- $$S_1 = S_{\Delta ABC} = \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \ldots(I)$$

- $$S_2 = S_{\Delta MNT} = S_{\Delta NMP} + S_{\Delta NPT} + S_{\Delta MPT}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ac) \qquad \ldots(II)$$

- En ΔBPC : Por teorema de cosenos:

$$\ell^2 = m^2 + n^2 + mn \qquad \ldots(III)$$

- Luego de completar ángulos, tenemos

En ΔBPC, $\overline{PM}$ es bisectriz interior, entonces: $a=\dfrac{mn}{m+n}$

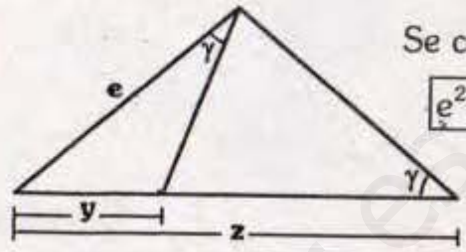
- Usando la propiedad de la semejanza:

En los triángulos TCB y NBC:

$$\ell^2=n(n+c) \Rightarrow \frac{\ell^2-n^2}{n}=c$$

$$\ell^2=m(m+b) \Rightarrow \frac{\ell^2-m^2}{m}=b$$

PROPIEDAD



Se cumple : $\boxed{e^2=yz}$

- Usando (III): $c=\dfrac{m}{n}(m+n)$ y $b=\dfrac{n}{m}(m+n)$

- En (II):

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{\cancel{m}n}{\cancel{(m+n)}}\cdot\frac{n}{m}\cancel{(m+n)}+\frac{\cancel{n}}{\cancel{m}}(m+n)\cdot\frac{\cancel{m}}{\cancel{n}}(m+n)+\frac{m\cancel{n}}{\cancel{(m+n)}}\cdot\frac{m}{\cancel{n}}\cancel{(m+n)}\right]$$

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}(n^2+(m+n)^2+m^2)=2\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{(m^2+n^2+mn)}_{\ell^2}}_{S_1} \Rightarrow S_2=2S_1$$

$$\therefore\ \frac{S_2}{S_1}=2$$

RESOLUCIÓN Nº 215

Nos piden $S_{\Delta BCD}$

- Como $m\widehat{BE}=m\widehat{EF}$

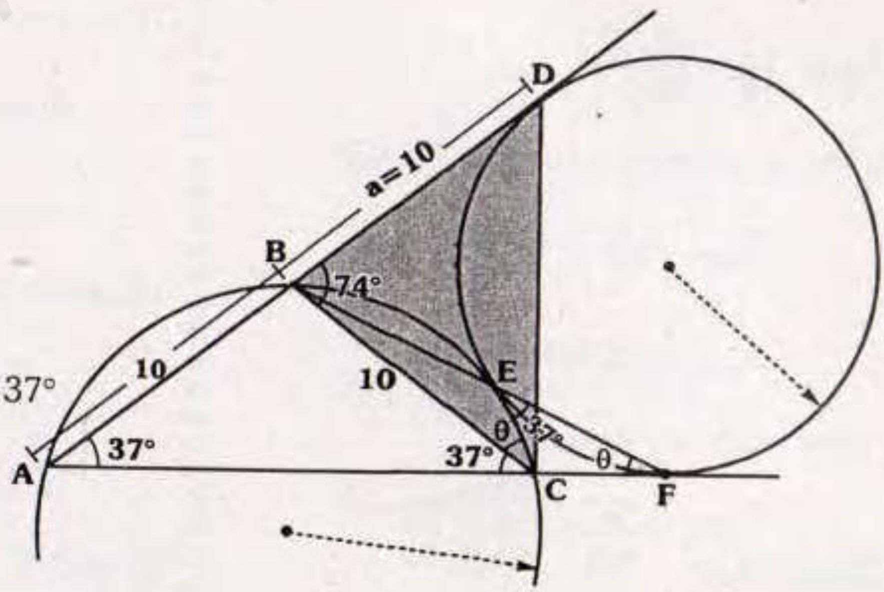
$\Rightarrow m\sphericalangle BCE=m\sphericalangle CFE$

- $\triangle ABEC$: inscrito

$\Rightarrow m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle CEF=37°$

$\Rightarrow m\sphericalangle ACB=37°$

$\Rightarrow AB=BC=10$



- Por teorema de la tangente:

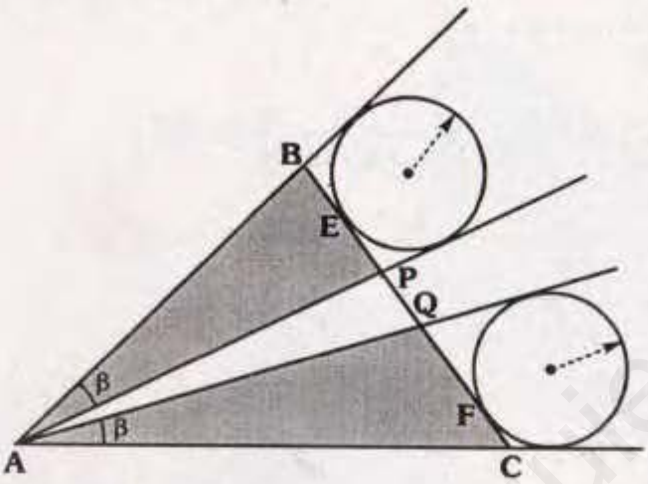
- En ΔCBF: $\left.\begin{array}{l}(BO)^2=(BE)(BF)\\(BC)^2=(BE)(BF)\end{array}\right\}BC=BD$

- En ΔCBD: $S_{\Delta BCD}=\dfrac{(10)(10)}{2}\text{sen}74°$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta BCD}=48}$$

Clave E

Resolución Nº 216



Piden $\dfrac{1}{QF}+\dfrac{1}{FC}$

Dato: $\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{EP}=k$

- Por el teorema ...(página Nº 43)

$$S_{\Delta AQC}=(QF)(FC)\text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$S_{\Delta ABP}=(BE)(EP)\text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

- Por razón de áreas:

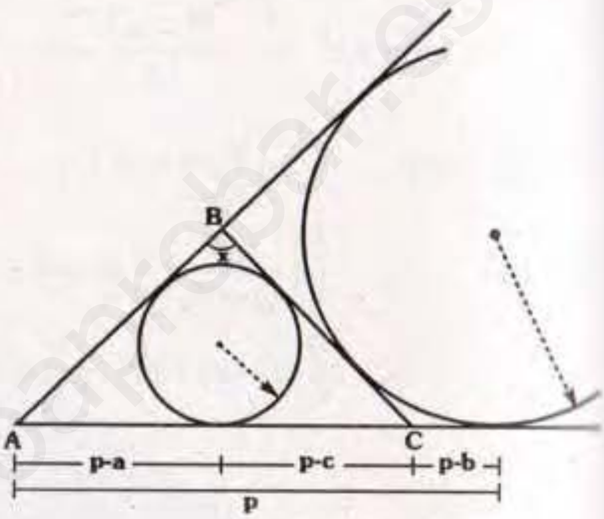
$$\frac{S_{\Delta AQC}}{S_{\Delta ABP}}=\frac{QC}{BP}=\frac{(QF)(FC)}{(BE)(EP)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{QF}+\frac{1}{FC}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{EP}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{1}{QF}+\frac{1}{FC}=k}$$

Clave A

Resolución Nº 217



Piden x

Por dato:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}[(p-a)(p-c)+p(p-a)]$$

- Por teorema:

$$S_{\Delta ABC}=(p-a)(p-c)\text{ctg}\frac{x}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=p(p-b)\text{tg}\frac{x}{2}$$

- Reemplazando en el dato:

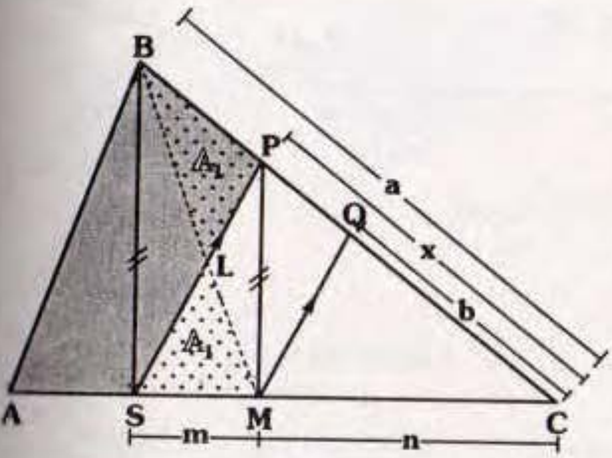
$$1=\frac{1}{4}\underbrace{\left[\text{tg}\frac{x}{2}+\text{ctg}\frac{x}{2}\right]}_{\frac{1}{\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}$$

$$1=\frac{1}{2\operatorname{sen}x} \Rightarrow \operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ **$x = 30°$**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 218



Piden x en función de "a" y "b"

Dato: $S_{\triangle ABPS}=S_{\Delta SPC}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{2}$

- Como AM=MC, entonces:

$$S_{\Delta ABM}=\frac{S_{\Delta ABC}}{2}$$

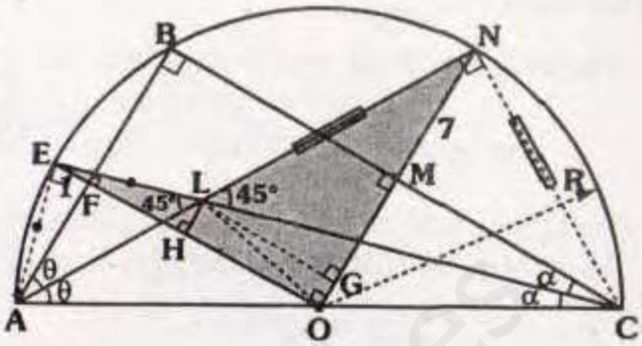
- Luego: $S_{\Delta SLM}=S_{\Delta BLP} \Rightarrow \overline{SB}//\overline{MP}$
- Por teorema de Tales:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{b}&=\frac{m+n}{n}\\ \frac{a}{x}&=\frac{m+n}{n}\end{aligned}\right\}\ \frac{x}{b}=\frac{a}{x}$$

$\therefore$ **$x=\sqrt{ab}$**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 219



Nos piden $S_{\measuredangle EONL}$

- Hallemos el área pedida así:

$$S_{\measuredangle EONL}=S_{\Delta OLN}+S_{\Delta EOL} \qquad ...(I)$$

- Notemos BM=MC=OF=R−1 y OM=R−7
- En $\measuredangle$OMC: $R^2=(R-1)^2+(R-7)^2$

$$\Rightarrow R = 13$$

- En $\measuredangle$LGN $\cong$ $\measuredangle$NMC $\Rightarrow$ LG = 7
- En $\measuredangle$AFE $\cong$ $\measuredangle$EHL $\Rightarrow$ LH = 1
- Finalmente:

$$S_{\Delta OLN}=\frac{(R)(LG)}{2}$$

$$S_{\Delta EOL}=\frac{(R)(LH)}{2}$$

- En (I):

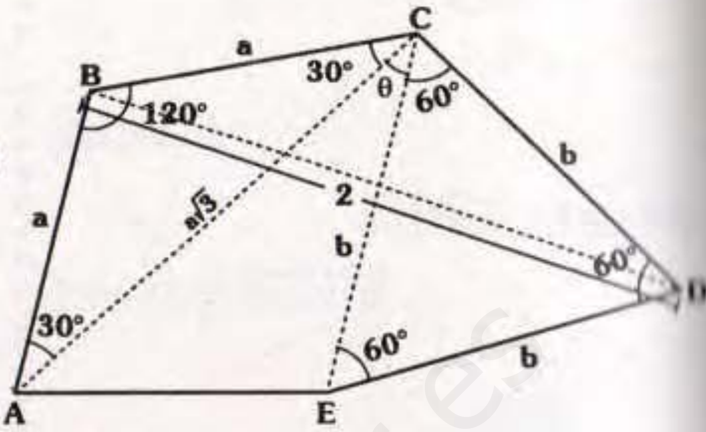
$$S_{\measuredangle EONL}=\frac{13(7)}{2}+\frac{13(1)}{2}$$

$S_{\measuredangle EONL}=52$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 220

Nos piden $S_{\text{⬠}ABCDE}$



- Hallemos el área que nos piden, así:

$$S_{\text{⬠}ABCDE}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACE}+S_{\Delta ECD} \ldots(I)$$

- Notemos que el ΔECD es equilátero y el triángulo ABC es isósceles, donde $m\sphericalangle ABC=120° \Rightarrow AC=a\sqrt{3}$

- $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\Delta ECD}=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ y $S_{\Delta ACE}=\dfrac{ab\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta$

- En ΔBCD, por teorema de cosenos:

$$a^2+b^2-2ab\cos(90°+\theta)=4 \quad\Rightarrow\quad a^2+b^2+2ab\operatorname{sen}\theta=4 \qquad \ldots(II)$$

- En (I):

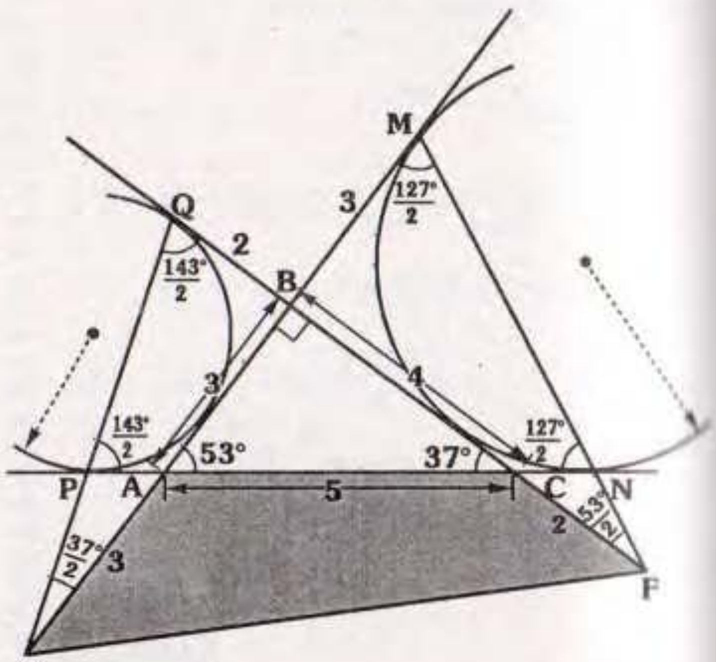
$$S_{\text{⬠}ABCDE}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{(a^2+b^2+2ab\operatorname{sen}\theta)}_{4}$$

$$\therefore \mathbf{S_{\text{⬠}ABCDE}=\sqrt{3}}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 221

Nos piden $S_{\triangle EACF}$



- Por teorema:

$$CQ=AM=\frac{3+4+5}{2}=6$$

$$\Rightarrow BQ=2 \text{ y } BM=3$$

- $\measuredangle$EBQ: notable de 37°/2 $\Rightarrow$ EA = 3
- $\measuredangle$FBM: notable de 53°/2 $\Rightarrow$ FC = 2
- Finalmente:

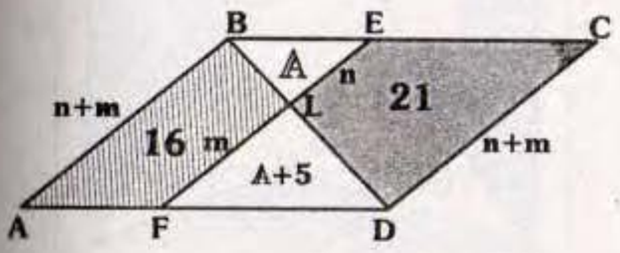
$$S_{\triangle EACF}=S_{\measuredangle EBF}-S_{\measuredangle ABC}$$

$$S_{\triangle EACF}=\frac{(6)(6)}{2}-\frac{(3)(4)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle EACF}=12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 222



Piden $S_{\square ABCD}$

• Como $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BDC}$

$$\Rightarrow\ S_{\square ABCD}=2(21+\mathbb{A})$$

• $\Delta BLE\sim\Delta BDE$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathbb{A}}{21+\mathbb{A}}=\frac{n^2}{(m+n)^2}\qquad\ldots(I)$$

• $\Delta FLD\sim\Delta ABD$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathbb{A}+5}{21+\mathbb{A}}=\frac{n^2}{(m+n)^2}\qquad\ldots(II)$$

• De (I) y (II):

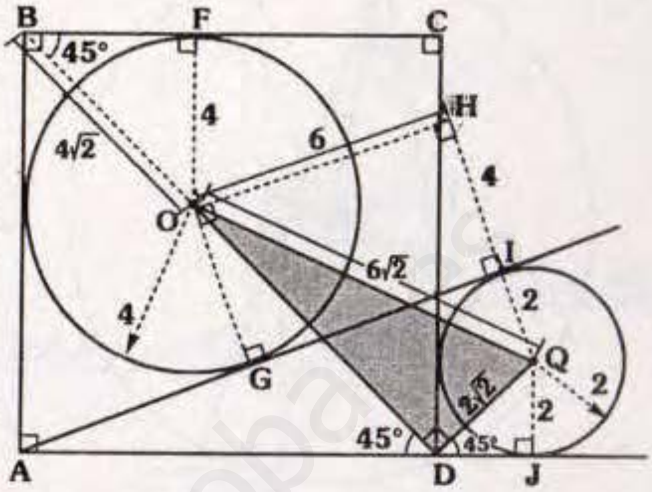
$$\sqrt{\frac{\mathbb{A}}{21+\mathbb{A}}}+\sqrt{\frac{\mathbb{A}+5}{21+\mathbb{A}}}=1$$

$$\Rightarrow\quad \mathbb{A}=4$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD}=50}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 223



Piden $S_{(ABCD)}$

• En $\triangle BFO$: $OB=4\sqrt{2}$

• En $\triangle DJQ$: $DQ=2\sqrt{2}$

• Notemos que OGIH es rectángulo

• En $\triangle OHQ$: $OQ=6\sqrt{2}$

• En $\triangle ODQ$: $OD=8$

$$\Rightarrow\ BD=8+4\sqrt{2}$$

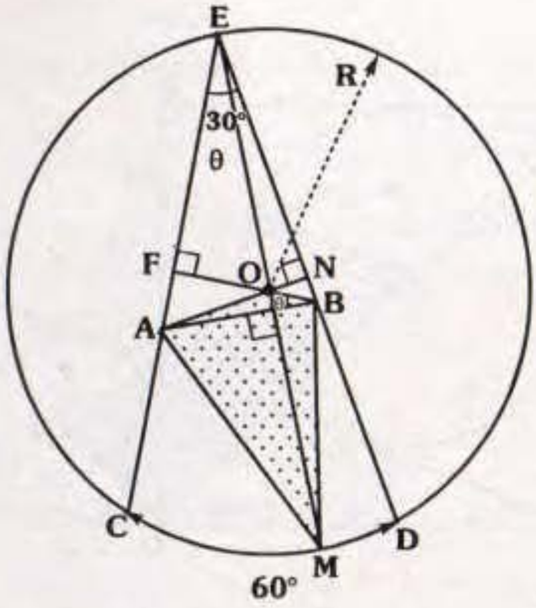
• Finalmente:

$$S_{(ABCD)}=\frac{(BD)^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)}=16(3+2\sqrt{2})}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 224



Nos piden: $S_{\square AOBM}$

- Como O es ortocentro del ΔAEB

$$\Rightarrow \ \overline{EO} \perp \overline{AB}$$

- $S_{\square AOBM} = \dfrac{(3)(R)}{2}\text{sen}90° = \dfrac{3}{2}R \qquad ...(I)$

- $\measuredangle OFE \sim \measuredangle AFB$:

$$\frac{R}{3} = \frac{EF}{FB} \qquad ...(II)$$

- En $\measuredangle ANE$: $\dfrac{EF}{FB} = \sqrt{3}$

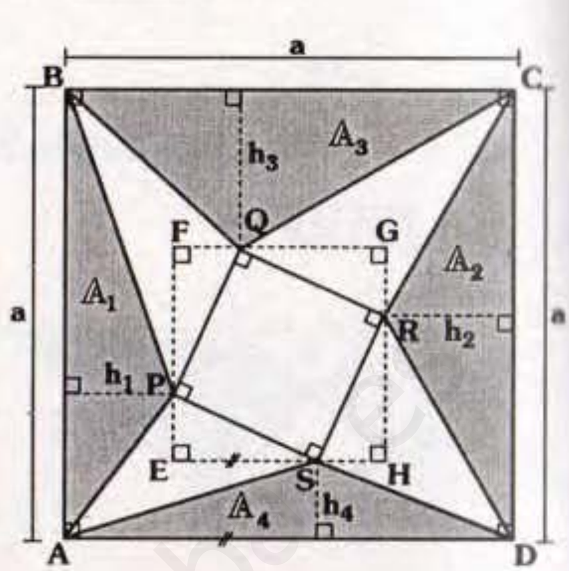
- En (II): $R = 3\sqrt{3}$

- En (I):

$$\therefore \ S_{\square AOBM} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 225



Analizando por partes:

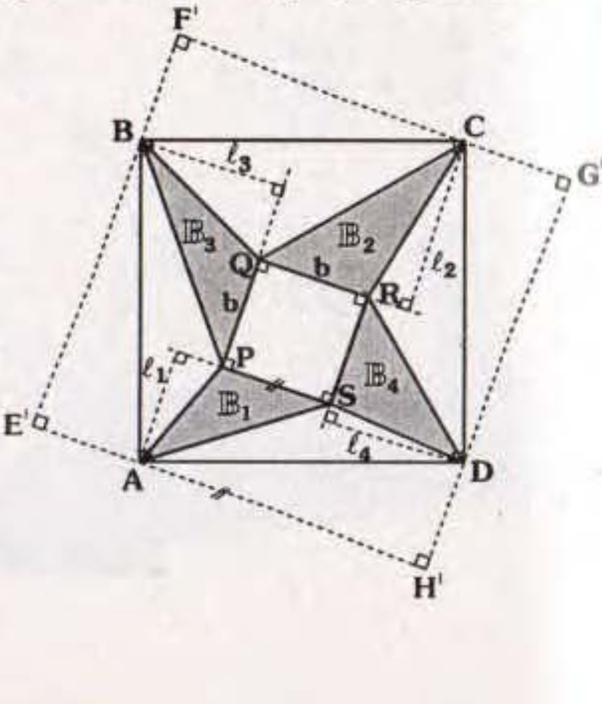
- Se traza EFGH tal que $\overline{EH} // \overline{AD}$
- Notemos que EFGH es un cuadrado

$$\Rightarrow \ h_1 + h_2 = h_3 + h_4$$

$$\Rightarrow \ \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{ah_3}{2} + \frac{ah_4}{2}$$

$$\Rightarrow \ \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4$$

- Ahora analicemos las áreas de las regiones APS, PBQ, QCR y DRS.



• Se traza E'F'G'H' tal que $\overline{E'F'} // \overline{PQ} \Rightarrow$ E'F'G'H' es cuadrado

$$\Rightarrow \ \ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4$$

$$\frac{b\ell_1}{2} + \frac{b\ell_2}{2} = \frac{b\ell_3}{2} + \frac{b\ell_4}{2}$$

$$\Rightarrow \ \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_3 + \mathbb{B}_4$$

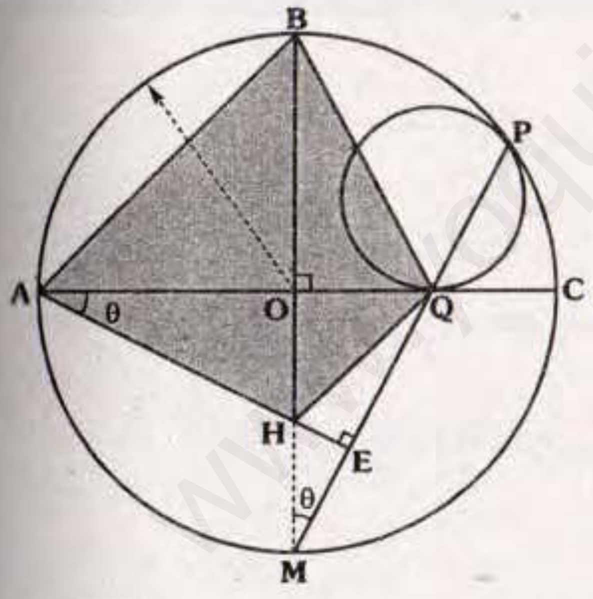
• Finalmente:

como $S_1 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{B}_1$; $S_2 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{B}_2$;

$$S_3 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{B}_3 \ \text{ y } \ S_4 = \mathbb{A}_4 + \mathbb{B}_4$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 + S_2 = S_3 + S_4}$$

RESOLUCIÓN Nº 226



Nos piden $S_{\triangle ABQH}$

Dato AQ=a

• Por teorema de circunferencia la prolongación de $\overline{PQ}$ corta a la circunferencia en M tal que $m\widehat{AM} = m\widehat{MC} \Rightarrow$ la prolongación de $\overline{OH}$ llega a M.

• $\triangle AOH \cong \triangle MOQ \ \Rightarrow \ OH = OQ$

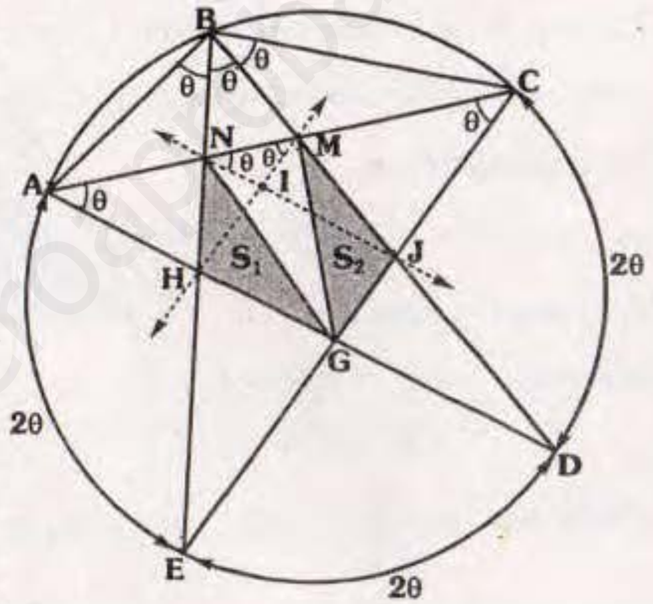
• Luego $\quad AQ = BH = a$

• $$S_{\triangle ABQH} = \frac{(AQ)(BH)}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\triangle ABQH} = \frac{a^2}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 227



Piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

• Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle GAC = m\sphericalangle ACE = \theta$$

• Notemos también:

$\triangle$ABMH y $\triangle$NBCJ: inscriptibles

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle AMH = \theta = m\sphericalangle CNJ$$

• Notemos ahora: $\overline{HM} // \overline{EC}$ y $\overline{NJ} // \overline{AD}$

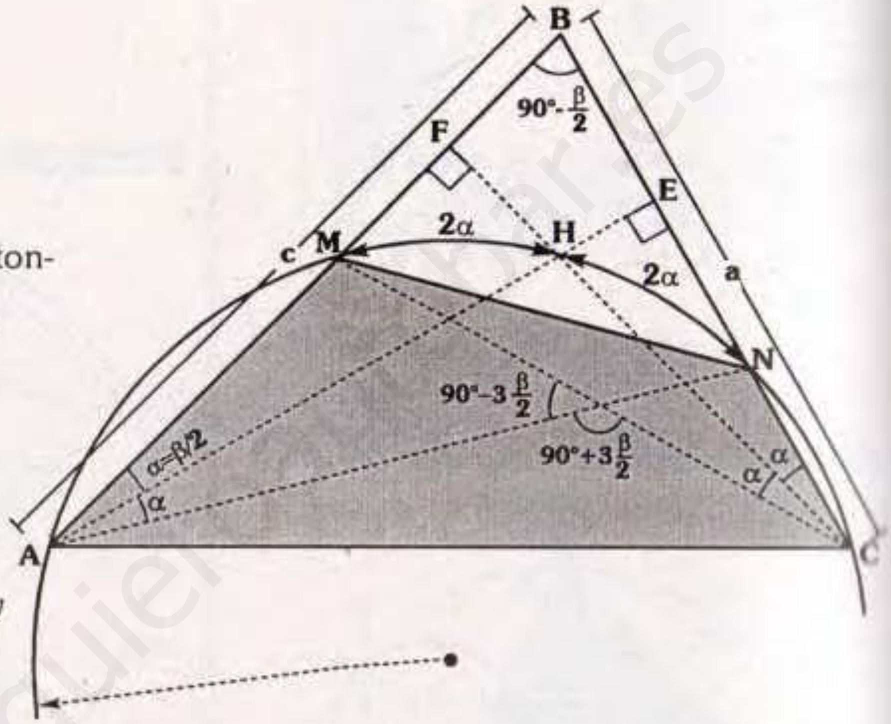
$\Rightarrow$ HIJG es paralelogramo

- Finalmente: $\left.\begin{aligned} S_1 &= \dfrac{S_{\square HIJG}}{2} \\ S_2 &= \dfrac{S_{\square HIJG}}{2} \end{aligned}\right\} S_1 = S_2$ $\qquad \therefore\ \mathbf{\dfrac{S_1}{S_2} = 1}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 228

Nos piden $\dfrac{S_{\triangle AMNC}}{S_{\Delta ABC}}$



- Dato $m\overset{\frown}{MN} = 2\beta$
- Como H es ortocentro, entonces: $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ son alturas
- Sea $m\measuredangle MAH = \alpha$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle MCH = m\measuredangle FCB = \alpha$

$\Rightarrow \quad \Delta BAN$ y ΔMCB:

isósceles $\Rightarrow AB = AN = c$ y

$CB = CM = a$

- Notemos: $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

- Por fórmula general: $\qquad S_{\triangle AMNC} = \dfrac{ac}{2}\operatorname{sen}\left(90° - \dfrac{3\beta}{2}\right) = \dfrac{ac}{2}\cos\dfrac{3\beta}{2}$

- Por fórmula trigonométrica: $\qquad S_{\Delta ABC} = \dfrac{ac}{2}\operatorname{sen}\left(90° - \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{ac}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$

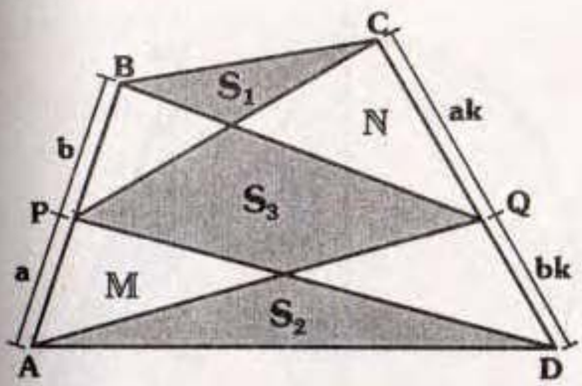
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMNC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\cos\dfrac{3\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$$

- Usando: $\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\triangle AMNC}}{S_{\Delta ABC}} = 2\cos\beta - 1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 229



Por demostrar: $S_1+S_2=S_3$

- El dato se puede escribir así:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QD}=\frac{a}{b}$$

- Si analizamos APCQ con respecto al total:

$$S_{\triangle APCQ}=\frac{a}{a+b}.S_{\triangle ABCD} \quad ...(I)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta PBC}+S_{\Delta AQD}=\frac{b}{a+b}.S_{\triangle ABCD}$$

- También:

$$S_{\triangle BQDP}=\frac{b}{a+b}S_{\triangle ABCD}$$

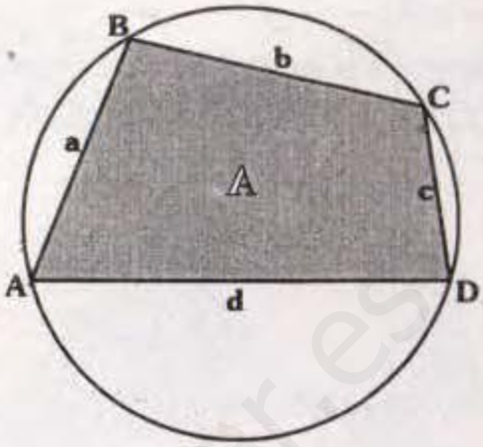
$$\Rightarrow S_{\Delta BCQ}+S_{\Delta APD}=\frac{a}{a+b} \quad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$M+S_3+N=S_1+N+M+S_2$$

$$\therefore \ \mathbf{S_3=S_1+S_2}$$

RESOLUCIÓN Nº 230



En el gráfico, $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Por demostrar: $4\mathbb{A} \leq p^2$

- Como:

$$\mathbb{A}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Usemos: $MG \leq MA$

para:

$$(p-a) \ ; (p-b) \ ; (p-c) \ y \ (p-d)$$

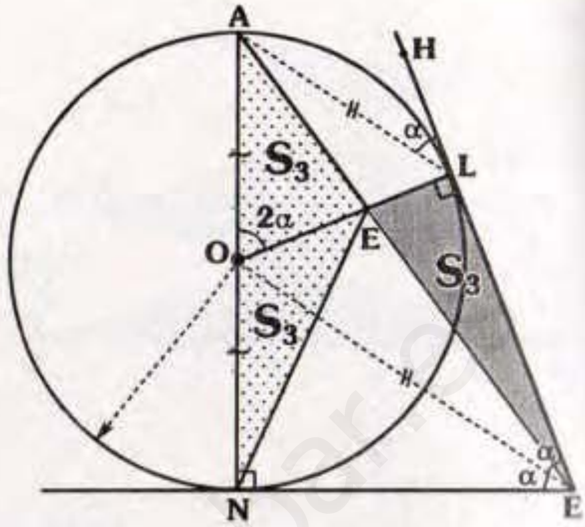
$$\Rightarrow \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathbb{A}} \leq \frac{2p}{4}$$

$$\therefore \ \mathbf{4\mathbb{A} \leq p^2}$$

RESOLUCIÓN Nº 231

Analizando por partes:



- Como $\overline{EO}$ es bisectriz del $\measuredangle LEN$ y $\square LENO$ inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle LOA = 2\alpha$
- Por $\measuredangle$ semi-inscrito:

$$m\measuredangle HLA = \alpha \Rightarrow \overline{LA} \parallel \overline{EO}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta EOA} = S_3$$

- Como AO=ON $\Rightarrow S_{\Delta EOA} = S_{\Delta EON} = S_3$

$$\Rightarrow S_{\Delta AEN} = 2S_3$$

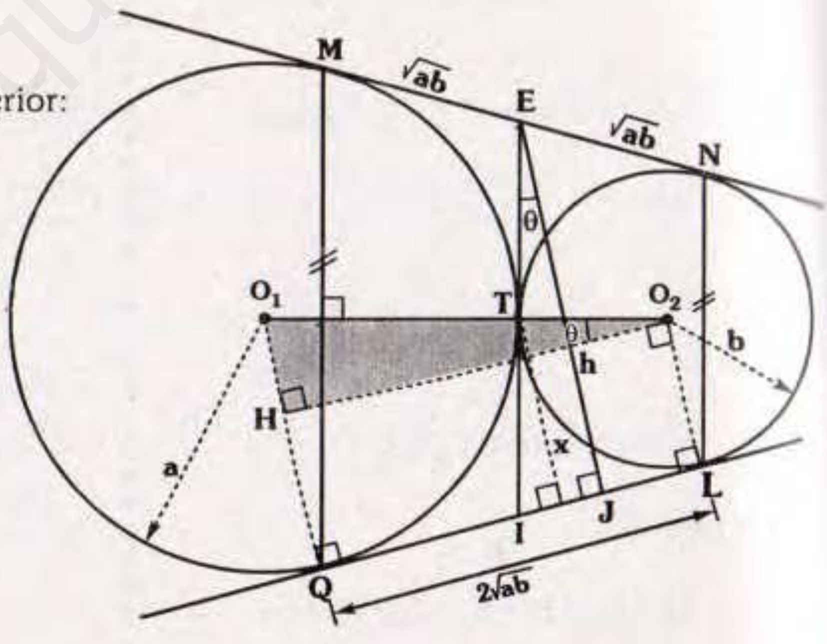
- Análogamente para la otra parte:

$$\therefore\ \mathbf{S_1 = 2(S_2 + S_3)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 232

Nos piden $S_{\square QMNL}$.



- Por teorema MN=QL= $2\sqrt{ab}$
- Se traza la tangente común interior:

$$\Rightarrow ME=EN=ET=TI=\sqrt{ab}$$

- Usando: $S_{\square QMNL} = (QL)(EJ)$

$$S_{\square QMNL} = (2\sqrt{ab})h$$

- Por propiedad en $\square QO_1O_2L$:

$$x = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow h = \frac{4ab}{a+b}$$

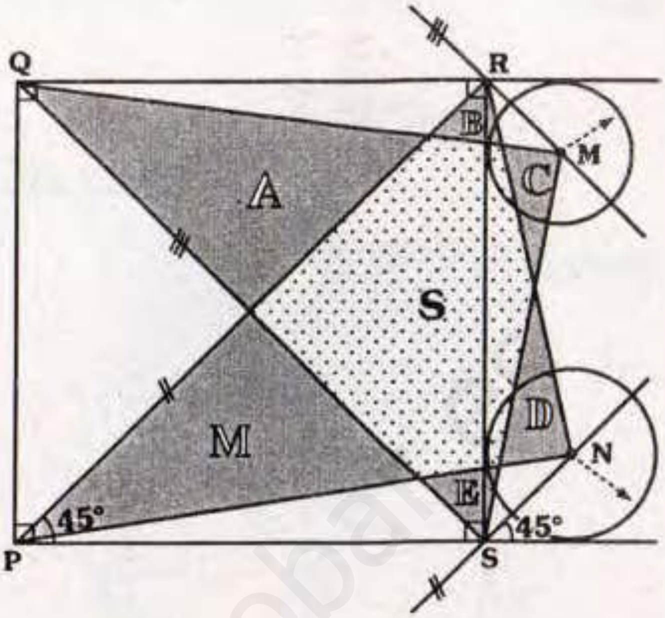
- Finalmente

$$\mathbf{S_{\square QMNL} = \frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 233

Nos piden la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



- Notemos: $\overline{PR} // \overline{SN}$ y $\overline{QS} // \overline{RM}$

$$\Rightarrow S_{\Delta PRN} = S_{\Delta PSR} = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$$

También: $S_{\Delta QMS} = S_{\Delta QRS} = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$

- Luego: $S_{\Delta PRN} = S_{\Delta QMS}$

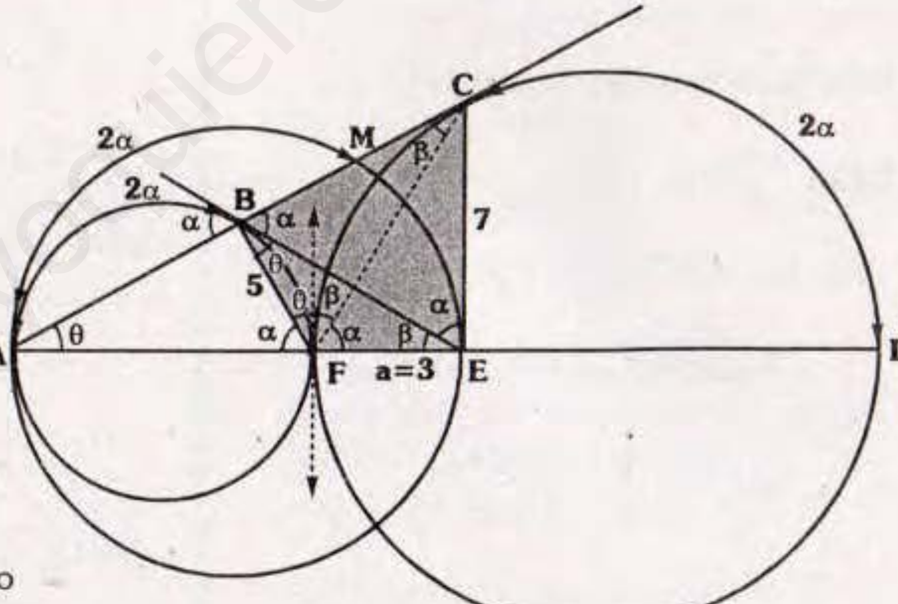
$$\Rightarrow \mathbb{M} + S + \mathbb{B} + \mathbb{D} = \mathbb{A} + \mathbb{C} + \mathbb{E} + S$$

$$\therefore \ \mathbb{A} + \mathbb{C} + \mathbb{E} = \mathbb{M} + \mathbb{B} + \mathbb{D}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 234

Nos piden $S_{\triangle EFBC}$



- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{CD}$

$$\Rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{AM}$$

Luego:

$m\measuredangle BFA = m\measuredangle EBC = m\measuredangle CFD$

$\Rightarrow \triangle EFBC$: inscriptible

- Notemos:

$m\measuredangle BFA = m\measuredangle BFC = m\measuredangle CFE$

$\Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \Delta EBC$ equilátero

- En ΔBFE: a = 3

- Para el área, podria ser por partes, pero optemos por:

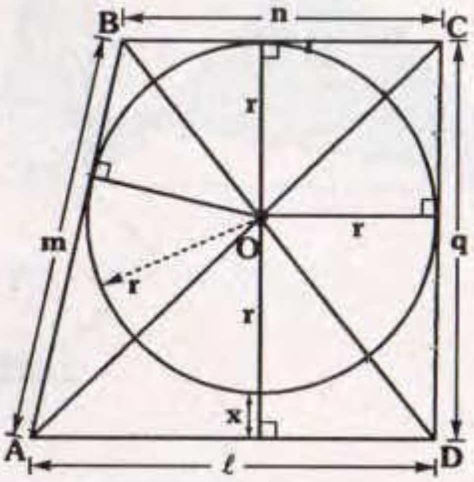
$$S_{\triangle EFBC} = \sqrt{(p-3)(p-5)(p-7)(p-7)}$$

Como $\quad p=\dfrac{3+5+7+7}{2}=11$

$$\therefore \mathbf{S_{\square EFBC}=16\sqrt{3}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 235



Piden x en función de a y r.

Dato: $\dfrac{mq}{n\ell}=a$

- Por teorema:

$$(S_{\Delta AOB})(S_{\Delta COD})=(S_{\Delta BOC})(S_{\Delta AOD})$$

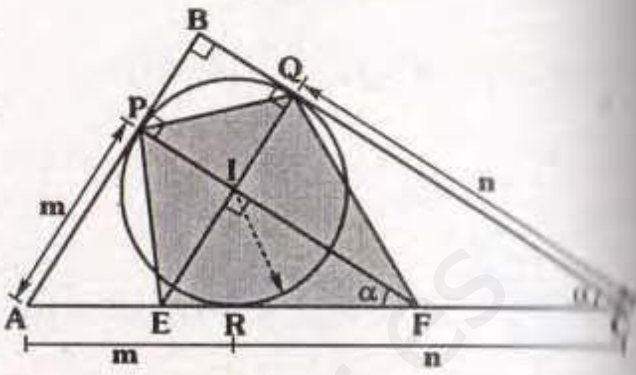
$$\Rightarrow \frac{mr}{2}\cdot\frac{qr}{2}=\frac{nr}{2}\,\frac{\ell(r+x)}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{mq}{n\ell}}_{a}=\frac{r+x}{r}$$

$$\therefore \mathbf{x=r(a-1)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 236



Nos piden $\dfrac{S_{\square EPQF}}{S_{\Delta ABC}}$

- Notemos que $\overline{EQ}\perp\overline{PF}$

- $\qquad S_{\square EPQF}=\dfrac{(EQ)(PF)}{2} \qquad$ ...(I)

- $\qquad S_{\triangle ABC}=mn \qquad$ ...(II)

- $\triangle EQC\sim\triangle APF$

$$\Rightarrow \frac{m}{PF}=\frac{EQ}{n}$$

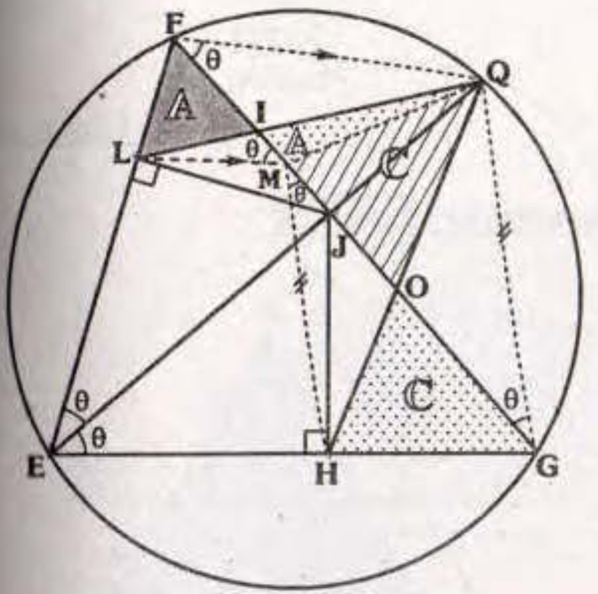
$$\Rightarrow mn=(PF)(EQ) \qquad ...(III)$$

- De (I), (II) y (III):

$$\mathbf{\frac{S_{\square EPQF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 237



Nos piden demostrar $S_{\Delta IOQ} = \mathbb{A} + \mathbb{C}$

- Se traza $\overline{LM} // \overline{FQ}$, con M en $\overline{FG}$

$$\Rightarrow \ S_{\Delta IMQ} = \mathbb{A}$$

- Como $m\sphericalangle LMF = m\sphericalangle MFQ = \theta \Rightarrow \triangle ELMJ$ es inscriptible y también el $\triangle ELJH$ lo es $\Rightarrow$ los puntos E, L, M, J y H son concíclicos $\Rightarrow m\sphericalangle HMJ = \theta$

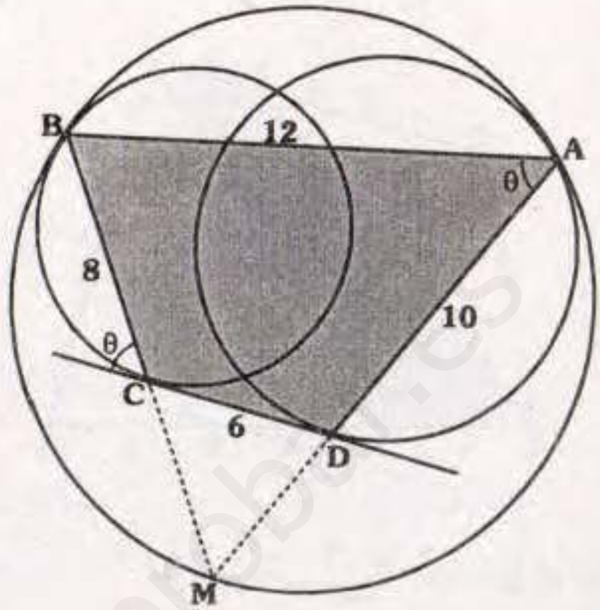
$$\Rightarrow \ \overline{MH} // \overline{QG}$$

- Como $\overline{MH} // \overline{QG}$

$$\Rightarrow \ S_{\Delta OMQ} = \mathbb{C}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta IOQ} = \mathbb{A} + \mathbb{C}}$$

RESOLUCIÓN Nº 238



Nos piden $S_{\triangle ABCD}$

- Por teorema de circunferencia, al prolongar $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, intersecará al arco EF en su punto medio.

- Como $m\widehat{BC} = m\widehat{BM}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ECB = m\sphericalangle BAD$$

$$\Rightarrow \triangle ABCD \text{ es inscriptible}$$

- Como el $\triangle ABCD$ también es circunscritible, por teorema de Pilot:

$$AD + BC = AB + CD \ \Rightarrow \ AD = 10$$

- Concluímos que el $\triangle ABCD$ es bicéntrico, entonces:

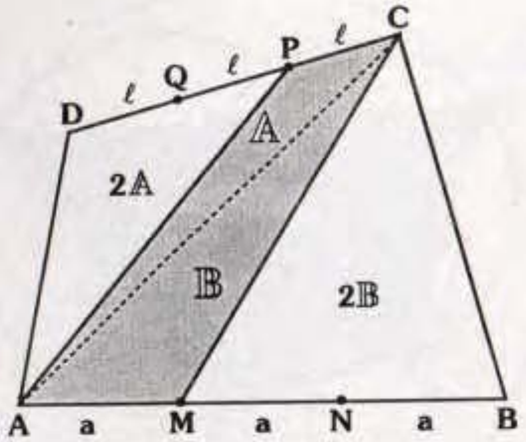
$$S_{\triangle ABCD} = \sqrt{(6)(8)(10)(12)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\triangle ABCD} = 24\sqrt{10}}$$

Clave A

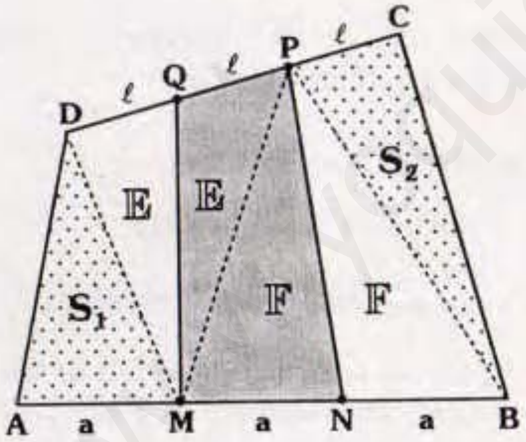
RESOLUCIÓN Nº 239

Analicemos el problema por partes:



En el gráfico: $S_{\square AMCP} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$

$$\Rightarrow \quad S_{\square AMCP} = \frac{S_{\square ABCD}}{3}$$



- Notemos que:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}$$

$$\Rightarrow \quad 2\mathbb{E} + 2\mathbb{F} = \frac{2}{3} S_{\square ABCD}$$

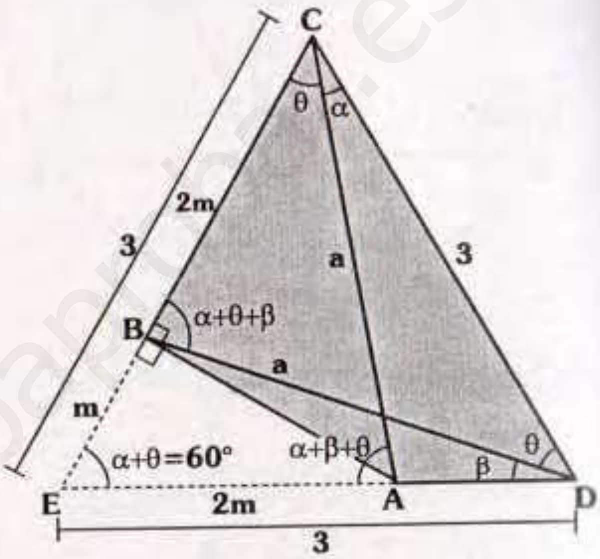
$$\Rightarrow \quad \mathbb{E} + \mathbb{F} = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}$$

$$S_{\square MNPQ} = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\square AMCP}}{S_{\square MNPQ}} = 1$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 240



Piden $S_{\square ABCD}$

- Al completar ángulos, notamos

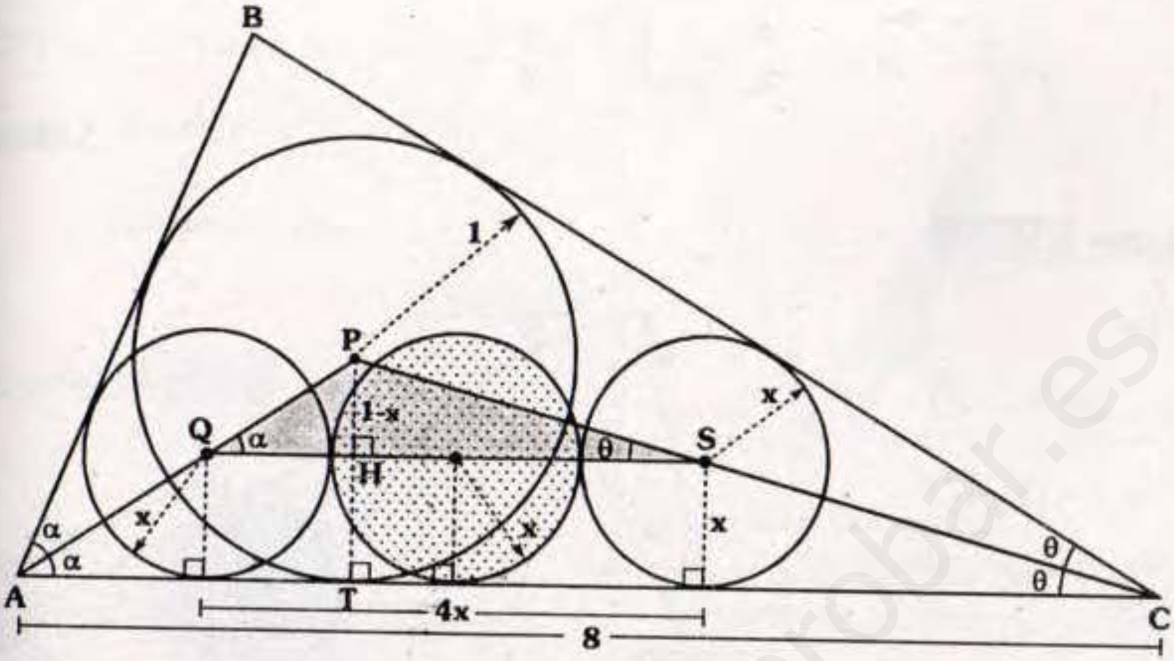
$$m\measuredangle DEB = m\measuredangle BCD \Rightarrow ED = CD = 3$$

- $\Delta ECA \cong \Delta DCB \Rightarrow EC = 3$ y $EA = BC$
- ΔABC : equilátero
- $\triangle EBA$: notable de 30° $\Rightarrow m = 1$
- $$S_{\square ABCD} = \underbrace{S_{\Delta ECD}}_{3^2\frac{\sqrt{3}}{4}} - \underbrace{S_{\Delta EBA}}_{\frac{(1)(\sqrt{3})}{2}}$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{7}{4}\sqrt{3}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 241



Nos piden $A_{\bullet} = \pi x^2$

- Notemos $\Delta APC \sim \Delta QPS$, comparando elementos homólogos:

$$\frac{QS}{AC} = \frac{PH}{PT} \Rightarrow \frac{4x}{8} = \frac{1-x}{1} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \ \mathbf{A_{\bullet} = \frac{4}{9}\pi}$$

Clave E

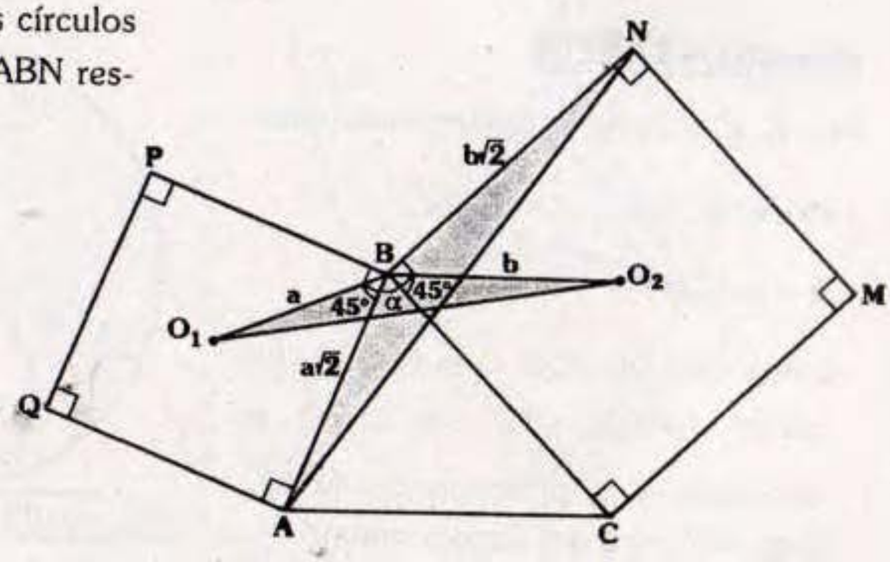
RESOLUCIÓN N° 242

- Sean A_1 y A_2 las áreas de los círculos inscritos en los Δs O_1BO_2 y ABN respectivamente.

- Nos piden: $\dfrac{A_1}{A_2}$

- Notemos: $\Delta O_1BO_2 \sim \Delta ABN$,

con razón de semejanza $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



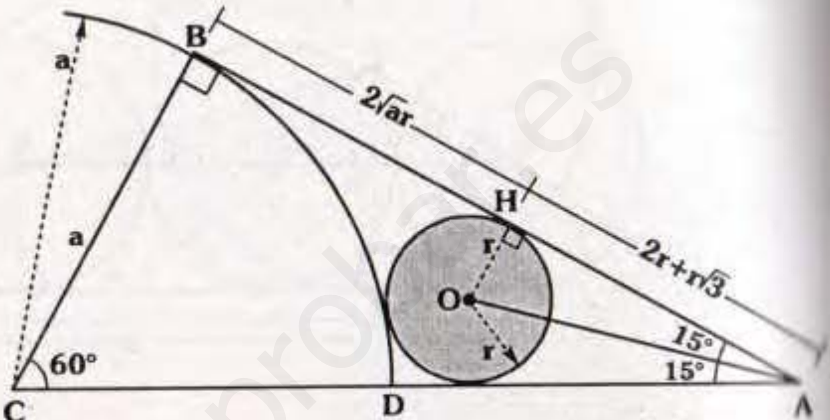
- Por teorema:

$$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 243

Piden $A_{\bullet}$



- Dato: $a=7+4\sqrt{3}$

$\Rightarrow a=(2+\sqrt{3})^2$

- Por teorema de relaciones métricas:

$$BH=2\sqrt{ar}$$

- En ◿OHA: $HA=2r+r\sqrt{3}$
- Como $AB=a\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{ar}=a\sqrt{3}-r(2+\sqrt{3})$

$$2\cancel{(2+\sqrt{3})}\sqrt{r}=(2+\sqrt{3})^{\cancel{2}}\sqrt{3}-r\cancel{(2+\sqrt{3})}$$

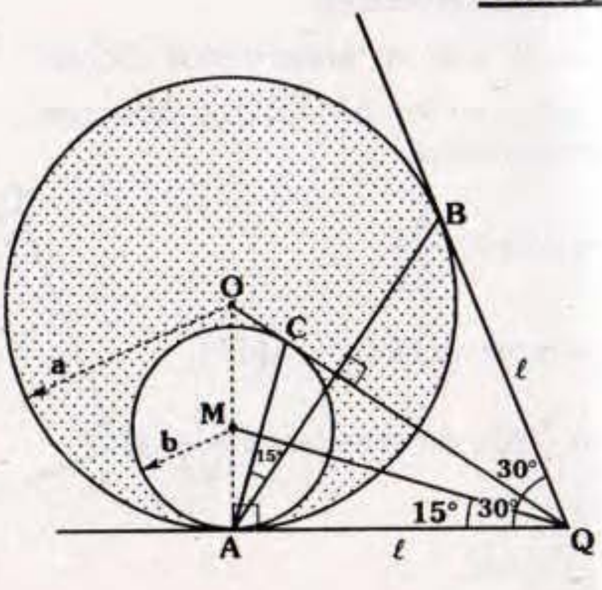
$$\Rightarrow \quad r+2\sqrt{r}=3+2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r=3$$

$$\therefore \quad \mathbf{A_{\bullet}=9\pi}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 244

Sea $\mathbb{A}$ el área de la región sombreada.



- Piden $\mathbb{A}$; Dato: $\ell=3+2\sqrt{3}$
- $\mathbb{A}=\pi(a^2-b^2)$
- Como $QA=QC=QB \Rightarrow m\measuredangle CQB=30°$ luego $m\measuredangle AQC=30°$, el ΔABQ es equilátero $\Rightarrow$ la prolongación de $\overline{QC}$ llega al centro del círculo mayor.

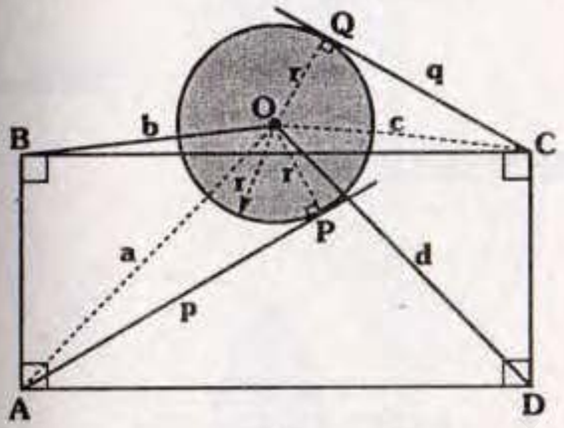
- $\measuredangle$OAQ: notable de 30° $\Rightarrow a = 2+\sqrt{3}$
- $\measuredangle$MAQ: notable de 15° $\Rightarrow b = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \ \mathbb{A} = \pi\left[(2+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2\right]$$

$$\therefore \ \mathbf{A = 4\pi(1+\sqrt{3})}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 245



Piden $A_\bullet$

Dato:

$$b^2 + d^2 - p^2 - q^2 = 8$$

- Por teorema de Marlen:

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2$$

- En el dato:

$$\underbrace{a^2 - p^2}_{r^2} + \underbrace{c^2 - q^2}_{r^2} = 8$$

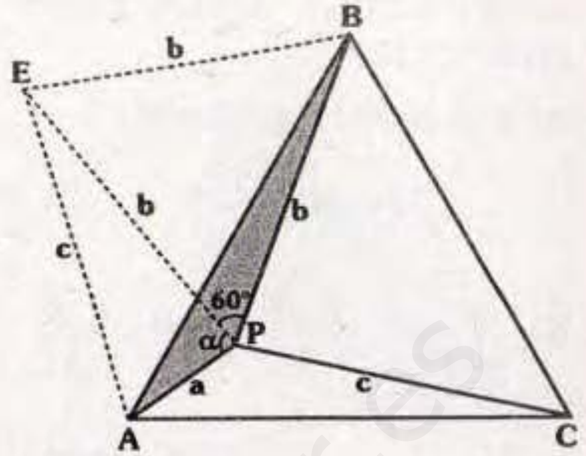
$$\Rightarrow r^2 = 4$$

- Finalmente:

$$\therefore \ \mathbf{A_\bullet = 4\pi}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 246



Analicemos por partes:

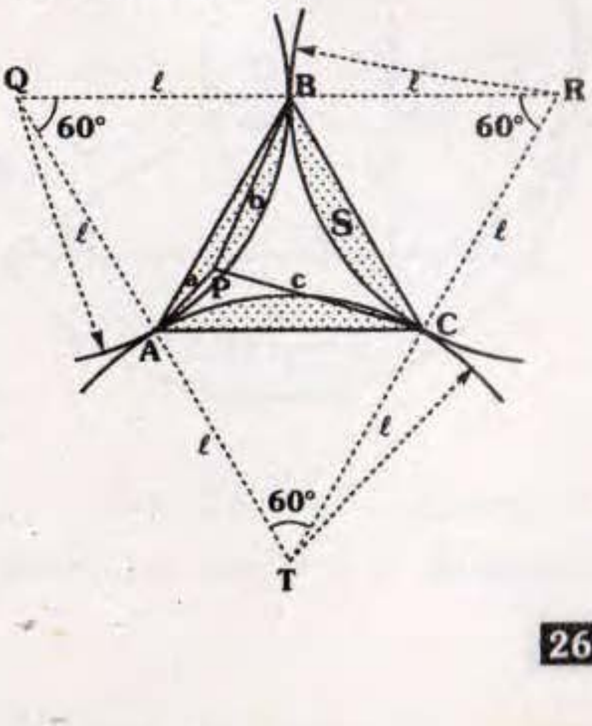
- Nos indican que con "a", "b" y "c" debe formarse un triángulo no acutángulo, es decir:

  $a^2 \geq b^2 + c^2$, $b^2 \geq a^2 + c^2$ ó $c^2 \geq b^2 + a^2$

- Se traza el ΔPEB equilátero, entonces:

  $$\Delta EBA \cong \Delta PBC \ \Rightarrow \ EA = c$$

- En ΔAEP : si $c^2 \geq b^2 + a^2 \Rightarrow \alpha \geq 90°$
- Es decir $m\measuredangle APB \geq 150°$, análogamente para cada lado, los puntos "P" se encontrarán en las regiones sombreadas a continuación.



• Las regiones favorables, serán donde: $m\measuredangle APB \geq 150°$; $m\measuredangle APC \geq 150°$ ó $m\measuredangle BPC \geq 150°$

• Sea p la probabilidad pedida:

$$\Rightarrow\ p=\frac{3S}{S_{\Delta ABC}} \qquad ...(I)$$

• $S=\frac{60°}{360°}\pi\ell^2-\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{6}\pi\ell^2-\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

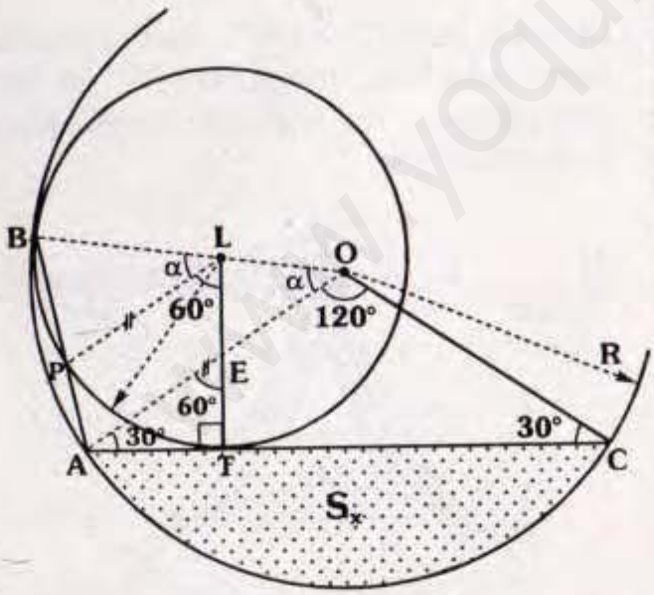
• En (I):

$$p=\frac{1}{\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)}\cdot 3\left(\frac{1}{6}\pi\ell^2-\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{p=\frac{\sqrt{3}}{3}(2\pi-3\sqrt{3})}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 247



Nos piden S_x. Dato $AC=2\sqrt{3}$

• Como O, L y B son colineales y $m\widehat{BP}=m\widehat{BA} \Rightarrow \overline{PL}\,//\,\overline{AO}$, luego $m\measuredangle AET=60°$

• $$S_x=S_{\triangle AOC}-S_{\Delta AOC}$$

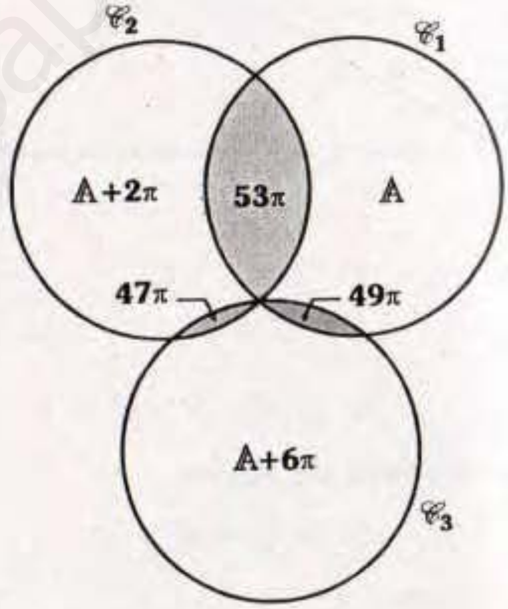
$$S_x=\frac{1}{3}\pi R^2-R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

• Como $AC=2\sqrt{3} \Rightarrow R=2$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 248



Sea r el radio de los círculos congruentes se ha graficado de acuerdo a las condiciones

• Como $\underbrace{\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\mathscr{C}_3)}}=823\pi$

$$3\mathbb{A}+157\pi=823\pi$$

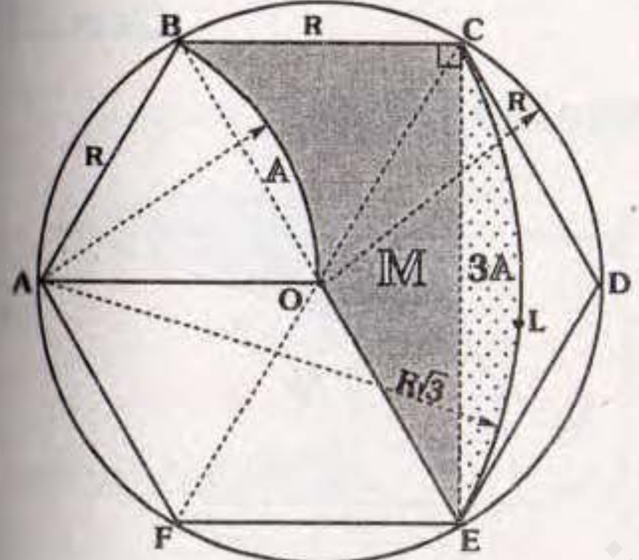
$$\Rightarrow \mathbb{A}=222\pi$$

• Luego $\underbrace{\mathbb{A}_{(\circ)}}_{\pi r^2} = 324\pi$

$\therefore\ \mathbf{r = 18}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 249



Nos piden: $3\mathbb{A} + \mathbb{M}$

• Notemos que los arcos OB y CE son semejantes cuya razón de semejanza es de 1 a $\sqrt{3}$.

• La razón de áreas de los segmentos circulares es de 1 a 3.

• $$S_{\triangle BCE} = \mathbb{A} + \mathbb{M} = R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

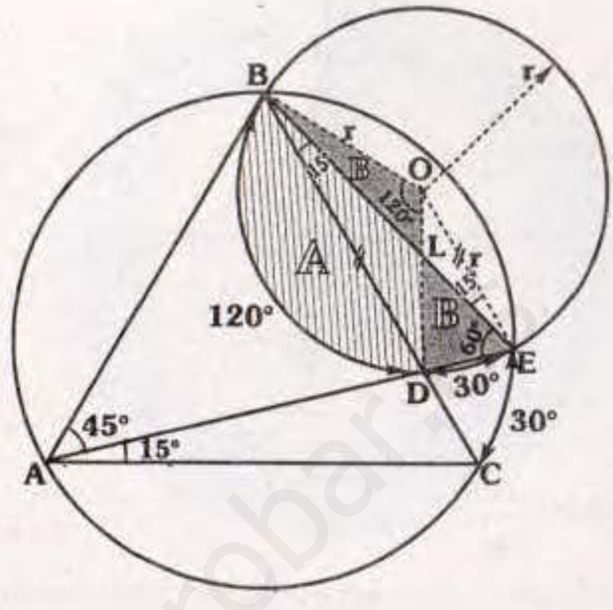
• $$\mathbb{A} = S_{\triangle AOB} - S_{\Delta AOB}$$

$$\mathbb{A} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

• Finalmente: $\mathbf{3\mathbb{A} + \mathbb{M} = \frac{1}{3}\pi R^2}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 250



Nos piden $\mathbb{A} + \mathbb{B}$

• Notamos que $m\measuredangle CBE = 15°$ y

$$m\measuredangle DEB = 60°$$

$$\Rightarrow\ m\widehat{BDE} = 150° \Rightarrow m\measuredangle BOE = 150°$$

• También: $\overline{BD} // \overline{OE}$

$$\Rightarrow S_{\Delta LDE} = S_{\Delta BOL} = \mathbb{B}$$

• Como $m\widehat{DE} = 30° \Rightarrow \underbrace{DE}_{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

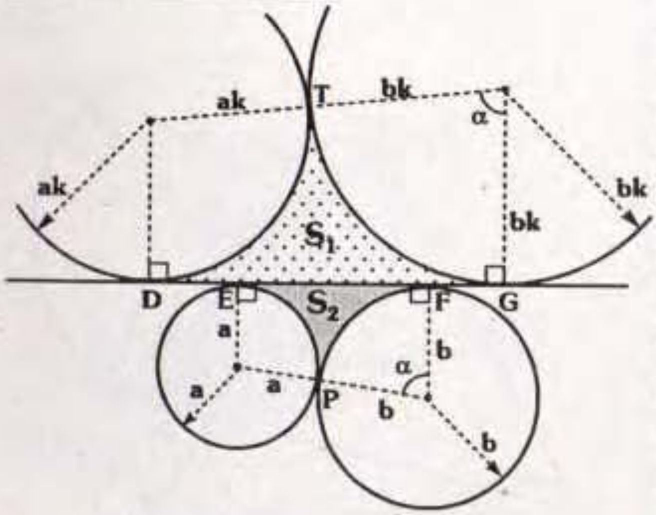
$$\Rightarrow r = 2$$

• $$\mathbb{A} + \mathbb{B} = S_{\triangle BOD} = \frac{120°}{360°}\pi 2^2$$

$$\therefore\ \mathbb{A} + \mathbb{B} = \frac{4}{3}\pi$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 251



Piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

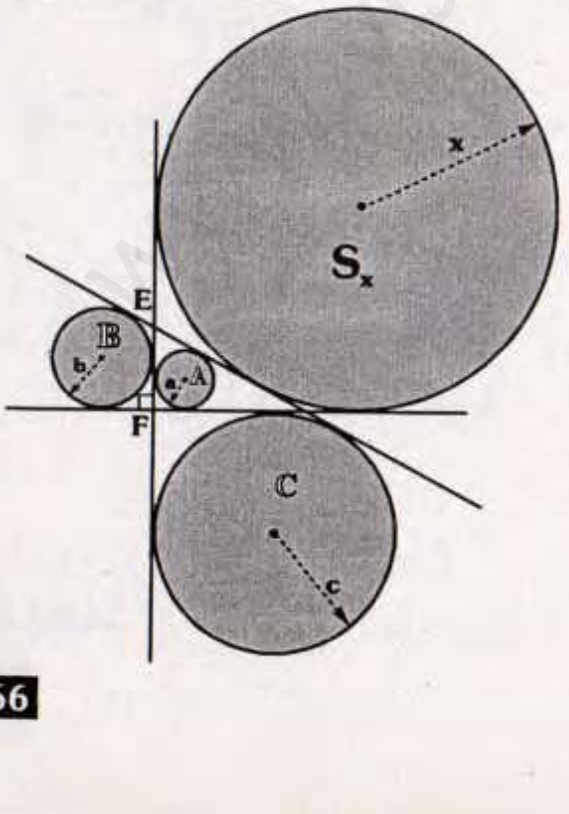
- Notemos que las regiones sombreadas son semejantes, luego:

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{ak}{a}\right)^2$$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{S_1}{S_2}=k^2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 252



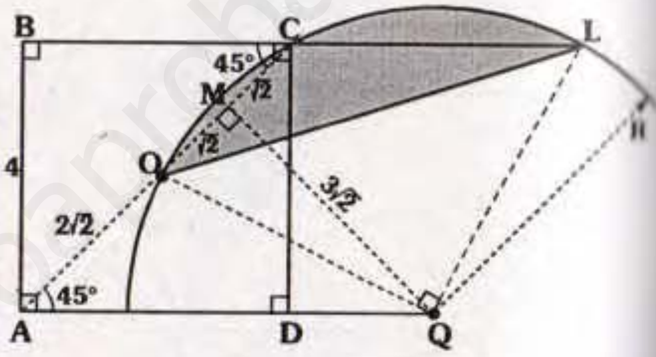
- Piden Sx
- Tenemos: $\pi a^2=\mathbb{A}$; $\pi b^2=\mathbb{B}$; $\pi c^2=\mathbb{C}$
- Como: $x=a+b+c$

$$S_x=\pi x^2\Rightarrow\sqrt{\frac{S_x}{\pi}}=\sqrt{\frac{\mathbb{A}}{\pi}}+\sqrt{\frac{\mathbb{B}}{\pi}}+\sqrt{\frac{\mathbb{C}}{\pi}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_x=(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}+\sqrt{\mathbb{C}})^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 253



Nos piden $S_{\triangleleft}$

- Como $m\sphericalangle BCO=45°\Rightarrow m\sphericalangle OQL=90°$
- Se traza $\overline{QM}\perp\overline{OC}$

$$\Rightarrow\quad OM=MC=\sqrt{2}$$

- En $\triangle AMQ$: $AM=MQ=3\sqrt{2}$
- En $\triangle OMQ$: $R=2\sqrt{5}$
- Finalmente:

$$S_{\triangleleft}=S_{\text{sector }OQL}-S_{\triangle OQL}$$

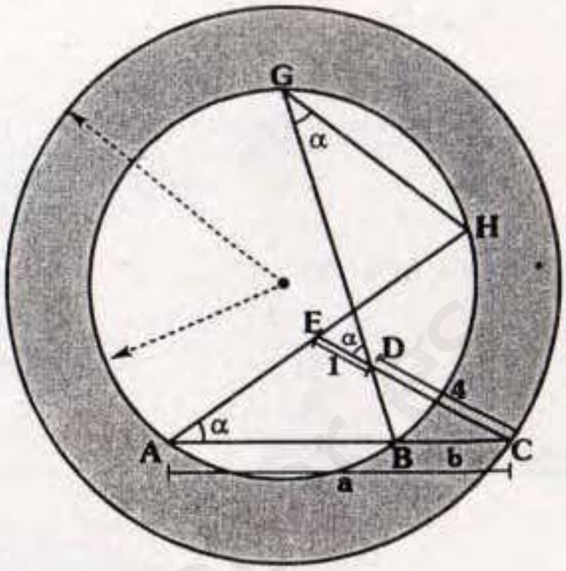
$$S_{\triangleleft}=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{R^2}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\triangleleft}=5(\pi-2)}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 254

Sea $\mathbb{A}_{cc}$ el área de la corona circular.



- Usemos la siguiente expresión

$$\mathbb{A}_{cc} = \pi ab$$

- Como $\overline{ED} // \overline{GH}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle EDG = m\sphericalangle DGH = \alpha \text{ y}$$

$$m\sphericalangle EAB = \alpha$$

$\Rightarrow$ ⌂AEDB es inscriptible

- Por t. de la secante en ⌂AEOB:

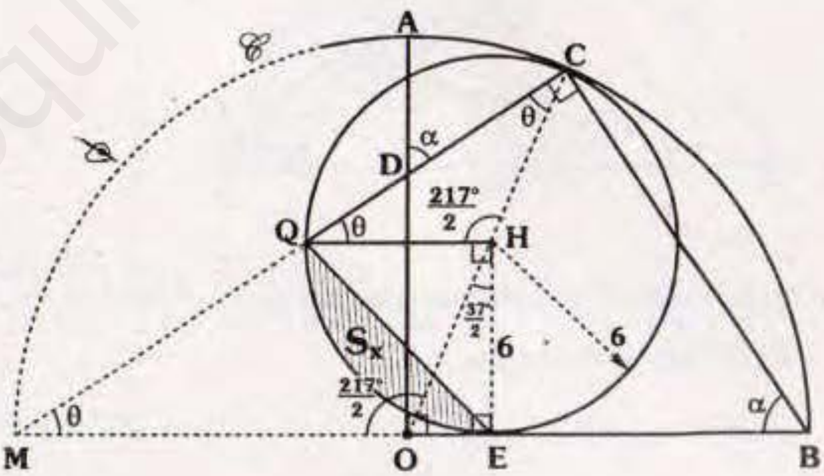
$$ab = (4)(5)$$

$$\therefore \quad \mathbf{A_{cc} = 20\pi}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 255

Sea S_x el área de la región sombreada.



- Como $m\sphericalangle ADC = m\sphericalangle OBC$

$\Rightarrow$ ⌂ODCB es inscriptible

$\Rightarrow m\sphericalangle DCB = 90°$

- La prolongación de $\overline{CQ}$ y la prolongación de $\overline{BO}$ se cortan en M, $(M \in \mathscr{C})$

- Notemos que:

$$\overline{QH} // \overline{MO} \Rightarrow m\sphericalangle QHE = 90°$$

- Como $m\widehat{QC} = m\widehat{MC} \quad \Rightarrow \quad m\sphericalangle MOC = \dfrac{217°}{2}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle OHE = \frac{37°}{2} \quad \Rightarrow \quad HE = 6$$

• Finalmente:

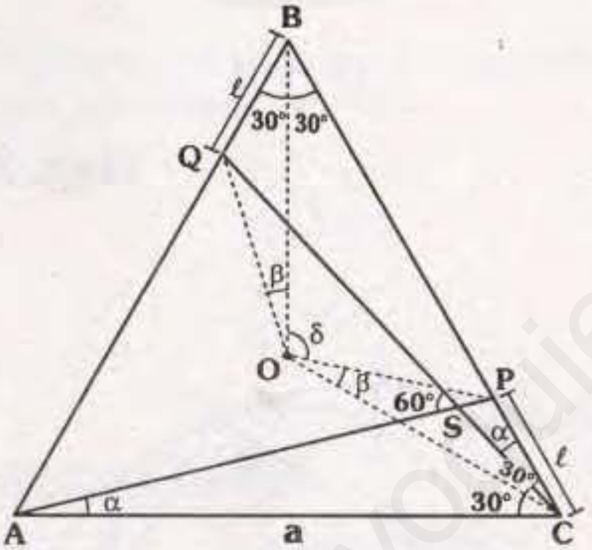
$$S_x = S_{\text{◺}QHE} - S_{\triangle QHE}$$

$$S_x = \frac{1}{4}\pi 6^2 - \frac{(6)(6)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = 9(\pi - 2)}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 256



Analicemos el problema por partes:

• ⌂BQSP: inscriptible

• Como $m\sphericalangle QSA = 60°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle CAP = m\sphericalangle QCB$$

$$\Delta CAP \cong \Delta BCQ (ALA)$$

$$\Rightarrow PC = QB$$

• Sea O el centro del ΔABC $\Rightarrow$

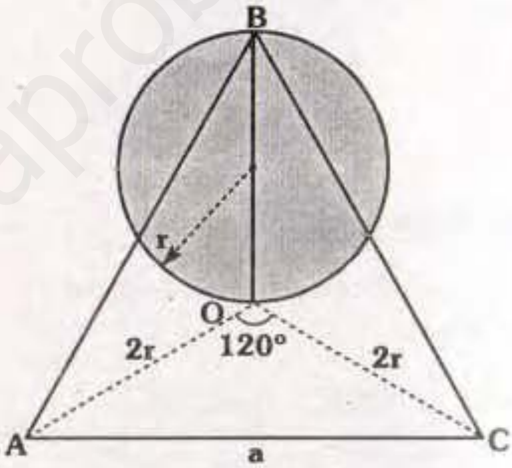
$$\Delta QBO \cong \Delta PCO \Rightarrow m\sphericalangle QOB = m\sphericalangle POC$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QOP = 120°$$

$\Rightarrow$ ⌂BPOQ es inscriptible

• Es decir la circunferencia circunscrita al triángulo QSP, también pasa por B y O, para toda circunferencia $\overline{OP}$ será cuerda, entonces el radio mínimo será aquella que tenga a $\overline{OB}$ como diámetro.

• Tendremos lo siguiente:



• En ΔAOC: $a = 2r\sqrt{3}$

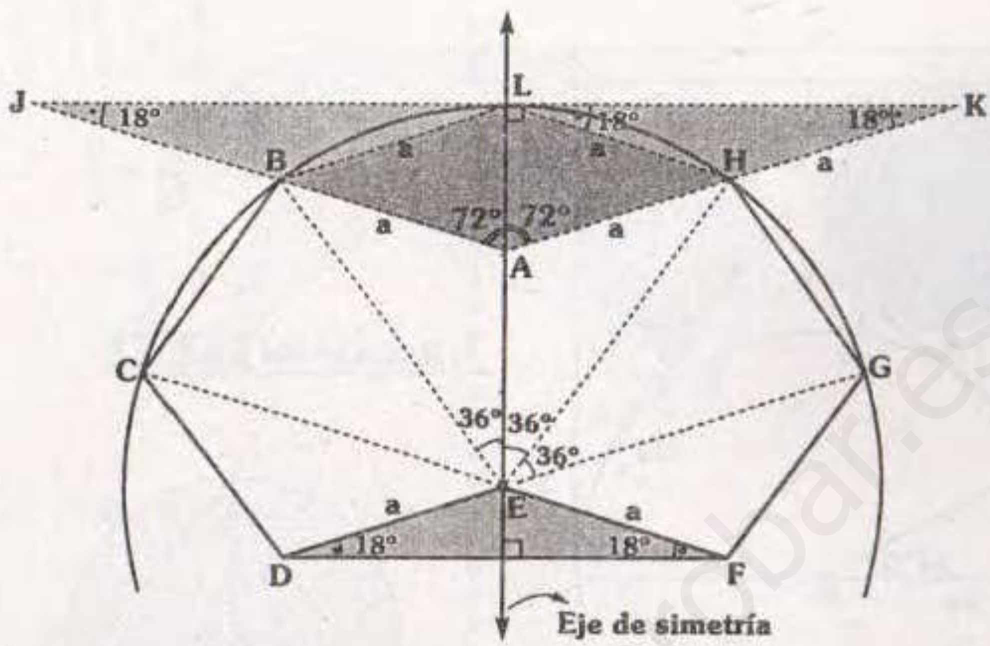
$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\mathbb{A}_\bullet = \pi r^2$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_\bullet = \frac{\pi a^2}{12}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 257



- Como los pentágonos son regulares y todas las diagonales son iguales, los puntos C, B, H y G equidistan de A $\Rightarrow$ ⌂CBHG: insccriptible.

- Sea $\mathbb{A}_1$ el área del círculo inscrito en el ΔDEF y $\mathbb{A}_2$ el área del círculo inscrito en el triángulo mixtilineo BLH.

- Nos piden $\dfrac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}$

- La recta AE es el eje de simetría.

- Se traza la tangente en L, la cual corta a las prolongaciones de AH y AB en K y J, luego AH=HL=HK

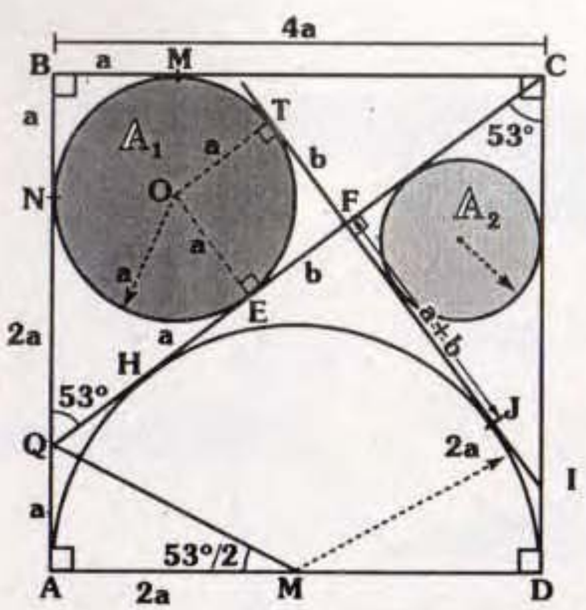
- ΔJAK ~ ΔDEF cuya razón de semejanza es 2.

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\frac{1}{4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 258



Nos piden $\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}$

- Por teorema de circunferencia:

$$m\measuredangle QCD = 53°$$

- En ⊿QBC:

  Sea BC=4a; BQ=3a y QC=5a ⇒ el radio de "$\mathbb{A}_1$" es: a.

- Notemos que ⊿QAM es notable de

  53°/2 ⇒ AQ=a, como

  NB=a ⇒ QN=QE=2a

- Sea FT=b ⇒ FH=FJ=a+b, como

  TJ=AN ⇒ 2b+a=3a

  ⇒ a=b,

- Luego: OTFE es cuadrado ⇒ FC=2a

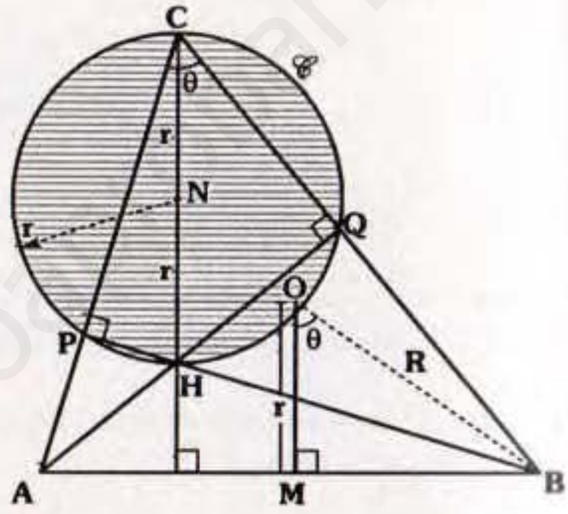
- Como ⊿QBC~⊿CFI y la razón de semejanza 3a2, entonces la razón de áreas de los círculos inscritos, es:

$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\frac{9}{4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 259



Nos piden $\mathbb{A}_\bullet$

- Sea O el circuncentro del ΔABC
- Como el ⌓PHQC es inscriptible, la circunferencia a que pasa por P, H y Q, también pasa por C.
- $\overline{HC}$ diámetro de $\mathscr{C}$
- Por teorema: HC = 2(OM) y

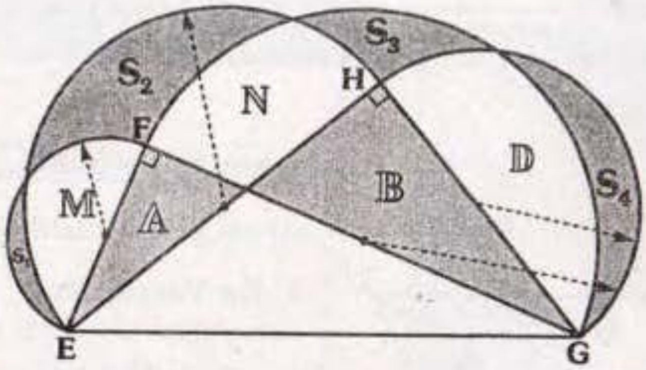
$$m\measuredangle MOB = \theta$$

$$\Rightarrow r = R\cos\theta$$

$$\therefore \ \mathbb{A}_\bullet = \pi R^2\cos^2\theta$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 260



- Sea S el área del semicírculo de diámetro EG:
- Por teorema, en:
- $\measuredangle$EFG: $S=(S_1+\mathbb{M})+(\mathbb{N}+S_3+\mathbb{B}+\mathbb{D})$
- $\measuredangle$EHG: $S=(\mathbb{A}+\mathbb{M}+S_2+\mathbb{N})+\mathbb{D}+S_4)$

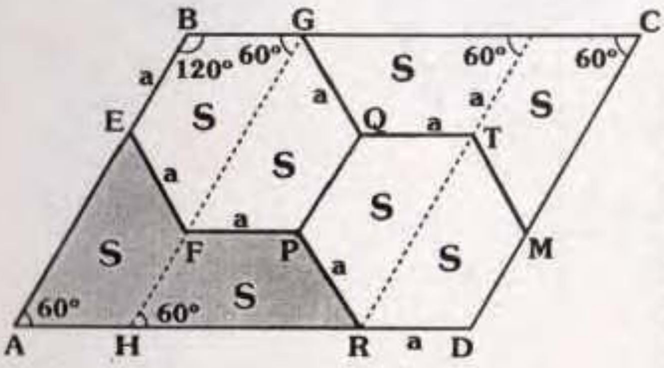
$$\Rightarrow S_1+\cancel{\mathbb{M}}+\cancel{\mathbb{N}}+S_3+\mathbb{B}+\cancel{\mathbb{D}}=\mathbb{A}+\cancel{\mathbb{M}}+S_2+\cancel{\mathbb{N}}+\cancel{\mathbb{D}}+S_4$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_3-S_2-S_4=\mathbb{A}-\mathbb{B}}$$

Clave C

❖❖❖❖❖

RESOLUCIÓN Nº 261



Sea $\mathbb{A}_s$, el área de la región sombreada

Piden $\dfrac{\mathbb{A}_s}{\mathbb{A}_{(ABCD)}}$

- Notemos que $\overline{EB}//\overline{PQ}//\overline{DM} \Rightarrow \overline{AB}//\overline{CD}$, análogamente $\overline{AD}//\overline{BC} \Rightarrow$ ABCD es paralelogramo.

- Al trazar las diagonales $\overline{GF}$ y $\overline{RT}$ de los hexágonos regulares y prolongarlas, notamos:

  AEFH ≅ FGBE ≅ HFPR y así todas las regiones trapeciales son congruentes.

- Luego $\mathbb{A}_s = 2S$ y $\mathbb{A}_{(ABCD)} = 8S$

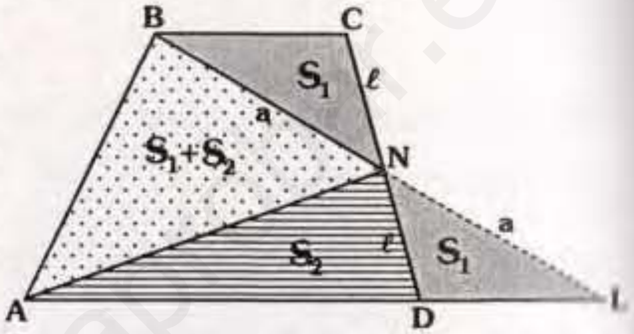
$$\therefore \frac{\mathbb{A}_s}{\mathbb{A}_{(ABCD)}} = \frac{1}{4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 262

Analicemos cada proposición:

I. Es Verdadera



- Como $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta BNC} + S_{\Delta AND}$ se prolonga $\overline{BN}$ hasta L tal que BN=NL

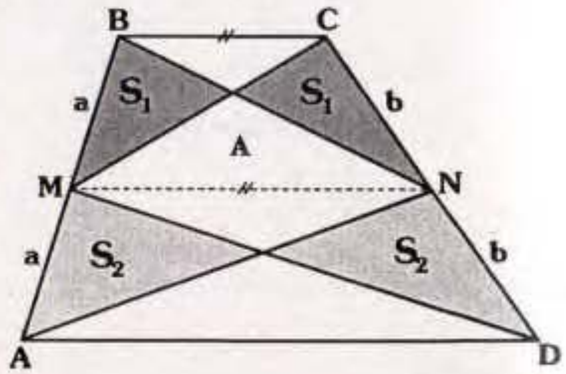
$$\Rightarrow \overline{BC}//\overline{DL} \quad y \quad S_{\Delta NDL} = S_{\Delta BNC}$$

- Como $BN = NL \Rightarrow S_{\Delta ABN} = S_{\Delta ANL}$

  $\Rightarrow$ A, D y L: colineales

- Luego $\overline{AD}//\overline{BC}$ entonces ABCD es trapecio.

II. Es Verdadera.



- Como $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta CMD} \Rightarrow S_{\Delta MBN} = S_{\Delta NMC}$

$$\Rightarrow \ \overline{MN} // \overline{BC}$$

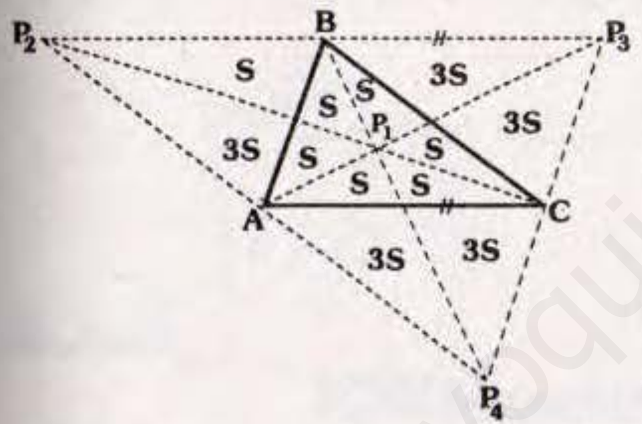
- Análogamente: $\overline{MN} // \overline{AD}$
- Finalmente $\overline{AD} // \overline{BC}$, luego ABCD es trapecio.

III. Es Falsa.

Como condición la cumple todo cuadrilátero convexo, entonces la proposición es falsa.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 263



- El primer punto que cumple condición es el baricentro (P_1) del ΔABC
- Los otros puntos los determinamos trazando paralelas de cada vértice al lado opuesto, entonces.

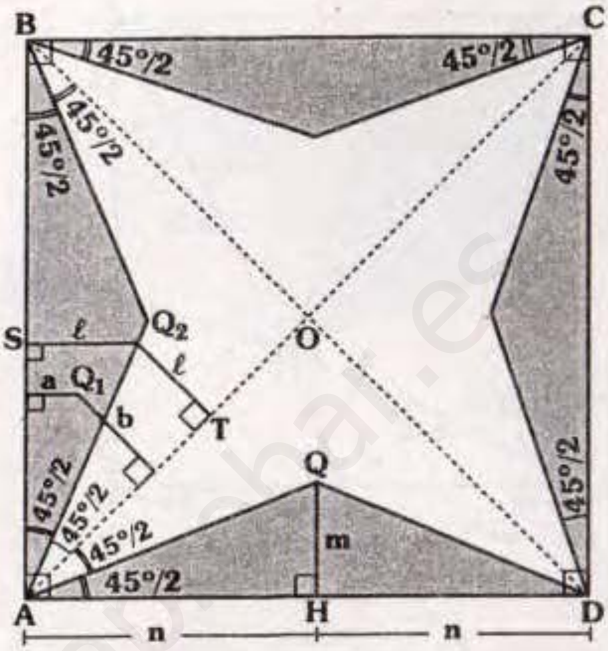
$$S_{\Delta AP_iB} = S_{\Delta P_iBC} = S_{\Delta P_iAC}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$\therefore$ Existen cuatro puntos con tal condición

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 264



- Sea p la probabilidad pedida.
- Hallemos la región favorable, para ello se trazan las bisectrices de los ángulos entre la diagonal y un lado.
- Las regiones sombreadas cumplen la condición, por ejemplo para Q_1: $a<b$, para Q_2: $Q_2S = Q_2T$
- Luego:

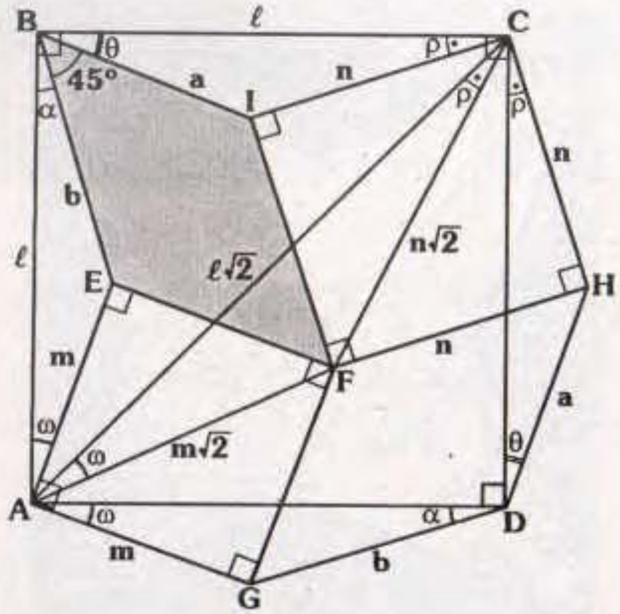
$$p = \frac{4(S_{\Delta AQD})}{S_{\square ABCD}} = \frac{4mn}{4n^2} = \frac{m}{n}$$

- $\measuredangle AHQ$: $n = m(\sqrt{2}+1)$

$$\therefore\ \mathbf{p = \sqrt{2} - 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 265



Nos piden $S_{(EBIF)}$

Dato: $ab = 10\sqrt{2} \wedge \alpha + \theta = 45°$

• Rápidamente nos damos cuenta:

– $\Delta GAD \cong \Delta EAB \Rightarrow EB = b \wedge m\measuredangle ABE = \alpha$

– $\Delta BCI \cong \Delta DCH \Rightarrow IB = a \wedge m\measuredangle IBC = \theta$

$\Rightarrow m\measuredangle EBI = 45°$

• $\Delta AFC \sim \Delta AEB \Rightarrow b = n$

• $\Delta AFC \sim \Delta DHC \Rightarrow a = m$

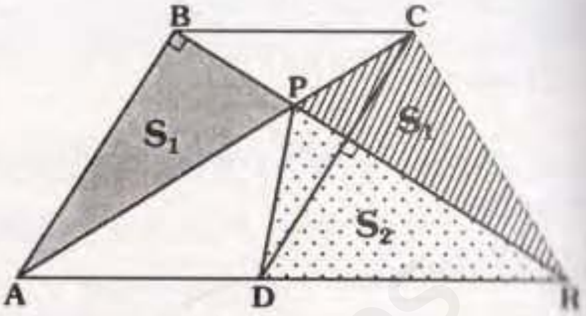
• Luego EBIF es paralelogramo

$\Rightarrow S_{(EBIF)} = ab\text{sen}45°$

$\therefore$ $\mathbf{S_{(EBIF)} = 10}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 266



Nos piden $S_1 + S_2$

Dato: $(AB)(PR) = k$

• Como $\overline{AR}//\overline{BC} \Rightarrow S_{\Delta CPR} = S_{\triangle ABP} = S_1$

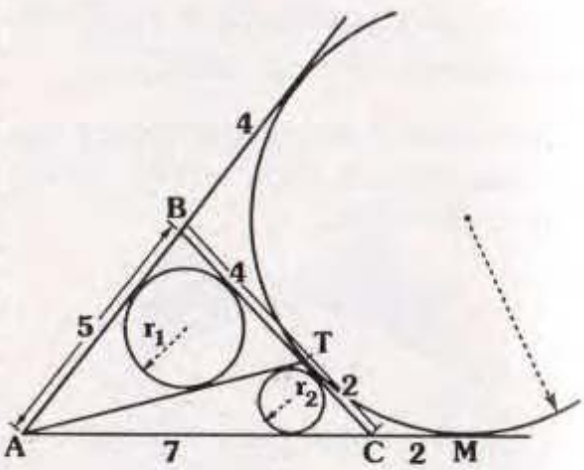
• $\overline{AB}//\overline{DC} \Rightarrow \overline{PR} \perp \overline{CD}$

• $S_{\triangle DPCR} = S_1 + S_2 = \dfrac{\overbrace{(CD)}^{AB}(PR)}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{S_1 + S_2 = \dfrac{k}{2}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 267



Nos piden $\dfrac{r_1}{r_2}$

- Como AB=5; BC=6 y AC=7 $\Rightarrow$ BT=4 y TC=2
- Notamos también: $\text{Perímetro}_{\Delta ABT} = \text{Perímetro}_{\Delta ATC}$
- Sea p en semiperímetro de los Δs ABT y ATC

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{\Delta ABT}}{S_{\Delta ATC}} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{pr_1}{pr_2} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{r_1}{r_2} = 2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 268

Piden: $\frac{r_1}{r_2}$

Dato: 12(AB) = 5(BC)

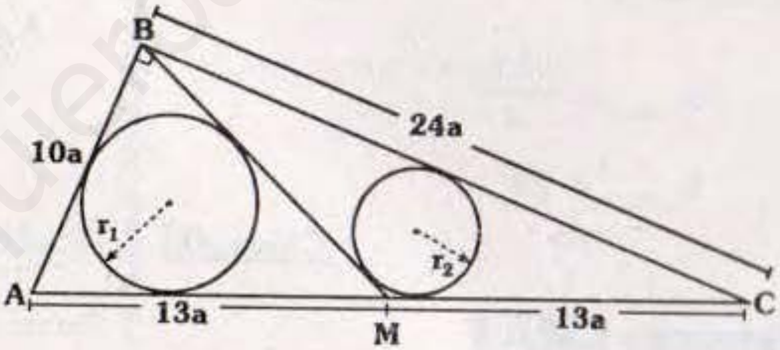
- Convenientemente AB=10a;

  BC=24a $\Rightarrow$ AC=26a

- Como $\overline{BM}$ es mediana

  $\Rightarrow$ AM=MC=BM=13a

- También:



$$\underbrace{S_{\Delta ABM}} = S_{\Delta MBC}$$

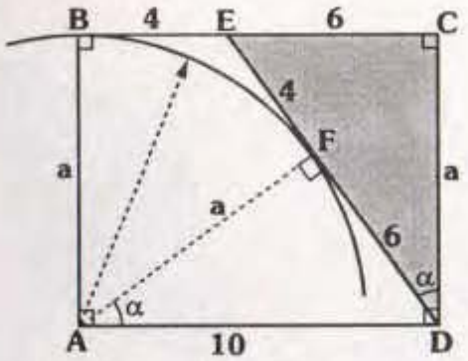
$$p_{\Delta ABM} \cdot r_1 = p_{\Delta MBC} \cdot r_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(10a+13a+13a)}{2} r_1 = \frac{(24a+13a+13a)}{2} r_2$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{r_1}{r_2} = \frac{25}{18}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 269



Piden $S_{\triangle ECD}$

- $\triangle AFD \cong \triangle DCE$

  $\Rightarrow$ AD=10 y EC=6

- Luego $\alpha = 37° \Rightarrow a = 8$

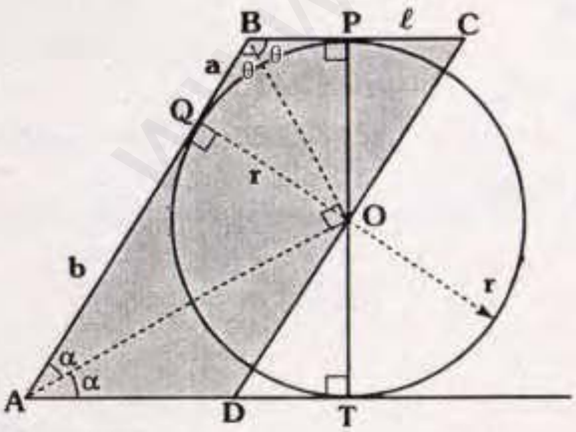
- Finalmente :

$$S_{\triangle ECD} = \frac{(6)(8)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle ECD} = 24}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 270



Nos piden $S_{\square ABCD}$

- Como $\overline{AT} // \overline{BC} \Rightarrow \overline{PT}$ es diámetro.
- Como DT=PC $\Rightarrow$ $\triangle DTO \cong \triangle CPO$

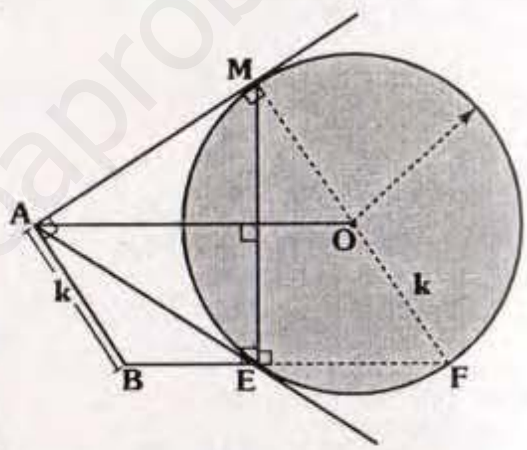
  $\Rightarrow OP = OT \Rightarrow$ O es centro.
- Notemos que $m\measuredangle AOB = 90°$

$$\Rightarrow r^2 = ab$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD} = (a+b)\sqrt{ab}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 271



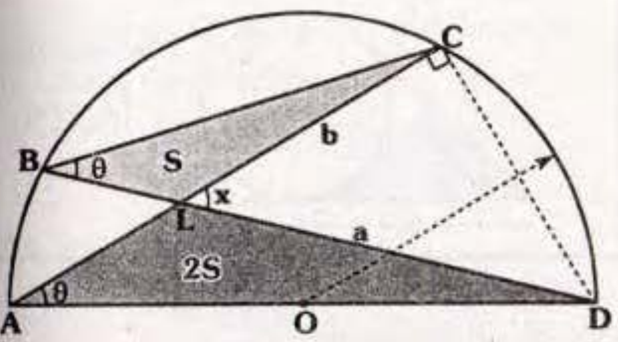
Piden $\mathbb{A}_{\bullet}$

- Notemos que al prolongar $\overline{BE}$ hasta que corte a $\mathscr{C}$ en F, se tendrá $m\measuredangle MEF = 90° \Rightarrow \overline{MF}$ es diámetro.
- Como $\overline{AO} \perp \overline{ME} \Rightarrow \overline{AO} // \overline{BF}$ y

  $\overline{AB} // \overline{MF} \Rightarrow$ ABFO es paralelogramo $\Rightarrow$ OF=k
- $$\therefore\ \mathbb{A}_{\bullet} = \pi k^2$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 272



Piden x

- Como $\Delta ALD \sim \Delta BLC \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ALD}}{S_{\Delta BLC}} = \left(\dfrac{LD}{LC}\right)^2$

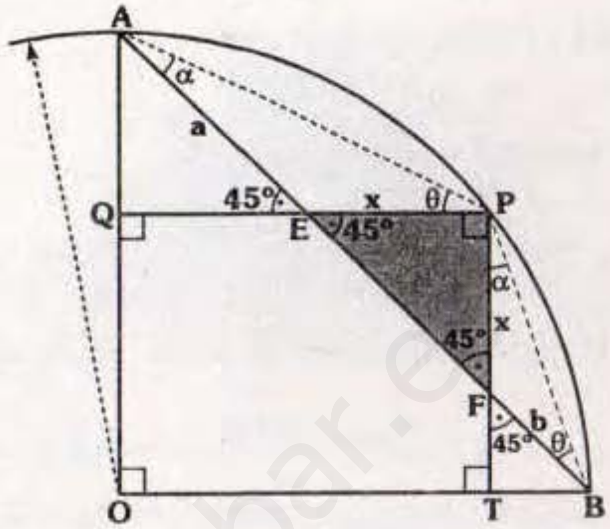
$$\Rightarrow \frac{2S}{S} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = b\sqrt{2}$$

- En $\measuredangle$LCD:

$$\therefore \quad \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 273



Piden $S_{\Delta EPF}$

- $S_{\Delta EPF} = \dfrac{x^2}{2}$

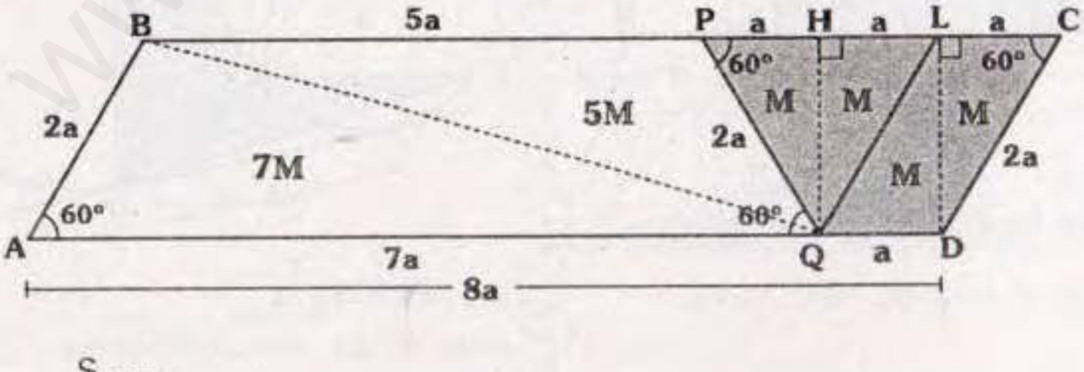
- $\Delta AEP \sim \Delta PFB \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{x}$

$$\Rightarrow \quad x^2 = ab$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta EPF} = \frac{ab}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 274



Nos piden $\dfrac{S_{(ABCD)}}{S_{(PCDQ)}}$

- Como $AD=4(AB) \Rightarrow AB=2a$ y

  $AD=8a$

- El $\triangle PCDQ$ es inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle AQP = 60°$,

  también es circunscriptible

  $\Rightarrow PC+QD=PQ+CD$

  $\Rightarrow QD=HL=a$

- Usando las razones de áreas, tenemos:

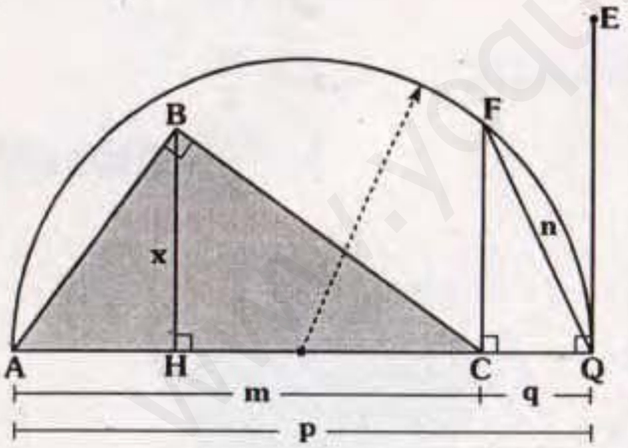
$$S_{(ABCD)} = 16\mathbb{M}$$

$$S_{(PCDQ)} = 4\mathbb{M}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{S_{(ABCD)}}{S_{(PCDQ)}} = 4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 275



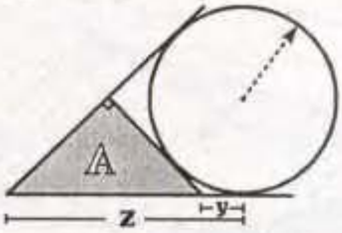
Piden x en función de "m" y "n"

- Hallemos el área de ABC, pues:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{mx}{2} \qquad ...(I)$$

Observación

Recordemos:



Se cumple: $\boxed{\mathbb{A} = zy}$

- De la observación:

$$S_{\triangle ABC} = pq \qquad ...(II)$$

- En: $\quad n^2 = pq \qquad ...(III)$

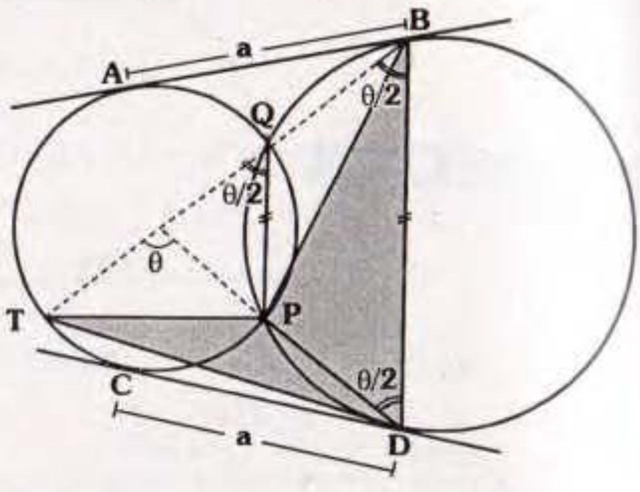
- De (I), (II) y (III):

$$\frac{mx}{2} = n^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{2n^2}{m}}$$

Clave I

RESOLUCIÓN Nº 276



Nos piden $S_{\measuredangle TDBP}$

- Por t. de circunferencia: $CD=AB$; $\overline{PQ} // \overline{DB}$, $QB=PD$, $m\measuredangle TQP = \frac{\theta}{2}$ y

$m\sphericalangle QBD = \dfrac{\theta}{2}$

- Concluímos: B, Q y T son colineales
- Por fórmula general:

$$S_{\measuredangle TDBP} = \frac{(PD)(TB)}{2}\operatorname{sen}\theta$$

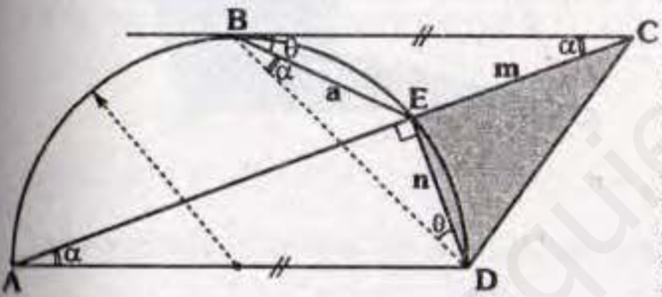
- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = \underbrace{(BQ)}_{PD}(BT)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\measuredangle TDBP} = \frac{a^2}{2}sen\theta}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 277



Nos piden $S_{\triangle CED}$

- Como $m\sphericalangle AED = 90°$

$$\Rightarrow\ S_{\triangle CED} = \frac{mn}{2}$$

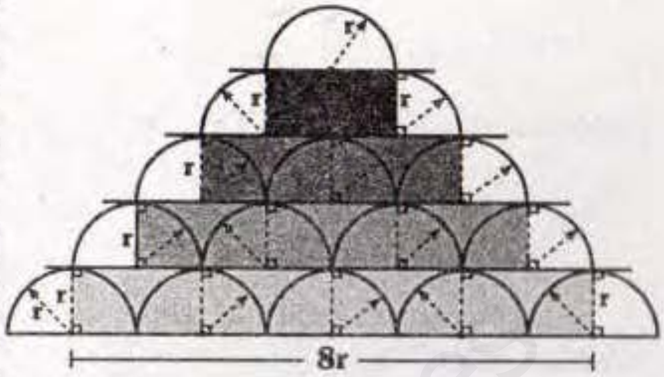
- Notemos $\Delta BEC \sim \Delta DEB$

$$\Rightarrow\ \frac{m}{a} = \frac{a}{n}\ \Rightarrow\ mn = a^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle CED} = \frac{a^2}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 278



Nos piden el área total : A_T

- La región total la podemos descomponer así:
  - cuatro regiones rectangulares; y
  - ocho regiones cuadrantales; y

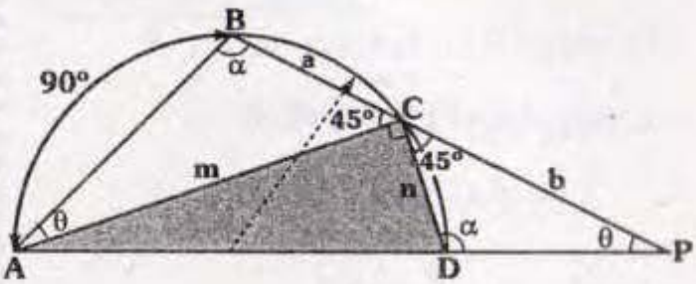
  El semicírculo en la parte superior
- Luego:

$$A_T = r(8r) + r(6r) + r(4r) + r(2r) + 8\left(\frac{1}{4}\pi r^2\right) + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{A_T = \frac{5}{2}r^2(8+\pi)}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 279



Nos piden $S_{\triangle ACD}$

Dato $ab=k$

- Como $m\sphericalangle ACD = 90°$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{mn}{2}$$

- Notemos $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle CDP$ y

$$m\sphericalangle ACB = 45°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DCP = 45°$$

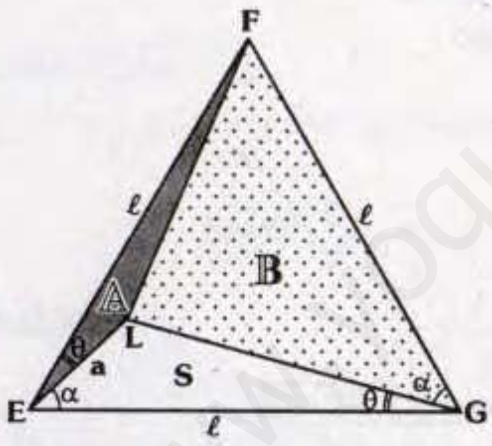
- $\Delta ABC \sim \Delta PDC \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{a}{n}$

$$\Rightarrow mn = ab$$

$$\therefore \mathbf{S_{\triangle ACD} = \frac{k}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 280



Nos piden S en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$

- Como $m\sphericalangle FEL = m\sphericalangle EGL$

$$\Rightarrow m\sphericalangle LEG = m\sphericalangle LGF$$

- Luego: $\left.\begin{aligned} \mathbb{A} &= \frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \\ S &= \frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}\right\} \frac{\mathbb{A}}{S} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \ldots(I)$

- Análogamente:

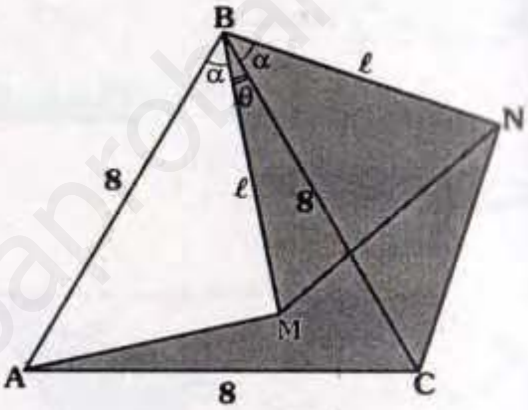
$$\frac{S}{\mathbb{B}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \ldots(II)$$

- De (I) y (II): $\frac{\mathbb{A}}{S} = \frac{S}{\mathbb{B}}$

$$\therefore \mathbf{S = \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 281



Sea $\mathbb{A}_x$ el área de la región sombreada.

- Como ΔABC y ΔMBN son equiláteros, entonces:

$$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CBN$$

$$\Rightarrow \Delta ABM \cong \Delta CBN (LAL)$$

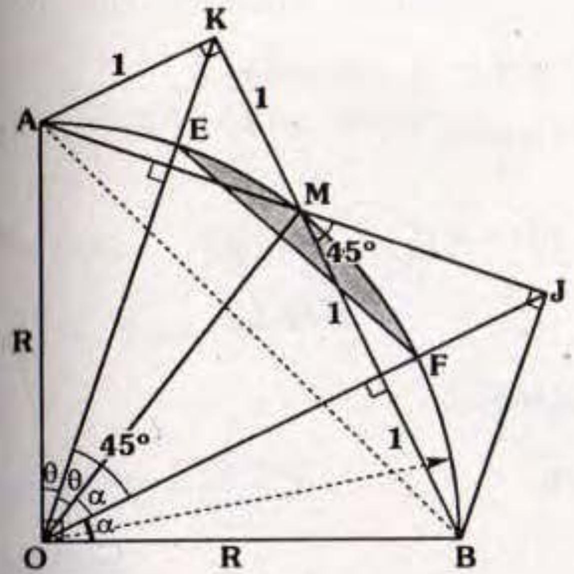
$$\Rightarrow S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBN}$$

- Luego: $\mathbb{A}_x = \underbrace{S_{\Delta ABC}}_{\frac{8^2\sqrt{3}}{4}}$

$$\therefore \mathbf{\mathbb{A}_x = 16\sqrt{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 282



Nos piden $S_{\diamond}$

- Por teorema de circunferencia:

$$m\measuredangle BMJ = 45^\circ$$

$\Rightarrow$ ⊿AKM y ⊿MJB notable de 45°

- Los ⏢s OAKM y OMJB son trapezoides simétricos $\Rightarrow m\measuredangle EOF = 45^\circ$

- En ⊿AKB: $AB = \sqrt{10}$
- En ⊿AOB: $AB = R\sqrt{2}$

$\left.\right\} R = \sqrt{5}$

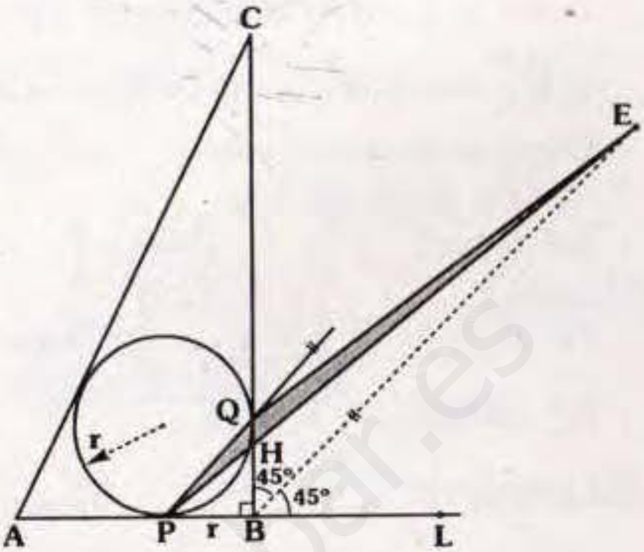
- Luego:

$$S_{\diamond} = \frac{1}{8}\pi R^2 - \frac{R^2}{2}\text{sen}45^\circ$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\diamond} = \frac{5}{8}(\pi - 2\sqrt{2})}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 283



Nos piden $S_{\Delta PQE}$

- Como E es excentro, entonces

$$m\measuredangle LBE = m\measuredangle EBC = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \ \overline{BE} \parallel \overline{PQ}$$

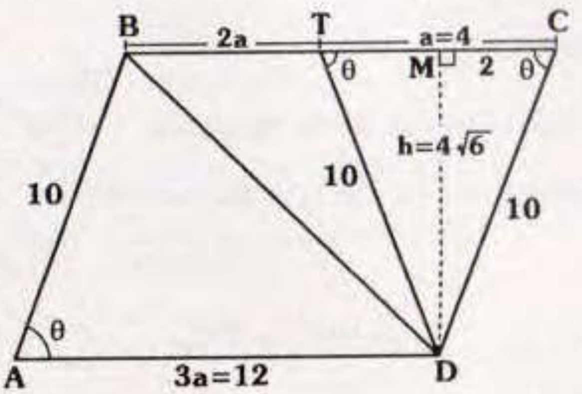
- Por propiedad:

$$S_{\Delta QHE} = S_{\Delta PBH} \Rightarrow S_{\Delta PQE} = S_{\Delta PBQ}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta PQE} = \frac{r^2}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 284

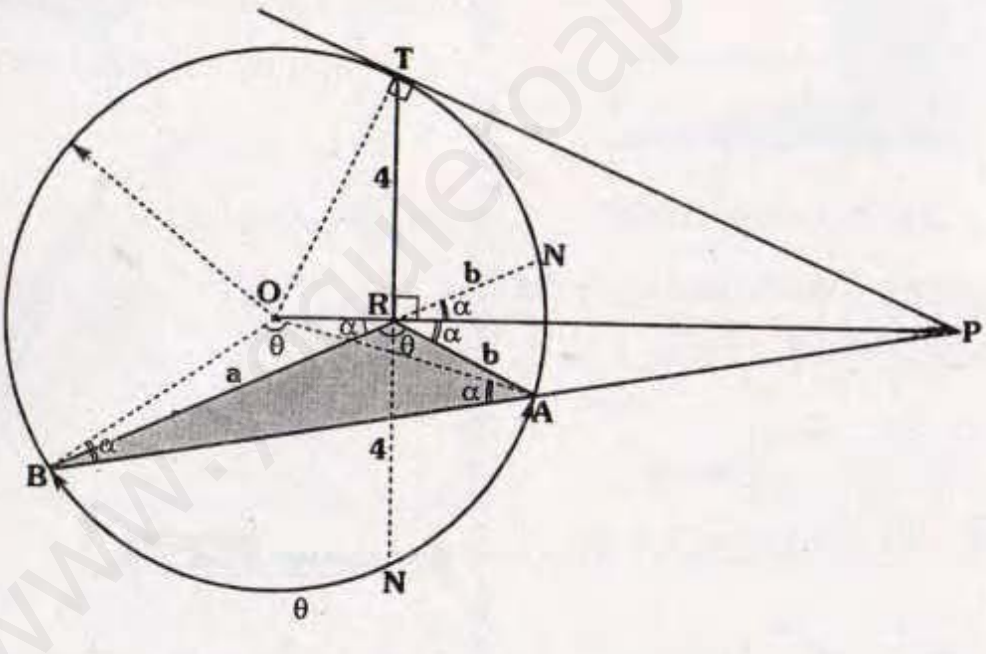


Nos piden $S_{\square ABCD}$

- Como el ⊿ABTD es bicéntrico, entonces es inscriptible y circunscriptible, luego al ser inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DTC \Rightarrow \Delta TDC$ es isósceles
- Como es circunscriptible $\Rightarrow$ $AD+BT=AB+TD$ ...(I)
- Del dato: $\dfrac{S_{\Delta TCD}}{S_{\Delta ABD}}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $AD=3\underbrace{(TC)}_{a}$, $S_{\Delta ABD} \rightarrow S_{\Delta BCD}$
- En (I): $a=4$
- En ⊿DMC: $h=4\sqrt{6}$
- Finalmente: $\mathbf{S_{\square ABCD}=48\sqrt{6}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 285



Piden $S_{\Delta ARB}$

- Por teorema de la tangente: $(PT)^2 = (PA)(PB)$
- Por teorema de relaciones métricas, en el ⊿OTP: $(PT)^2 = (PR)(PO)$

$\Rightarrow (PA)(PB) = (PR)(PO)$ $\Rightarrow$ ◻BORA es inscriptible

- Luego: $m\sphericalangle BRA = \theta$ $\Rightarrow$ $S_{\Delta ARB}=\dfrac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta$ ...(I)

• Como ⌂BORA es inscriptible, entonces

$$m\measuredangle BRO = m\measuredangle ARP = \alpha$$

$$\Rightarrow \ AR = RN$$

• Por teorema de las cuerdas:

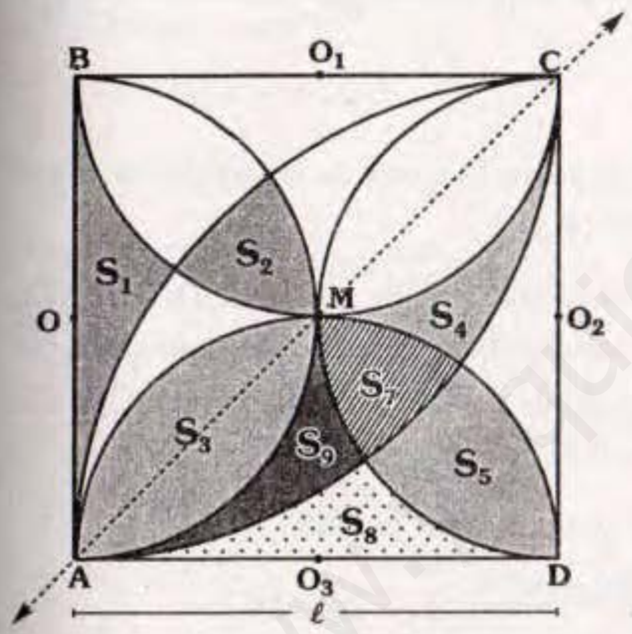
$$ab = (4)(4)$$

• En (I):

$$\mathbf{S_{\Delta ARB} = 8sen\theta}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 286



Nos piden:

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$$

• Notemos que la recta AC es el eje de simetría y M es centro, entonces:

$$S_2=S_7 \ ; \quad S_8=S_1$$

• Es también claro que las regiones de áreas S_9 y S_4 son congruentes (simétricos respecto de $\overline{BD}$)

$$\Rightarrow \ S_9=S_4$$

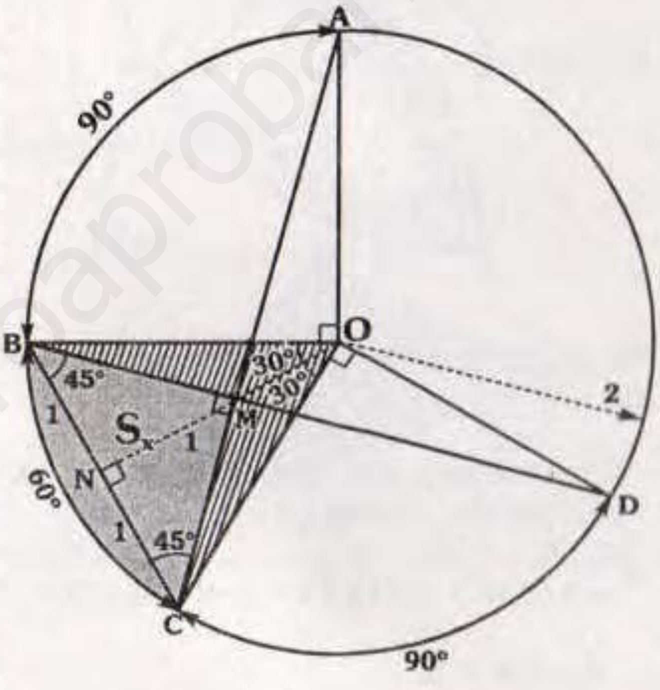
• Luego concluímos:

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=A_{\triangle}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=\frac{\pi\ell^2}{8}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 287



Nos piden S_x

• Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle CBD = m\measuredangle BCA = 45°$$

$\Rightarrow \Delta BMC$: isósceles

• ⊿ONC: notable de 30° $\Rightarrow ON=\sqrt{3}$
• ⊿BMC: notable de 45° $\Rightarrow MN=1$

$\Big\}\ OM=\sqrt{3}-1$

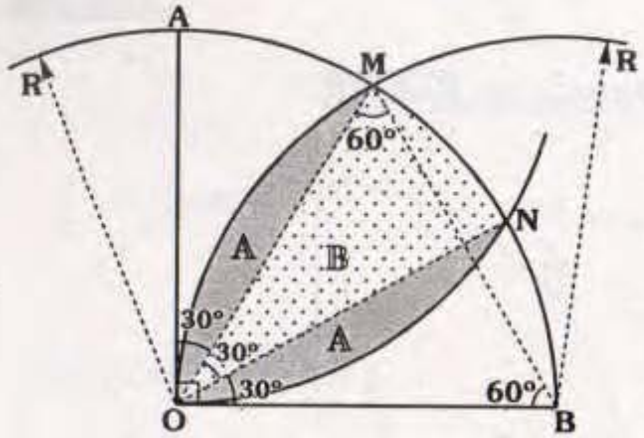
• $$S_x = S_{\triangle BOC} - S_{\measuredangle BOCM}$$

$$S_x = \frac{1}{6}\pi(2)^2 - \frac{(2)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{1}{3}(2\pi + 3 - 3\sqrt{3})}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 288



Nos piden el área de la región sombreada (S_x)

- Notemos que los Δs OMB y AON son equiláteros, entonces:

$$m\measuredangle AOM = m\measuredangle MON = m\measuredangle NOB = 30°$$

- $S_x = 2\mathbb{A} + \mathbb{B}$
- Hallemos por partes:

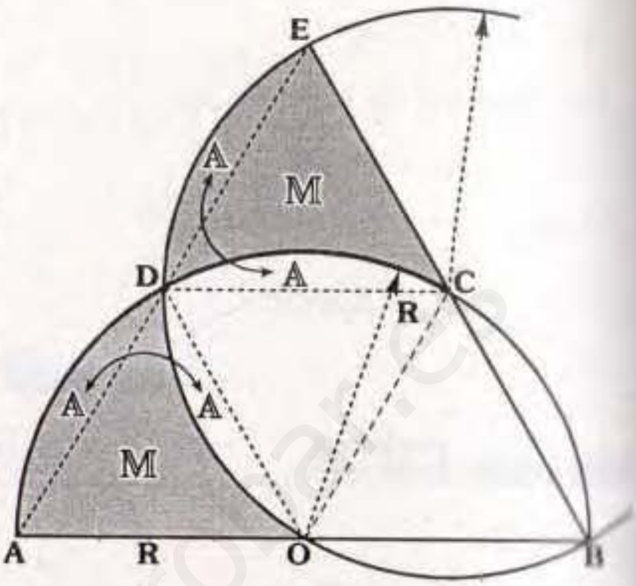
$$\mathbb{B} = \frac{1}{12}\pi R^2$$

$$\mathbb{A} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{R^2}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 289



Nos piden la suma de áreas de las regiones ($\mathbb{A}_p$).

- Notemos que los Δs AOD, DOC y ECD son equiláteros, luego los segmentos circulares cuyas cuerdas son AD, CD, OD y ED son congruentes.
- Luego el área pedida:

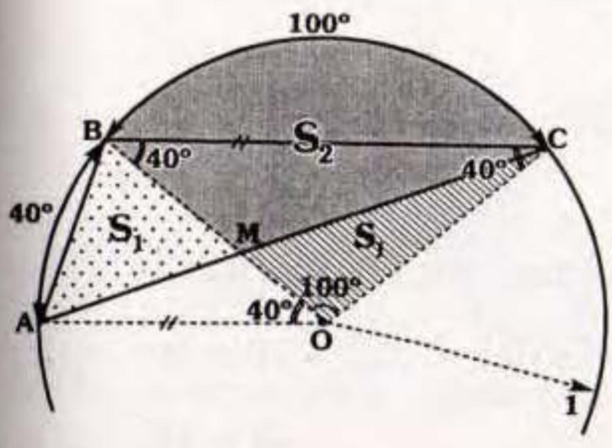
$$\mathbb{A}_p = 2(\mathbb{A} + \mathbb{M})$$

$$\mathbb{A}_p = 2.\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_p = \frac{\mathbf{R^2\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 290



Nos piden $S_1 + S_2$

- Notemos :

$$m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle OBC = 40°$$

$$\Rightarrow \overline{AO} // \overline{BC}$$

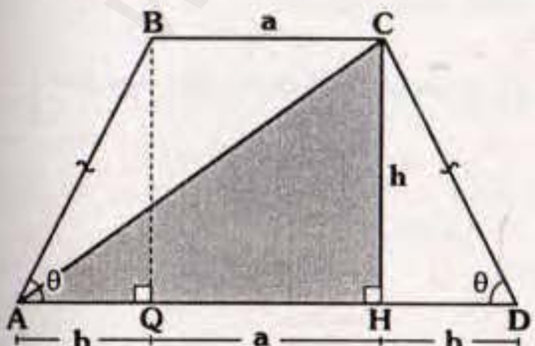
- Luego notemos $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta OMC} = S_1$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{100°}{360°}\pi(1)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1 + S_2 = \frac{5}{18}\pi}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 291



Nos piden $S_{\square ABCD}$

Dato $S_{\triangle ACH} = 12$

- Como ABCD es un trapecio isósceles $\Rightarrow$ AQ=HD

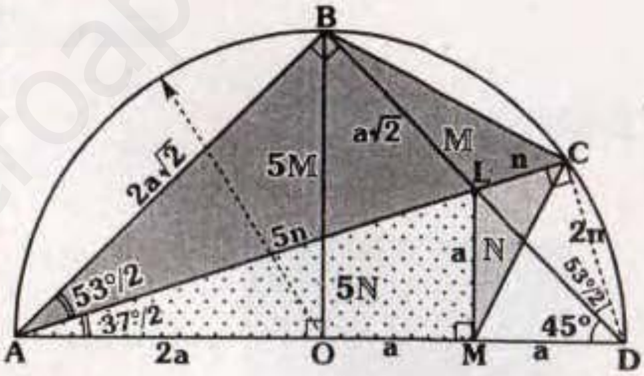
- $$S_{\square ABCD} = \frac{(2b+a+a)}{2}h = (a+b)h$$

- $$S_{\triangle ACH} = \frac{(a+b)h}{2} = 12$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD} = 24}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 292



Nos piden: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MLC}}$

- Notemos: $m\sphericalangle LAM = \dfrac{37°}{2}$ y

$$m\sphericalangle BAL = \frac{53°}{2}$$

- $\triangle$LCD: notable de $\dfrac{53°}{2}$

$$\Rightarrow CD=2n \quad y \quad LC=n$$

• $\measuredangle$ACD: notable de $\frac{37°}{2}$

$$\Rightarrow AC=6n \quad \Rightarrow \quad AL=5n$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MLC}}=\frac{6M}{N}$$

• En el cuadrilátero ABLM:

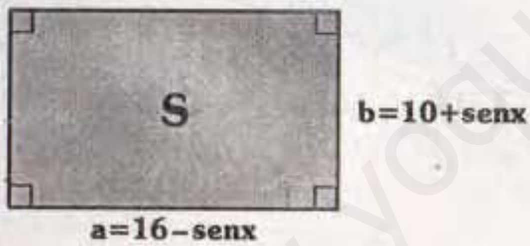
$$\frac{5M}{5N}=\frac{2a\sqrt{2}\,a\sqrt{2}}{3aa}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{N}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \ \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MLC}}=\mathbf{8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 293



Sea "S" el área de la región rectangular.

Nos piden "S" máximo

• Se sabe que S=ab

1er método:

• Usando: $\underbrace{(a+b)^2}_{26}-(a-b)^2=4ab \quad ...(I)$

• Si queremos ab $\rightarrow$ máximo, entonces $(a-b)^2$ debe ser mínimo

• Como a–b=6–2senx

debido a que: $-1\leq \text{senx}\leq 1$

$$\Rightarrow \ 4\leq 6-2\text{senx}\leq 8$$

$$\Rightarrow \ 16\leq (6-2\text{senx})^2\leq 64$$

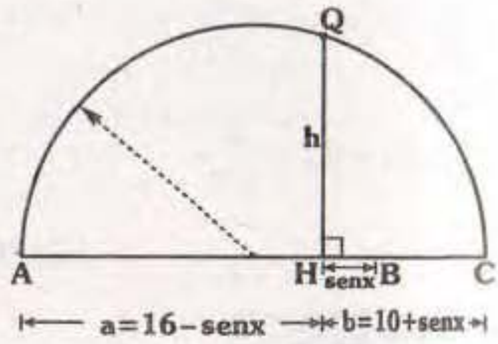
• Luego: $(a-b)^2$ mínimo es 16

• En (I): $(26)^2-16=4ab$

$$\therefore \ \mathbf{ab=165}$$

2do método:

Como se quiere que "ab" sea máximo, usemos relaciones métricas, no perdiendo de vista que $-1\leq \text{senx}\leq 1$,analicemos desde el siguiente gráfico, sea AB=16 y BC=10



Se sabe que $h^2=ab$

el "h" máximo es cuando: senx=1

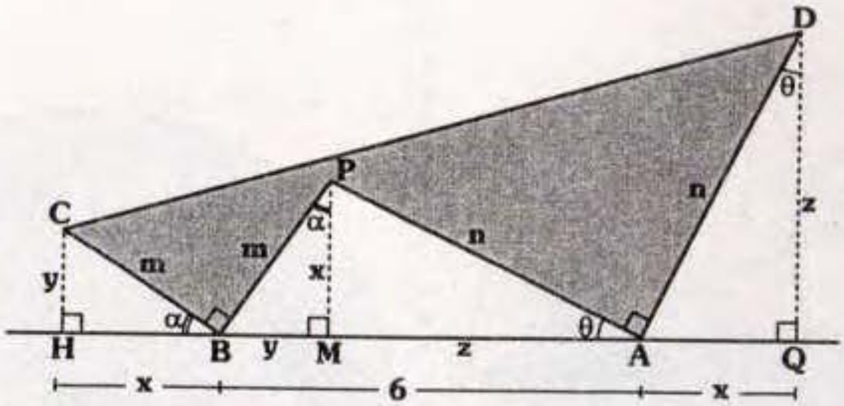
$$\Rightarrow a=15 \quad y \quad b=11$$

$$\Rightarrow ab=(15)(11)$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{máximo}=165}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 294



Sea S_x el área de la región sombreada.

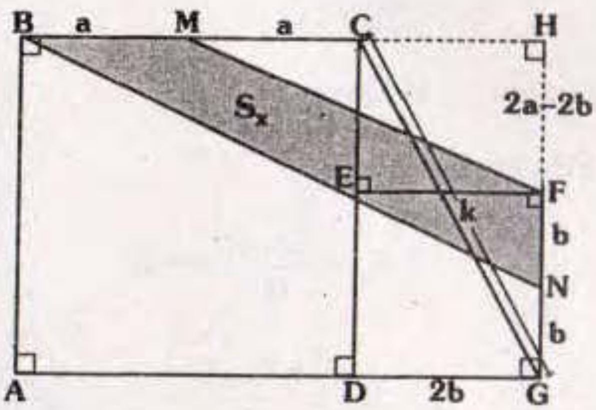
- Notemos:
- $⊿CHB \cong ⊿BMP \Rightarrow CH=BM=y \quad ; \quad HB=MP=x$
- $⊿AMP \cong ⊿DQA \Rightarrow MP=AQ=x \quad ; \quad MA=DQ=z$
- Del gráfico: $y + z = 6$
- Luego: $S_x = S_{(CHQD)} - S_{⊿BHC} - S_{⊿AQD} - S_{\triangle BPA}$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(y+z)}{2}(6+2x) - \frac{xy}{2} - \frac{6x}{2} - \frac{xz}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_x = 18}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 295



Nos piden S_x

Dato: $CG=k$

- $⊿CDG: \quad 4(a^2+b^2)=k^2 \qquad ...(I)$
- $S_x = S_{⊿BHN} - S_{⊿MHF}$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(2a+2b)(2a-b)}{2} - \frac{(a+2b)(2a-2b)}{2}$$

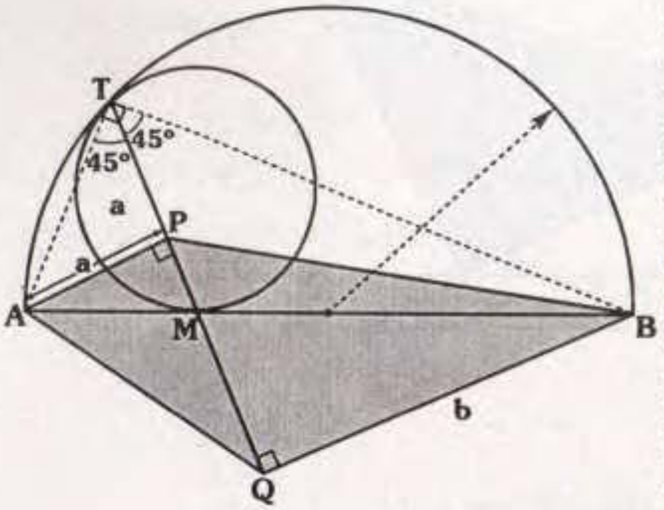
$$\Rightarrow S_x = (a+b)(2a-b) - (a-b)(a+2b)$$

$$S_x = a^2 + b^2$$

$$\therefore \ \mathbf{S_x = \frac{k^2}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 296



Nos piden el área de la región sombreada (S_x)

- Notemos que APBQ es un trapecio.
- Por propiedad de circunferencia:

$$m\measuredangle ATM = m\measuredangle MTB = 45°$$

- $\triangle$APT y $\triangle$TQB: notable de 45°

$$\Rightarrow \quad AP = PT = a \quad y$$

$$QB = TQ = b$$

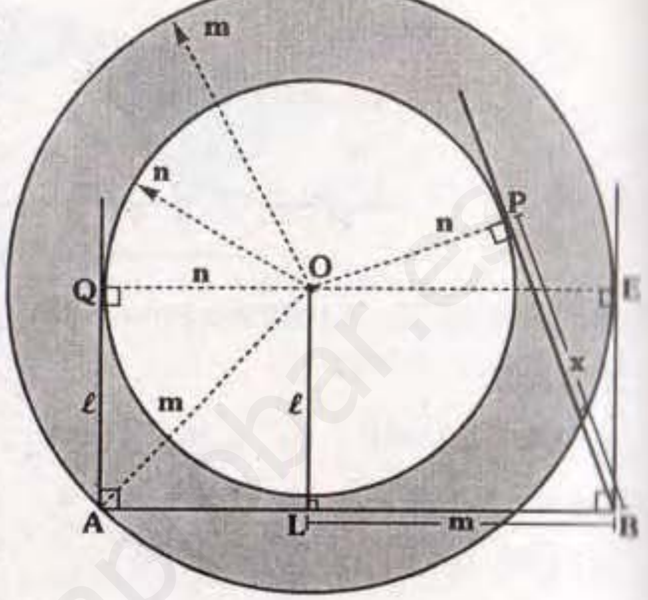
- Luego $\quad PQ = b - a$
- Finalmente:

$$S_x = \frac{(b+a)}{2}(b-a)$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{b^2 - a^2}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 297



Nos piden x

Dato: $\mathbb{A}_{\text{(corona circular)}} = \pi a^2$

$$\Rightarrow \pi(m^2 - n^2) = \pi\ell^2 = \pi a^2$$

$$\Rightarrow \; m^2 - n^2 = \ell^2 = a^2$$

- En $\triangle$OLBP:

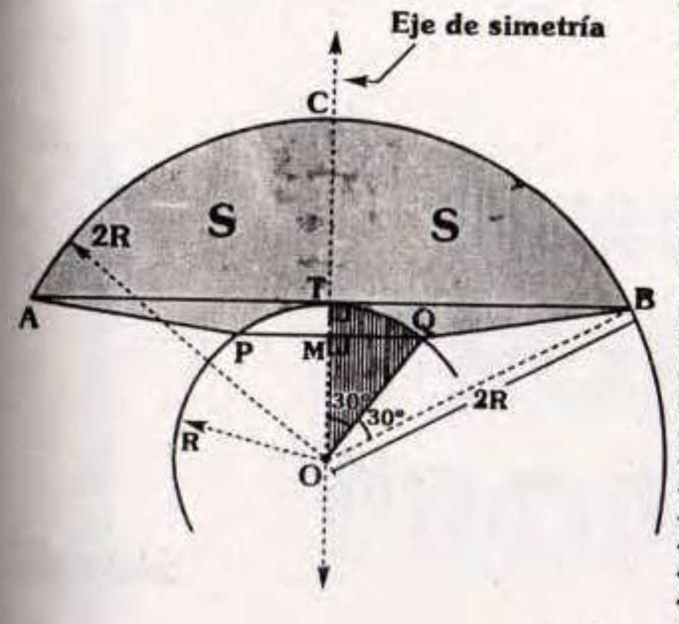
$$x^2 + n^2 = \ell^2 + m^2$$

$$\Rightarrow \; x^2 = \ell^2 + \underbrace{m^2 - n^2}_{a^2}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = a\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 298



Nos piden el área de la región sombreada (A_T)

• Del gráfico: $A_T = 2S$

• $S = A_{\triangle BOC} - A_{\triangle TOQ} - A_{\Delta QOB}$

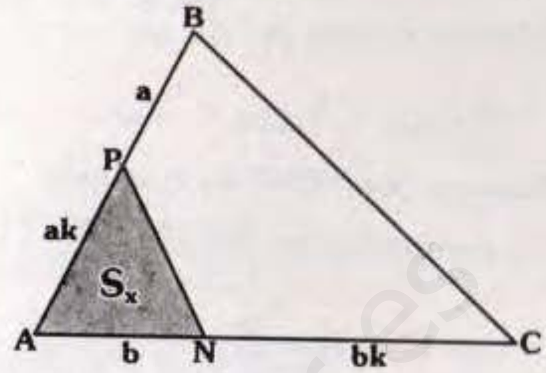
$\Rightarrow\ S = \dfrac{1}{6}\pi(2R)^2 - \dfrac{1}{12}\pi R^2 - \dfrac{R2R}{2}\operatorname{sen}30°$

$\Rightarrow\ S = \dfrac{7}{12}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{2}$

$$\therefore\ A_T = \frac{R^2}{6}(7\pi - 6)$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 299



Nos piden S_x

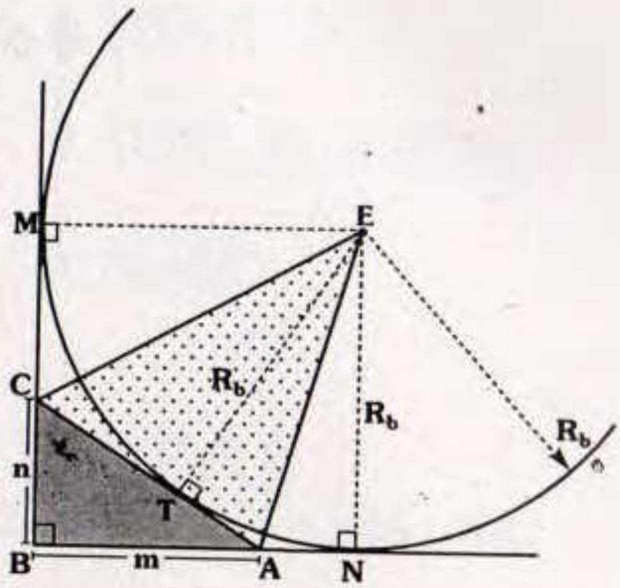
• Por teorema de razón de áreas:

$$\frac{S_x}{\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{S}} = \frac{bak}{a(k+1)b(k+1)}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x = \frac{k}{(k+1)^2}S}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 300



Nos piden $S_{\triangle ABCE}$;

Dato $m+n=a$ y $AC=b$

- Hallemos el área pedida por partes:

$$S_{\triangle ABCE} = S_{\triangle ABC} + S_{\Delta EAC} \quad ...(I)$$

- Notemos que NBME es cuadrado.
- BN: semiperímetro de ABC (p).

$$\Rightarrow BN = R_b = \frac{m+n+b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- $$S_{\Delta EAC} = \frac{bR_b}{2} = \frac{b(a+b)}{4} \quad ...(II)$$

- $$S_{\triangle ABC} = R_b(p-b)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{(a+b)}{2}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2+b^2}{2} \quad ...(III)$$

- De (II) y (III):

$$S_{\triangle ABCE} = \frac{b(a+b)}{4} + \frac{a^2-b^2}{4}$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{\triangle ABCE} = \frac{a(a+b)}{4}}$$

Clave A

❖❖❖❖❖

Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

ÁREAS
DE REGIONES PLANAS

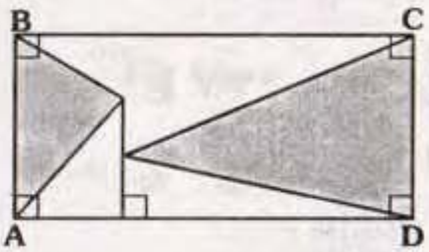
Problemas Propuestos

Ciclo Anual

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº1

En el gráfico, AB=4 y BC=6. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) 8 B) 10 C) 12

D) 14 E) 16

PROBLEMA Nº2

En el gráfico, T es punto de tangencia y OT=6. Calcule el área de la región sombreada.

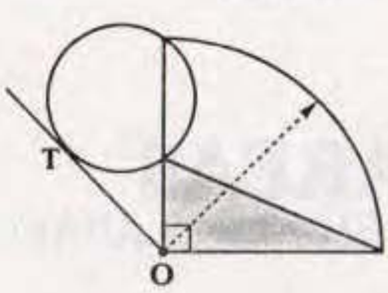
A) 18

B) 9

C) 36

D) 20

E) 48



PROBLEMA Nº3

Los lados de un triángulo miden 1, 2 y $\sqrt{7}$. Calcule el área de la región triangular.

A) $1.5\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº4

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, BH = 4, BC = 3 y CM = MD. Calcule el área de la región sombreada.

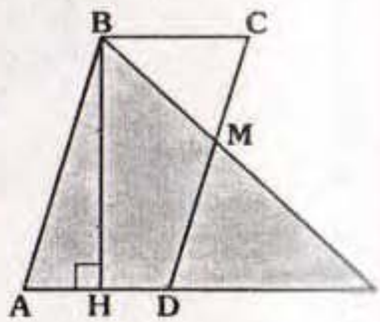
A) 12

B) 14

C) 15

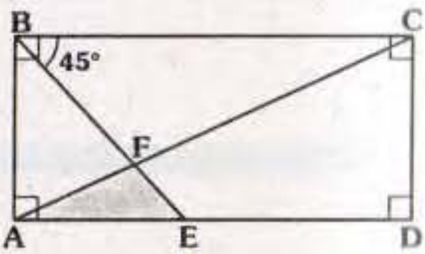
D) 16

E) 18



PROBLEMA Nº5

En el gráfico, AB = 3 y BC = 9. Calcule el área de la región AFE.



A) 1.25 B) 0.75 C) 1.325

D) 1.125 E) 1.75

PROBLEMA Nº6

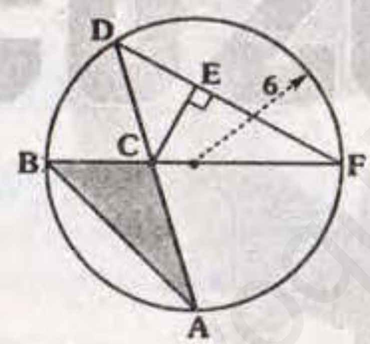
Calcule el área de la región triangular ABC, si la mediatriz de AC interseca a BC en Q, además AB=QC=5 y BQ=2.

A) $2\sqrt{6}$ B) $5\sqrt{6}$ C) $8\sqrt{6}$

D) $7\sqrt{6}$ E) $9\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº7

En el gráfico, el arco AB mide 90° y EF=2(ED), calcule el área de la región ABC.



A) 10

B) 12

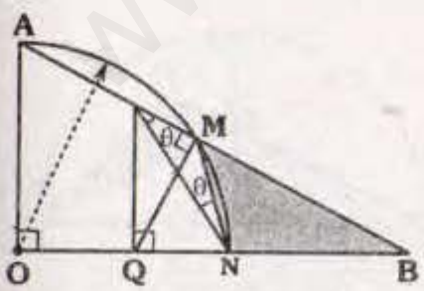
C) 14

D) 16

E) 18

PROBLEMA Nº8

En el gráfico, QM = 6. Calcule el área de la región MNB.



A) $8\sqrt{2}$ B) $9\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{2}$

D) $16\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº9

En el triángulo ABC, se cumple que m∢ABC=120°. En $\overline{AC}$ se ubica P y Q tal que el triángulo PBQ es equilátero (P en $\overline{AQ}$). Si (AP)(QC) = 8, calcule el área de la región triangular PBQ.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº10

En el triángulo ABC: AB=9, BC=11 y AC=10. Calcule el área de la región triangular AIC, si "I" es el incentro del triángulo ABC.

A) 15 B) $6\sqrt{2}$ C) 12

D) $10\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº11

En un triángulo PQR, la mediana $\overline{QM}$ interseca a la ceviana $\overline{PE}$ en "A". Si ER=2EQ y el área de la región triangular QAE es 2, calcule el área de la región triangular PQR.

A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

PROBLEMA Nº12

La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$. Si las medianas relativas a los lados congruentes son perpendiculares, calcule el área de la región triangular.

A) 3 B) 3/2 C) 1/2

D) 2 E) 1

PROBLEMA N°13

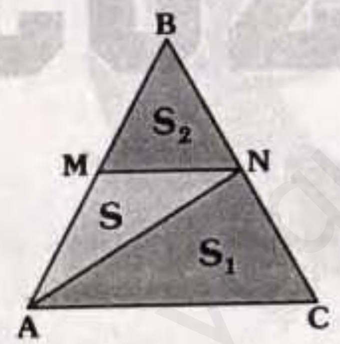
En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH, la bisectriz $\overline{BE}$ del ángulo ABH y la bisectriz del ángulo ACB se cortan en F, M es punto medio de BC, si las áreas de las regiones ABE y FHM son $6m^2$ y $11m^2$ respectivamente. Halle el área de la región ABC.

A) 50 B) 44 C) 40

D) 60 E) 55

PROBLEMA N°14

Si en la figura $\overline{MN}//\overline{AC}$, calcule $\frac{S_1}{S}-\frac{S}{S_2}$.



A) 0

B) 1/2

C) 1/3

D) 1

E) 2

PROBLEMA N°15

El área de la región limitada por un triángulo rectángulo es numéricamente igual a su perímetro. Además el doble de la longitud de un cateto es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. El valor del perímetro de dicho triángulo es:

A) 20 B) 24 C) 26

D) 30 E) 36

PROBLEMA N°16

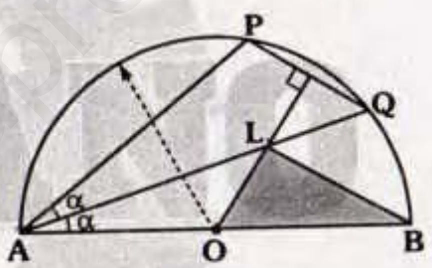
En un cuadrante AOC de centro O y radio $2\sqrt{5}$, se ubican los puntos M y P en $\overline{OC}$ y $\overset{\frown}{AC}$ respectivamente, de manera que OM=MC y $m\measuredangle APM=90°$. Calcule el área de la región triangular APM.

A) 3 B) 4 C) 6

D) 9 E) 12

PROBLEMA N°17

En el gráfico, AL=5 y LQ=4, calcule el área de la región sombreada.

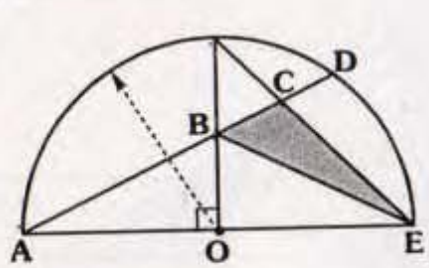


A) $15\sqrt{3}/2$ B) $15\sqrt{5}/2$ C) $15\sqrt{7}/4$

D) $15\sqrt{5}/4$ E) $15\sqrt{3}/4$

PROBLEMA N°18

En la figura, (AB)(CD)=16, calcule el área de la región sombreada.



A) 4 B) 6 C) 8

D) 12 E) 16

PROBLEMA N°19

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que la $m\sphericalangle ABD=90°$ y la $m\sphericalangle A=53°$. Si AC=20, calcule el mayor valor posible del área de la región triangular DBC.

A) 10 B) 12 C) 20 D) 24 E) 36

PROBLEMA N°20

Se tiene un triángulo de áreas "S", al unir los puntos medios de sus lados se forma un triángulo de área "S_1". En este nuevo triángulo se unen los puntos medios de sus lados y se forma un triángulo de área "S_2". Si se repite este proceso indefinidamente, calcular: $S+S_1+S_2+...$

A) 2S B) $\frac{4}{3}S$ C) $\frac{2}{3}S$ D) 3S E) $\frac{8}{3}S$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA N°21

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ respectivamente. Si (AB)(EF)=20, calcule el área de la región sombreada.

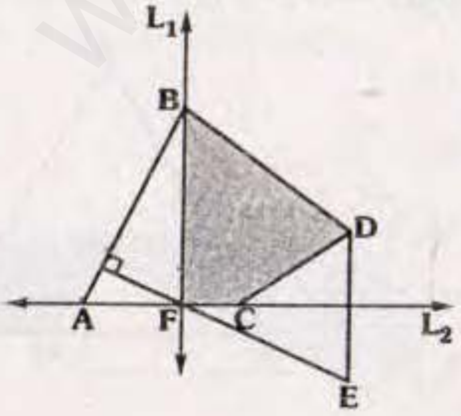
A) 20

B) 10

C) 15

D) 12

E) 18



PROBLEMA N°22

En el gráfico, PQSC es un cuadrado de centro O. Si AO= $2\sqrt{10}$. Calcule el área de la región sombreada.

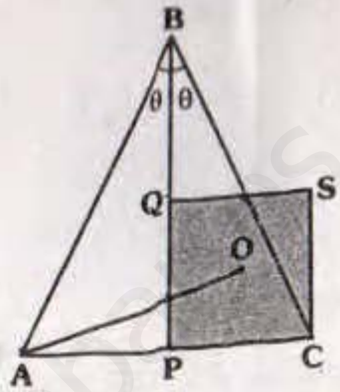
A) 4

B) 8

C) 12

D) 16

E) 20



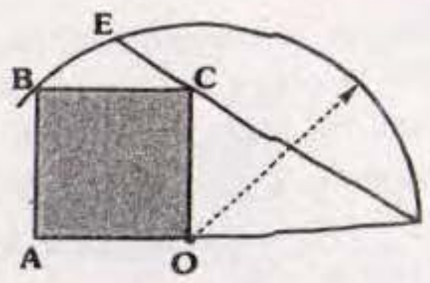
PROBLEMA N°23

En un cuadrado ABCD con centro en A y D se trazan los cuadrantes de radios AD, los cuales son secantes en M, si AB=2, calcule el área de la región ABMC

A) 3 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

PROBLEMA N°24

En el gráfico, ABCD y CE = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcule el área de la región sombreada.



A) 1 B) $\sqrt{3}/3$ C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº25

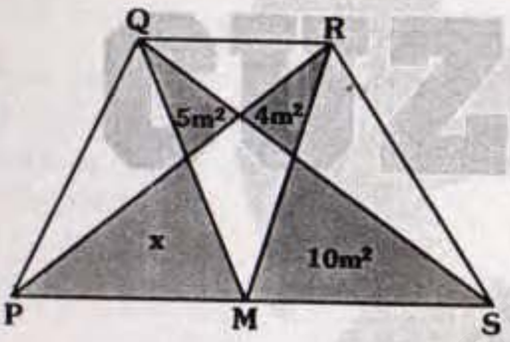
En un paralelogramo ABCD, se ubica Q y P en AD y BC respectivamente, si el triángulo APQ es equilátero, AQ=6 y QD=2. Calcule el área de la región paralelogramica.

A) $24\sqrt{3}$ B) $16\sqrt{3}$ C) $26\sqrt{3}$

D) $18\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº26

En el gráfico, $\overline{PS}//\overline{QR}$, calcule X, si M es punto medio de $\overline{PS}$.



A) 11m² B) 9m² C) 16m²

D) 1m² E) 25/3m²

PROBLEMA Nº27

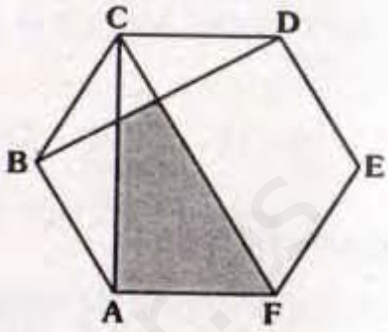
En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BR, se ubica P en AB y Q en $\overline{BC}$ tal que APQR es un paralelogramo y $\overline{BR}$ corta a $\overline{PQ}$ en H. Si PH = 2 y HQ = 8. Calcule el área de la región APHR.

A) 98 B) 96 C) 92

D) 102 E) 104

PROBLEMA Nº28

El área de la región hexagonal regular ABCDEF es 72m². Calcule el área de la región sombreada.



A) 20m²

B) 22m²

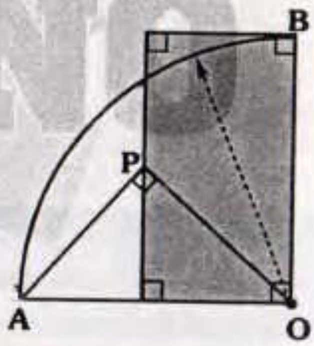
C) 24m²

D) 18m²

E) 16m²

PROBLEMA Nº29

Si OP=6, halle el área de la región sombreada.



A) 18

B) 12

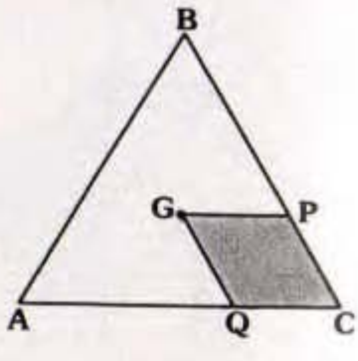
C) 36

D) 72

E) 64

PROBLEMA Nº30

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC y CQGP es un romboide, calcule la razón de áreas de las regiones ABC y CQGP.



A) 3/8

B) 9/2

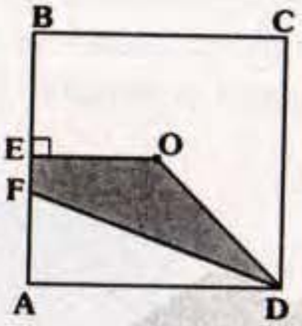
C) 10/3

D) 4

E) 5

PROBLEMA Nº31

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O y el área de la región sombreada es 7.5 y EF=1. Calcule el área de la región ABCD.



A) 25

B) 49

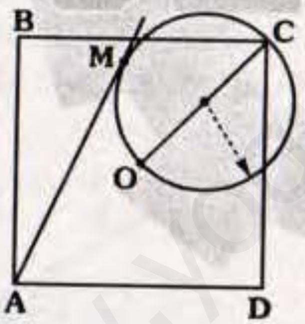
C) 64

D) 36

E) 81

PROBLEMA Nº32

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O, M es punto de tangencia y AM=4, calcule el área de la región cuadrada.



A) 8

B) 12

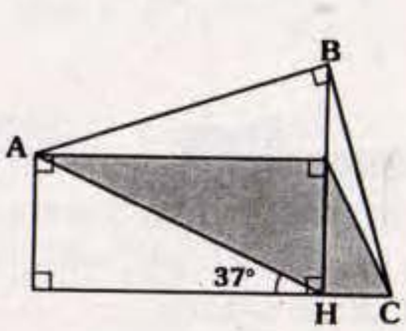
C) 16

D) 20

E) 18

PROBLEMA Nº33

En el gráfico, AB= BC y CH=2. Calcule el área de la región sombreada.



A) 25

B) 15

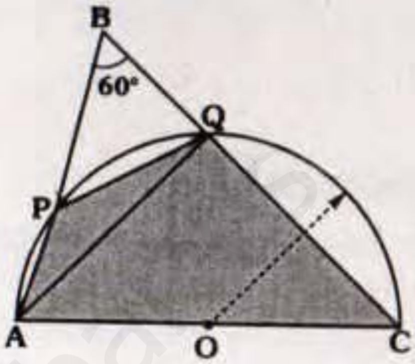
C) 35

D) 30

E) 20

PROBLEMA Nº34

En el gráfico (PB)(AQ)=8, calcule el área de la región sombreada.



A) 4

B) 6

C) 8

D) $4\sqrt{3}$

E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº35

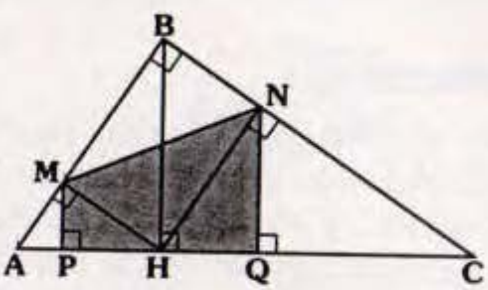
Se tiene un rectángulo ABCD de centro O, se traza el cuadrante de centro A y radio AB, tal que contiene a O. Si AB=2, calcule el área de la región rectangular ABCD.

A) 4 B) 6 C) $2\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº36

En el gráfico, (BH)(PQ)=18, calcule el área de la región PMNQ.



A) 9 B) 18 C) 12

D) 16 E) 10

PROBLEMA N°37

Halle la relación entre el área del cuadrado inscrito en un semicírculo y el área del cuadrado inscrito en el círculo entero.

A) 2/3 B) 2/5 C) 5/2
D) 3/2 E) 3/5

PROBLEMA N°38

Se da un triángulo rectángulo BAC cuyos catetos AB y AC miden 3m y 4m respectivamente. Se traza la altura $\overline{AH}$ y la circunferencia de diámetro AH que corta a AB en B_1 y AC en C_1. Por B_1 y C_1 se trazan las tangentes a la circunferencia que cortan a la hipotenusa BC en M y N. Determinar el área del cuadrilátero B_1MNC_1.

A) $1m^2$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA N°39

En un trapecio ABCD la base mayor AB=20m, la base menor DC=10m y su altura es igual a 12m. Se traza la mediana EF(E en AD y F en BC), que corta a las diagonales AC y BD en P y N respectivamente. Calcule el área del triángulo DPB.

A) $10m^2$ B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

PROBLEMA N°40

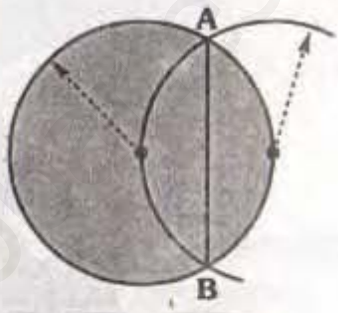
Halle el área de la región romboidal ABCD sabiendo que las áreas de las regiones BMC y PMD miden 9 y $4u^2$ respectivamente siendo "M" la intersección de la diagonal BD y el segmento CP("P" en $\overline{AD}$)

A) $18u^2$ B) 20 C) 30 D) 36 E) 28

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA N°41

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada y $AB=3\sqrt{3}$.



A) 15π

B) 8π

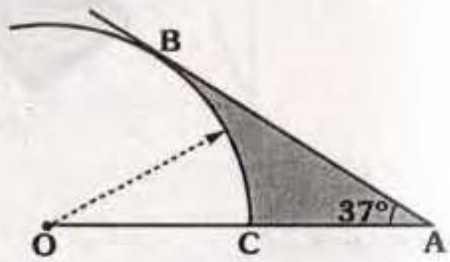
C) 6π

D) 12π

E) 9π

PROBLEMA N°42

En el gráfico, B es un punto de tangencia y AB+AC=6, calcule el área de la región sombreada.



A) π B) $3+\pi$ C) $13.5-3.7\pi$

D) $\frac{27}{8}-3\pi$ E) $6-1{,}325\pi$

PROBLEMA N°43

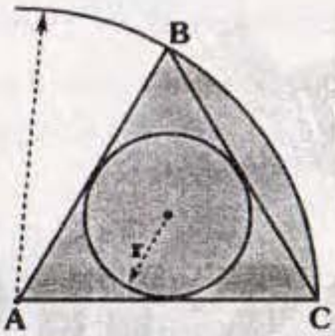
En el triángulo ABC (recto en B), se cumple que AB=16 y BC=63, calcule el área del círculo inscrito.

A) 49π B) 36π C) 50π

D) 40π E) 25π

PROBLEMA N°44

En el gráfico, la circunferencia de radio r, está inscrita en el triángulo ABC, si AB=BC y $r=\sqrt{3}$. Calcule el área de la región sombreada.



A) 2π

B) 6π

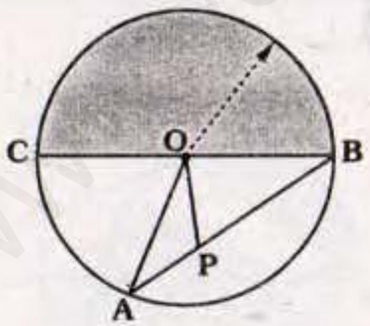
C) 5π

D) 4π

E) 2.5π

PROBLEMA N°45

En el gráfico, se cumple que $m\overset{\frown}{AC}=2(m\measuredangle AOP)$ y (AP)(AB)=36. Calcule el área de la región sombreada.



A) 36π

B) 18π

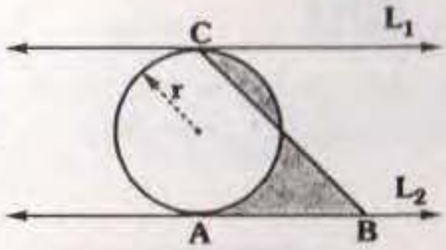
C) 50π

D) 40π

E) 25π

PROBLEMA N°46

En el gráfico, A y C son puntos de tangencia, $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}$ y las regiones sombreadas son equivalentes, calcule AB/r

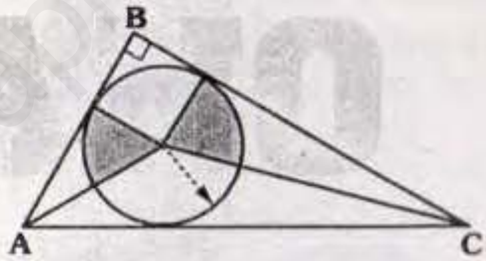


A) π B) $\pi/2$ C) $1/\pi$

D) $27\pi/8$ E) $\pi/3$

PROBLEMA N°47

En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el triángulo ABC, si los catetos miden 5 y 12. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

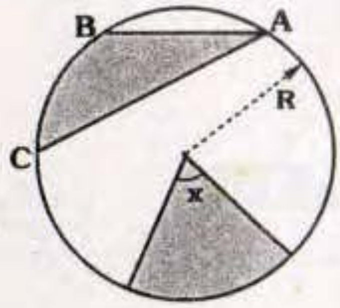


A) π B) $\pi/2$ C) 1.5π

D) 2π E) $\pi/3$

PROBLEMA N°48

En el gráfico, AB=R, $AC=R\sqrt{3}$ y las regiones sombreadas son equivalentes. Calcule x.



A) 60°

B) 90°

C) 120°

D) 75°

E) 53°

PROBLEMA Nº49

Si el lado del cuadrado mide 4cm, halle el área de la región sombreada.

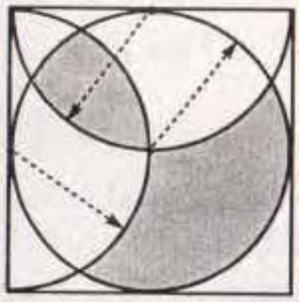
A) π

B) 2π

C) 3π

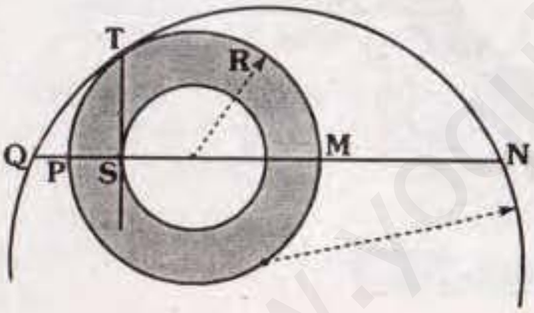
D) $\pi/2$

E) $3\pi/2$



PROBLEMA Nº50

En el gráfico, el área de la corona circular sombreada es de $12\pi m^2$, S y T son puntos de tangencia y R=4m. Calcule MN-QP.



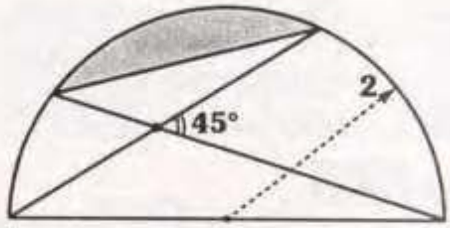
A) 2m B) 4m

C) $4(\sqrt{13}-1)$m D) $2(\sqrt{13}-1)$m

E) $4\sqrt{13}$

PROBLEMA Nº51

Calcule el área de la región sombreada.



A) $(\pi-1)/2$ B) $(\pi-2)/2$ C) $\pi-2$

D) $\pi-1$ E) $(\pi-2)/3$

PROBLEMA Nº52

En el gráfico se muestran semicírculos. Si $S_1=4m^2$ y $S_2=1m^2$. Calcule "S_3"

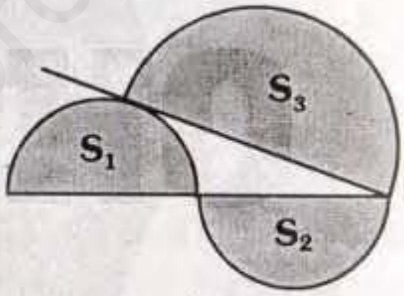
A) $1{,}5m^2$

B) $3m^2$

C) $4m^2$

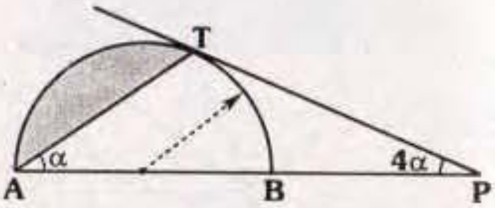
D) $6m^2$

E) $8m^2$



PROBLEMA Nº53

Si AB= $4\sqrt{3}$m, calcule el área del segmento circular.



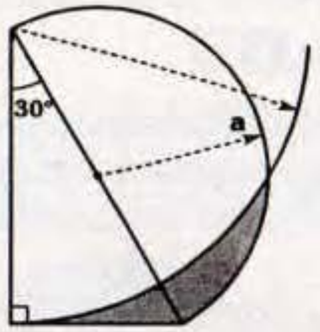
A) $(5\pi-3)m^2$ B) $(5\pi+5)m^2$

C) $(3\pi+5)m^2$ D) $(3\pi-5)m^2$

E) $6m^2$

PROBLEMA Nº54

Calcule el área de la región sombreada.



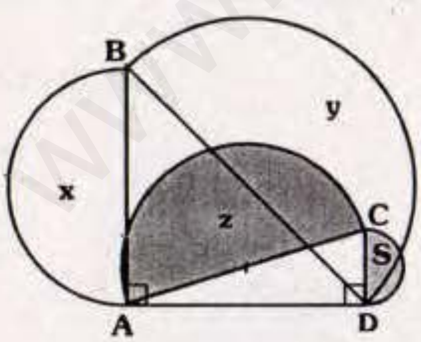
A) $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-4\pi]$ B) $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-2\pi]$

C) $\frac{a^2}{6}[9\sqrt{3}-4\pi]$ D) $\frac{a^2}{6}[9\sqrt{3}-2\pi]$

E) $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-5\pi]$

PROBLEMA Nº55

Calcule el valor del área del semicírculo "S", si; las áreas de los demás semicírculos son: x, y, z.

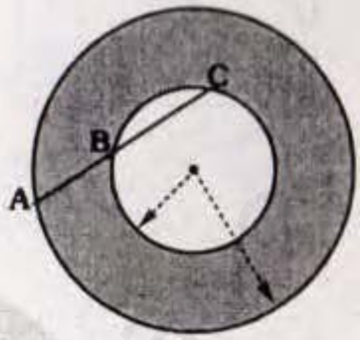


A) z+x-y B) y-z C) x-z

D) y+x-z E) y-x

PROBLEMA Nº56

En el gráfico, AB=BC=2, calcule el área de la región sombreada.

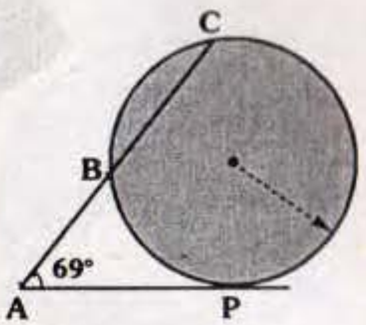


A) 4π B) 6π C) 8π

D) 10π E) 12π

PROBLEMA Nº57

En el gráfico, P es punto de tangencia. Si BC = 6u y $m\overset{\frown}{PB}=m\overset{\frown}{BC}$. Calcule el área de la región sombreada.

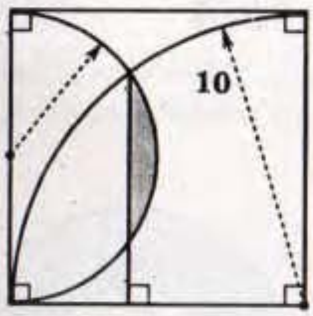


A) 18π B) 9π C) 12π

D) 36π E) 25π

PROBLEMA Nº58

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.



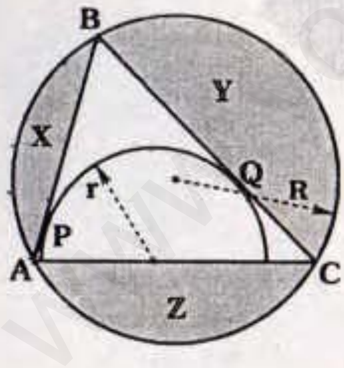
A) $\dfrac{185\pi}{9}-12$ B) $\dfrac{187\pi}{9}-12$

C) $\dfrac{212\pi}{9}-10$ D) $\dfrac{159\pi}{9}-10$

E) $\dfrac{135\pi}{37}-12$

PROBLEMA Nº59

En el gráfico, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $AB + BC = 10\pi$, $\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z} = 16\pi$ y $r=4$. Calcule R(P y Q son puntos de tangencia)

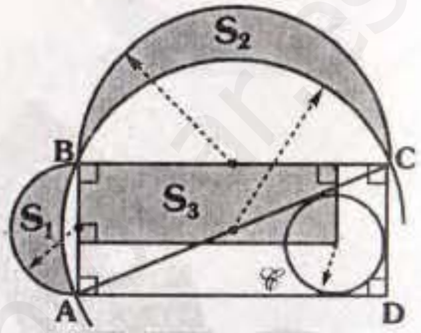


A) 3 B) 4 C) 8

D) 6 E) 12

PROBLEMA Nº60

$\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo ADC . Indique la relación correcta.



A) $2S_3 = S_1 + S_2$

B) $S_3 = S_1 + S_2$

C) $S_3^2 = S_1 S_2$

D) $S_3^2 = S_1^2 + S_2^2$

E) $S_3 = \dfrac{S_1 + S_2}{4}$

Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº61 3° Seminario

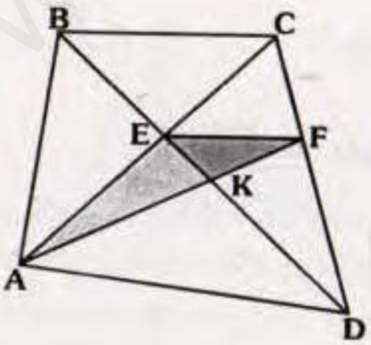
En un triángulo ABC(recto en B). Si AB=5u, BC=12u. Se inscribe una circunferencia tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en D, E y F respectivamente. Halle el área de la región triangular DEF.

A) $\frac{58}{11}$ B) $\frac{60}{13}$ C) $\frac{64}{13}$

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº62 Seminario

En la figura: $\overline{EF} // \overline{BC}$, AE=3(EC), 3(BE)=2(ED) y $A_{(\Delta EKF)}=5u^2$, calcule $A_{(\Delta AEK)}$.



A) 10

B) 15

C) 20

D) 25

E) 30

PROBLEMA Nº63

EBF es un triángulo en donde la proyección de $\overline{EB}$ sobre $\overline{EF}$ es 4 veces la proyección de $\overline{BF}$ sobre $\overline{EF}$. C es un punto de $\overline{EF}$ tal que 2(EC)=3(CF) A es un punto en la prolongación de $\overline{BE}$ tal que EB=2(AE). Si el área de ABTC es $11u^2$ siendo T la proyección de B sobre $\overline{EF}$, calcule el área de AEC en u^2.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº64

En la figura, BC=3(BG); DC=2(AD) y $A_{(\Delta IGB)}=5u^2$, halle $A_{(\Delta ADI)}$.

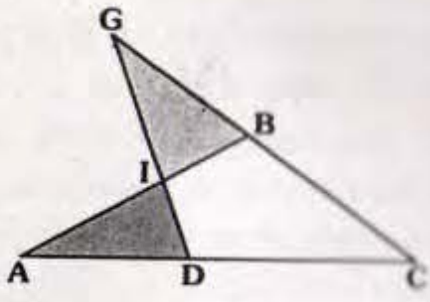
A) 5

B) 8

C) 10

D) 13

E) 15



PROBLEMA Nº65

Calcule el área de una región triangular, si el producto de sus alturas es "k" y el circunradio es R.

A) $\sqrt{\frac{KR}{2}}$ B) $\frac{\sqrt{KR}}{3}$ C) $\sqrt[3]{K^2R^2}$

D) $\sqrt{2KR}$ E) K/R

PROBLEMA N°66

Halle el área de la región triangular ABC determinada en el exterior del cuadrado ACHF, si $m\measuredangle ABC=90°$ y $(S_{\Delta AFB})(S_{\Delta BHC})=25$

A) 5 B) 25 C) 10 D) 15 E) 20

PROBLEMA N°67

Hallar el área del triángulo, sabiendo que las longitudes de sus alturas son 12u, 15u y 20u.

A) $90u^2$ B) $120u^2$ C) $150u^2$

D) $180u^2$ E) $210u^2$

PROBLEMA N°68

Dado el triángulo ABC, sobre los lados se construyen los paralelogramos ABDE y BCGF, se prolongan $\overline{ED}$ y $\overline{GF}$ hasta que se intersequen en P, la prolongación de $\overline{PB}$ corta a $\overline{AC}$ en L y se prolonga $\overline{BL}$ una longitud LR=PB, luego por los vértices A y C se trazan paralelas a $\overline{LR}$, determinandose el paralelogramo ACQM. (AM=LR=CQ).
Demostrar que $S_{ACQM}=S_{AEDB}+S_{BFGC}$

PROBLEMA N°69

Sea r_a la longitud del radio de la circunferencia exinscrita a un triángulo equilátero ABC. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{r_a^2}{2}$ B) $\frac{r_a^2\sqrt{3}}{3}$ C) r_a^2

D) $r_a^2\sqrt{3}$ E) $2r_a^2\sqrt{3}$

PROBLEMA N°70

En un triángulo ABC, **r** es el radio de la circunferencia inscrita de centro I, r_a es el radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado BC y centro E. Sean F y Q los puntos de tangencia de las circunferencias con $\overline{AC}$; BC = a. Halle el área de la región IFQE.

A) $\frac{r^2r_a}{a}$ B) $a(r_a - r)$ C) $a\sqrt{r_ar}$

D) $(r+r_a)\frac{a}{2}$ E) $\frac{a^2r_a}{r}$

PROBLEMA N°71

En un triángulo ABC, $m\measuredangle B=135°$, se traza la altura $\overline{BH}$, si AH=1u y HC=3u. Calcule el área de la región triangular ABC en u^2.

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}+1$ C) $\sqrt{7}-1$

D) $2\sqrt{7}$ E) $2(\sqrt{7}-2)$

PROBLEMA N°72

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), exteriormente sobre los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se construyen los triángulos equiláteros ABM y BCN respectivamente, si el área de la región triangular ABC es S, entonces el área de la región triangular MBN es:

A) $\dfrac{S}{5}$ B) $\dfrac{S}{4}$ C) $\dfrac{S}{3}$

D) $\dfrac{S}{2}$ E) $\dfrac{S}{8}$

PROBLEMA Nº73

En la figura AOB es un cuadrante, M y F son puntos de tangencia, MF=1u y BM=2u. Calcule el área de la región triangular MOB en u².

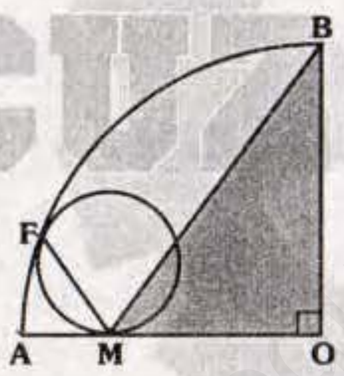
A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}u^2$

B) $\sqrt{3}u^2$

C) $\sqrt{5}u^2$

D) $2u^2$

E) $\sqrt{6}u^2$



PROBLEMA Nº74

En la figura, DP=m, FT=n. Halle el área de la región triangular ABC.

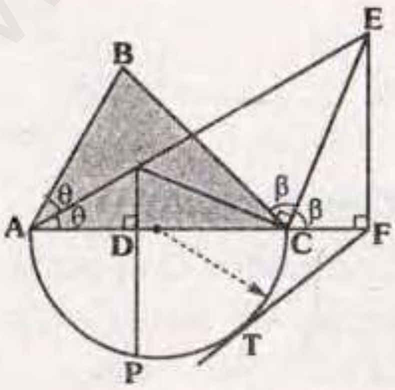
A) $n(m+n)$

B) $\dfrac{mn}{2}$

C) $2mn$

D) $m(m+n)$

E) mn



PROBLEMA Nº75

El perímetro de un triángulo, cuyos lados son números consecutivos, es 21m. Calcular su área.

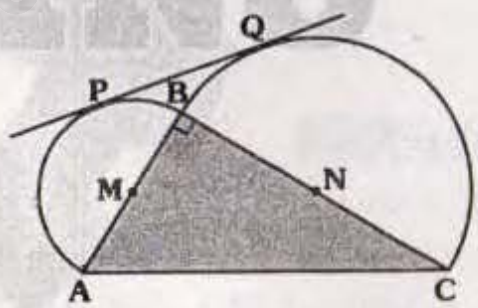
A) $\sqrt{21}m^2$ B) $\dfrac{21}{13}\sqrt{15}m^2$

C) $\dfrac{21}{4}\sqrt{15}m^2$ D) $20m^2$

E) $\dfrac{3}{4}\sqrt{21}m^2$

PROBLEMA Nº76

M y N son centros; P y Q son puntos de tangencia. Si PQ=m, halle el área de la región ABC.



A) m^2 B) $\dfrac{m^2}{2}$ C) $2m^2$

D) $4m^2$ E) $\dfrac{m^2}{4}$

PROBLEMA Nº77

En la región del triángulo ABC de Su² de área, H y J son los pies de las alturas trazadas desde A y C. Si $\overline{JK}$ ($K \in \overline{BC}$) es perpendicular a $\overline{BC}$ y CJ = a, JK = b; calcule el área de la región BHJ (en u²).

A) $\dfrac{b^2S}{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{b^2S}{a^2}$ C) $\dfrac{a^2S}{b^2}$

D) $\dfrac{a^2S}{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{\sqrt{a}\,S}{\sqrt{a+b}}$

PROBLEMA N°78

Sea ABC un triángulo equilátero, E el excentro relativo al lado $\overline{BC}$; se trazan: $\overline{EM}\perp\overline{AC}$, $\overline{MJ}\perp\overline{BC}$, $\overline{JQ}\perp\overline{AB}$, $\overline{JQ}\cap\overline{EM}=\{P\}$. Halle la relación entre las áreas de las regiones triangulares JMP y ABC.

A) $\dfrac{3}{16}$ B) $\dfrac{4}{9}$ C) $\dfrac{3}{8}$

D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{4}$

PROBLEMA N°79

En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ en P. Las regiones PAQ, PBM y PCN son equivalentes y las regiones PAN, PQB y PMC tienen por áreas S_1, S_2 y S_3 respectivamente. Halle el área de la región PAQ.

A) $\sqrt[3]{S_1\times S_2\times S_3}$ B) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1\times S_2\times S_3}{2}}$

C) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1}{5}\times S_2\times S_3}$ D) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1\times S_2\times S_3}{7}}$

E) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1\times S_2\times S_3}{11}}$

PROBLEMA N°80

En un triángulo ABC se trazan las cevianas no concurrentes en el interior $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CF}$ tal que: PC=nAP, AF=nFB y BQ=nQC. Si el área de ABC es S. Halle el área de la región triangular que determinan las cevianas al intersectarse, dos a dos.

A) $\dfrac{(n-1)^2S}{n^2-n+1}$ B) $\dfrac{(n-1)^2S}{n^2+n+1}$

C) $\dfrac{(n+1)^2S}{n^2+n+1}$ D) $\dfrac{S}{n+1}$

E) $\left(\dfrac{n-1}{n^4+1}\right)S$

PROBLEMA N°81

En un triángulo ABC la relación de las longitudes del exradio y del circunradio es K. Si el área de ABC es S. Halle el área de la región triangular que se obtiene al unir los puntos de tangencia de las circunferencia ex-inscrita relativa a un lado.

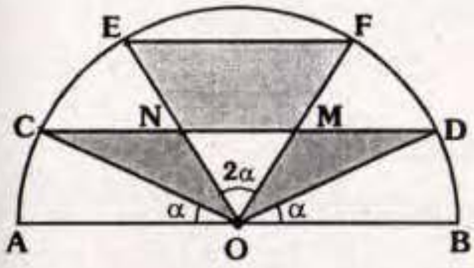
A) $\dfrac{KS}{3}$ B) $\dfrac{2KS}{3}$ C) $\dfrac{SK}{4}$

D) $\dfrac{SK}{2}$ E) $\dfrac{3SK}{2}$

PROBLEMA N°82

En el gráfico, O es punto medio del diámetro $\overline{AB}$ de la semicircunferencia, $\overline{EF}//\overline{CD}//\overline{AB}$. Halle:

$$\frac{\text{Área}_{EFMN}}{\text{Área}_{(CNO)}+\text{Área}_{(OMD)}}$$



A) 0,75 B) 1,00 C) 1,25

D) 1,50 E) 1,75

PROBLEMA N°83

En un triángulo acutángulo ABC, se consideran los puntos D, E y F en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ pasan por el centro "O" de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, cuyo radio mide 4.

Calcule: $\frac{1}{AE}+\frac{1}{BF}+\frac{1}{CD}$

A) 1/5 B) 1 C) 1/2

D) 1/3 E) 4/5

PROBLEMA N°84

En un triángulo ABC recto en B, el área de la región ABC es 24u², I es incentro de dicho triángulo, O es circuncentro y $m\sphericalangle AIO=90°$. Hallar el área de la región AIO.

A) 4u² B) 5u² C) 6u²

D) 8u² E) 9u²

PROBLEMA N°85

Sea el triángulo ABC cuya región triangular tiene 50m² de área, cuyo inradio mide 2m y con un circunradio de 5m. Hallar el área de la región triangular MNP (M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita)

A) 10m² B) 8m² C) 12m²

D) 15m² E) 9m²

PROBLEMA N°86

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ intersecan a la altura en los puntos M y N, I es incentro. Si AB=6u y BC=8u. Hallar el área de la región triangular MNI.

A) $\frac{1}{15}u^2$ B) $\frac{1}{10}u^2$ C) $\frac{1}{3}u^2$

D) $\frac{1}{4}u^2$ E) $\frac{1}{5}u^2$

PROBLEMA N°87

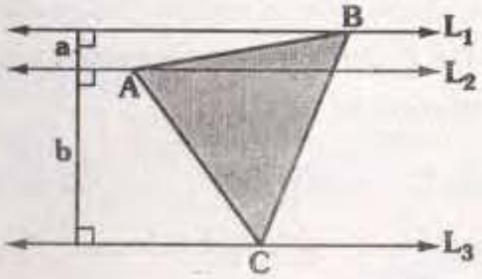
En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ que se intersecan en H; hallar el área del triángulo ABC si las áreas de los triángulos BHN, BHC y HMC son 6m², 12m² y 8m² respectivamente.

A) 36m² B) 40m² C) 45m²

D) 50m² E) 48m²

PROBLEMA N°88

En la figura $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, hallar el área de la región triangular equilátera ABC.



A) $(a^2+b^2-3ab)\sqrt{3}$ B) $(a^2+b^2+ab)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C) $(a^2+b^2+3ab)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) (a^2+b^2+ab)

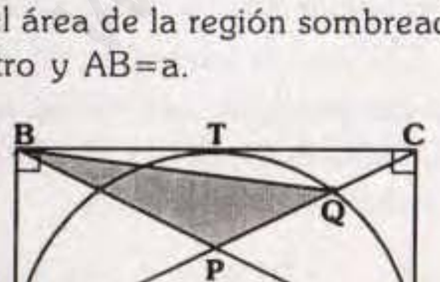
E) $(a^2+b^2)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA N°89

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en O. Si $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$, demostrar que ABCD es inscriptible

PROBLEMA N°90

Halle el área de la región sombreada si O es centro y AB=a.



A) $5a^2$ B) $\dfrac{3a^2}{10}$ C) $3a^2$

D) $\dfrac{3}{5}a^2$ E) $\dfrac{a^2}{10}$

PROBLEMA N°91

En un paralelogramo ABCD, se ubica M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{CD}$ de modo que $m\measuredangle AMN = 90°$, MC=3, DN=NC, y AM=MN=4. Hallar el área de la región CMN.

A) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ B) $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

D) $\sqrt{5}$ E $2\sqrt{5}$

PROBLEMA N°92

En el gráfico, A, B, C y D son puntos medios de los lados del cuadrado MQPN, cuyo lado mide ℓ. Hallar la suma de áreas de las regiones sombreadas.

A) $\ell^2/2$ B) $\ell^2/16$ C) $\ell^2/4$

D) $\ell^2/5$ E) $\ell^2/6$

PROBLEMA Nº93

Dado el pentágono regular ABCDE, su lado mide "a" unidades. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en F. Halle el área de la región cuadrangular AFDE.

A) $\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{5}-10}$ B) $a^2\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$

C) $\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+10}$ D) $\frac{a^2}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-10}$

E) $\frac{a^2}{4}\sqrt{\sqrt{5}+1}$

PROBLEMA Nº94

Las diagonales de un trapezoide miden 26cm y 30cm y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide 14cm. Halle el área de la región trapezoidal.

A) $84cm^2$ B) $168cm^2$ C) $186cm^2$

D) $336cm^2$ E) $363cm^2$

PROBLEMA Nº95

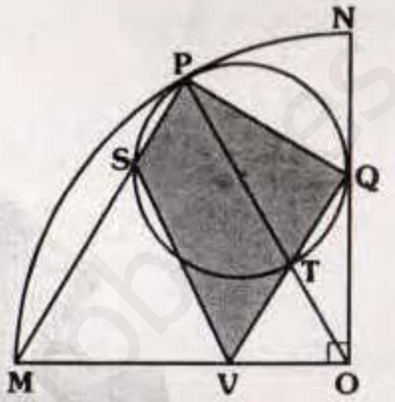
En un cuadrilátero convexo ABCD, AC=m y BD=n. Halle el área de la mayor región que limita el cuadrilátero.

A) $\frac{mn}{4}$ B) mn C) $\frac{mn}{2}$

D) 2mn E) $m^2 + n^2$

PROBLEMA Nº96

En la figura mostrada se tiene el cuadrante MON, P y Q son puntos de tangencia. Si MS=2(SP) y r es la longitud del radio de la circunferencia. Halle el área de la región PQVS.

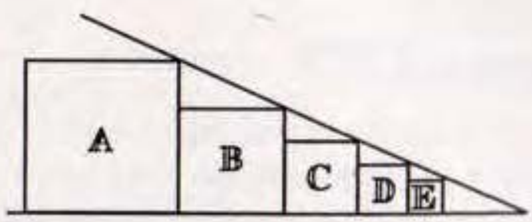


A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}r^2$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}r^2$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{2}r^2$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ E) $\frac{3\sqrt{7}}{2}r^2$

PROBLEMA Nº97

En la figura mostrada, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ y $\mathbb{E}$ son las áreas de las regiones cuadradas. Si $\mathbb{A}=27m^2$ y $\mathbb{E}=3m^2$. Halle $\mathbb{B}+\mathbb{D}$



A) $12\sqrt{3}m^2$ B) $30m^2$ C) $24m^2$

D) $18\sqrt{2}m^2$ E) $18m^2$

PROBLEMA Nº98 PRÁCTICA CALIFICADA

Se tiene el rectángulo ABCD, donde AB=2L, BC=L, en $\overline{AB}$ se ubican los puntos F y E de manera que $F\in\overline{AE}$, $\overline{FC}$ es perpendicular a $\overline{DE}$ en Q, si: $m\measuredangle CDE=30°$. Calcule el área de la región cuadrangular BCQE.

A) $\frac{L^2}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ B) $\frac{L^2}{2}\sqrt{3}$

C) $\frac{L^2}{2}(2+\sqrt{3})$ D) $L^2(2-\sqrt{3})$

E) $L^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

PROBLEMA Nº99 PRÁCTICA CALIFICADA

Se tiene el cuadrilátero ABCD donde $\overline{BC}//\overline{AD}$, en $\overline{AD}$ se ubican los puntos Q y R de manera que $Q\in\overline{AR}$, $\overline{CQ}//\overline{AB}$, $\overline{BR}//\overline{CD}$ y $\overline{CQ}\cap\overline{BR}=\{P\}$. Las áreas de las regiones triangulares BCP y PQR son a y b respectivamente, calcule el área de la región cuadrangular ABPQ.

A) 2a + b B) a + 2b C) 2(a + b)

D) $a+2\sqrt{ab}$ E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº100 SEMINARIO

En un trapecio cuyas bases miden 3m y 1m se traza una paralela a las bases para dividirlo en dos figuras equivalentes. ¿Cuál es la longitud de dicha paralela? (en m)

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº101

ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 6u, $E\in\overline{BC}$, el área de la región trapezoidal AECD es el doble de la región triangular ABE, entonces la longitud de $\overline{EC}$ es:

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$

D) 3 E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº102

En un paralelogramo ABCD, AD=18dm y su altura BH mide 12dm. Si M y N son los puntos medios de los lados BC y CD respectivamente, entonces el área de la región cuadrangular AMCN (en dm²) es:

A) 84 B) 92 C) 96 D) 108 E) 81

PROBLEMA Nº103

En un cuadrilátero ABCD se ubican M y N puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente, donde $\overline{AN}\cap\overline{DM}=\{L\}$ y $\overline{AC}\cap\overline{BD}=\{F\}$, si la suma de áreas de las regiones de los triángulos AML y BMF es 10m², entonces la suma de las áreas de las regiones triangulares DLN y CFN en (dm²) es:

A) 7,5 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº104

Se tiene el cuadrado ACDE de centro O, B es un punto exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle ABC=90°$, BO=6cm. Halle el área de la región limitada por el cuadrilátero ABCO (en cm²)

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

PROBLEMA Nº105

Hallar el área de un trapecio ABCD $(\overline{AD}//\overline{BC})$, $AD>\overline{BC}$, $\overline{MN}$ es mediana del trapecio $(M\in\overline{AB})$, Q es punto medio de MN y el área de la región cuadrangular no convexa BNAQ es $40u^2$.

A) $100u^2$ B) $120u^2$ C) $140u^2$

D) $160u^2$ E) $180u^2$

PROBLEMA Nº106

Hallar el área de la región sombreada, si: $Área_{(\Delta LFS)}=10u^2$, $Área_{(\Delta OIP)}=20u^2$ y $Área_{(GEH)}=15u^2$

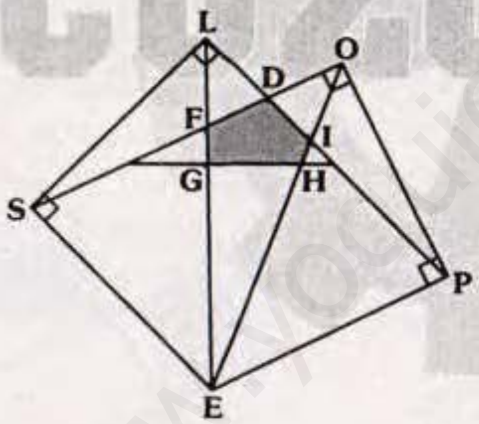
A) 10

B) 15

C) 17,5

D) 20

E) 22,5



PROBLEMA Nº107

Se tiene una región cuadrada ACHF cuyo lado mide L, sea B un punto exterior a la región y relativo a $\overline{AC}$ tal que el triángulo ABC es recto en B.

Si $Área_{(\Delta AFB)}.Área_{(BHC)}=25u^2$. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $4u^2$ B) $5u^2$ C) $6u^2$

D) $7u^2$ E) $8u^2$

PROBLEMA Nº108

Halle (en u^2) el área del trapezoide ABCD, si sus diagonales miden 6u y 8u y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide 5u.

A) 16 B) 20 C) 24

D) 26 E) 28

PROBLEMA Nº109

En un cuadrante AOB de centro O, se inscribe un cuadrado CDEF con C y D en $\overset{\frown}{AB}$ y E y F en $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. Si OA=OB=R, halle el área del cuadrado.

A) $\dfrac{R^2}{3}$ B) $\dfrac{R^2}{5}$ C) $\dfrac{2R^2}{5}$

D) $\dfrac{3R^2}{5}$ E) $\dfrac{2R^2}{3}$

PROBLEMA Nº110

Calcule el área de la mayor región rectangular inscrita en una circunferencia de radio R.

A) $2R^2$ B) 4R2 C) $2\sqrt{2}R^2$

D) $3R^2\sqrt{2}$ E) $1,5R^2$

PROBLEMA Nº111

En un cuadrado de lado L se construyen sobre sus lados interiormente triángulos equiláteros, calcule el área de la región estrellada resultante.

A) $(2\sqrt{3}-3)L^2$ B) $(4\sqrt{3}-3)L^2$

C) $2(2\sqrt{3}-3)L^2$ D) $(2\sqrt{3}-3)\frac{L^2}{2}$

E) $(2\sqrt{3}-3)\frac{L^2}{4}$

PROBLEMA Nº112

En un paralelogramo ABCD, se traza la mediatriz del lado AB que interseca al lado AD en E, tal que $m\sphericalangle BCE=2(m\sphericalangle ECD)$ y $2(AE)=CE=8$, halle el área de la región ABCD.

A) $16\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº113

En un cuadrilátero ABCD, $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ADC=90°$, $AB=6$, $CD=1$ y $m\sphericalangle ACD=2m\sphericalangle BAC$. Halle el área de la región ABCD.

A) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ B) $10\sqrt{7}$ C) $5\sqrt{7}$

D) $6\sqrt{6}$ E) $\frac{15}{2}\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº114

En una semicircunferencia de diámetro AD se ubican B y C de modo que $B\in\widehat{AC}$. Si $m\widehat{BC}=60°$ y $(AC)(BD)=12u^2$. Calcule el área de la región ABCD.

A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº115

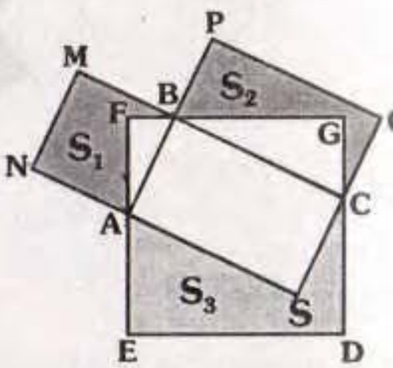
En un rombo las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados miden 12u y 3u. Halle el área de la región limitada por dicho rombo.

A) $36u^2$ B) $18u^2$ C) $82u^2$

D) $45u^2$ E) $64u^2$

PROBLEMA Nº116

En la figura, FGDE, ANMB y APQS son regiones cuadradas y AF=GC. Si $S_1+S_2=16u^2$, halle el valor de S_3.



A) 16

B) 8

C) 32

D) 24

E) $16\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº117

Dos regiones rectangulares están inscritas en una misma circunferencia, el 1° tiene una base igual a 2/3 del diámetro, el 2° tiene una base igual a los 3/4 del diámetro. ¿En que relación se hallan sus áreas?

A) $\dfrac{32}{8}$ B) $\dfrac{4\sqrt{7}}{7\sqrt{5}}$ C) $\dfrac{8\sqrt{7}}{7\sqrt{5}}$

D) $\dfrac{32}{27}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ E) $\dfrac{64}{49}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

PROBLEMA Nº118

En un paralelogramo ABCD, se traza $\overline{AC}$ y se ubica M punto medio de $\overline{AB}$, sea $\overline{AC}\cap\overline{MD}=\{Q\}$ ¿Que porcentaje del área de ABCD es el área del triángulo MCQ?

A) 1/8 B) 1/6 C) 3/8

D) 1/3 E) 1/5

PROBLEMA Nº119

Se tiene un hexágono regular ABCDEF de lado "a". Sea M punto medio de $\overline{BC}$, se dibuja el simétrico del hexágono dado, según el eje que contiene a FM. Hallar el área de la región común a los dos polígonos.

A) $6a^2\sqrt{3}$ B) $\dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ C) $\dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}$

D) $\dfrac{8}{3}a^2\sqrt{3}$ E) $\dfrac{2}{3}a^2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº120

En el rectángulo ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica E, por dicho punto se traza una recta secante que interseca a $\overline{CD}$ en F y a $\overline{AB}$ en G. Si las regiones ADFG y BCFG son equivalentes, $AD=\sqrt{2}(DE)$ y $AB=\sqrt{2}$. Calcule AG.

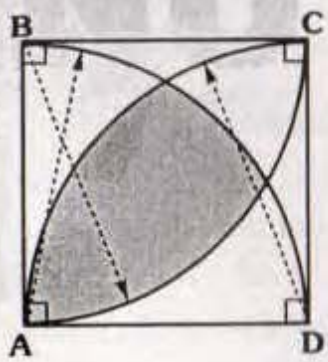
A) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1

D) $\dfrac{5}{4}$ E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº121

En la figura AB=L, halle el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{L^2}{12}(\pi-1)$ B) $\dfrac{L^2}{3}$ C) $\dfrac{L^2}{4}$

D) $\dfrac{L^2}{12}(5\pi-6\sqrt{3})$ E) $\dfrac{L^2}{6}(\pi-\sqrt{2})$

PROBLEMA Nº122

En un ángulo están inscritos tres circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Si el área de los círculos menor y mayor son S_1 y S_2. Halle el área del círculo intermedio.

A) $\sqrt{S_1S_2}$ B) $\dfrac{S_2^2}{S_1}$ C) $\dfrac{(S_2)^2}{S_1}$

D) S_1+S_2 E) S_1S_2

PROBLEMA Nº123

Dos circunferencia congruentes son tangentes exteriores en A, se traza el segmento tangente exterior $\overline{BC}$. Si el radio de una circunferencia mide 2m entonces el área de la región triangular mixtilínea ABC es (en m²):

A) $6-\pi$ B) $8-2\pi$ C) $7-\pi$

D) $\dfrac{7}{2}-2\pi$ E) $9-2\pi$

PROBLEMA Nº124

En una circunferencia cuyo radio mide 5m, se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que: $m\widehat{AB}=72°$ y $m\widehat{BC}=54°$. Calcule el área de la región limitada por $\widehat{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ (en m²)

A) 2π B) 3π C) 4π

D) 5π E) 6π

PROBLEMA Nº125

En el semicírculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios OC y OD, con $\overline{OD}$ bisectriz del $\measuredangle AOC$. Si los segmentos circulares determinados por $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen por áreas A_1 y A_2. Calcule el área del sector circular BOC.

A) A_2-A_1 B) $\dfrac{A_2+A_1}{2}$ C) A_2-2A_1

D) $\dfrac{A_2-A_1}{2}$ E) $\dfrac{2A_1+A_2}{3}$

PROBLEMA Nº126

Sea el sector circular AOB (OA=OB=R) cuyo ángulo central mide 30°. Se trazan $\overline{BD}\perp\overline{OA}$ y $\overline{AE}\perp\overline{OB}$. Si $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ se intersecan en P, calcule el área de la región del triángular mixta APB.

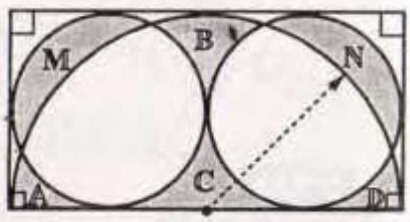
A) $\dfrac{R^2}{12}(\pi-18+12\sqrt{3})$ B) $\dfrac{R^2}{12}(\pi+18-12\sqrt{3})$

C) $\dfrac{R^2}{12}(\pi+12+6\sqrt{3})$ D) $\dfrac{R^2}{12}(\pi+12-6\sqrt{3})$

E) $\dfrac{R^2}{12}(\pi-12+6\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº127

En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes. Además $\mathbb{M},\mathbb{N},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Entonces $\dfrac{\mathbb{M}+\mathbb{N}}{\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}}$ es:

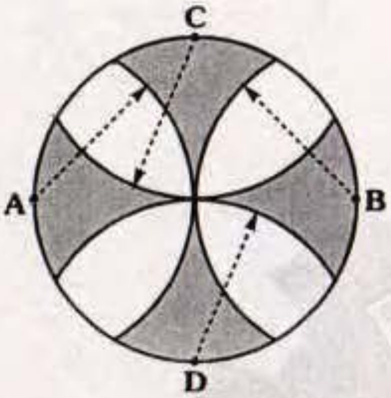


A) 1/4 B) 1/2 C) 1

D) 1/3 E) 2

PROBLEMA Nº128 SEMINARIO

En el siguiente gráfico, se muestra los diámetros AB y CD perpendiculares en F, AF=R. Hallar el área de la región sombreada.



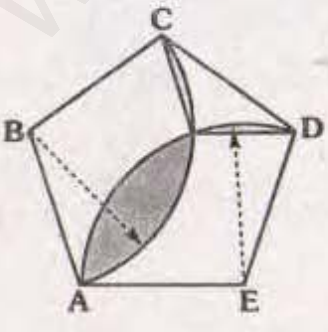
A) $\frac{2}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{1}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{4}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$ D) $\frac{2}{3}R^2(\sqrt{3}-\pi)$

E) $\frac{2}{3}R^2(2\sqrt{3}-\pi)$

PROBLEMA Nº129

Dado el pentágono regular ABCDE, $AB=\ell$. Entonces el área de la región sombreada será igual a:



A) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

B) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

C) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

D) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

E) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

PROBLEMA Nº130

ABCD es una región cuadrada de $45u^2$ de áreas, M, N y C son centros de los arcos de circunferencia. Calcule aproximadamente el área de la región sombreada.

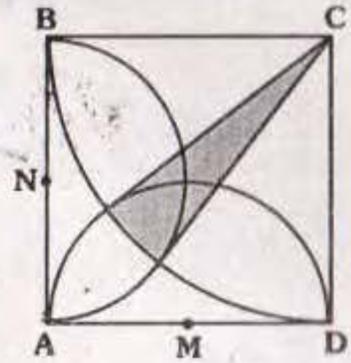
A) $2\pi u^2$

B) $8\pi u^2$

C) $10\pi u^2$

D) $(4\sqrt{3}-\pi)u^2$

E) $6(\pi-\sqrt{3})u^2$



PROBLEMA Nº131

En un círculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$, siendo $\overline{OD}$ la bisectriz del ángulo AOC. Si los segmentos circulares determinados por $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen áreas A_1 y A_2 respectivamente, calcule el área del sector circular BOC.

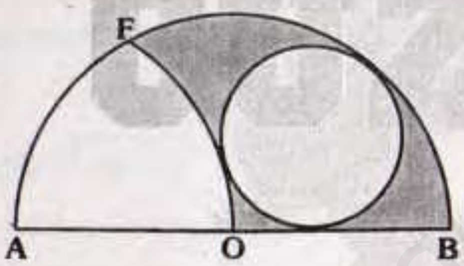
A) $A_2 - A_1$ B) $2A_2 - A_1$

C) $2(A_2 - A_1)$ D) $A_2 - 2A_1$

E) $A_2 + A_1$

PROBLEMA Nº132

En la figura mostrada se tiene la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O. El centro del arco $\widehat{OF}$ es el punto A. Si OA=OB=R, halle el área de la región sombreada.



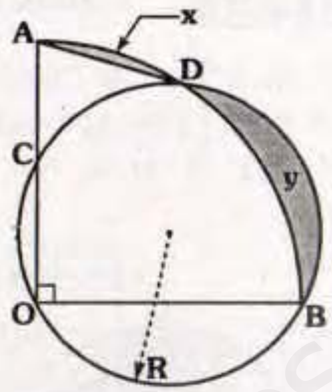
A) $\frac{R^2}{38}(12\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{R^2}{38}(10\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{R^2}{48}(10\sqrt{3}-\pi)$ D) $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{3}-\pi)$

E) $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{2}-\pi)$

PROBLEMA Nº133

En la figura AOB es un cuadrante, O, B, C y D pertenecen a una circuferencia de radio. Si $m\widehat{BD}=45°$. Hallar x + y

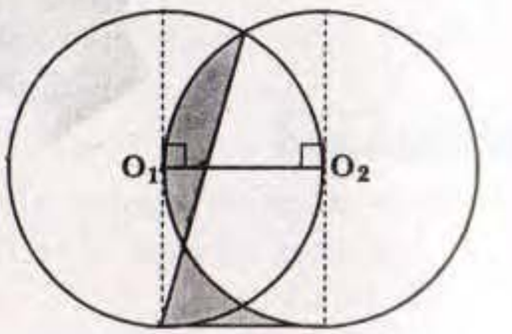


A) $\frac{\pi R^2}{2}$ B) $R^2(\sqrt{2}-1)$ C) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$

D) $\frac{R^2}{2}(\pi-1)$ E) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{3}-1)$

PROBLEMA Nº134

Si en la figura, el radio de las dos circunferencias mide R entonces el área de la región sombreada es:



A) $\frac{R^2}{12}(\pi+\sqrt{3}+1)$ B) $\frac{R^2}{12}(2\pi-\sqrt{3}-3)$

C) $\frac{R^2}{12}(2\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12}(\pi+3\sqrt{3}-3)$

E) $\frac{R^2}{12}(\pi+2\sqrt{3}-3)$

PROBLEMA Nº135

En la figura mostrada, $\overline{BC}$ es diámetro. $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC, si $m\sphericalangle CAB=60°$ y $AB=\ell$. Halle el área de la región sombreada.

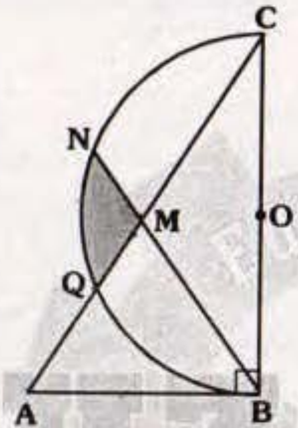
A) $\frac{\ell^2}{8}(\pi-\sqrt{2})$

B) $\frac{\ell^2}{8}(\pi-\sqrt{3})$

C) $\frac{\ell^2}{4}(\pi-\sqrt{3})$

D) $\frac{\ell^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$

E) $\frac{\ell^2}{8}(\pi-\sqrt{2})$



PROBLEMA Nº136

En la figura, se muestran dos circunferencias concéntricas de radios R y 2R. Calcule el área de la región sombreada.

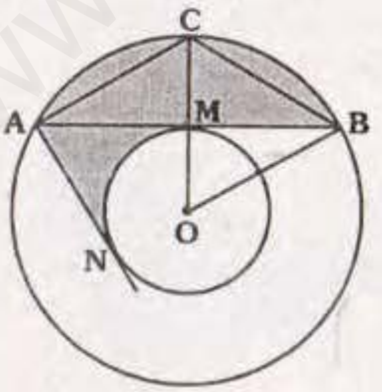
A) $\frac{3}{2}\pi R^2$

B) $\frac{\pi R^2}{2}$

C) πR^2

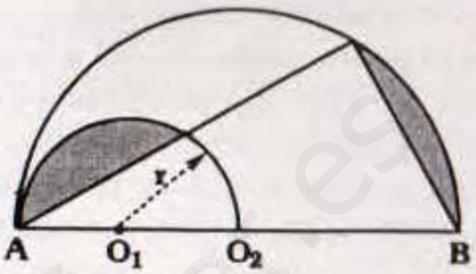
D) $\frac{\pi R^2}{3}$

E) $\frac{3\pi R^2}{5}$



PROBLEMA Nº137 EXAMEN PARCIAL

Si O_1 y O_2 son centros de las semicircunferencias de la figura adjunta. El valor de la suma de áreas sombreadas es:



A) $r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$ B) $r^2\left(\pi-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$

C) $r^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$ D) $r^2\left(\pi+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$

E) $r^2(2\pi+\sqrt{3})u^2$

PROBLEMA Nº138

En la figura mostrada, la diferencia de las áreas de las regiones $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Y}$ es $20u^2$, calcule el área de la región $\mathbb{X}$.

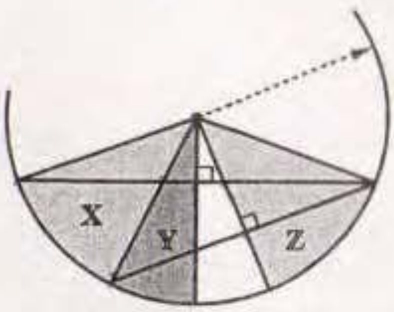
A) $30u^2$

B) $35u^2$

C) $40u^2$

D) $45u^2$

E) $50u^2$



PROBLEMA Nº139 CUARTO SEMINARIO

Se tiene un triángulo equilátero ABC cuyo lado mide 2a con centro en B y radio la altura del triángulo se traza un arco que interseca a los lados AB y BC en los puntos E y F respectivamente, luego con centro en el punto medio de AC y radio **"a"** se traza un arco que interseca a los lado AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcular el área de la región limitada por dicho arcos y los lados AB y BC.

A) $\frac{a^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$ B) $\frac{a^2}{6}(5\pi-3\sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{6}(4\pi-3\sqrt{3})$ D) $\frac{a^2}{6}(4\pi-\sqrt{3})$

E) $\frac{a^2}{6}(3\pi-\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº140 CUARTO SEMINARIO

En la figura el triángulo FGH es equilátero $\overline{FG}$ y $\overline{GH}$ son diámetros, el arco FH ha sido trazado con centro G. Hallar el área de la región sombreada, si FG=a.

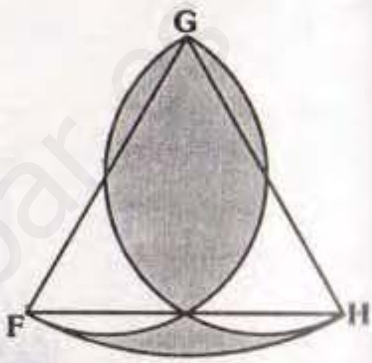
A) $a^2(\pi-\sqrt{3})$

B) $2a^2(\pi-\sqrt{2})$

C) $2a^2(\pi-\sqrt{3})$

D) $\frac{a^2}{4}(\pi-\sqrt{3})$

E) $a^2(\pi-\sqrt{2})$



❖❖❖❖❖

Problemas Propuestos
Ciclo Semestral

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº141

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica P en $\overline{BC}$, luego se trazan las alturas BQ y CR en los triángulos ABP y PCD respectivamente, tal que B, Q y R son colineales M es punto medio de $\overline{QR}$, si AQ=a y RD=b, calcule el área de la región triangular AMD.

A) $\frac{ab}{4}$ B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{a^2+b^2}{4}$

D) $\frac{a^2+b^2}{8}$ E) $\frac{a^2+b^2}{2}$

PROBLEMA Nº142

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y el cuadrilátero MBCN es inscriptible. Si AB=8, calcule el área de la región sombreada.

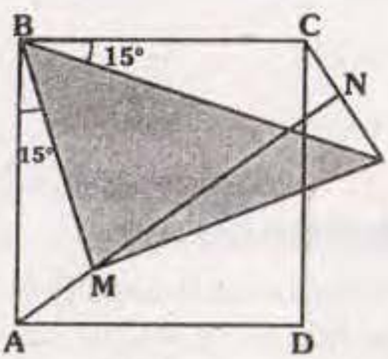
A) $8\sqrt{3}$

B) $16\sqrt{3}$

C) 8

D) $4\sqrt{3}$

E) 16



PROBLEMA Nº143

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que: AM = MC = t. Si las regiones MBN y AMNC son equivalentes, calcule el inradio del triángulo ABC.

A) t B) $\frac{t}{2}$ C) $\frac{t}{3}$

D) $t\sqrt{2}$ E) $t\frac{\sqrt{2}}{3}$

PROBLEMA Nº144

En el interior de un cuadrado ABCD, se ubica el punto P, tal que $m\sphericalangle APD=90^\circ$, si las áreas de las regiones APB y DPC son S_1 y S_2, calcule el área de la región APD.

A) $2\sqrt{S_1S_2}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{S_1S_2}$ C) $\sqrt{S_1S_2}$

D) $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2}}$ E) $\frac{\sqrt{S_1S_2}}{3}$

PROBLEMA Nº145

En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que MN determina regiones equivalentes, si AM=1, MB=2 y BN=3, calcule NC.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5

D) 2 E) 2,5

PROBLEMA Nº146

Si $(AB)^2 - (AC)^2 = 200$, calcule el área de la región sombreada.

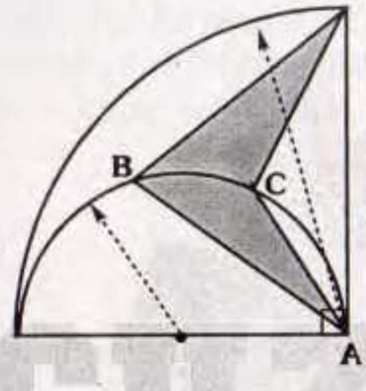
A) 50

B) 75

C) 100

D) 150

E) 200



PROBLEMA Nº147

Si M y N son puntos de tangencia, MN=4 y $m\widehat{NB}=30°$, calcule el área de MNL.

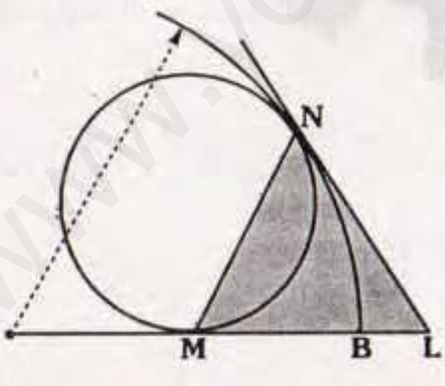
A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

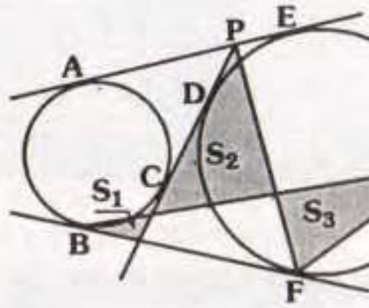
D) $4\sqrt{3}$

E) $5\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº148

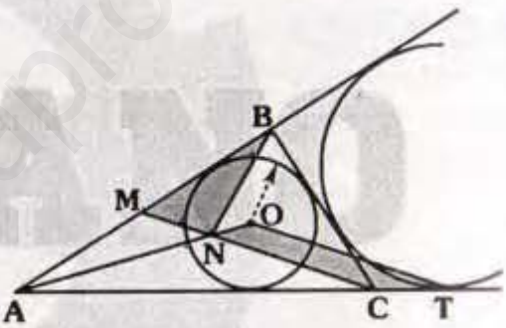
Si A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia, $m\measuredangle CPF + m\measuredangle BFQ = 180°$, PF=FQ y $S_1 + S_3 = 8$, calcule S_2.



A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº149

Si AM=MB y el área de la región NOTC es 8, calcule el área de MNB.



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº150

Dado un triángulo ABC, la mediana AM intersecta a las cevianas BD y BE en Q y N respectivamente, si AD=DE=EC, calcule la razón entre las áreas de las regiones ABC y DQNE.

A) 50/11 B) 5 C) 60/11

D) 65/11 E) 70/11

PROBLEMA Nº151

Se ubican los puntos P, R y Q en los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC respectivamente, de modo que $\overline{QR} // \overline{AB}$ y $\overline{PQ} // \overline{BC}$, si las áreas de las regiones APQ y QRC son 4 y 9 respectivamente, calcule el área de la región PBRQ.

A) 12 B) 14 C) 16

D) 18 E) 20

PROBLEMA Nº152

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se trazan la ceviana interior BD; M es punto medio de $\overline{BC}$, se traza la altura MH del triángulo MBD, tal que: $(MH)(AC)=32u^2$; $m\sphericalangle BCA=40°$; $m\sphericalangle DBA=30°$. Calcular el área de la región triangular DBM.

A) $8u^2$ B) $4u^2$ C) $16u^2$

D) $24u^2$ E) $32u^2$

PROBLEMA Nº153

En la región interior de un cuadrado ABCD se ubica el punto P; la paralela a $\overline{AD}$ trazada por P interseca a $\overline{AC}$ en Q de modo que: $AQ=3(QC)$; $BP=3u$ y $m\sphericalangle BPA=90°$; calcular el área de la región AQD.

A) $27u^2$ B) $15u^2$ C) $12u^2$

D) $26u^2$ E) $13,5u^2$

PROBLEMA Nº154

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM, sobre ella se ubica Q y se trazan las perpendiculares $\overline{QH}$ y $\overline{QP}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcule: QP, si $HQ=3u$, $AB=8u$, $BC=12u$.

A) 3u B) 2,5u C) 2u

D) 3,5u E) 4u

PROBLEMA Nº155

Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B; se traza la altura BH; tal que la bisectriz trazada por C. Interseca a $\overline{BH}$ y $\overline{AB}$ en M y N respectivamente. Calcular el área de la región triangular ABC, si $MC=8u$ y $CN=10$.

A) $33,75u^2$ B) $12u^2$ C) $18u^2$

D) $24u^2$ E) $36u^2$

PROBLEMA Nº156

Dado un triángulo ABC en el cual se trazan la mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BQ}$ secante en R, desde R se traza la perpendicular $\overline{RH}$ a $\overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$). Si: $RQ=4u$, $AC=12u$ y $AB=8$. Halle RH.

A) 6 B) 5. C) 9

D) 4 E) 10

PROBLEMA Nº157

Se tiene un cuadrado ABCD, de lado a, con diámetro en $\overline{AD}$ se traza interiormente una semicircunferencia y luego se traza tangente $\overline{BT}$ a ella, T es punto de tangencia, calcular el área de la región triangular CTD en términos de "a".

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{5}$

D) $\frac{a^2}{10}$ E) $\frac{a^2}{20}$

PROBLEMA Nº158

Si AB = 5 y CD = 2, calcule el área de la región sombreada.

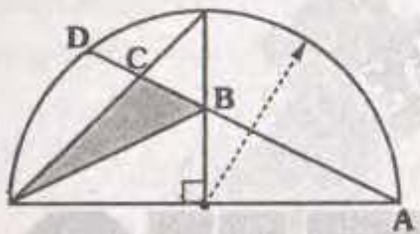
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº159

Se tiene una semicircunferencia, de diámetro AB y centro O, luego se traza la circunferencia, de centro O_1, tangente a $\overline{AB}$ en A, si la longitud del segmento tangente común es a, calcule el área de la región triangular BOO_1.

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{2}$

D) a^2 E) $2a^2$

PROBLEMA Nº160

Dado un cuadrante AOC, de centro O, tomando como diámetro $\overline{AO}$ se traza interiormente una semicircunferencia, cuyo radio es $\sqrt{5}$, luego se ubican los puntos B y D en el cuadrante y en la semicircunferencia respectivamente, tal que ABCD es un romboide, calcule el área de la región triangular COD.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA Nº161

En el gráfico, M y N son puntos de tangencia si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales y MN=10. Calcule el área de la región sombreada.

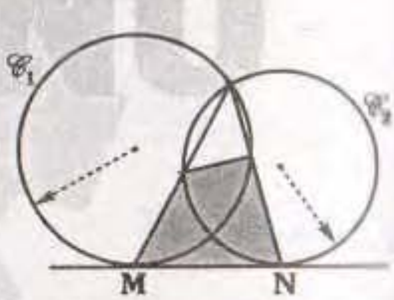
A) 100

B) 50

C) 25

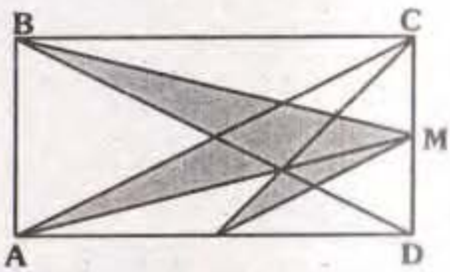
D) $50\sqrt{2}$

E) $25\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº162

En el gráfico, CM = MD y el área de la región rectangular ABCD es 120. Calcule el área de la región sombreada.

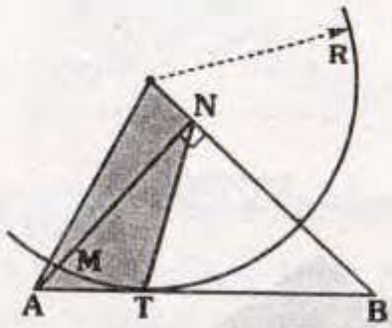


A) 30 B) 40 C) 50

D) 35 E) 45

PROBLEMA Nº163

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada. Si AB=R, MN=2(AM) y AT= $\sqrt{5}$ (T es punto de tangencia)



A) 4,5

B) $3\sqrt{5}$

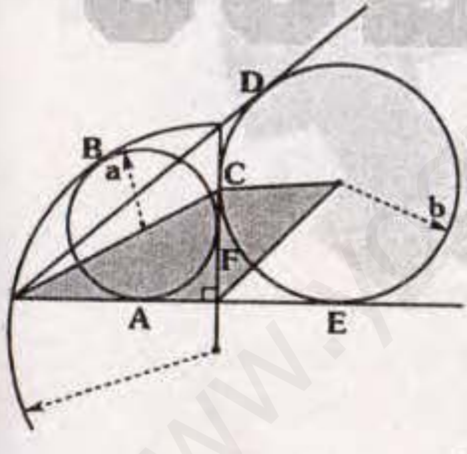
C) $\frac{10}{3}$

D) 3

E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº164

En el gráfico, A,B,C,D,E y F son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.

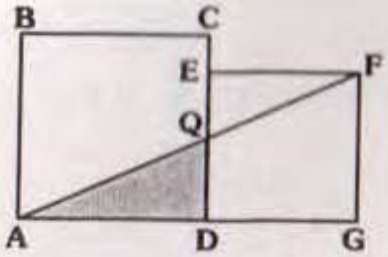


A) ab B) b^2+a^2 C) $\frac{b^3}{b-a}$

D) $\frac{a^3}{b-a}$ E) $\frac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$

PROBLEMA Nº165

En el gráfico, halle el área de la región sombreada, si ABCD y EFGD son cuadrados, CQ=a y FG=b.

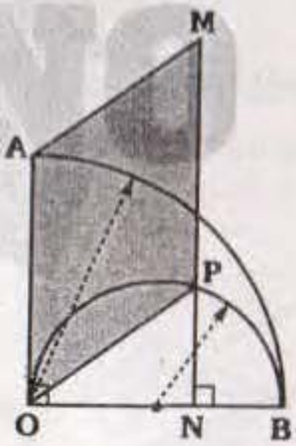


A) ab B) $\frac{ab}{2}$ C) 2ab

D) $ab\sqrt{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº166

Calcule el área de la región paralelográmica OAMP, si OP=a.



A) a^2

B) $2a^2$

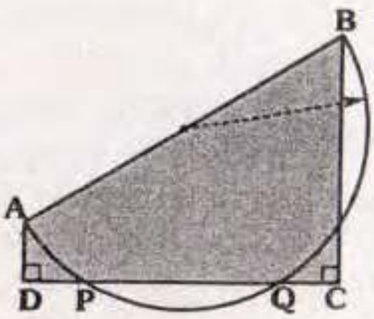
C) $3a^2/2$

D) $a^2/4$

E) $5a^2/4$

PROBLEMA Nº167

En el gráfico, AD=4, DP=5 y PQ=7. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{323}{7}$ B) $\frac{323}{2}$ C) $\frac{315}{4}$

D) $\frac{323}{8}$ E) $\frac{315}{8}$

PROBLEMA N°168

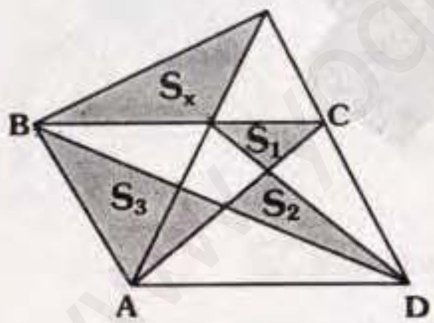
Se tiene un cuadrilátero ABCD inscriptible y circunscriptible a la vez, tal que AB=2, BC=1 y CD=4. Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{10}/3$

D) $\sqrt{6}/2$ E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA N°169

En la figura ABCD es un romboide. Si $S_2 = 8$ y $S_1 + S_3 = 18$, calcular S_x.



A) 10 B) 26 C) 20

D) 22 E) 16

PROBLEMA N°170

En la figura A y C son puntos de tangencia. Si AB=6, BC=3 y CD=5, calcular el área de la región sombreada.

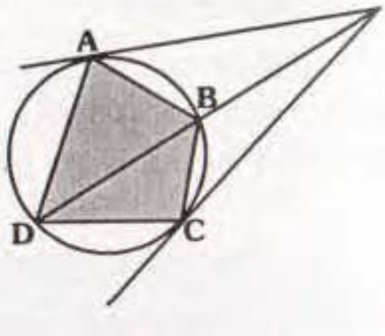
A) $5\sqrt{21}$

B) $6\sqrt{21}$

C) $7\sqrt{21}$

D) $4\sqrt{21}$

E) $15\sqrt{6}$



PROBLEMA N°171

En la figura $m\widehat{AB}=150°$ y AC=12. Calcular el área de la región sombreada.

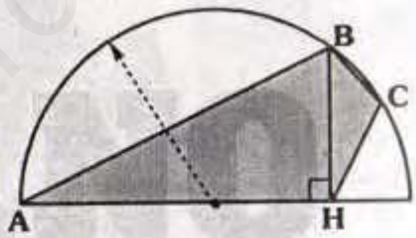
A) 12

B) 16

C) 18

D) 22

E) 24



PROBLEMA N°172

Si AQ=8; calcule el área de la región sombreada (T punto de tangencia)

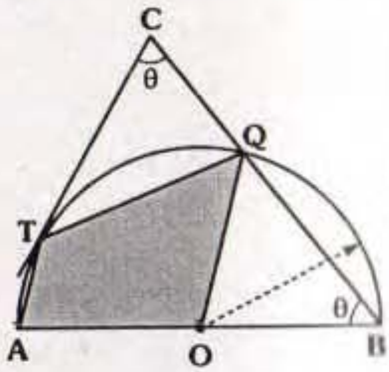
A) 16

B) 8

C) 4

D) 22

E) 24



PROBLEMA N°173

Siendo ABCD un paralelogramo, calcular la razón entre las áreas de las regiones

AEBD y ECD.

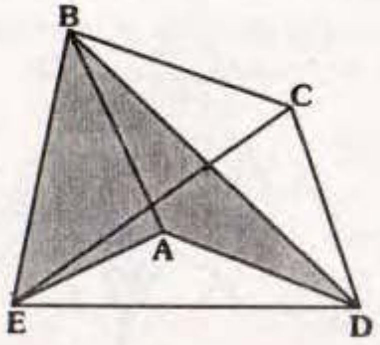
A) 2/3

B) 1/4

C) 1

D) 2

E) 3/4



PROBLEMA Nº174

Si OB=10 y T es punto de tangencia; calcule el área de la región paralelogramica OQPB.

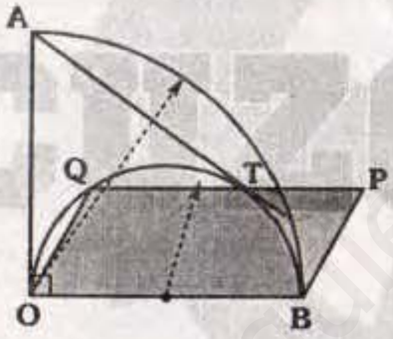
A) 60

B) 40

C) 50

D) 80

E) 20



PROBLEMA Nº175

Si ABCD es un romboide y $\overline{MN} // \overline{CD}$. Calcule el área de la región ABCD en función a S_1 y S_2.

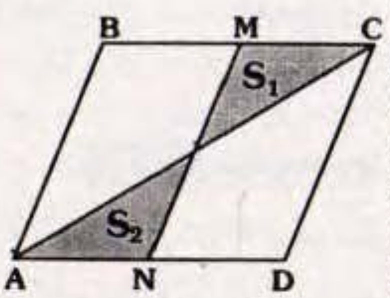
A) $2(S_1 + S_2)$

B) $4(S_1+S_2)$

C) $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

D) $2(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

E) $8(S_1+S_2)$



PROBLEMA Nº176

Calcule el área de la región sombreada si $PH=\sqrt{6}$.

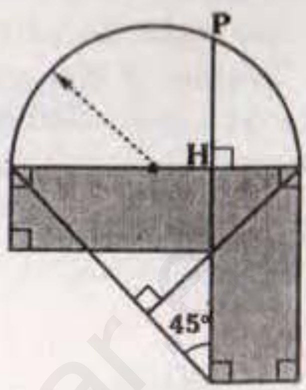
A) 6

B) 18

C) 12

D) 10

E) 24



PROBLEMA Nº177

En la figura mostrada, ABCD es un paralelogramo, $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, AP=6 y PD=4. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

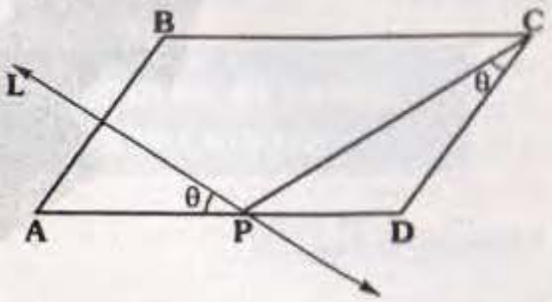
A) 24

B) 64

C) 48

D) 72

E) 60



PROBLEMA Nº178

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediatriz de $\overline{AC}$ la cual interseca a $\overline{AB}$ en R. Calcule el área de la región cuadrangular RBCH, si el área de la región triangular ABC es 64.

A) 16 B) 32 C) 42

D) 28 E) 48

PROBLEMA Nº179

En un trapecio rectángulo se traza una recta secante paralela a sus bases determinando dos trapecios parciales circunscriptible. Calcular el área de la región limitada por el trapecio inicial si sus lados no paralelos miden a y b (a > b).

A) $\frac{a(a+b)}{2}$ B) $\frac{b(a-b)}{2}$ C) $\frac{ab}{2}$

D) $\frac{a^2+b^2}{4}$ E) ab

PROBLEMA Nº180

Calcule el área de un trapecio rectángulo circunscrito a una circunferencia, si las bases miden a y b.

A) ab B) ab/2 C) $(a + b)^2$

D) $ab\sqrt{2}$ E) $ab\sqrt{3}$

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº181

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.

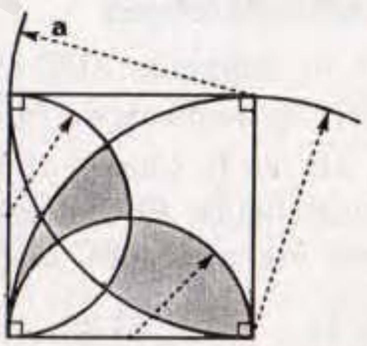
A) $a^2(\pi-2)$

B) $a^2(4-\pi)$

C) $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$

D) $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$

E) $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$



PROBLEMA Nº182

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada, si R = 6u.

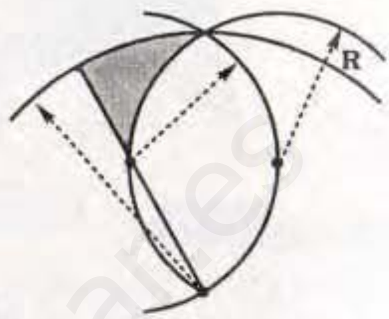
A) $3\pi u^2$

B) $6\pi u^2$

C) $3\sqrt{3}\pi u^2$

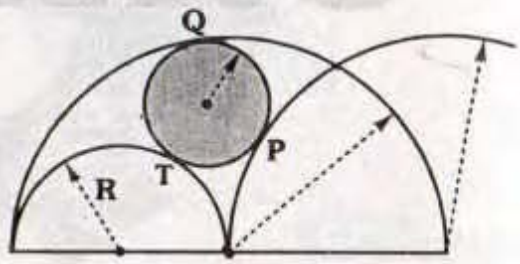
D) $4\pi u^2$

E) $4\sqrt{3}\pi u^2$



PROBLEMA Nº183

Según el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule el área del círculo en función de R.

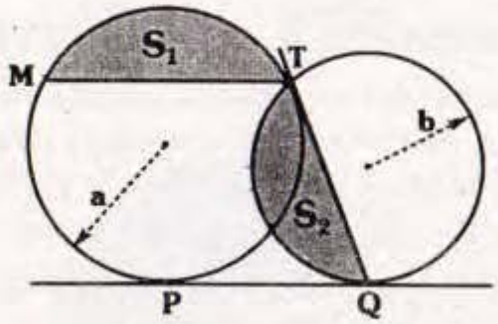


A) $\frac{9}{15}\pi R^2$ B) $\frac{9}{25}\pi R^2$ C) $\frac{1}{9}\pi R^2$

D) $\frac{1}{6}\pi R^2$ E) $\frac{2}{5}\pi R^2$

PROBLEMA Nº184

En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{MT}=m\widehat{TQ}$, calcule $\frac{S_1}{S_2}$.



A) $\dfrac{a}{b}$ B) $\dfrac{a^2}{b^2}$ C) $\dfrac{a^2+b^2}{b^2}$

D) $\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$ E) $\dfrac{b^2}{a^2}$

PROBLEMA Nº185

Se tiene una semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AD}$; en $\widehat{AD}$ se ubican los puntos B y C tal que: $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}$; luego se traza $\overline{BH}\perp\overline{AD}$; si AD=8; calcular el área de la región limitada por: $\overline{BH}$, $\overline{HC}$ y $m\widehat{BC}$.

A) $\dfrac{8\pi}{3}$ B) $\dfrac{7\pi}{3}$ C) 2π

D) $\dfrac{9\pi}{4}$ E) $\dfrac{7\pi}{5}$

PROBLEMA Nº186

A distintos lados del diámetro de una circunferencia se traza las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tal que $\overline{AB}//\overline{CD}$; AB=6, CD=8 y $m\overline{BD}=90°$; calcular el área de la porción de círculo limitada por dichas cuerdas y los arcos AC y BD.

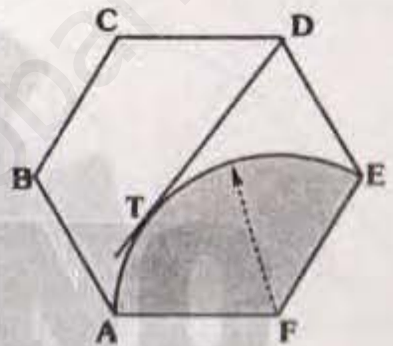
A) $\left(\dfrac{48+25\pi}{2}\right)$ B) $\left(\dfrac{46+20\pi}{3}\right)$

C) $3(2\pi+)$ D) $5(6-\pi)$

E) $\left(\dfrac{42+10\pi}{3}\right)$

PROBLEMA Nº187

Si ABCDEF es un exágono regular; $DT=6\sqrt{2}$ y T es punto de tangencia; calcular el área de la región sombreada.



A) 9π

B) 10π

C) 12π

D) 14π

E) 18π

PROBLEMA Nº188

Se tienen cuatro círculos no secantes entre ellos y de igual radio; uniendo los centros se obtiene un cuadrilátero irregular convexo; calcular la suma de áreas de las porciones de círculos que se encuentran en el interior del cuadrilátero, si el radio es 1,5.

A) $2,25\pi$ B) $2,75\pi$ C) $4,30\pi$

D) 3π E) $3,25\pi$

PROBLEMA Nº189

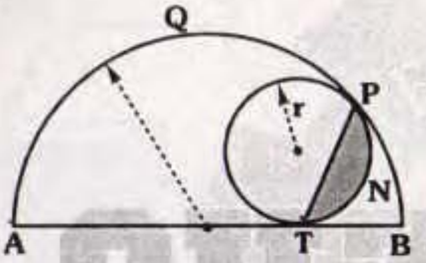
En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza una circunferencia que pasa por B y por el baricentro "G" del triángulo ABC, dicha circunferencia interseca a

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en "M" y "N" respectivamente tal que 4(BC) = 9(MG) y AC = 18. Calcular el área de la región limitada por la circunferencia.

A) 4π B) 8π C) 16π D) 12π E) 6π

PROBLEMA Nº190

Calcule el área de la región sombreada si $m\widehat{AQP}=m\widehat{TNP}$; T y P son puntos de tangencia y r=4.



A) $(8\pi-9)$ B) $(16\pi-5)$

C) $2(3\pi-2\sqrt{2})$ D) $3(2\pi-\sqrt{3})$

E) $4(3\pi-\sqrt{6})$

PROBLEMA Nº191

Si ABCD es un cuadrado de centro O; PC=7 y BP=1, O y T son puntos de tangencia; calcule el área de la región circular sombreada.

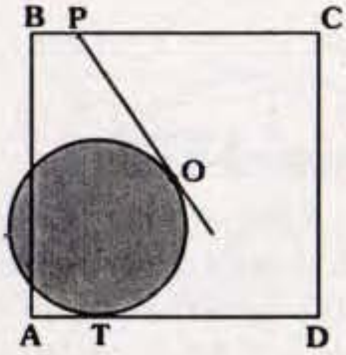
A) $\frac{25}{4}\pi$

B) 24π

C) 18π

D) 9π

E) $\frac{7}{2}\pi$



PROBLEMA Nº192

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y se traza una recta tangente en el punto T intersecando a la prolongación de $\overline{AB}$ en el punto P, tal que; $m\sphericalangle TPA=m\sphericalangle TAB$ y AB=4cm. Calcule el área del segmento circular AT.

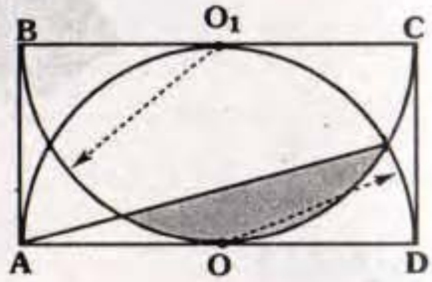
A) $\frac{1}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$ B) $\frac{1}{2}(4\pi-\sqrt{3})$

C) $\frac{1}{3}(2\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{1}{2}(4\pi-3\sqrt{3})$

E) $\frac{1}{3}(4\pi-\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº193

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada si: CD=R(O_1 y O_2 son puntos de tangencia).



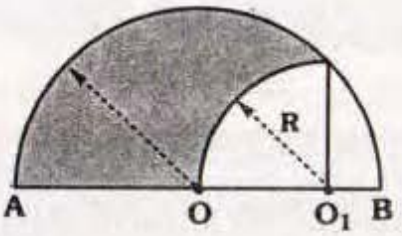
A) $\frac{R^2}{4}(\pi+2)$ B) $\frac{R^2}{4}\left(\pi-\frac{1}{2}\right)$

C) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$ D) $\frac{R^2}{4}(\pi-4)$

E) $\frac{R^2}{2}(\pi-2)$

PROBLEMA Nº194

Halle el área de la región sombreada.



A) $\frac{R^2}{2}(\pi+2)$ B) $\frac{R^2}{2}(2\pi+1)$

C) $R^2(\pi+1/2)$ D) $\frac{R^2}{2}(\pi+1)$

E) $\frac{R^2}{2}(\pi+3)$

PROBLEMA Nº195

Un círculo está inscrito en un triángulo regular. Con centro en uno de sus vértices del triángulo se traza el segundo círculo, cuyo radio es igual a la mitad del lado del triángulo. Que parte del área del triángulo constituye el área de la intersección de los círculos.

A) $\frac{5\sqrt{3}\pi-18}{54}$ B) $\frac{2\sqrt{3}\pi-6}{7}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}\pi-6}{7}$

PROBLEMA Nº196

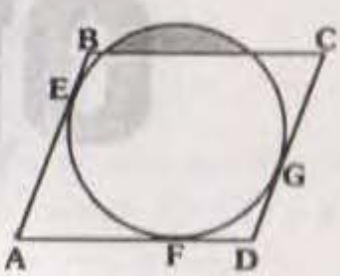
Sea ABCDEF un hexágono regular con lado "a" y con su centro en el punto "O". Se ha trazado tres circunferencias: La primera con centro en el punto A, pasa por los puntos C y E; la segunda, con centro en el punto B, pasa por los puntos O y C; la tercera, con centro en el punto F, pasa por los puntos O y E. Hallar el área de la figura limitada por los tres circunferencias mencionadas situada en el interior del hexágono.

A) $\pi a^2/2$ B) $\pi a^2/3$ C) $\pi a^2/6$

D) $\pi a^2/4$ E) $\pi a^2/8$

PROBLEMA Nº197

Las alturas del romboide ABCD miden 8 y 6. Calcule el área de la región sombreada (E, F y G son puntos de tangencia)



A) $(3\pi-5\sqrt{3})/2$

B) $6\pi-2\sqrt{3}$

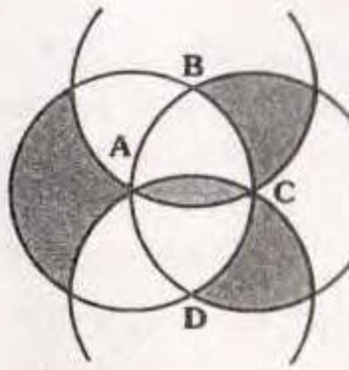
C) $3\pi-\sqrt{3}$

D) $4(2\pi-\sqrt{3})$

E) $\frac{4}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº198

Hallar el área de la región sombreada que se indica en la figura. Si el radio de los círculos es $\sqrt{3}$ y A, B, C, D son lo centros.



A) π

B) 2π

C) 3π

D) 4π

E) $\pi(\sqrt{6}-2)$

PROBLEMA Nº199

Dos círculos de igual radio están situados de forma que la distancia entre sus centros es igual al radio. Hallar la razón entre el área de la intersección de los círculos y la de un cuadrado inscrito en ella.

A) $\dfrac{(4\pi-3\sqrt{3})(4+\sqrt{7})}{27}$

B) $\dfrac{(2\pi-3\sqrt{3})(4-\sqrt{7})}{27}$

C) $\dfrac{(2\pi+3\sqrt{3})(2-\sqrt{7})}{27}$

D) $\dfrac{4}{9}(4\pi-3\sqrt{3})$ E) $\dfrac{8}{9}(4\pi-3\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº200

Un círculo de radio R se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe otro círculo, en este otro cuadrado y así sucesivamente. Calcule la suma límite de las áreas de todos los círculos.

A) $4\pi R^2$ B) $3\pi R^2$ C) $14\pi R^2$

D) $5\pi R^2$ E) $2\pi R^2$

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

PROBLEMA Nº201

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD y en el triángulo ADC la ceviana interior DE.
Si $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DEC$; $m\sphericalangle DAC = 30°$ y $m\sphericalangle ACB = 7°$, calcule la razón de áreas de las regiones ABDE y EDC.

A) 11/25 B) 11/36 C) 7/25

D) 7/36 E) 11/16

PROBLEMA Nº202

En el gráfico, A, P, T, C, D y E son puntos de tangencia. Si AB=BC y TP=1. Calcule el área de la región triangular ABC.

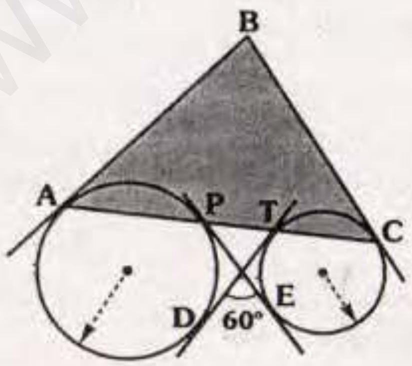
A) $\frac{49}{4}\sqrt{3}$

B) $36\sqrt{3}$

C) 36

D) 25

E) $25\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº203

Las circunferencias exinscritas relativas a los lados AB, BC y AC del triángulo ABC de inradio 2 e incentro I, son tangentes a dichos lados en P, Q y R respectivamente. Si $(S_{\Delta API})(S_{\Delta BIQ})(S_{\Delta RIC}) = 18$. Halle el área de la región ABC.

A) 18 B) 9 C) $9\sqrt{2}$

D) 16 E) 36

PROBLEMA Nº204

En el triángulo ABC se traza la circunferencia inscrita, tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en P, Q y T respectivamente. Si $m\sphericalangle ABC = 2\alpha$ y la altura BH mide h, calcule la distancia de T hacia $\overleftrightarrow{PQ}$.,

A) $h\,\mathrm{sen}\alpha$ B) $2h\,\mathrm{sen}\alpha$ C) $h\cos\alpha$

D) $2h\cos\alpha$ E) $h\sec\alpha$

PROBLEMA Nº205

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AD, luego se traza la ceviana interior BF perpendicular a $\overline{AD}$ en E. Si AB=5, AC=8 y BE=3. Calcule el área de la región triangular BDE.

A) 18/13 B) 15/13 C) 20/13

D) 25/13 E) 27/20

PROBLEMA Nº206

Se tienen tres circunferencias concéntricas, se ubica un punto en cada circunferencia de tal manera que el área de la región triangular cuyos vértices son dichos puntos tenga área máxima. ¿Qué punto notable es el centro para dicho triángulo?

A) incentro B) circuncentro

C) ortocentro D) punto de Fermat

E) baricentro

PROBLEMA Nº207

Si los lados de un triángulo rectángulo se encuentran en progresión aritmética de razón K. Calcule el área de la región triangular formada al unir los excentros.

A) $20K^2$ B) $50K^2$ C) $40K^2$

D) $30K^2$ E) $60K^2$

PROBLEMA Nº208

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia, $m\widehat{AB} = 2(m\measuredangle NPB)$ y $(PH)(NP)=10$, calcule el área de la región sombreada.

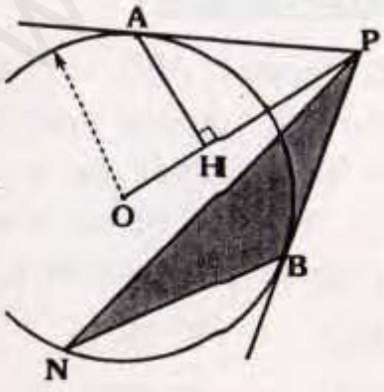
A) 4

B) 3

C) 5

D)7,5

E) 8



PROBLEMA Nº209

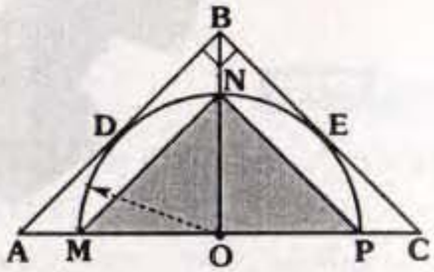
En un paralelogramo ABCD en $\overline{AB}$ se ubica el punto M, tal que $\overline{BD} \cap \overline{MC} = \{N\}$. Si las áreas de las regiones BCN y NCD son A_1 y A_2 calcular el área de la región triangular MAD en función de A_1 y A_2.

A) $\dfrac{A_2^2 - A_1^2}{A_2}$ B) $\dfrac{A_2^2 + A_1^2}{A_2}$ C) $\dfrac{A_2^2 - A_1^2}{A_1}$

D) $\dfrac{A_2^2 + A_1^2}{A_1}$ E) $\dfrac{A_1^2 - A_2^2}{A_1}$

PROBLEMA Nº 210

En el gráfico mostrado, O; centro AB=a y BC=b. Calcule el área de la región triangular MNP.(D y E son puntos de tangencia).



A) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$ B) $\dfrac{a^2b^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}$

C) $\dfrac{a^2b^2}{(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)}}$ D) $\dfrac{a^2 \cdot b^2}{2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$

E) $\dfrac{2a^2b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$

PROBLEMA Nº 211

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior BP tal que: $m\measuredangle ABP = 3(m\measuredangle BAC)$.
Si $AC = 3(BP) = 12$, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $7\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{5}$

D) $9\sqrt{7}$ E) $6\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 212

Según el gráfico $AD = DB = 2(BE)$, $DM = ME$. Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares ABC y PMQ.

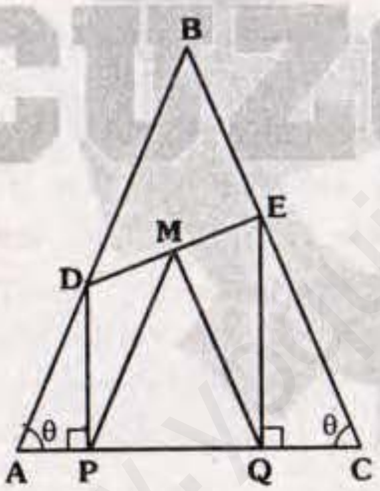
A) $\dfrac{16}{15}$

B) $\dfrac{8}{5}$

C) $\dfrac{4}{5}$

D) $\dfrac{32}{5}$

E) $\dfrac{64}{15}$



PROBLEMA Nº 213

En la diagonal AC de un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B se ubica el punto M, luego se traza $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ ($H \in \overline{AB}$). $BH = a$ y $AD = b$, calcule el área de la región MCD.

A) ab B) $ab\sqrt{3}$ C) $ab\sqrt{2}$

D) $\dfrac{ab}{4}$ E) $\dfrac{ab}{2}$

PROBLEMA Nº 214

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro) en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica en M, se prolonga $\overline{AM}$ y se ubica N, tal que $m\measuredangle MNB = 90°$. Si la razón de áreas de las regiones triangulares AOB y MNB es 2,5. Halle $m\overset{\frown}{AM}$.

A) 45° B) 37° C) 53°

D) 60° E) 67,5°

PROBLEMA Nº 215

Se tiene el rectángulo ABCD, P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$. Si: $S_{(PAD)} = 5$; $S_{(PBQ)} = 3$ y $S_{(QCD)} = 4$. Halle $S_{(PQD)}$.

A) $\sqrt[3]{60}$ B) 8 C) $\sqrt{21}$

D) $2\sqrt{15}$ E) 12

PROBLEMA Nº 216

En el gráfico, $AP = \sqrt{2}$ y $AE = BC$, calcule el área de la región sombreada.

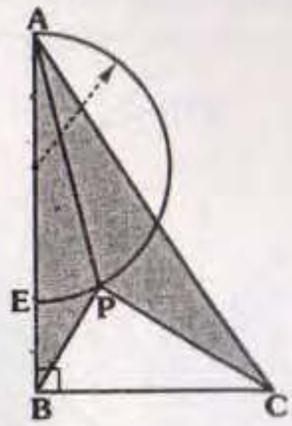
A) 2

B) $2\sqrt{2}$

C) $\sqrt{2}$

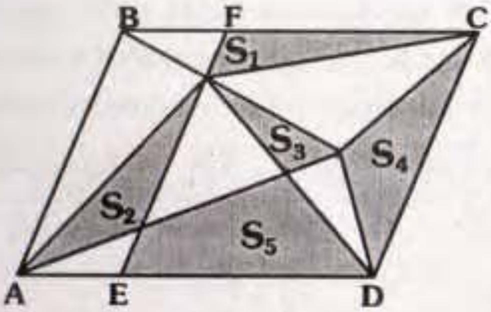
D) 1

E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



PROBLEMA Nº 217

En la figura, ABCD es un romboide, $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$, S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 son las áreas de las regiones sombreadas, halle la relación entre ellas.



A) $S_1+S_5=S_2+S_3+S_4$

B) $S_1+S_2+S_4=S_3+S_5$

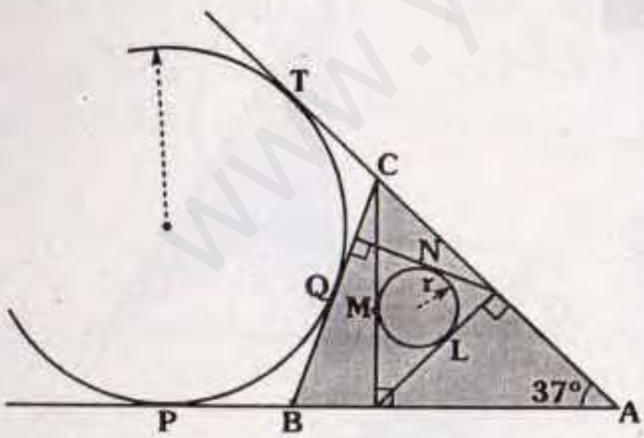
C) $S_1+S_2=S_5+S_3-S_4$

D) $S_1+S_3+S_5=S_2+S_4$

E) $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5$

PROBLEMA Nº 218

En la figura, P, Q, T, N, L y M son puntos de tangencia, si $(PA)r=36u^2$, calcule el área de la región ABC.



A) $72\mu^2$ B) $76\mu^2$ C) $75\mu^2$

D) $78\mu^2$ E) $81\mu^2$

PROBLEMA Nº 219

En un triángulo rectángulo la circunferencia inscrita es tangente a los catetos en P y Q y a la hipotenusa en M. Calcule la distancia de M a $\overline{PQ}$ sabiendo que la suma de las inversas de los exradios relativos a los catetos del triángulo mencionado es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y el circunradio es $6\sqrt{2}$.

A) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ B) 2 C) $\frac{7}{3}$

D) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ E) $\frac{6}{5}\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 220

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM, BP y BQ ($P\in\overline{AQ}$), $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ intersecan a $\overline{AM}$ en T y L respectivamente $\overline{PM}$, $\overline{TC}$ y $\overline{BQ}$ son concurrentes. Si $m\measuredangle BAM=15°$, $m\measuredangle TBL=m\measuredangle BMT$, AT=2 y LM=3, calcule el área de la región triangular TBL.

A) $1u^2$ B) $0{,}5u^2$ C) $2u^2$

D) $2{,}5u^2$ E) $3u^2$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

PROBLEMA Nº 221

En el cuadrilátero inscrito ABCD, se ubica M en $\overline{CD}$ tal que las regiones ABCM y ADM son equivalentes e isoperimétricas. Si $m\overset{\frown}{AD}=120°$ y $m\overset{\frown}{BC}=50°$, halle $m\overset{\frown}{CD}$

A) 70° B) 60° C) 120°
D) 50° E) 80°

PROBLEMA Nº 222

Se tiene el cuadrilátero bicéntrico ABCD, con AB=6, BC=5 y CD=9, calcule el radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 223

En el gráfico, AT=5, TS=3 y PM=MH=2. Calcule el área de la región romboidal ANML (T es punto de tangencia)

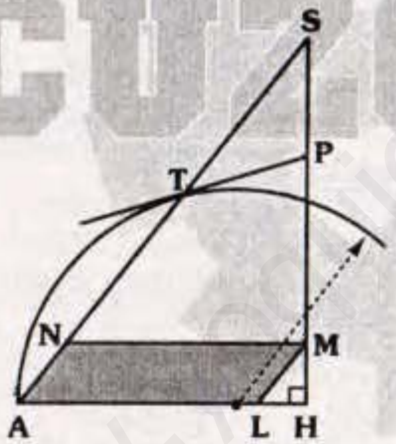
A) $\frac{8}{3}\sqrt{7}$

B) $8\sqrt{7}$

C) $3\sqrt{7}$

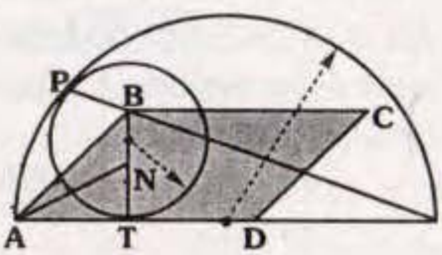
D) $\frac{3}{8}\sqrt{7}$

E) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 224

En el gráfico, BN=NT, AN= $2\sqrt{5}$ y TD=2(AT). Halle el área de la región sombreada.



A) 48 B) 36 C) 42
D) 54 E) 40

PROBLEMA Nº 225

En el gráfico, BP=PT=3 y PD=2, calcule el área de la región sombreada (P, Q y T son puntos de tangencia)

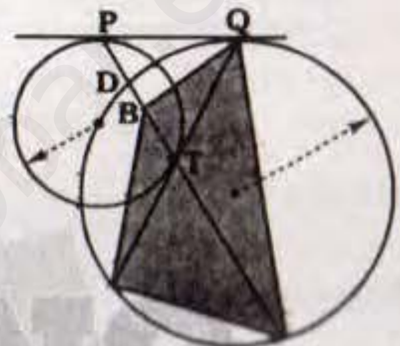
A) $6\sqrt{15}$

B) $\frac{63}{5}\sqrt{15}$

C) $\frac{63}{2}\sqrt{15}$

D) $12\sqrt{15}$

E) $9\sqrt{15}$



PROBLEMA Nº 226

Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero MBCN, si $m\widehat{EA}=m\widehat{AD}$, NC = 4cm, MN = 3cm y el área de la región sombreada es igual a $6\sqrt{10}\text{cm}^2$.

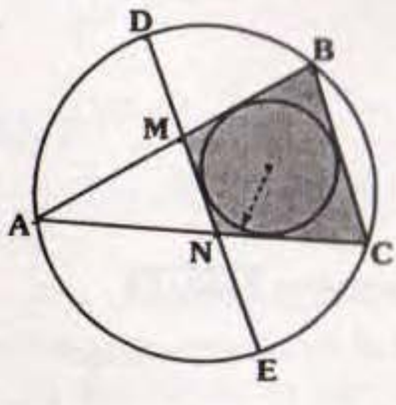
A) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$cm

B) $\sqrt{5}$cm

C) $2\sqrt{3}$cm

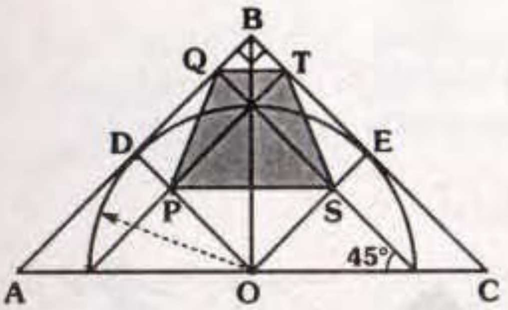
D) $\frac{3}{4}\sqrt{5}$cm

E) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$cm



PROBLEMA Nº 227

En la figura, calcule el área de la región sombreada, si PS=8m (D y E son puntos de tangencia)

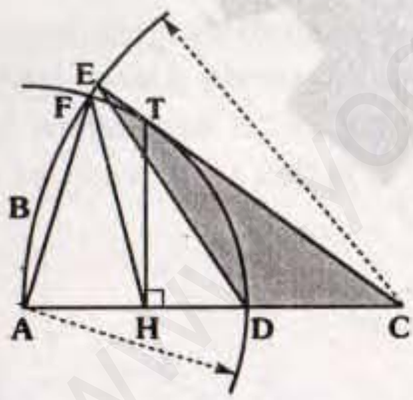


A) $64m^2$ B) $32\sqrt{2}m^2$ C) $32m^2$

D) $16\sqrt{2}m^2$ E) $128m^2$

PROBLEMA Nº 228

En la figura, T es punto de tangencia si; $m\measuredangle AFH = m\overset{\frown}{AF}$, FH = 6μ y AH = 2(HD), calcule el área de la región sombreada.



A) 9 B) $9\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{2}$

D) $9\sqrt{5}$ E) $9\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 229

En el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, se tiene que BC=a, AD=b y AB=h. En $\overline{AB}$ se ubica el punto P tal que el perímetro de la región triangular CPD es mínimo. Calcule el área de la región triangular CPD.

A) $\left(\frac{a+b}{4}\right)h$ B) $\left(\frac{a+b}{3}\right)h$ C) $\frac{abh}{a+b}$

D) $\frac{h\sqrt{ab}}{2}$ E) $\frac{h\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

PROBLEMA Nº 230

En un rombo ABCD en $\overline{BC}$ se ubica el punto medio M. Las diagonales del rombo intersectan a $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ en N y Q respectivamente. si: NQ=5u y $m\measuredangle BAD = 74$. Calcule el área de la región limitada por el rombo.

A) $284u^2$ B) $216u^2$ C) $324u^2$

D) $356u^2$ E) $420u^2$

PROBLEMA Nº 231

Halle el área de una región limitada por un trapecio bicéntrico, cuyas bases miden 4m y 9m.

A) $25m^2$ B) $30m^2$ C) $39m^2$

D) $36m^2$ E) $24m^2$

PROBLEMA Nº 232

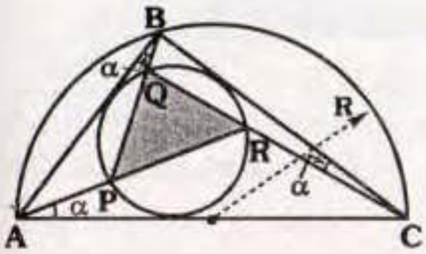
En un trapecio ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$) AD=4BC, se inscribe un rectángulo PQRS, tal que $Q \in \overline{AB}$, $R \in \overline{CD}$ y $\overline{PS} \subset \overline{AD}$ están ubicados en $\overline{AD}$. Si AQ=2(QB), calcule la razón de áreas de las regiones limitadas por dichos cuadriláteros.

A) 8/19 B) 7/16 C) 8/5

D) 2/3 E) 8/15

PROBLEMA Nº 233

En el gráfico, r es inradio del triángulo ABC. Calcule el área de la región PQR.



A) $\dfrac{r^3}{R^2}(2R+r)$ B) $\dfrac{R^3}{r^2}(2R-r)$

C) $\dfrac{R^2}{r}(2R+r)$ D) $\dfrac{R^2}{r}(2R-r)$

E) $\dfrac{r^2}{R}(2R-r)$

PROBLEMA Nº 234

Se tiene los cuadrados ABCD y MNLP tal que A, D, L y N están sobre una circunferencia de radio R, $\overline{BC}\subset\overline{MP}$, $\overline{AD}$ y $\overline{NL}$ están en distintos semiplanos respecto de $\overline{MP}$. Si $R=\sqrt{10}$ y CD=2, calcule el área de la región MNLP.

A) 400 B) $\dfrac{324}{25}$ C) 100

D) 320 E) $\dfrac{64}{5}$

PROBLEMA Nº 235

En el cuadrilátero circunscrito ABCD, se cumple $m\sphericalangle BAQ=37°$, $m\sphericalangle ABC=90°$, DC=NQ=5 y AD+BC=21. N está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{AD}$ tal que $\overline{NQ}$ es tangente a la circunferencia. Calcule el área de la región pentagonal NBCDQ.

A) 56 B) 48 C) 40

D) 60 E) 50

PROBLEMA Nº 236

Calcule el área de una región rectangular cuya base y altura son las diagonales de un cuadrilátero del que se conocen "R" radio de la circunferencia circunscrita, "r" radio de la inscrita y "d" distancia de centros.

A) $\dfrac{8R^2r^2}{R^2-d^2}$ B) 8Rr C) $\dfrac{4R^2r^2}{R^2-d^2}$

D) $\dfrac{8R^2r^2}{R^2+d^2}$ E) $\sqrt{R^2+r^2+d^2}$

PROBLEMA Nº 237

En un cuadrilátero inscriptible ABCD, se cumple que AC=CD, $m\sphericalangle ACD=90°$, $AB=\ell$ y $BC=\ell\sqrt{2}$. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

A) $2\ell^2$ B) $3\ell^2$ C) $4\ell^2$

D) $3\sqrt{5}\ell^2$ E) $\dfrac{3}{2}\sqrt{5}\ell^2$

PROBLEMA Nº 238

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si en una región triangular se conocen las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo entonces se puede conocer el área de dicha región.

II. En el plano de la región paralelográmica ABCD se ubica el punto P entonces se cumple:

$$A_{\Delta APD}+A_{\Delta BPC}=\frac{1}{2}A_{\square ABCD}$$

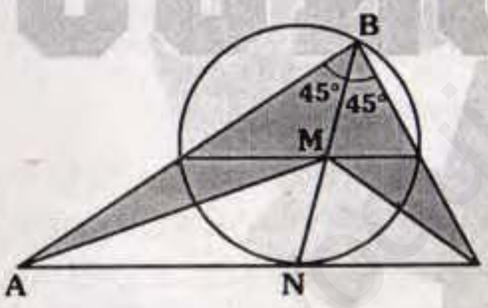
III. Si en un triángulo se conocen el inradio y los exradios relativos a dos de sus lados, se puede conocer el área de la región que limita.

A) VFV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFV

PROBLEMA Nº 239

En el gráfico, N es punto de tangencia. Si BM=2 y MN=3, calcule el área de la región sombreada.

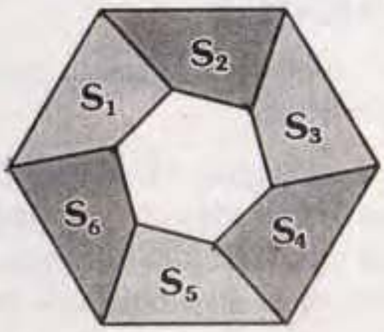
A) 7,5
B) 10
C) 12
D) 12,5
E) 15



PROBLEMA Nº 240

En el gráfico, ABCDEF y LMNPQR son hexágonos regulares. Demostrar que

$$S_1+S_3+S_5=S_2+S_4+S_6$$

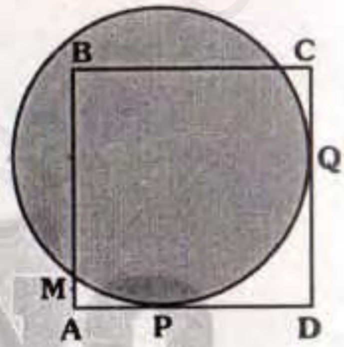


ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

PROBLEMA Nº 241

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, si ABCD es un cuadrado, AM=2 y MB=7. Calcule el área del círculo mostrado.

A) 36π
B) 9π
C) 25π
D) 49π
E) $\frac{81}{4}\pi$



PROBLEMA Nº 242

Se tiene el triángulo isósceles ABC donde la base $\overline{AC}$ mide $2\sqrt{2}$ y las medianas relativas a los lados de igual longitud son perpendiculares. Calcule el área del segmento circular determinado por $\overline{AB}$ en el círculo circunscrito al triángulo ABC.

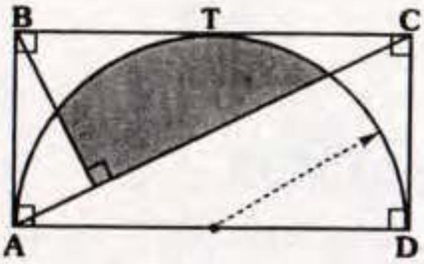
A) $\frac{715}{72}\pi-\frac{15}{2}$ B) $\frac{715}{72}\pi+\frac{15}{2}$

C) $\frac{725}{72}\pi-\frac{15}{2}$ D) $\frac{725}{72}\pi+\frac{15}{2}$

E) $\frac{725}{72}\pi-15$

PROBLEMA Nº 243

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada. Si $AB=2\sqrt{5}$ y T es punto de tangencia.

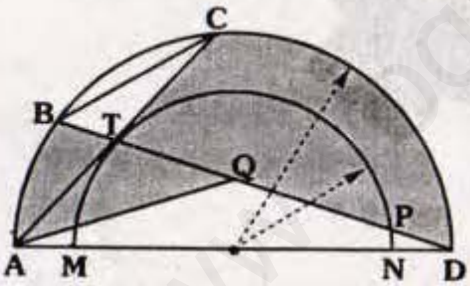


A) $\frac{4}{5}\pi+7$ B) $\frac{3}{4}\pi+7$ C) $\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{2}$

D) $\frac{6}{7}\pi+3$ E) $\frac{7\pi}{4}+3$

PROBLEMA Nº 244

En la figura, T es punto de tangencia, $TQ=QP$, $BC=6$ y $m\widehat{TP}=120°$, calcular el área de la región sombreada.

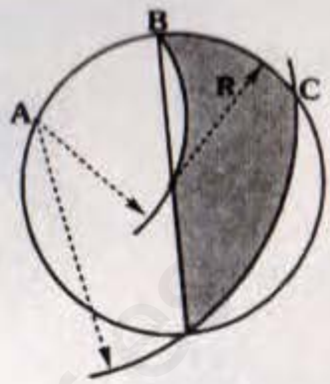


A) 6π B) 9π C) 12π

D) 15π E) 18π

PROBLEMA Nº 245

A, B y C son vértices consecutivos de un hexágono regular. Calcule el área de la región sombreada.



A) $R^2\frac{(\pi-\sqrt{3})}{2}$

B) $R^2\frac{(2\pi-\sqrt{2})}{4}$

C) $\frac{R^2(2\pi-\sqrt{3})}{3}$

D) $R^2\frac{(2\pi-\sqrt{2})}{3}$

E) $R^2\frac{(2\pi-\sqrt{3})}{4}$

PROBLEMA Nº 246

El triángulo rectángulo ABC esta inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$, cuyo diámetro es $\overline{AC}$, si $AB=6$ y $BC=8$. Calcule el área del círculo tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a $\mathscr{C}$.

A) 12π B) 6π C) 4π D) 9π E) 16π

PROBLEMA Nº 247

Se tiene el cuadrilátero PRAH circunscrito a una circunferencia de centro O. M y Q son puntos de tangencia con $\overline{PR}$ y $\overline{PH}$, la prolongación de $\overline{RO}$ corta a $\overline{QH}$ en B. Si $HA+HB=6\sqrt{3}$ y $m\sphericalangle RPQ=m\sphericalangle PHA=60°$. Calcule el área del sector circular MOQ.

A) 3π B) 4π C) 6π D) 8π E) 12π

PROBLEMA Nº 248

En el gráfico, $m\widehat{BC}+m\widehat{ABD}=180°$, calcule el área de la región sombreada.

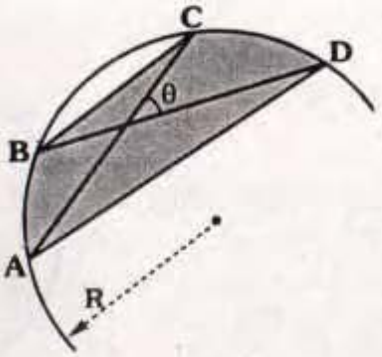
A) $\pi R^2 \dfrac{(90°-\theta)}{90°}$

B) $\pi R^2 \dfrac{\theta}{180°}$

C) $\pi R^2 \dfrac{\theta}{90°}$

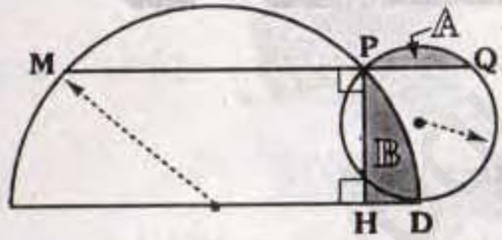
D) $\pi R^2 \dfrac{\theta}{270°}$

E) $\pi R^2 \dfrac{(90°-\theta)}{180°}$



PROBLEMA Nº 249

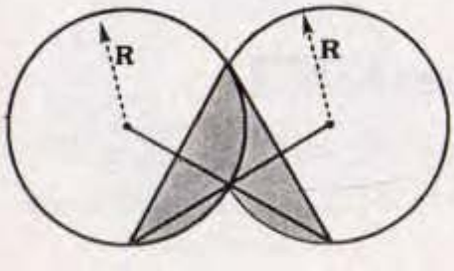
En el gráfico, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $\mathbb{B}=2\mathbb{A}$, calcule $\dfrac{PQ}{PM}$ (D es punto de tangencia)



A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 3/5 E) 2/3

PROBLEMA Nº 250

Del gráfico, calcule el área de la región sombreada, si el ángulo entre las circunferencias mide 60°.



A) $\dfrac{\pi R^2}{2}$ B) $\dfrac{\pi R^2}{4}$ C) $\dfrac{\pi R^2}{6}$

D) $\dfrac{\pi R^2}{3}$ E) $\dfrac{\pi R^2}{8}$

PROBLEMA Nº 251

Dado un romboide ABCD, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto E, tal que el cuadrilátero DBCE es inscriptible. Calcule el área del círculo circunscrito a dicho cuadrilátero.
Si: $m\overset{\frown}{CD}=106°$, CD=8u y AE=ED.

A) $16\pi u^2$ B) $25\pi u^2$ C) $36\pi u^2$

D) $49\pi u^2$ E) $5\sqrt{2}\pi u^2$

PROBLEMA Nº 252

Del gráfico, calcule $A_1+A_2-A_3$; si R=6cm; A_1; A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas.

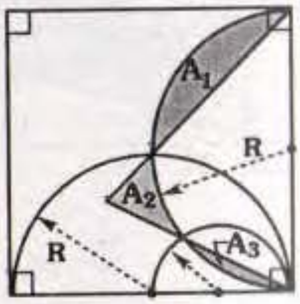
A) $6cm^2$

B) $3cm^2$

C) $9cm^2$

D) $12cm^2$

E) $6\sqrt{2}cm^2$



PROBLEMA Nº 253

En la figura mostrada se tiene 3 circunferencias secantes y congruentes de radios 1cm respectivamente. Calcular el área de la región sombreada (O y O_1 son centros)

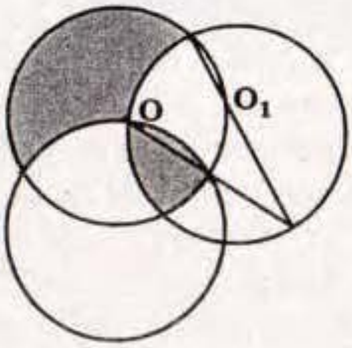
A) πcm^2

B) $\dfrac{\pi}{2}\text{cm}^2$

C) $2\pi \text{cm}^2$

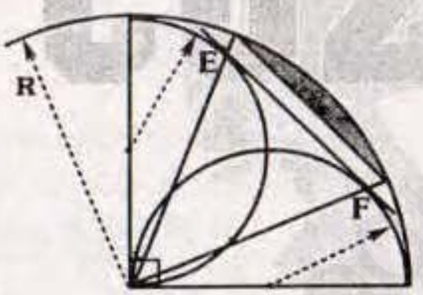
D) $\dfrac{3\pi}{2}\text{cm}^2$

E) $\dfrac{\pi}{4}\text{cm}^2$



PROBLEMA Nº 254

En el gráfico, E y F son puntos de tangencia. Halle el área de la región sombreada, si:



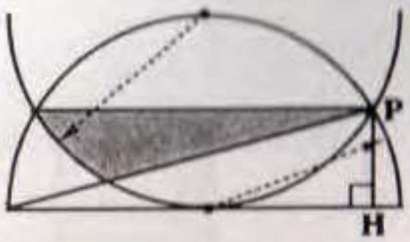
A) $R^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}\right)$ B) $\dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$

C) $R^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2}\right)$ D) $\dfrac{R^2}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$

E) $\dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

PROBLEMA Nº 255

En el gráfico, O es punto de tangencia. Si PH=2, calcule el área de la región sombreada.



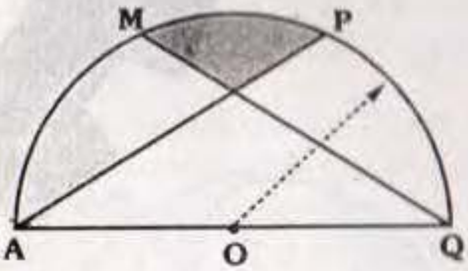
A) $\dfrac{4}{3}\pi+8-4\sqrt{3}$ B) $\dfrac{4}{3}\pi+8+4\sqrt{3}$

C) $\dfrac{4}{3}\pi-8-4\sqrt{3}$ D) $\dfrac{4}{3}\pi+8-3\sqrt{3}$

E) $4\pi+8-3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 256

Calcule el área de la superficie sombreada a partir del gráfico, si: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MP}=\overset{\frown}{PB}$



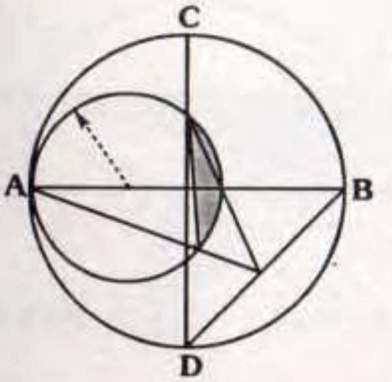
A) $(R/3)(\pi+\sqrt{3})$ B) $(R^2/6)(\pi+\sqrt{3})$

C) $(R/12)(\pi-\sqrt{3})$ D) $R(\pi-\sqrt{3})$

E) $(R^2/6)(\pi-\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº 257

Halle el área de la región sombreada si el radio menor mide 2cm y los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares.



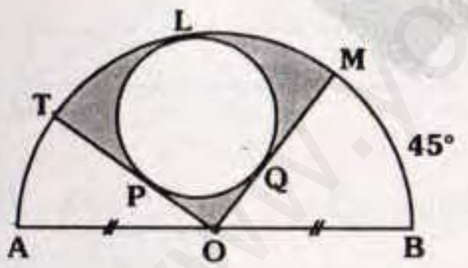
A) $(\pi-1)cm^2$ B) $(\pi-2)cm^2$

C) $(\pi-3)cm^2$ D) πcm^2

E) N.A.

PROBLEMA Nº 258

Calcule en forma aproximada el área de la región sombreada, si el radio de la semicircunferencia es de 1m. P, L y Q son puntos de tangencia, $m\widehat{AT}=29°$ y $m\widehat{BM}=45°$.

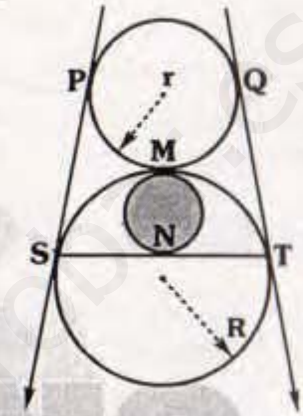


A) $0,5m^2$ B) $0,4m^2$ C) $0,3m^2$

D) $0,2m^2$ E) $0,1m^2$

PROBLEMA Nº 259

En la figura, calcule el área de la región sombreada, si las tres circunferencias son tangentes y R=6cm, r=3cm.(M, N, Q, S y T son puntos de tangencia)



A) $4\pi cm^2$

B) $3\pi cm^2$

C) $2\pi cm^2$

D) πcm^2

E) $\pi/2cm^2$

PROBLEMA Nº 260

En una circunferencia de diámetro AB se traza una circunferencia que es tangente al diámetro AB y el arco AB en T y N respectivamente. Si: AT=2u y TB=8u. Calcule el área del círculo menor.

A) $\frac{64\pi}{5}u^2$ B) $\frac{8\pi}{25}u^2$ C) $\frac{64\pi}{81}u^2$

D) $\frac{64\pi}{25}u^2$ E) $\frac{16\pi}{25}u^2$

Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

En la siguientes proposiciones indique el valor de verdad

I. Si dos regiones triangulares tienen el mismo perímetro entonces sus áreas son iguales.

II. Si un cuadrado y un triángulo equilátero tienen la misma área entonces el lado mayor es del cuadrado.

III. Se cumple siempre para dos regiones triangulares a mayor perímetro mayor área.

A) VFF B) FFV C) VFV

D) FFF E) FVF

PROBLEMA Nº 262

En un triángulo ABC las alturas se cortan en "O". Si (AC)(OB)=42. Calcule el área del cuadrilátero ABCO.

A) 42 B) 21 C) 18

D) 38 E) 14

PROBLEMA Nº 263

En un triángulo ABC cuyos lados miden 5, 6 y 7. Halle el producto del inradio y el circunradio.

A) 32/6 B) 37/6 C) 35/6

D) 37/2 E) 32/5

PROBLEMA Nº 264

Calcular el área de una región triangular cuyas alturas miden 12, 15 y 20

A) 300 B) 150 C) 75

D) 120 E) 90

PROBLEMA Nº 265

Los lados AB, BC y AC de un triángulo, ABC miden 13cm, 14cm y 15cm. Calcular el área de la región triangular AIC, siendo "I" el incentro.

A) 30 B) 42 C) 15 D) 20 E) 36

PROBLEMA Nº 266

Un triángulo rectángulo ABC está inscrito en una circunferencia. La bisectriz interior BD prolongada corta a la circunferencia en F. Si BD=4 y DF=6. Hallar el área de la región triangular ABC.

A) 32 B) 40 C) 20 D) 16 E) 24

PROBLEMA Nº 267

Calcule el área de una región triangular rectangular, sabiendo que el inradio mide 3m y el circunradio 8,5m.

A) 28 m^2 B) 50 m^2 C) 60 m^2

D) 54 m^2 E) 70 m^2

PROBLEMA Nº 268

El área de un triángulo ABC es igual a $36u^2$. Calcule el área del trapecio que se determina al trazar una paralela a uno de sus lados por el baricentro.

A) $16u^2$ B) 20 C) 18 D) 22 E) 36

PROBLEMA Nº 269

En un triángulo ABC de $48m^2$ de área se ubica el punto "F" sobre AB de modo que AB = 3BF y "M" es punto medio de BC. Calcule el área de AFMC.

A) $32m^2$ B)40 C) 16 D) 24 E) 36

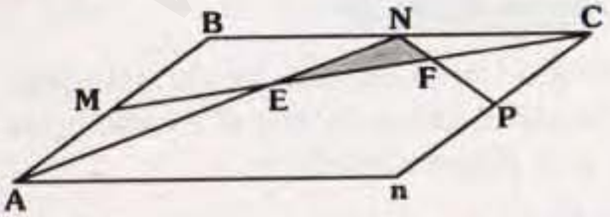
PROBLEMA Nº 270

En un triángulo rectángulo ABC la circunferencia inscrita determina sobre los catetos AB y BC los puntos "E" y "F" respectivamente. Si AE=8 y FC=10. Halle el área de la región triangular ABC.

A) 40u B) 60 C) 50 D) 80 E) 120

PROBLEMA Nº 271

En el gráfico, ABCD es un romboide, AM=MB, PC=PD y BN = NC. Si el área de la región sombreada es 24, calcule el área de la región ABCD.



A) 378 B) 276 C) 476

D) 867 E) 576

PROBLEMA Nº 272

El área de la región triangular determinada por las medianas de un triángulo ABC es 24. Calcule el área de la región ABC.

A) 28 B) 36 C) 42

D) 38 E) 32

PROBLEMA Nº 273

En el gráfico mostrado ABCDEF es un hexágono regular con 2m de lado y el triángulo PQR es equilátero. ¿Cuánto debe medir $\overline{AP}$ para que las cuatro regiones determinadas sean equivalentes?

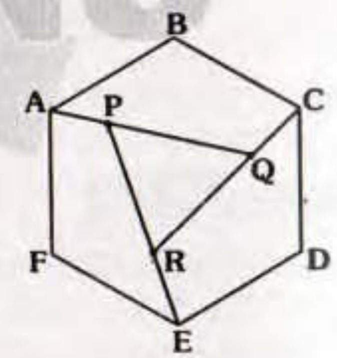
A) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

B) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

C) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

D) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

E) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{3}}{2}$



PROBLEMA Nº 274

Calcule la razón entre las áreas de dos regiones triangulares, sabiendo que los lados de uno de ellos son congruentes a las medianas del otro.

A) 1 B) 4/3 C) 2

D) 1/2 E) 2/3

PROBLEMA Nº 275

El área de la región triangular ABC es $120m^2$ BM=MC y AE=EF=FC. Calcule el área de la región cuadrangular EPQF.

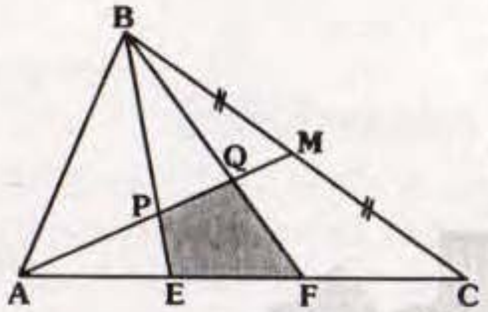
A) $18m^2$

B) $15m^2$

C) $20m^2$

D) $21m^2$

E) $22m^2$



PROBLEMA Nº 276

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de circuncentro "O" en el cual se trazan los diámetros $\overline{AF}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CE}$ de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Calcule el área de la región triangular ABC, si las áreas de las regiones triangulares AEB, BFC y AMC son $9m^2$, $16m^2$ y $25m^2$ respectivamente.

A) $31m^2$ B) $72m^2$ C) $144m^2$

D) $50m^2$ E) $100m^2$

PROBLEMA Nº 277

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos rectángulos son isoperimétricos, entonces son equivalentes.

II. Si dos regiones polígonales regulares son isoperimétricos, entonces tendrá mayor área el que tiene mayor número de lados.

III. Si de una región triangular se conoce las longitudes de dos lados y la altura relativa a cualquier lado, entonces se conoce su área.

A) FVV B) FFF C) VFV

D) VVV E) FFV

PROBLEMA Nº 278

Si ABCD es un romboide, hallar el área sombreada si M, N, L y P son puntos medios. S_{ABCD} es 12m

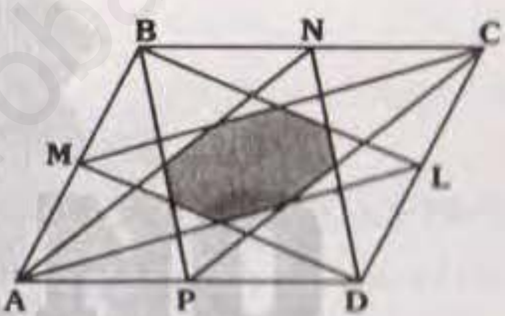
A)$1m^2$

B) $2m^2$

C) $3m^2$

D) $4m^2$

E) $6m^2$



PROBLEMA Nº 279

En el gráfico mostrado las áreas de las regiones triangulares AEB, BFC y AGC son $9m^2$, $16m^2$ y $25m^2$ respectivamente. Calcule el área de la región triangular ABC.

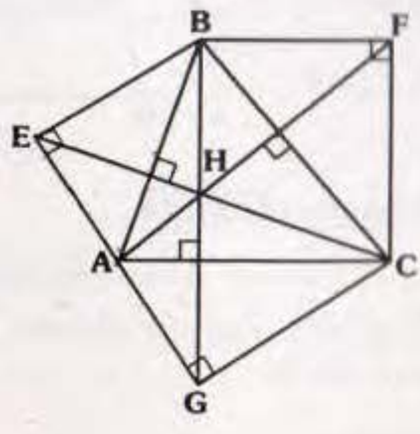
A) $31m^2$

B) $72m^2$

C) $144m^2$

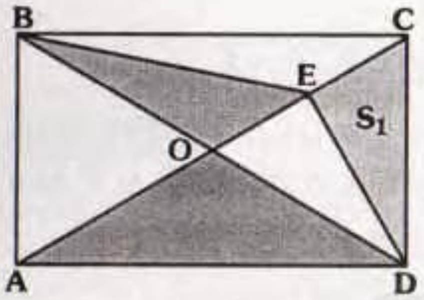
D) $\sqrt{963}\,m^2$

E) $\sqrt{961}\,m^2$



PROBLEMA Nº 280

En el gráfico calcular S_1, si las áreas de las regiones triangulares BOE y AOD son $4m^2$ y $9m^2$ respectivamente.



A) $5m^2$ B) $2m^2$ C) $6,5m^2$

D) $4,5m^2$ E) $3m^2$

PROBLEMA Nº 281

Si el área de la región del trapecial ABCD es $9m^2$. Calcular el área de la región sombreada, siendo: AN=NM=MB; BE=EF=FC ; CP=PQ=QD y AH=HL=LD.

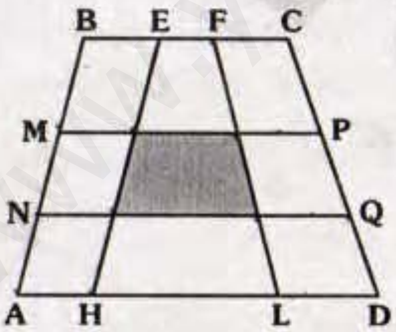
A) $1m^2$

B) $2m^2$

C) $3m^2$

D) $4m^2$

E) $1,5m^2$



PROBLEMA Nº 282

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y $BP=4\sqrt{2}$. Calcule el área de la región sombreada.

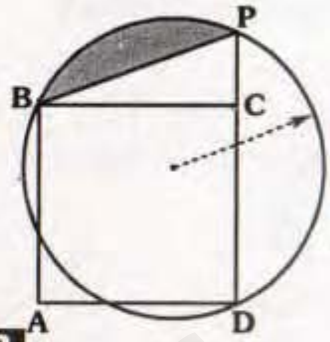
A) $4(\pi-1)$

B) $4(\pi-\sqrt{2})$

C) $8(\pi+1)$

D) $4(2\pi+1)$

E) $4(\pi-2)$



PROBLEMA Nº 283

En un triángulo ABC equilátero cuyo lado mide L unidades considerando como diámetro la altura $\overline{BH}$ se dibuja una circunferencia. Hallar el área de la región común que limitan el triángulo equilátero y la circunferencia.

A) $\dfrac{L^2}{32}(2\pi+3\sqrt{3})$ B) $\dfrac{L^2}{16}(2\pi+3\sqrt{3})$

C) $\dfrac{L^2}{48}(2\pi+3\sqrt{3})$ D) $\dfrac{L^2}{12}(2\pi+3\sqrt{3})$

E) $\dfrac{L^2}{18}(2\pi+3\sqrt{3})$

PROBLEMA Nº 284

Calcule el área de la región sombreada.

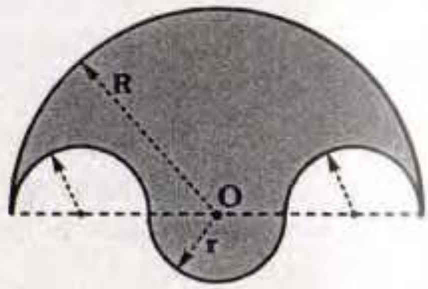
A) $\dfrac{\pi}{4}(R+r)^2$

B) $\dfrac{\pi}{4}(R-r)^2$

C) $\dfrac{\pi}{2}(R+r)^2$

D) $\dfrac{\pi}{2}(R-r)^2$

E) $\dfrac{\pi}{8}(R+r)^2$



PROBLEMA Nº 285

Calcule el área de la región sombreada, si: $MN=8\sqrt{2}m$.("O" es centro)

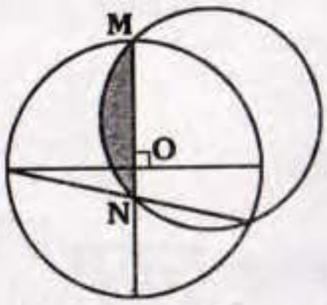
A) $(\pi-2)m^2$

B) $2(\pi-2)m^2$

C) $4(\pi-3)m^2$

D) $16(\pi-2)m^2$

E) $8(\pi-2)m^2$



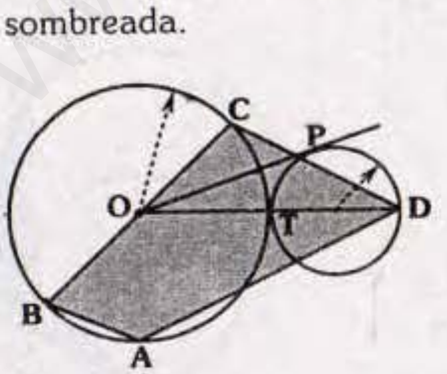
PROBLEMA Nº 286

En el triángulo acutángulo ABC, la prolongación de la altura $\overline{BH}$ interseca a la circunferencia circunscrita en P. Si $m\widehat{BC}=2(m\widehat{PC})$, BC=13 y HC=15. Halle el área del círculo inscrito en el triángulo ABH.

A) $\frac{49}{4}\pi$ B) 25π C) 16π D) 9π E) 81π

PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, $\overline{AB}//\overline{CD}$, P y T son puntos de tangencia. Si OP=6 y $m\widehat{AB}+m\widehat{CT}=60°$, calcule el área de la región sombreada.



A) $20\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $15\sqrt{3}$

D) $12\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 288

Si: ABCD es cuadrado y CE=4, halle el área de la región sombreada.

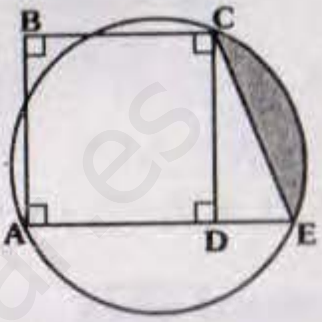
A) $2\pi-2$

B) $2\pi-3$

C) $2\pi-4$

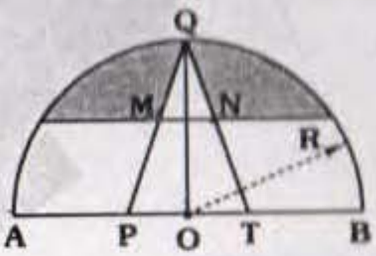
D) $2\pi+1$

E) $2\pi+2$



PROBLEMA Nº 289

Halle el área de la región sombreada, si $m\widehat{AQ}=m\widehat{QB}$, ΔPQT es equilátero $\overline{PM}=\overline{MQ}$ y QN=NT.



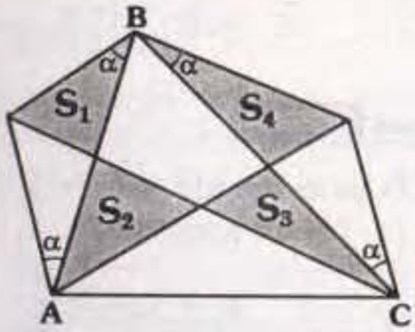
A) $\frac{R^2}{3}(\pi-\sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{4}(\pi-5)$

C) $\frac{R^2}{3}(\pi-3\sqrt{2})$ D) $\frac{R^2}{5}(2\pi-3)$

E) $\frac{R^2}{3}(\pi-\sqrt{3/2})$

PROBLEMA Nº 290

En el gráfico, indique la relación entre S_1, S_2, S_3 y S_4, si el triángulo ABC es escaleno.



A) $S_1.S_2 = S_3.S_4$ B) $S_1-S_2 = S_4-S_3$

C) $S_1+S_4 = S_2+S_3$ D) $S_1+S_2 = S_3+S_4$

E) $S_1.S_2.S_3.S_4=(S_1+S_2+S_3+S_4)$

PROBLEMA Nº 291

En la siguiente figura: 3(BC)=2(CD), S_1=12m² y S_2=5m². Calcule S_x.

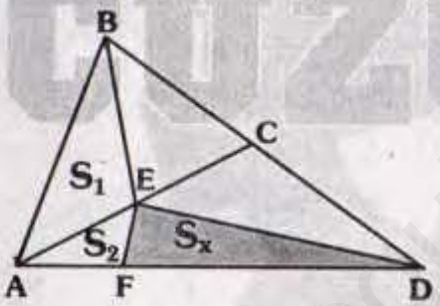
A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 7



PROBLEMA Nº 292

El área de la región triangular ABC es 24m², G es su baricentro, AM=MB y BN=NC. Calcule el área de la región triangular MGN.

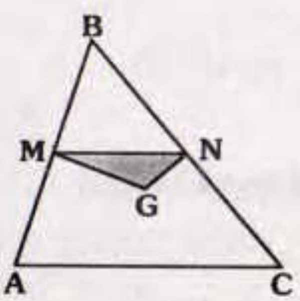
A) 2m²

B) 1m²

C) 0,5m²

D) 4m²

E) 1,5m²



PROBLEMA Nº 293

En un trapecio M, N son los puntos medios de las diagonales y P es el punto de corte de los lados no paralelos prolongados. Halle el área de MNP si el área del trapecio es S.

A) S/2 B) 2S/4 C) S/4

D) S/5 E) S

PROBLEMA Nº 294

En la figura, si (BM)(AQ)=(MC)(QC) halle la relación de las áreas de las regiones ABP y PMCQ.

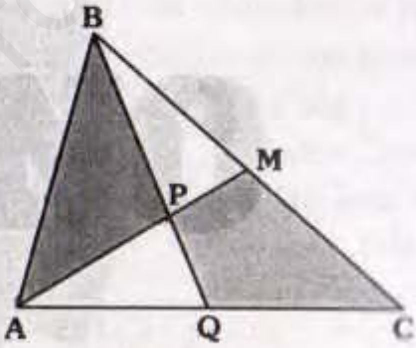
A) 13/15

B) 1

C) 13/14

D) 14/13

E) 11/13



PROBLEMA Nº 295

En la figura A, B, C son puntos de tangencia, calcule el área de la región sombreada.

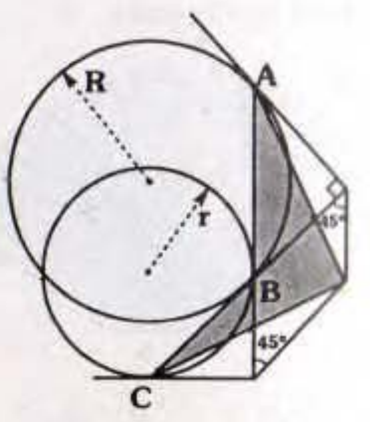
A) $\dfrac{R^2+r^2}{2}$

B) $\dfrac{R^2-r^2}{2}$

C) $\dfrac{2R^2+r^2}{4}$

D) $3R^2+2r^2$

E) $\dfrac{R^2+r^2}{3}$



PROBLEMA Nº 296

Se tiene una región hexagonal ABCDEF de área $60u^2$ y sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud, calcule el área de la región triangular ACE

A) $10u^2$ B) $20u^2$ C) $30u^2$

D) $35u^2$ E) $40u^2$

PROBLEMA Nº 297

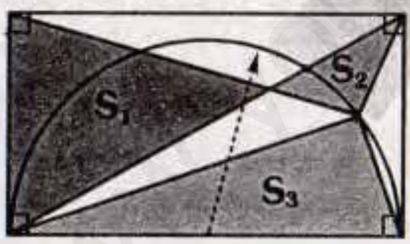
En un triángulo ABC, AB=6u, BC=5u y AC=7u y de excentro E relativo a $\overline{BC}$, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$). Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares EHC y ABE.

A) 3/4 B) 2/5 C) 1/3

D) 1/6 E) 2/3

PROBLEMA Nº 298

Indique la relación entre S_1, S_2 y S_3.



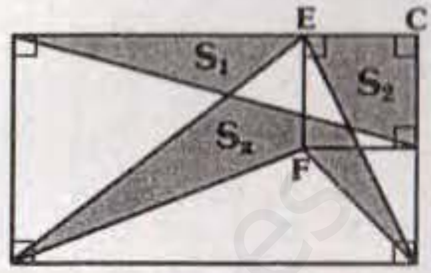
A) $S_1^2=S_2S_3$ B) $S_1=S_2+S_3$

C) $S_3^2=S_1-S_2$ D) $S_3=S_1+S_2$

E) $S_3=S_1-2S_2$

PROBLEMA Nº 299

En el gráfico, $S_1=4$, $S_2=9$ y EC=EF. Calcule S_x.



A) 13 B) 12 C) 6

D) 17 E) 11

PROBLEMA Nº 300

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si un lado de una región triangular es un lado de una región rectangular y su área es la mitad de la región rectangular, entonces el vértice opuesto a dicho lado estará ubicado en la recta que contiene al lado opuesto en la región rectangular.

II. Si de una región triangular se conoce las longitudes de dos lados y la longitud de cualquier mediana, entonces se conoce su área.

III. Si dos segmentos circulares son equivalentes e isoperimétricos entonces los círculos que lo contienen tienen igual radio.

A) FVV B) VFF C) FFF

D) VVV E) FVF

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. C	10. D	19. D	28. A	37. B	46. B	55. A
2. A	11. A	20. B	29. C	38. C	47. C	56. C
3. A	12. B	21. B	30. B	39. C	48. A	57. E
4. A	13. A	22. D	31. D	40. C	49. B	58. A
5. D	14. D	23. D	32. C	41. E	50. B	59. D
6. D	15. B	24. A	33. D	42. E	51. C	60. B
7. B	16. C	25. A	34. B	43. A	52. B	
8. B	17. C	26. A	35. D	44. A	53. A	
9. B	18. C	27. B	36. A	45. B	54. A	

CEPRE-UNI

61. B	73. A	85. A	97. A	109. C	121. D	133. C
62. D	74. E	86. A	98. D	110. A	122. A	134. D
63. C	75. C	87. C	99. D	111. A	123. B	135. B
64. C	76. A	88. B	100. E	112. A	124. D	136. C
65 A	77. B	89. *	101. B	113. E	125. A	137. B
66. A	78. A	90. B	102. E	114. E	126. B	138. C
67. C	79. A	91. B	103. D	115. D	127. C	139. C
68. *	80. B	92. C	104. E	116. A	128. A	140. D
69. B	81. D	93. C	105. D	117. D	129. A	
70. D	82. B	94. D	106. B	118. B	130. A	
71. E	83. C	95. C	107. B	119. C	131. A	
72. D	84. B	96. D	108. C	120. C	132. D	

(*) Demostración

SEMESTRAL

141. C	150. C	159. A	168. C	177. C	186. A	195. A
142. B	151. A	160. A	169. A	178. B	187. C	196. C
143. A	152. A	161. B	170. B	179. C	188. A	197. E
144. C	153. E	162. D	171. C	180. A	189. C	198. B
145. B	154. C	163. A	172. A	181. C	190. C	199. D
146. C	155. A	164. C	173. C	182. A	191. A	200. E
147. D	156. A	165. B	174. B	183. B	192. A	
148. B	157. C	166. A	175. D	184. B	193. C	
149. C	158. D	167. B	176. C	185. A	194. D	

SEMESTRAL INTENSIVO

201. A	210. C	219. C	228. A	237. B	246. E	255. A
202. A	211. D	220. B	229. C	238. E	247. A	256. E
203. B	212. E	221. A	230. E	239. D	248. B	257. B
204. A	213. E	222. D	231. C	240. *	249. E	258. B
205. A	214. B	223. A	232. E	241. C	250. D	259. A
206. C	215. B	224. A	233. A	242. A	251. B	260. D
207. D	216. D	225. E	234. B	243. C	252. B	
208. C	217. A	226. A	235. A	244. C	253. B	
209. A	218. C	227. C	236. A	245. E	254. D	

REPASO

261. D	267. C	273. A	279. E	285. D	291. E	297. C
262. B	268. B	274. B	280. A	286. A	292. A	298. B
263. C	269. B	275. E	281. A	287. B	293. C	299. A
264. B	270. D	276. D	282. E	288. C	294. B	300. A
265. A	271. E	277. E	283. A	289. A	295. A	
266. C	272. E	278. C	284. C	290. B	296. C	

(*) Demostración