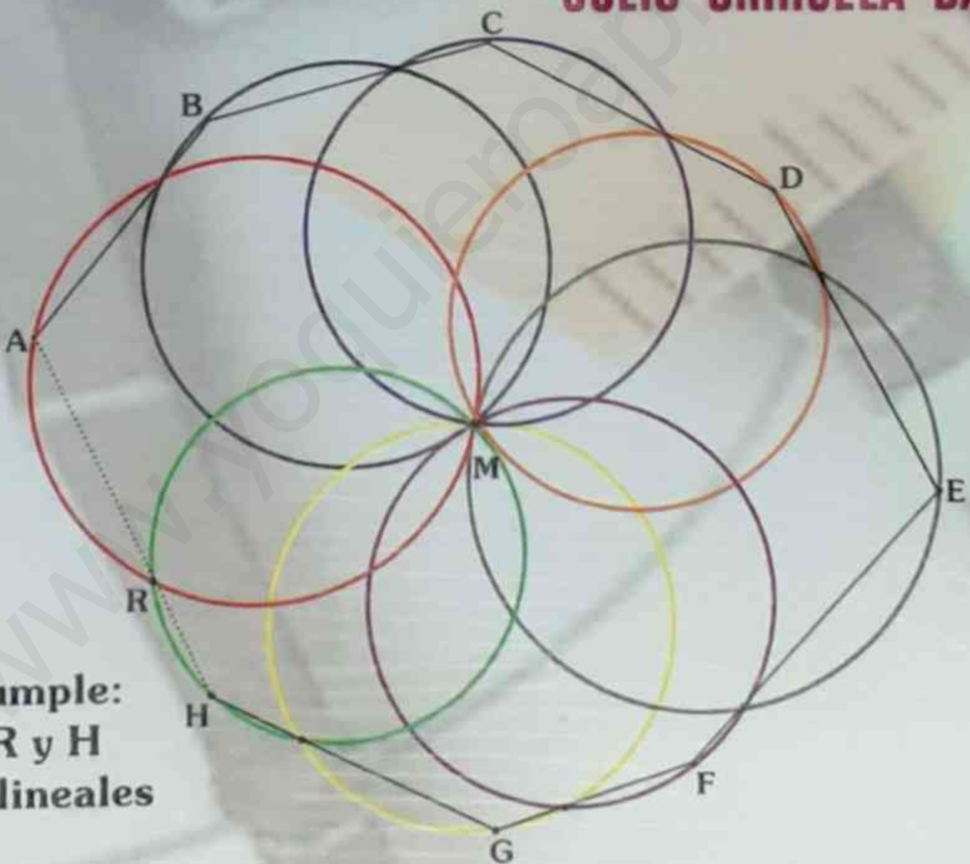
# GEOMETRÍA

# 6 CIRCUNFERENCIA

## TEORÍA - DEMOSTRACIONES
## TRAZOS AUXILIARES

**600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS**

JULIO ORIHUELA BASTIDAS




**Se cumple:**
**A , R y H**
**son colineales**

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

# CIRCUNFERENCIA

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

**300 Problemas Resueltos**
**300 Problemas Propuestos**

**JULIO ORIHUELA BASTIDAS**

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

# Índice

Pág.

Índice

# CIRCUNFERENCIA

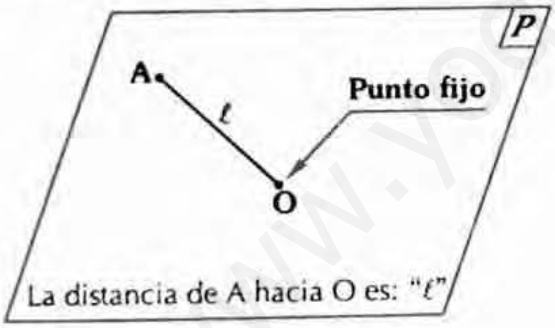
GEOMETRÍA

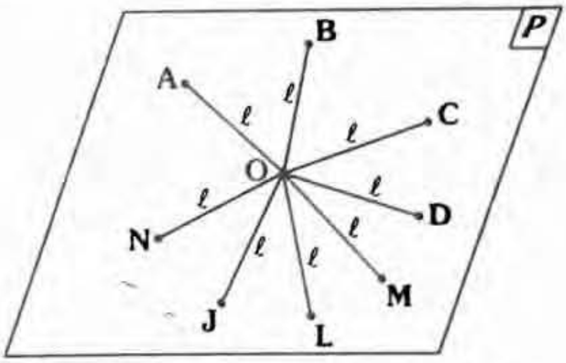
El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna.

**Jorge Luis Borges**

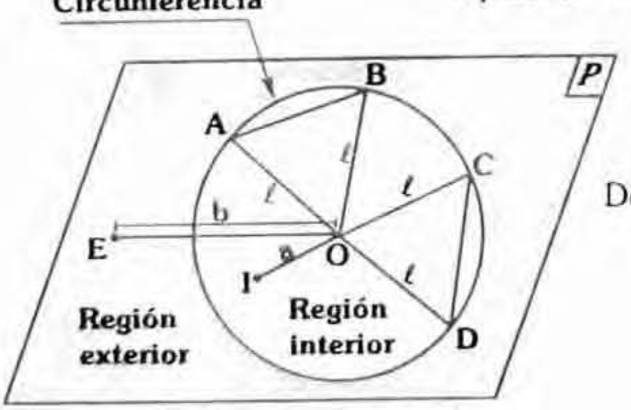
## DEFINICIÓN

Es el conjunto de todos los puntos de un plano, que tienen igual distancia (equidistan) respecto de un punto fijo en dicho plano. La distancia constante se llama **radio** y el punto fijo se denomina **centro**.




Los puntos A, B,C, D, M, L, J y N del plano P, equidistan de O. (O *en el plano* P)




Del gráfico, tenemos:

$a<\ell$ y $b<\ell$

La unión de todos los puntos del plano que tienen la misma distancia " $\ell$ " hacia el punto "O" se llama circunferencia.

O: centro y $\ell$ : radio

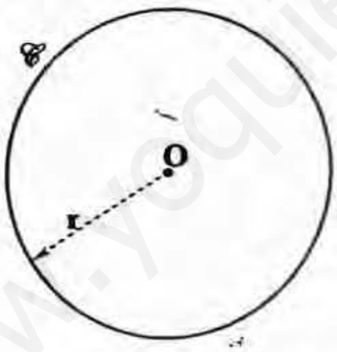
Notemos que los triángulos AOB y COD son isósceles.

**Observación**

- *La unión de todos los puntos del plano* P, *cuya distancia es menor que " $\ell$ " definen la región interior* $(OI < \ell)$.
- *La unión de todos los puntos del plano* P, *cuya distancia es mayor que " $\ell$ " definen la región exterior* $(OE > \ell)$.
- *Lo más "simple" que podemos aprovechar es la definición. Las "distancias iguales", es decir los triángulos isósceles como:* $\Delta AOB$, $\Delta COD$,...

## Notación

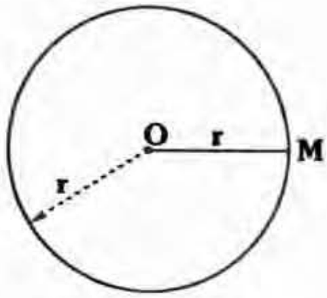
Aunque no hay una notación general para nombrar circunferencia usualmente remarcaremos el centro y el radio lo representamos con un flecha.




En el gráfico, se muestra la circunferencia $\mathscr{C}$, de centro O y radio **r**.

**Observación**

- *Con respecto al radio, vamos a considerar dos acepciones: como longitud o como segmento comprendido entre el centro y un punto de la circunferencia.*

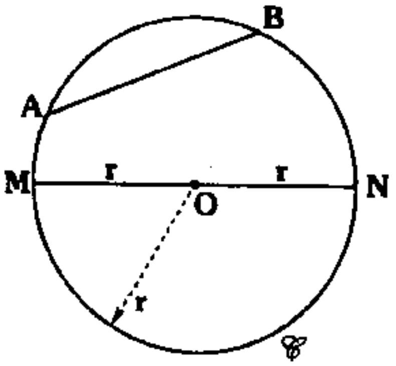



Radio: " $\overline{OM}$ " ó "r"

# ELEMENTOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

## ❶ CUERDA

Es aquel segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

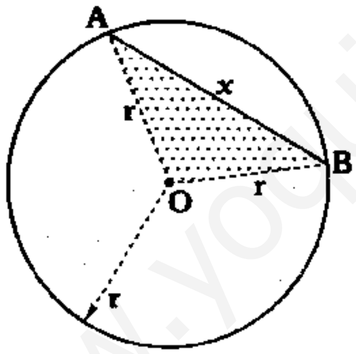



- $A \in \mathscr{C}$ y $B \in \mathscr{C}$ entonces $\overline{AB}$ es cuerda.
- $\overline{MN}$ es también cuerda, se le llama "diámetro" o "cuerda máxima".
- Se cumple:

$$MN = 2r$$

### Observación

*Si una cuerda no pasa por el centro, entonces su longitud es menor que dos veces el radio.*




Prueba

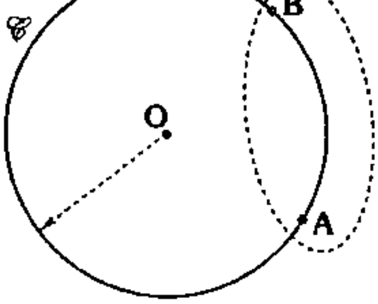
En $\Delta AOB$, por existencia :

$$x < r + r$$

$$\Rightarrow \quad AB < 2r$$

## ❷ ARCO

Es parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

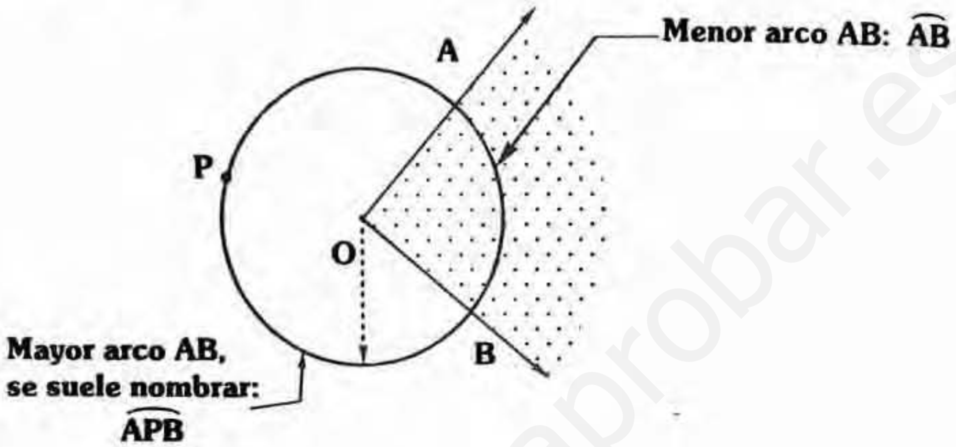



- En el gráfico, A y B están en $\mathscr{C}$

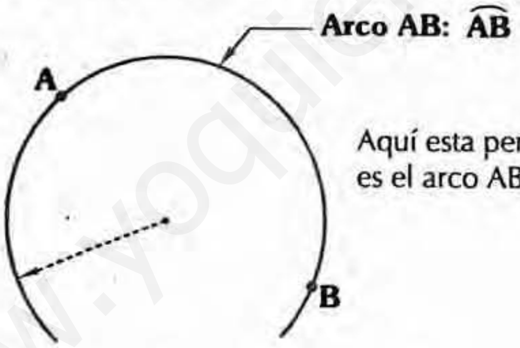
$\Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB}$ , se denomina arco AB

## Observaciones

- *Si A y B no son colineales con el centro O de la circunferencia $\mathscr{C}$, entonces se llama* **arco menor** *de la misma, a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el interior del ángulo AOB. Se llama* **arco mayor** *de la circunferencia a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el exterior del ángulo AOB.*

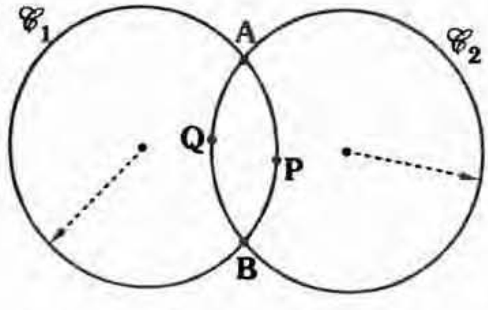



- *Cuando está perfectamente aclarado si es el arco mayor o el menor cuyos extremos son A y B, se indica con los símbolos más sencillos:* $\widehat{AB}$ o $\widehat{BA}$.




Aquí esta perfectamente claro quien es el arco AB.

- *Aquí no está claro quien es el arco:* AB

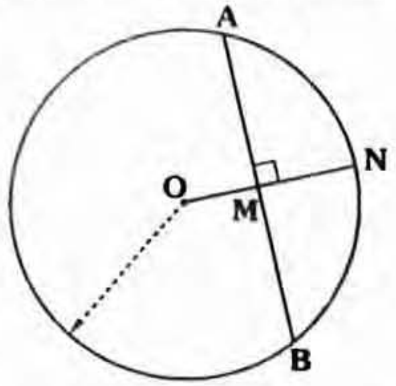



*Por lo que se hace necesario ubicar un punto más:* $\widehat{APB}$ está en $\mathscr{C}_1$

$\widehat{AQB}$ está en $\mathscr{C}_2$

## ❸ FLECHA O SAGITA

Al trazar una cuerda perpendicular al radio en una circunferencia se determina en el radio un segmento entre el arco menor y la cuerda, denominando flecha o sagita.



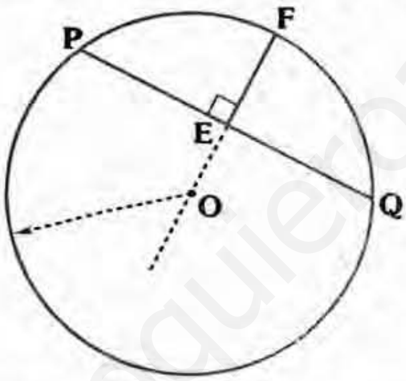

- $\overline{AB}$ no es diámetro y $\overline{AB} \perp \overline{ON}$
- $\overline{MN}$ : Flecha asociada a $\overline{AB}$

***Nota:***

Se cumple: $AM = MB$

**Observación**

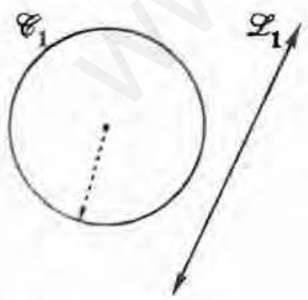
*Si $\overline{EF}$ es flecha respecto de* $\overline{EF} \Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{EF}$




*Al prolongarse $\overline{FE}$ llegará al centro O.*

## ❹ POSICIONES RELATIVAS EN UN PLANO ENTRE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

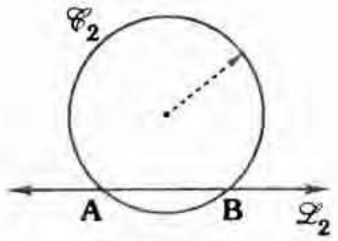
***Recta exterior***




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \mathscr{C}_1 = \phi$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es una recta exterior respecto de $\mathscr{C}_1$

***Recta secante***

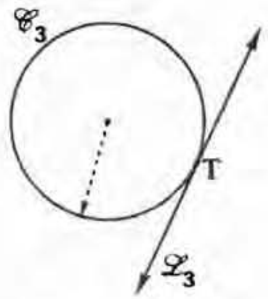



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$

$(\overline{AB}$: cuerda de $\mathscr{C}_2)$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es recta secante respecto de $\mathscr{C}_2$

***Recta tangente***



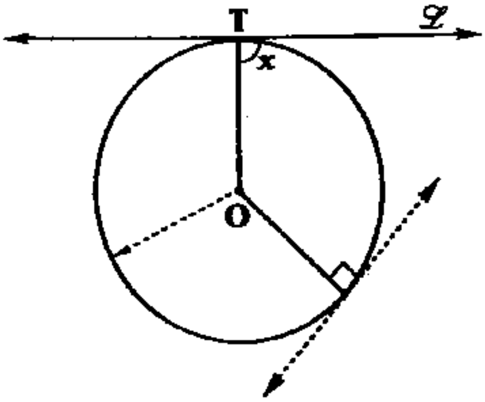

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \cap \mathscr{C}_3 = \{T\}$

(T: Punto de tangencia)

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ es recta tangente

## TEOREMA

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



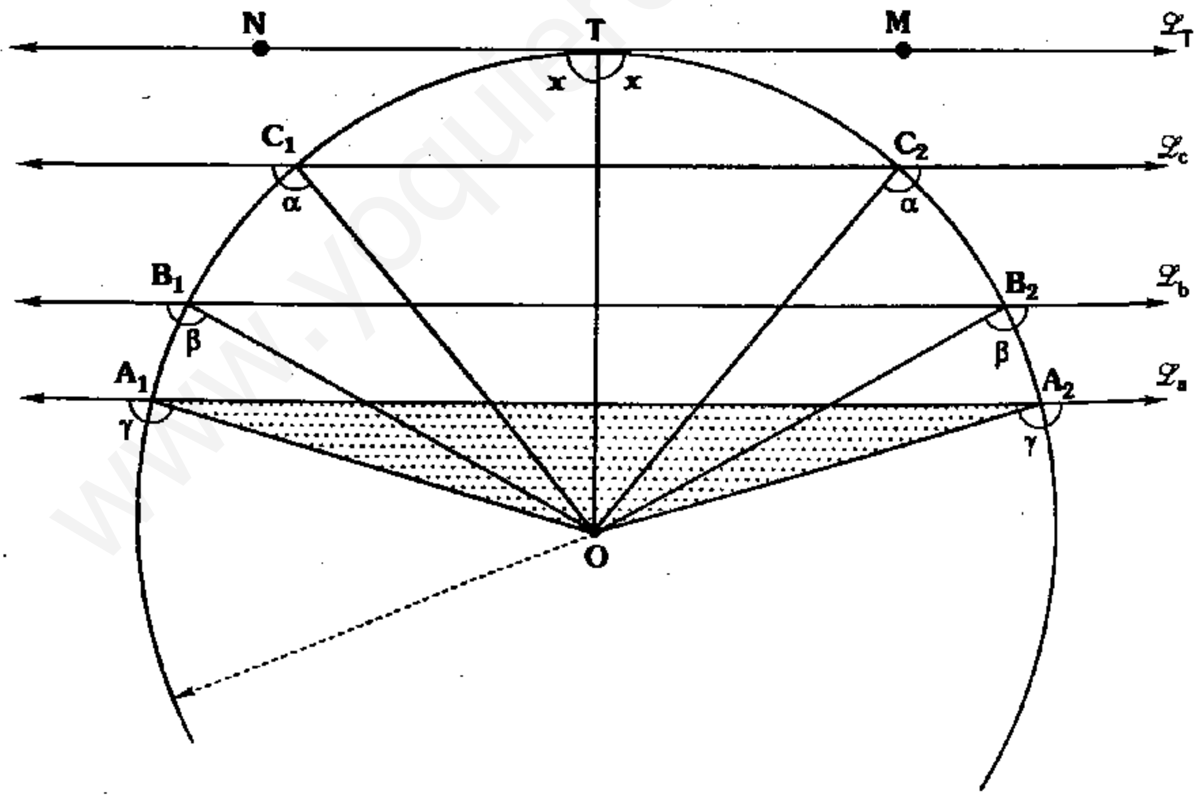

T: es punto de tangencia

Se cumple:

$$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \text{ ó } x = 90°$$

### Prueba

Analicemos primero el comportamiento de la recta secante.




Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_a}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_b}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_c}$ rectas secantes entonces los triángulos $A_1OA_2$, $B_1OB_2$ y $C_1OC_2$ son isósceles entonces sus respectivos ángulos externos son de igual medida.

- En el caso límite de la secante, es como que en T hubiesen dos puntos, entonces:

$$m\sphericalangle OTM = m\sphericalangle OTN = x$$

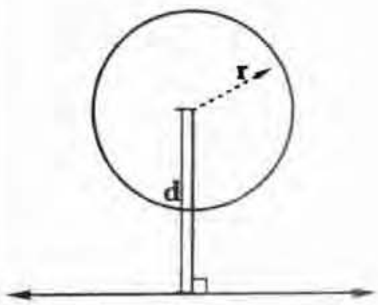
$$\Rightarrow \quad x + x = 180°$$

$$\therefore \quad x = 90°$$

## Observaciones

- *Se va a reconocer la posición de una recta y una circunferencia en el plano, con la distancia del centro de la circunferencia a dicha recta:*

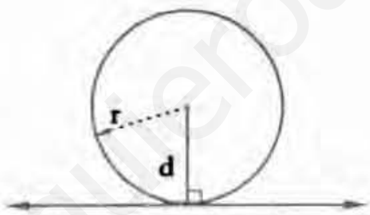
**Recta exterior**




*Se cumple:*

d>r

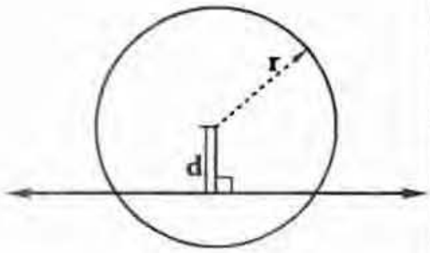
**Recta tangente**




*Se cumple:*

d=r

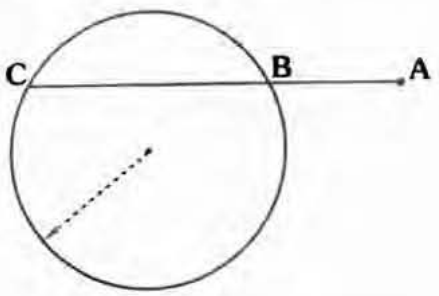
**Recta secante**




*Se cumple:*

d<r

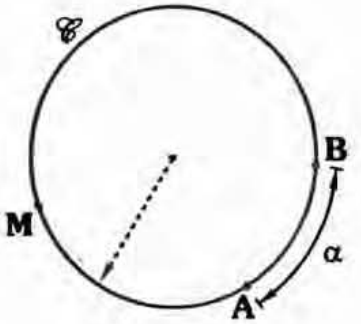
- *Cuando se traza una recta secante desde un punto exterior se nombrará primero dicho punto, luego los puntos de intersección.*




*Recta secante: ABC*

# MEDIDA ANGULAR DE LA CIRCUNFERENCIA - MEDIDA DE ARCOS

En geometría se usa el sistema sexagesimal, es decir se divide a la circunferencia en 360 partes iguales (congruentes) y cada una de dichas partes representará un grado sexagesimal.




- Medida angular de $\mathscr{C}$ : 360°
- $m\overset{\frown}{AB}$ : medida del arco AB, $m\overset{\frown}{AB}=\alpha$
- $m\overset{\frown}{AMB}=360°-\alpha$

**Nota Histórica**

*En la antigua Mesopotamia, región que se situó en Asia, entre el río Tigris y el Eufrates, floreció una civilización cuya antigüedad se remonta a 57 siglos aproximadamente:* ***Los Babilonios.***

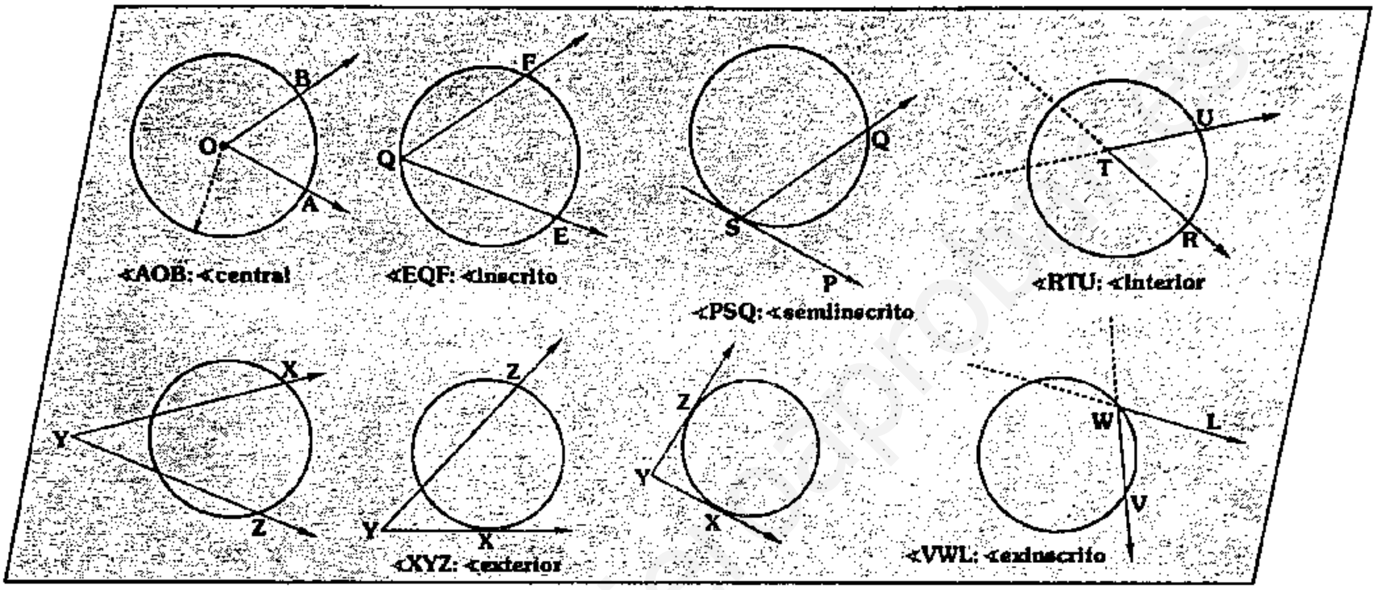
*Los Babilonios fueron, hace más de 6000 años, los inventores de la rueda. Tal vez de ahí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia, y esto condujo a estudiar la relación entre ella y su diámetro.*

*Los sabios de esta civilización cultivaron la astronomía y, conociendo que el año tiene aproximadamente 360 días, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales obteniendo lo que se llama actualmente el grado sexagesimal.*

*(Patricia Jimenez Gallego – UAZ)*

# ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

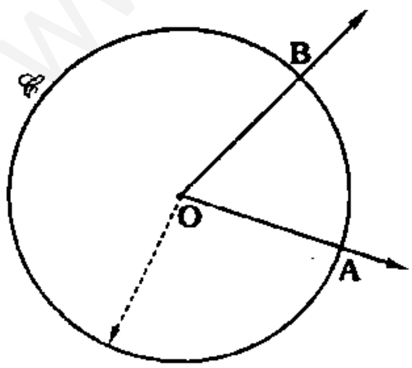
Veamos las diferentes posiciones que tienen un ángulo y una circunferencia en el mismo plano.




Ahora estudiemos cada uno de ellos:

## ❑ ÁNGULO CENTRAL

Es el ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia y sus lados contienen a dos radios.

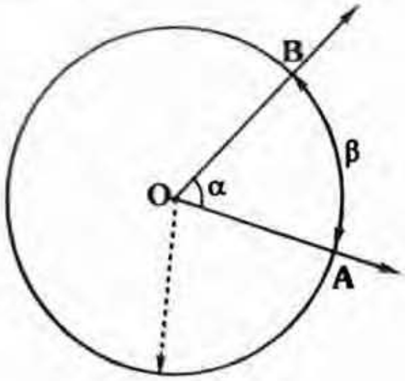



Respecto de 𝒞

$\boxed{\sphericalangle AOB : \text{ángulo central}}$

Notemos que al trazar el ángulo AOB, se determinan dos arcos, al menor se le denominará arco correspondiente al ángulo AOB.

Hay una correspondencia entre la medida del ángulo AOB y de su arco correspondiente, así tenemos:




- $m\widehat{AB}$ : medida del arco

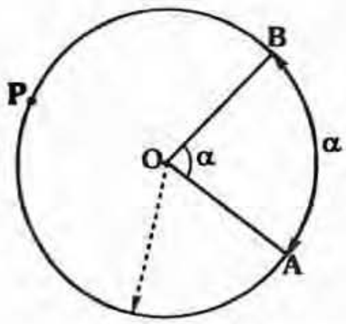
  Se cumple:

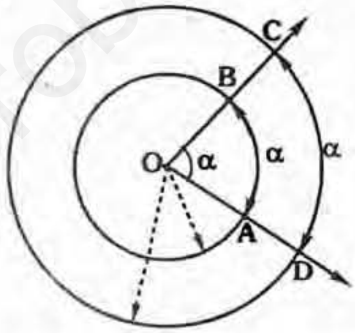
  $m\measuredangle AOB = m\widehat{AB}$

  $\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$

**Observaciones**

También:



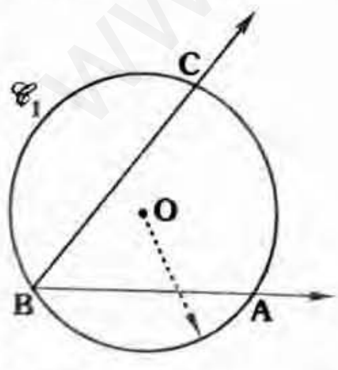



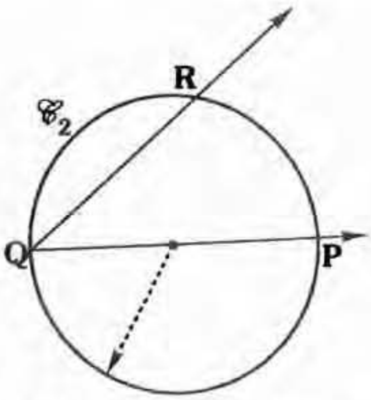

Se cumple: $m\widehat{APB} = 360° - \alpha$

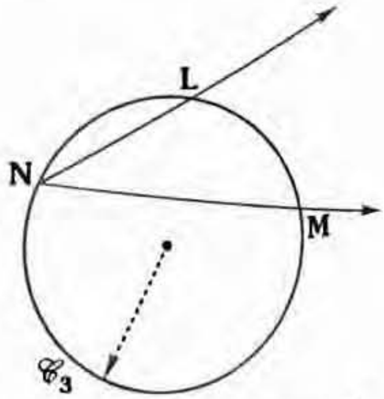
Se cumple: $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$

## ÁNGULO INSCRITO

Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados contienen a dos cuerdas. Así tenemos:



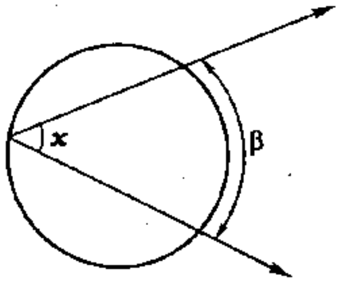

* $\measuredangle ABC$ : $\measuredangle$inscrito en $\mathscr{C}$
* $\widehat{AC}$: arco correspondiente a $\measuredangle ABC$.

* $\measuredangle PQR$ : $\measuredangle$inscrito en $\mathscr{C}_2$
* $\widehat{PR}$: arco correspondiente a $\measuredangle PQR$.

* $\measuredangle MNL$ : $\measuredangle$inscrito en $\mathscr{C}_3$
* $\widehat{ML}$: arco correspondiente a $\measuredangle MNL$.

## TEOREMA

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

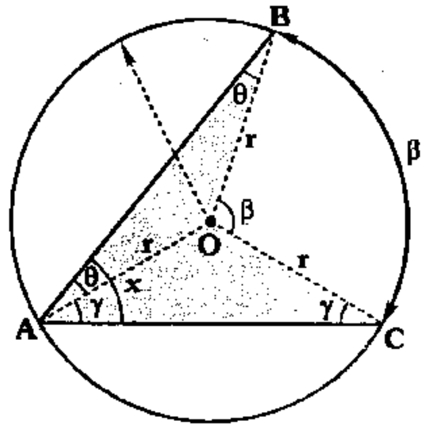



Se cumple:

$$x=\frac{\beta}{2} \quad \text{o} \quad \beta=2x$$

**Prueba**

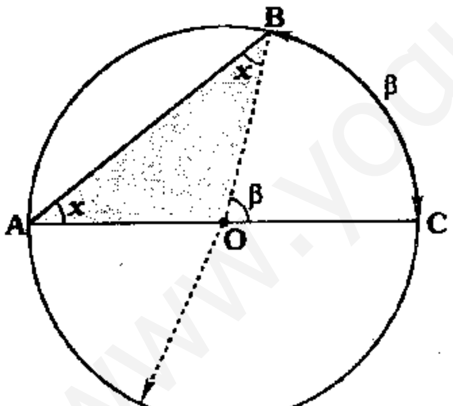
Para los tres casos: Sea "O" el centro




- Por $\sphericalangle$ central: $m\sphericalangle BOC=\beta$
- $\Delta AOC$ y $\Delta AOB$ : isósceles
- $x=\theta+\gamma$
- En $\measuredangle ABOC$: $\underbrace{\theta+x+\gamma}=\beta$

$$2x=\beta$$

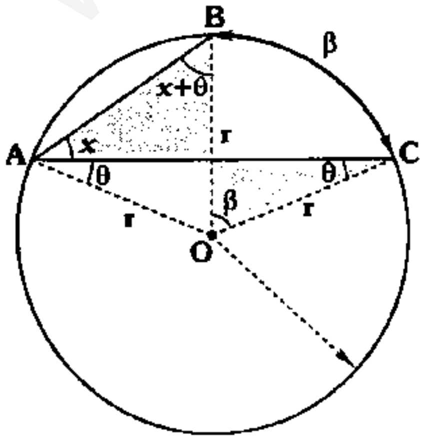
$$\therefore\; x=\frac{\beta}{2}$$




- Por $\sphericalangle$ central: $m\sphericalangle BOC=\beta$
- $\Delta AOB$ : isósceles

$$\Rightarrow\; x+x=\beta$$

$$\therefore\; x=\frac{\beta}{2}$$




- Por $\sphericalangle$ central: $m\sphericalangle BOC=\beta$
- $\Delta AOC$ y $\Delta AOB$ : isósceles
- En la parte sombreada ( $\bowtie$ ):

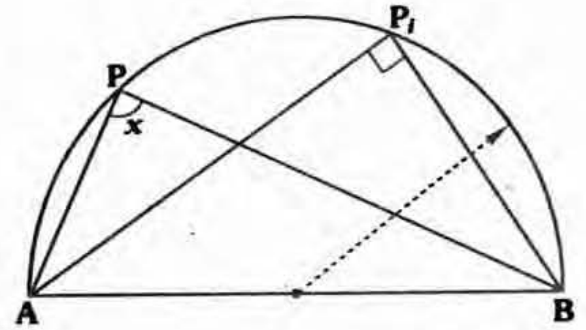
$$x+x+\theta=\beta+\theta$$

$$\rightarrow\; 2x=\beta$$

$$\therefore\; x=\frac{\beta}{2}$$

## Observaciones

### SEMICIRCUNFERENCIA

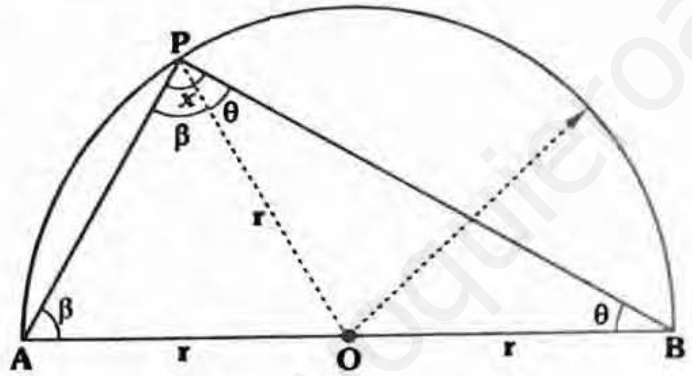



- Es el arco que mide 180°.
- Se le asocia el diámetro.
- Se cumple que cualquier ángulo inscrito mide 90°.
- En el gráfico:

  $m\widehat{AB}=180°$ entonces $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia.

Se cumple: $\boxed{x=90°}$

### Prueba




- $\Delta POB$ y $\Delta POA$ : isósceles

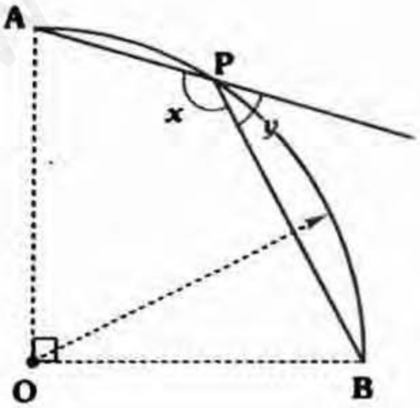
  $\Rightarrow \quad x=\beta+\theta$

- $\Delta APB$: $\underbrace{2\beta+2\theta}=180°$

  $2x=180°$

  $\therefore \; x=90°$

### CUADRANTE



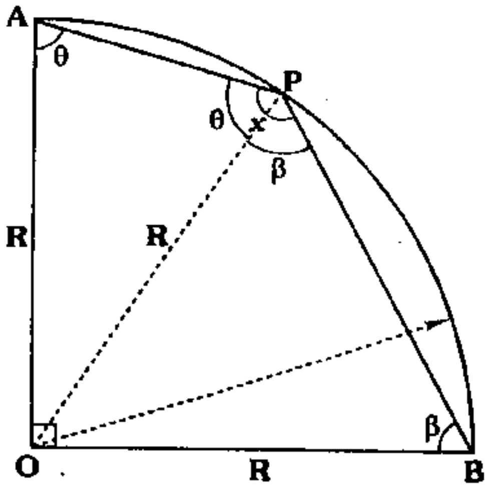

- Es aquel arco que mide 90°.
- Se le asocia dos radios perpendiculares.
- Se cumple que el ángulo inscrito mide 135°.
- En el gráfico:

  $m\widehat{AB}=90° \Rightarrow \overline{AO}\perp\overline{OB}$, luego

  $\widehat{AB}$ es un cuadrante

Se cumple: $x=135°$ o $y=45°$

**Prueba**



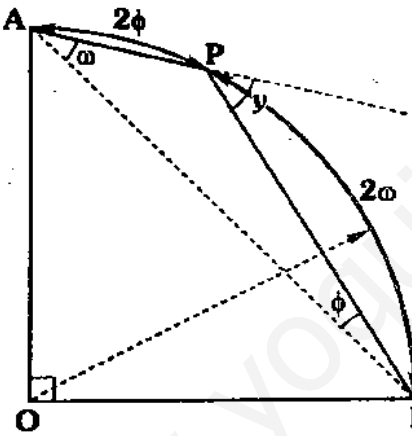

- $\Delta AOP$ y $\Delta POB$ : isósceles
- $x=\theta+\beta$
- En ⌂AOBP:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{2\theta+2\beta}+90°=360°$$

$$2x \quad +90°=360°$$

$$\therefore \; x=135°$$

**Otra forma**




- $\Delta APB$ : $y=\omega+\phi$
- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AP}=2\phi \quad y \quad m\widehat{PB}=2\omega$$

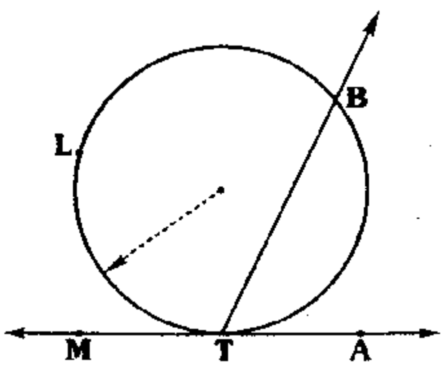
$$\Rightarrow \; 2\phi+2\omega=90°$$

$$\Rightarrow \; \phi+\omega=45°$$

$$\therefore \; y=45°$$

## ÁNGULO SEMI INSCRITO

Es cada uno de los ángulos que se determinan con la recta tangente y el rayo secante a la circunferencia en el punto de tangencia.




- En el gráfico, T es punto de tangencia.
- Son ángulos semiinscritos:

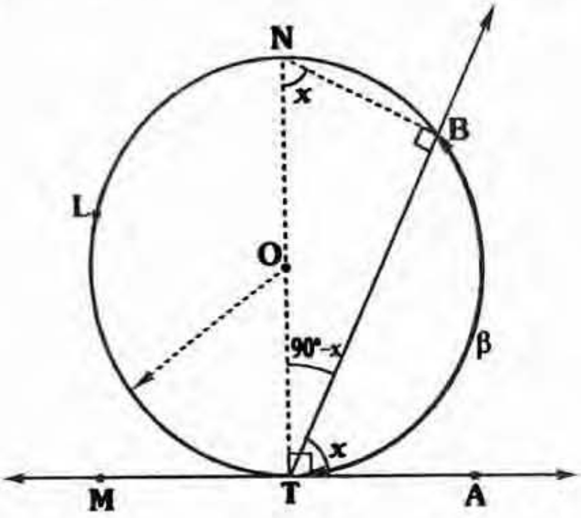
$$\sphericalangle ATB \quad y \quad \sphericalangle MTB$$

- $\widehat{TB}$ : arco correspondiente al $\sphericalangle ATB$
- $\widehat{TLB}$ : arco correspondiente al $\sphericalangle MTB$

## TEOREMA

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

**Prueba**

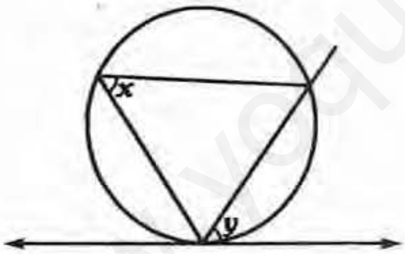



- Sea $x = m\measuredangle ATB$ y $m\overset{\frown}{TB} = \beta$
- Por propiedad $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{AN}$
- Como $\overline{TN}$ es diámetro entonces $m\measuredangle TNB = x$
  $\Rightarrow m\measuredangle NTB = 90° - x \Rightarrow m\measuredangle TNB = x$
- Por ángulo inscrito: $x = \dfrac{\beta}{2}$
- Se concluye:

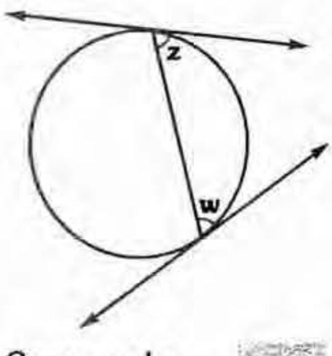
$$m\measuredangle ATB = \frac{m\overset{\frown}{TB}}{2} \quad y \quad m\measuredangle NTB = \frac{m\overset{\frown}{TLB}}{2}$$

**Observación**

*Como consecuencia de lo anterior se deduce:*



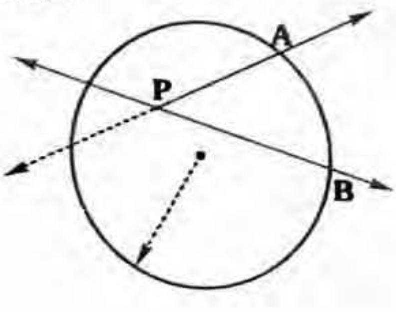

*Se cumple:* $x = y$




*Se cumple:* $w = z$

## ÁNGULO INTERIOR

Es el ángulo cuyo vértice es un punto interior y sus lados están sobre rectas secantes a la circunferencia.

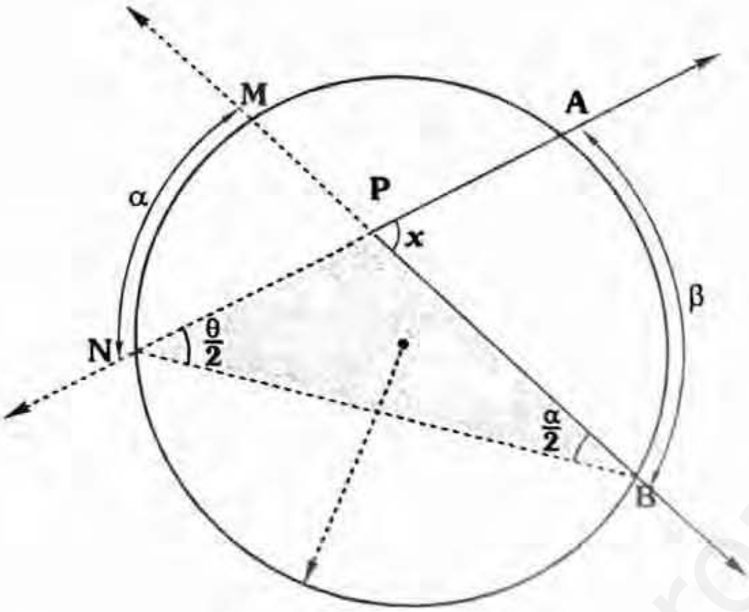



- P es un punto interior.
- $\measuredangle APB$: ángulo interior.
- $\overset{\frown}{AB}$: arco correspondiente por el $\measuredangle APB$.

### TEOREMA

La medida del ángulo interior es la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes a dicho ángulo y de su opuesto por el vértice.

Prueba




- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle ANB = \frac{\theta}{2} \quad \text{y}$$

$$m\sphericalangle MNB = \frac{\alpha}{2}$$

- En $\Delta NPB$, por ángulo exterior:

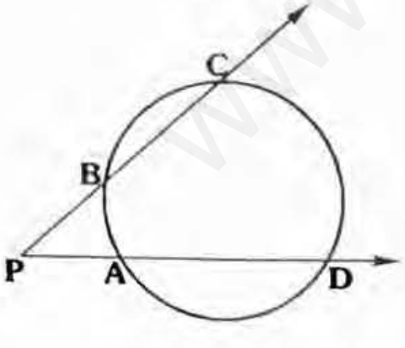
$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \; x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

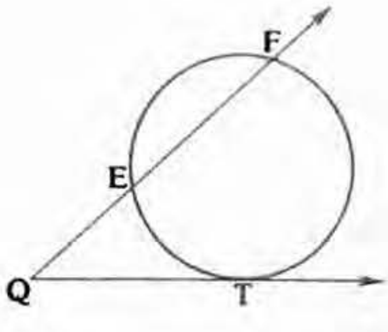
## ÁNGULO EXTERIOR

Es aquel ángulo cuyo vértice es un punto exterior y sus lados son dos rayos: ambos secantes; uno secante y uno tangente; o ambos tangentes.

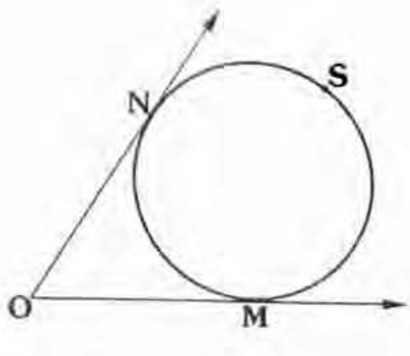
Así tenemos:




- P: Punto exterior
- $\sphericalangle CPD$: $\sphericalangle$exterior
- $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ arcos correspondientes al $\sphericalangle CPD$.




- Q: Punto exterior
- T: Punto de tangencia
- $\overset{\frown}{ET}$ y $\overset{\frown}{TF}$ arcos correspondientes al $\sphericalangle CPD$.

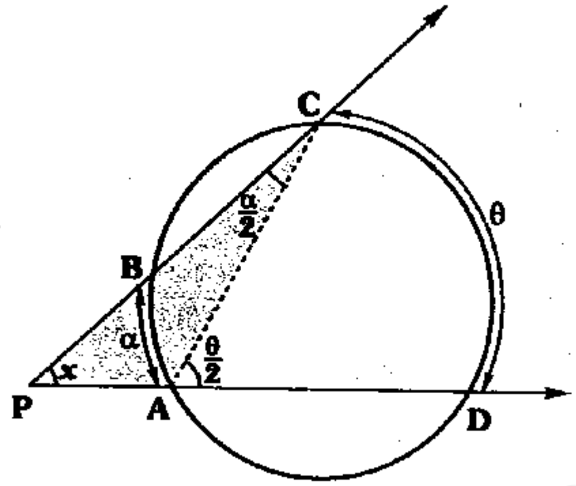



- O: es punto exterior
- M y N: Punto de tangencia
- $\overset{\frown}{MN}$ y $\overset{\frown}{MSN}$ arcos correspondientes al $\sphericalangle MON$.

## TEOREMA

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos correspondientes.

**Prueba**

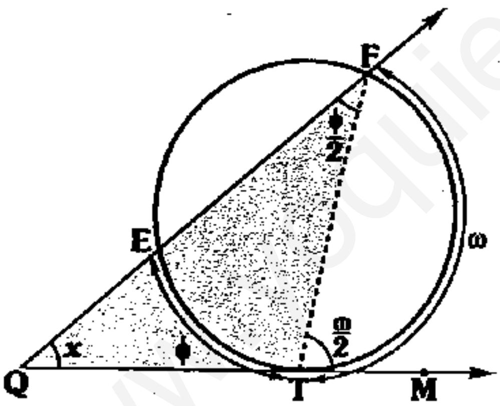



- Sea: $m\widehat{CD} = \theta$ y $m\widehat{AB} = \alpha$
- Por ∢inscrito:

$$m∢ACB = \frac{\alpha}{2} \quad y \quad m∢CAD = \frac{\theta}{2}$$

- En el $\Delta APC$: $x + \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore \boxed{x = \frac{\theta - \alpha}{2}}$$




- Por ∢inscrito:

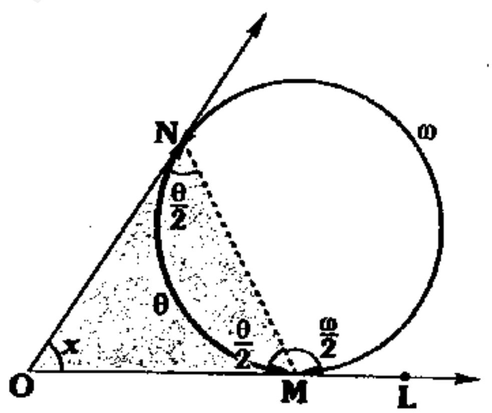
$$m∢QFT = \frac{\phi}{2}$$

- Por ∢semiinscrito:

$$m∢MTF = \frac{\omega}{2}$$

- En el $\Delta QTC$: $x + \frac{\phi}{2} = \frac{\omega}{2}$

$$\therefore \boxed{x = \frac{\omega - \phi}{2}}$$



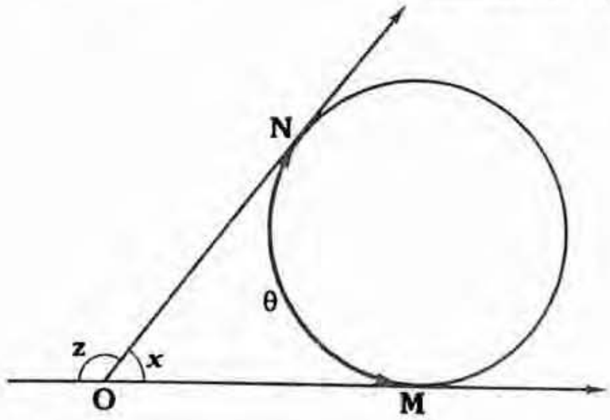

- Por ∢semiinscrito:

$$m∢NML = \frac{\omega}{2} \quad y \quad m∢ONM = \frac{\theta}{2}$$

- En el $\Delta OMN$: $x + \frac{\theta}{2} = \frac{\omega}{2}$

$$\therefore \boxed{x = \frac{\omega - \theta}{2}}$$

**Observación**



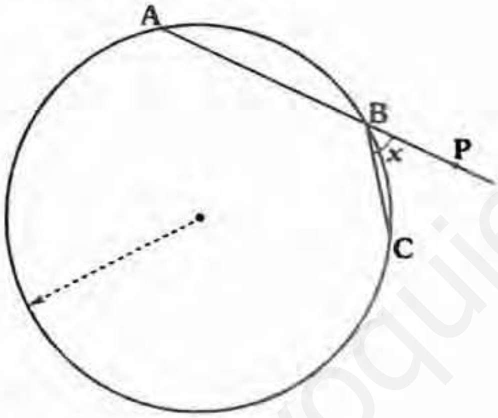

*De lo anterior, se deduce:*

$$\boxed{x+\theta=180^\circ}$$

*También:*

$$\boxed{z=\theta}$$

## ÁNGULO EXINSCRITO

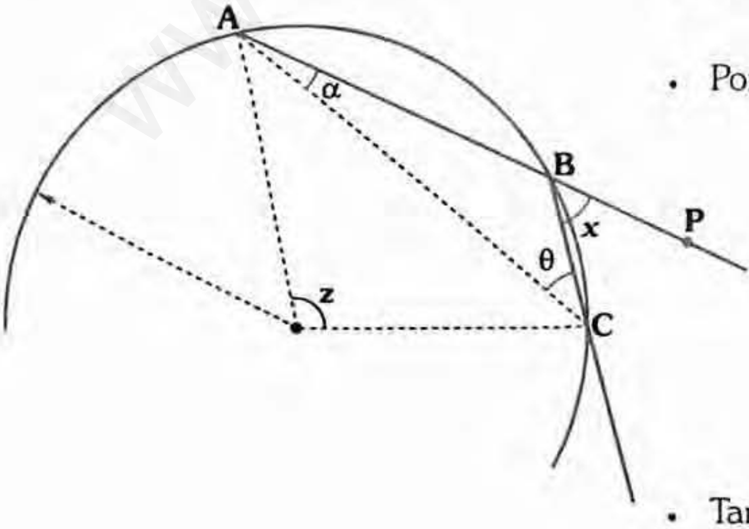



$\measuredangle PBC$: ángulo exinscrito

Se cumple:

$$x=\frac{m\widehat{ABC}}{2}$$

**Prueba**




- Sea $m\measuredangle BAC=\alpha$ y $m\measuredangle BCA=\theta$

  $\Rightarrow \; x=\alpha+\theta$

- Por ángulo inscrito:

  $m\widehat{AB}=2\theta$ y $m\widehat{BC}=2\alpha$

  $\Rightarrow \; m\widehat{ABC}=\underbrace{2\theta+2\alpha}$

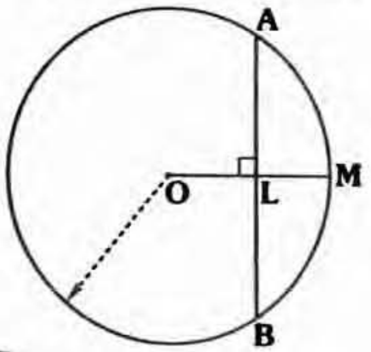
  $m\widehat{ABC}=2x$

  $\therefore \; x=\frac{m\widehat{ABC}}{2}$

- También: $\boxed{x=\frac{z}{2} \quad \text{o} \quad z=2x}$

# TEOREMAS EN LA CIRCUNFERENCIA

- El radio perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y al arco correspondiente.

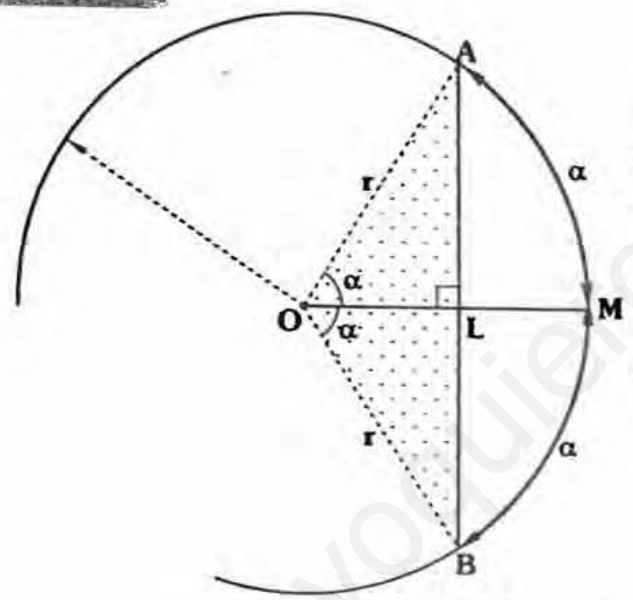



En el gráfico, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Se cumple:

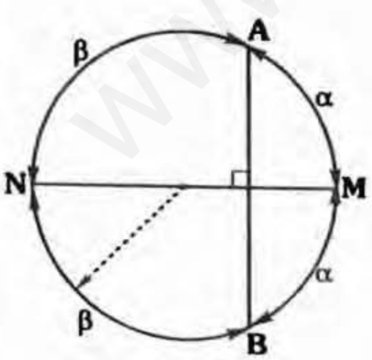
$AL = LB$ y $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$

**Prueba**

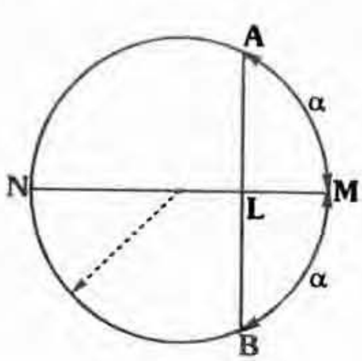



- $\Delta AOB$: isósceles
- Como $\overline{OL}$ es altura entonces también es mediana $(AL = LB)$ y bisectriz $(m\sphericalangle AOL = m\sphericalangle LOB)$.
- Por $\sphericalangle$ central: $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$

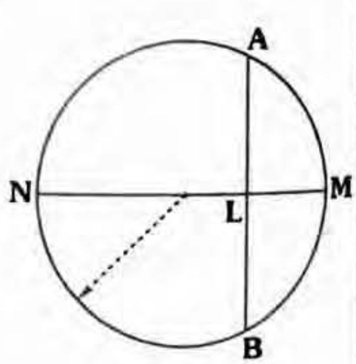
**Observación**




Si $\overline{AB} \perp \overline{NM} \Rightarrow m\overset{\frown}{AN} = m\overset{\frown}{NB}$ y $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$

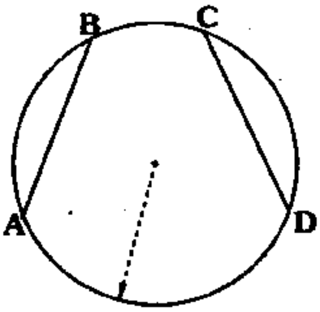



Si $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{NM}$ y $AL = LB$




Si $\overline{AB}$ no es diámetro y $AL = LB \Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{AB}$ y $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$

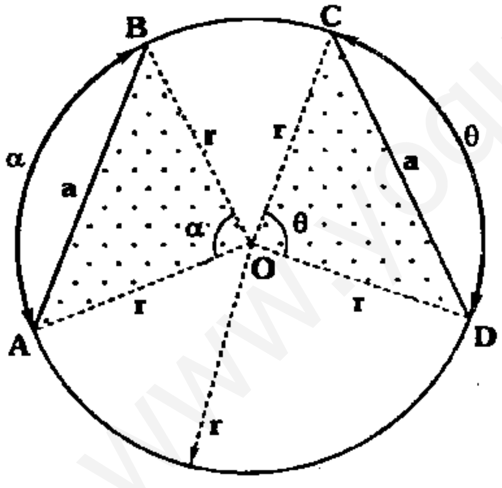
- En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son de igual longitud, sus arcos correspondientes de igual medida y viceversa.




En el gráfico:

$$\boxed{AB = CD \Leftrightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}}$$

**Prueba**



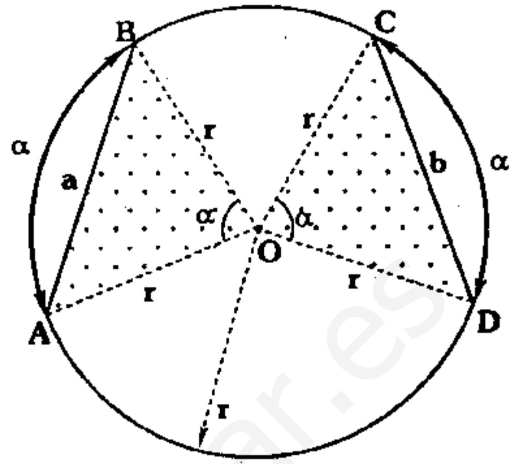

- Sea $AB=CD$, $m\overset{\frown}{AB} = \alpha$ y $m\overset{\frown}{CD} = \theta$
- $\Delta$ Por ángulo central:

$$m\sphericalangle AOB = \alpha \quad y$$
$$m\sphericalangle COD = \theta$$

- $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ (LLL)

$$\Rightarrow \alpha = \theta$$

Veamos el caso recíproco:




Si $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

- Por $\sphericalangle$ central:

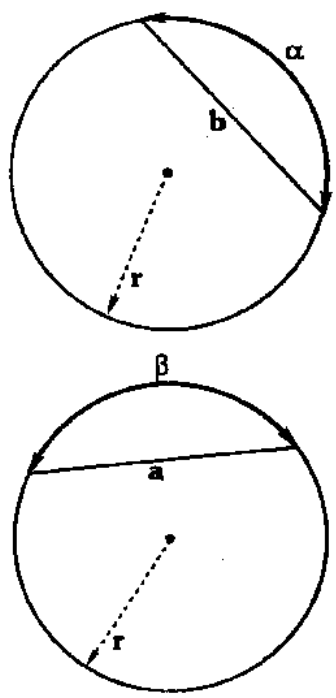
$$m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle COD$$

- $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (LAL)

$$\therefore \ a = b$$

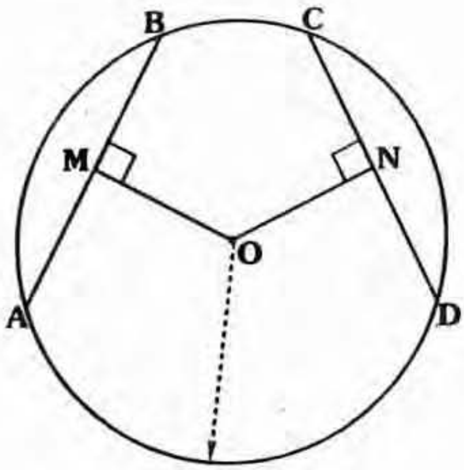
**Observación**

*Si las circunferencias son congruentes:*




*Se cumple :* $\boxed{a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta}$

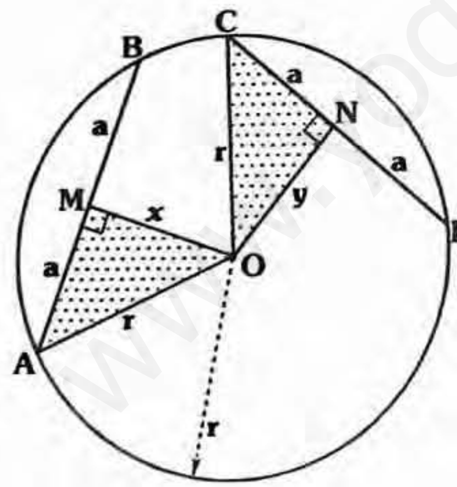
- Si dos cuerdas son de igual longitud entonces el centro equidista de dichas cuerdas.




Si AB=CD

$\Rightarrow$ OM=ON

**Prueba**




- Como AB=CD

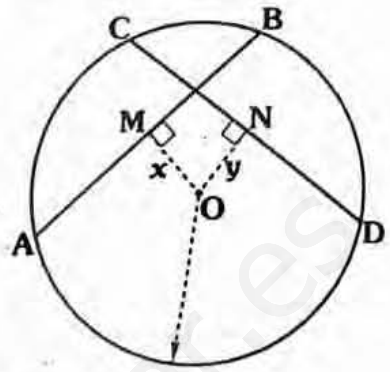
$\Rightarrow$ AM=MB=CN=ND

- $\triangle$AMO $\cong$ $\triangle$CNO

$\therefore$ $x=y$

**Observación**

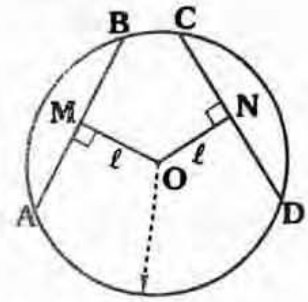
- *También el teorema es válido si las cuerdas son secantes.*




*Si* AB=CD

$\Rightarrow$ $x=y$

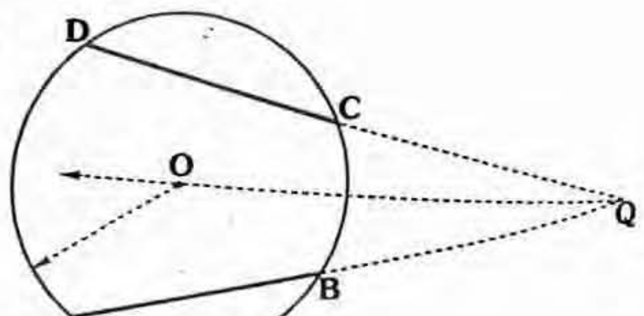
- *El recíproco del teorema también es verdadero*




*Si* OM=ON

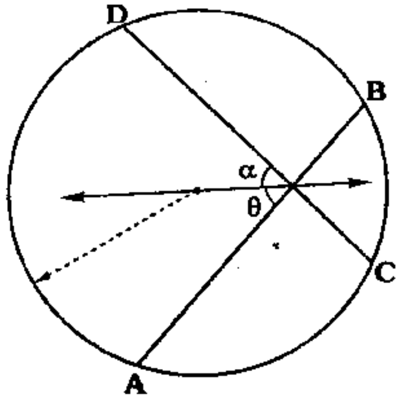
$\Rightarrow$ AB=CD

- El siguiente teorema, es consecuencia directa del anterior:



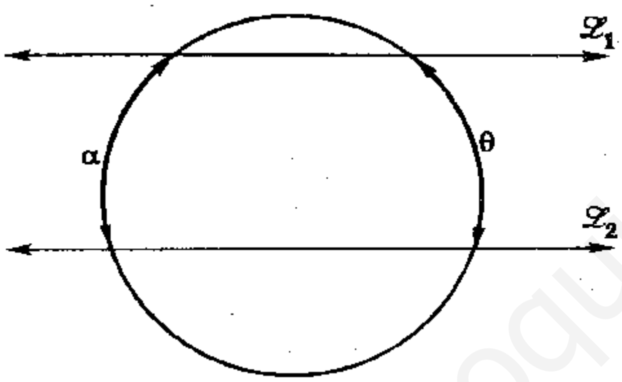

AB=CD $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{QO}$ es bisectriz del $\measuredangle$AQD

También:



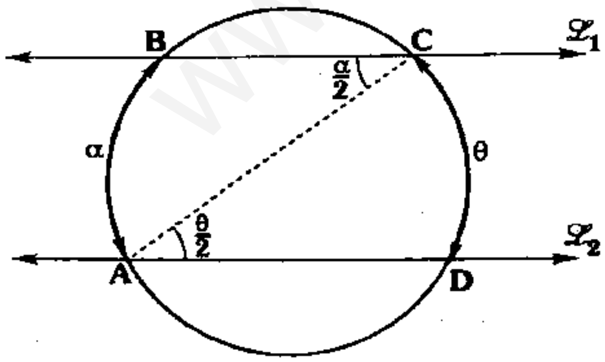

Si $AB = CD \Rightarrow \alpha = \theta$

- En un circunferencia, dos rectas secantes determinan arcos de igual medida.




Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \alpha = \theta$

**Prueba**




- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ACB = \frac{\alpha}{2} \text{ y } m\measuredangle CAD = \frac{\theta}{2}$$

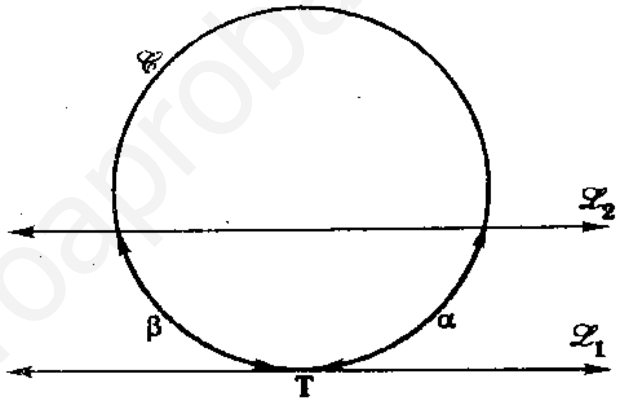
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore \quad \alpha = \theta$$

**Observación**

*Si $\alpha = \theta$ entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, la prueba es similar a la anterior.*

- En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es tangente a $\mathscr{C}$.

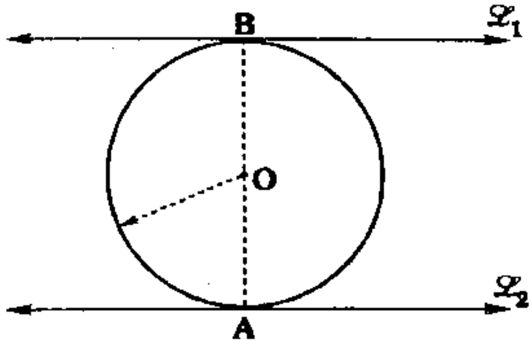



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \alpha = \beta$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

**Observación**

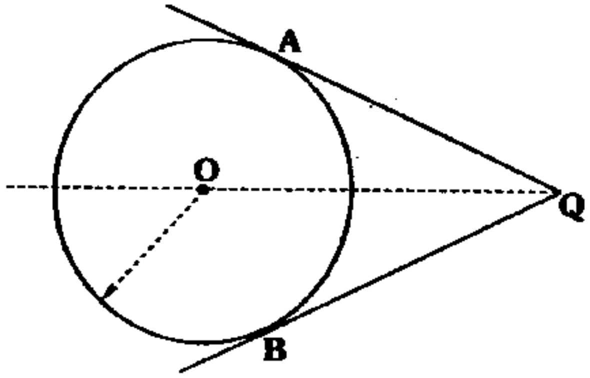
*Si ambas rectas son tangentes.*




*Si* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ *entonces* $m\overset{\frown}{AB} = 180°$

*(A, O y B: colineales)*

- En el gráfico, A y B son puntos de tangencia:

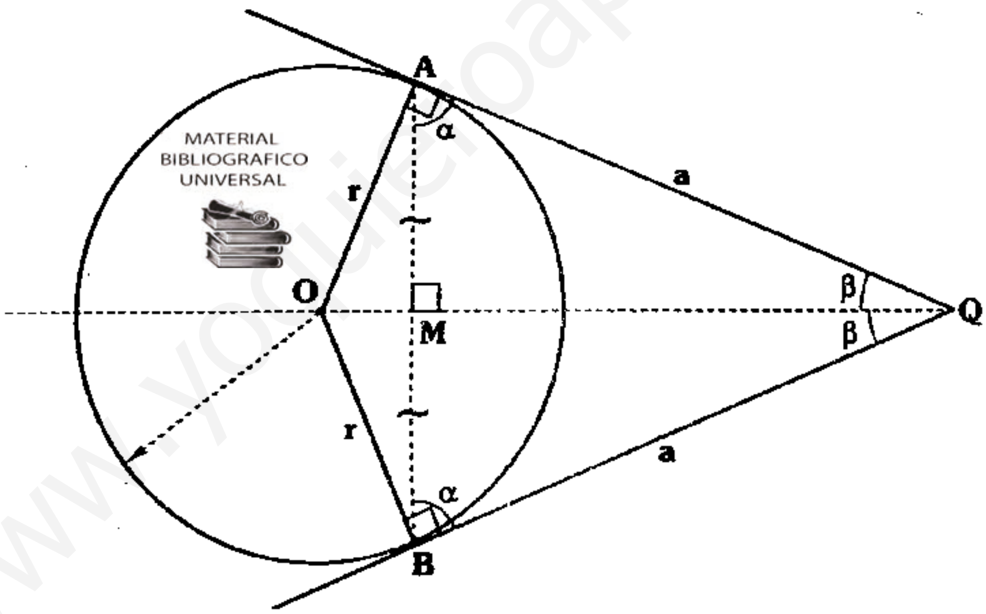



Se cumple:

$QA = QB$

$\overrightarrow{QO}$ : bisectriz del $\sphericalangle AQB$

**Prueba**





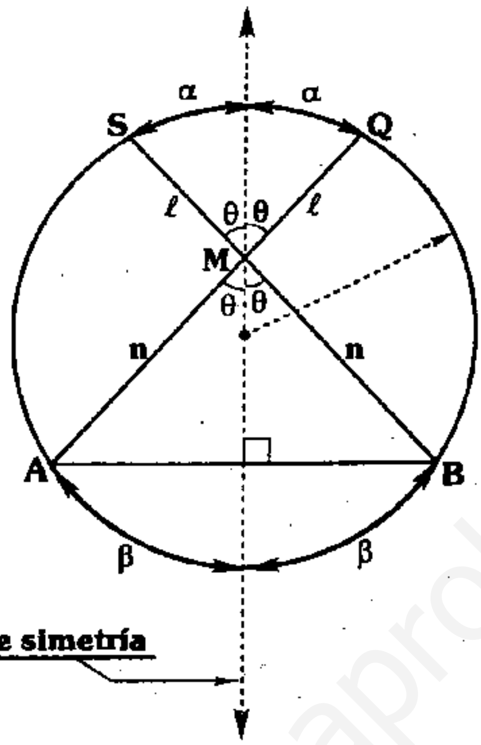

- Sea $m\widehat{AB} = 2\alpha$ entonces por ángulo semiinscrito:

$m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle ABQ = \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta AQB$ es isósceles entonces $QA = QA$.

- Como $OA = OB$, $\overline{OA} \perp \overline{QA}$ y $\overline{OB} \perp \overline{BQ}$ entonces $\overrightarrow{QO}$ es bisectriz.

- Además: como el $\Delta AQB$ es isósceles entonces $\overline{QM}$ es mediana y altura.

- Toda recta que pasa por el centro es eje de simetría.

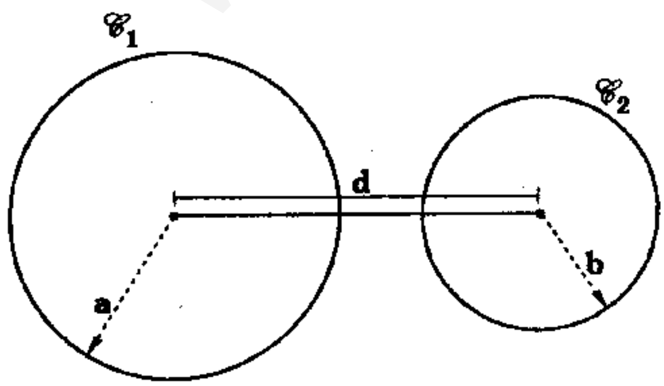



# POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO

Dos circunferencias en un plano se pueden ubicar de seis posiciones diferentes, así tenemos:

## 1 CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

Cuando una de ellas se encuentra en la región exterior de la otra.




- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias exteriores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$

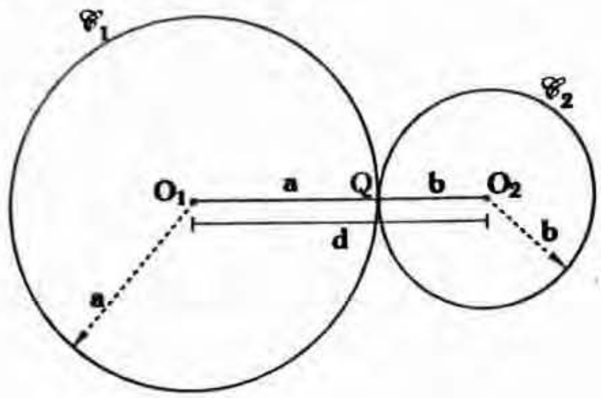
Se cumple:

$$d > a + b$$

d: distancia de centros

## 2 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES

Cuando tienen un solo punto en común y los demás puntos de una de ellas están en la región exterior de la otra.




- Q: punto de tangencia
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{Q\}$

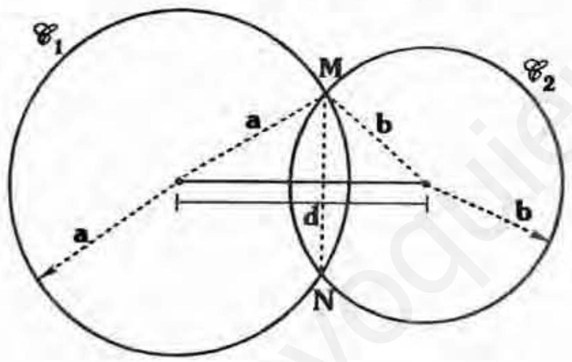
Se cumple:

* $O_1$, Q y $O_2$ son colineales

* $d=a+b$

## 3 CIRCUNFERENCIAS SECANTES

Cuando hay dos puntos de intersección (al segmento comprendido entre dichos puntos se le llama: **"cuerda común"**)



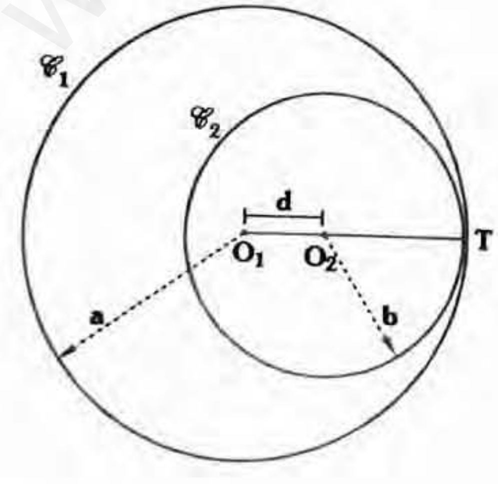

- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{M, N\}$
- $\overline{MN}$ : cuerda común
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias secantes

Se cumple:

$$|a-b| < d < a+b$$

## 4 CIRCUNFERENCIAS TANGENES INTERIORES

Cuando tienen un sólo punto en común y los demás puntos de una de ellas están en la región interior de la otra.



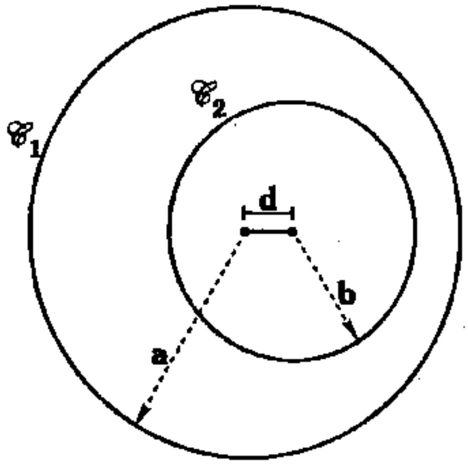

- T: Punto de tangencia
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes interiores.

Se cumple: $O_1$, $O_2$ y T son colineales

$$d=a-b$$

## 5 CIRCUNFERENCIAS INTERIORES

Cuando las circunferencias no se intersecan y una de ellas está en la región interior de la otra.



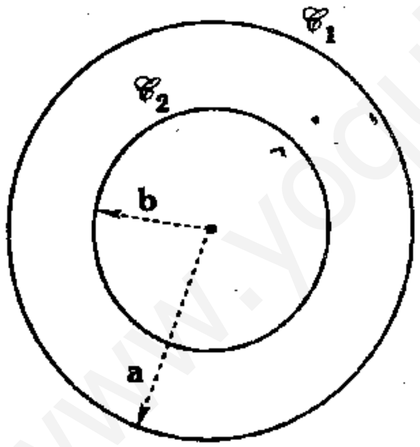

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ :circunferencias interiores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$

Se cumple:

$$d<a-b$$

## 6 CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

Cuando tienen el mismo centro.




- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ :circunferencias interiores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$
- d: distancia de centros entonces:

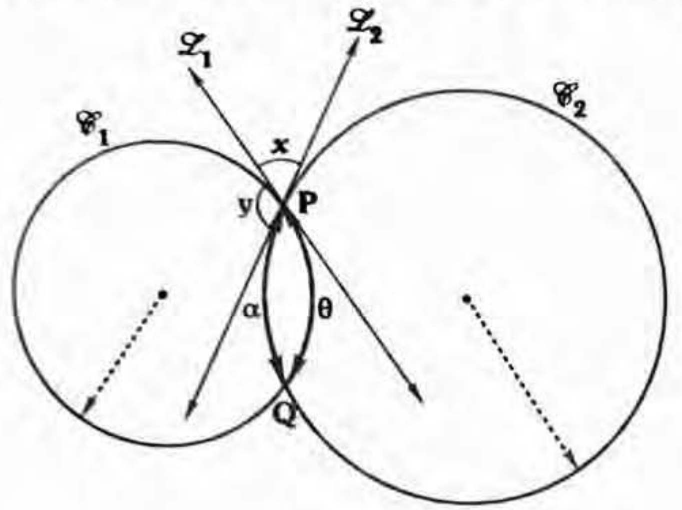
$$d=0$$

**Observación**

*Se llama **circunferencias disjuntas** a aquel grupo de circunferencias cuya intersección es el conjunto vacio.*

## ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS (1)

Es el ángulo formado por las rectas tangentes en uno de los puntos de intersección.



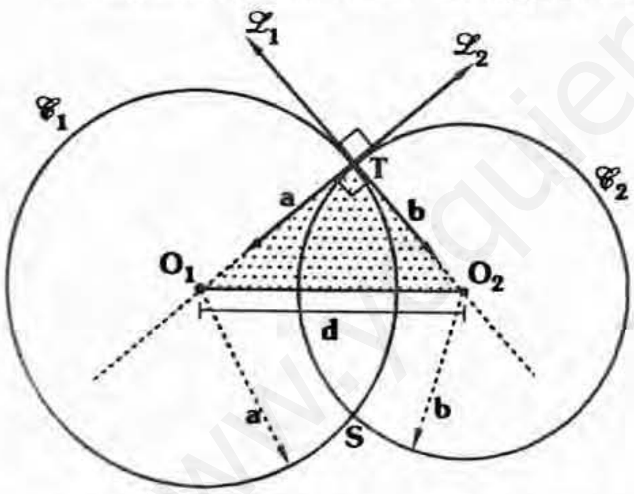

- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{P, G\}$
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: tangente a $\mathscr{C}_1$ en P
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: tangente a $\mathscr{C}_2$ en P
- "x" ó "y": medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Se cumple:

$$x=\frac{\alpha+\theta}{2}$$

## CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

Son dos circunferencias donde el ángulo entre ellas es recto.

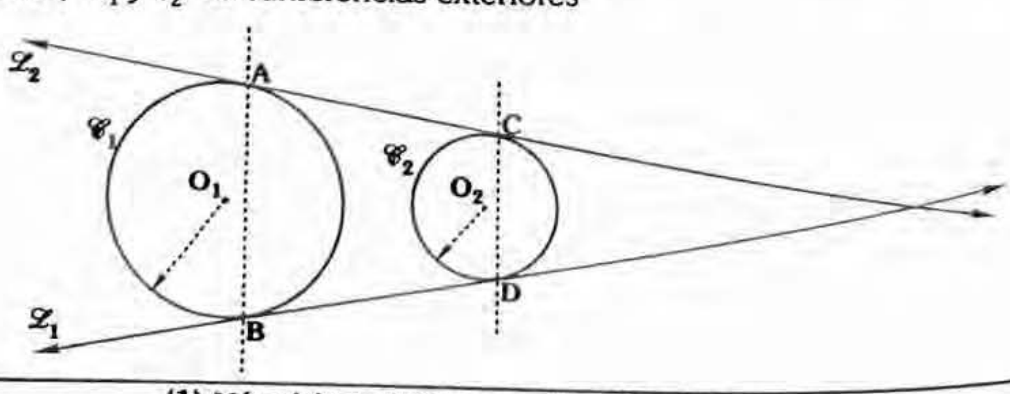



- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias ortogonales
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ pasa por el centro de $\mathscr{C}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ pasa por el centro de $\mathscr{C}_1$

Se cumple: $d^2 = a^2 + b^2$

## PROPIEDADES SOBRE POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias exteriores




(1) Más adelante definiremos el ángulo entre dos curvas

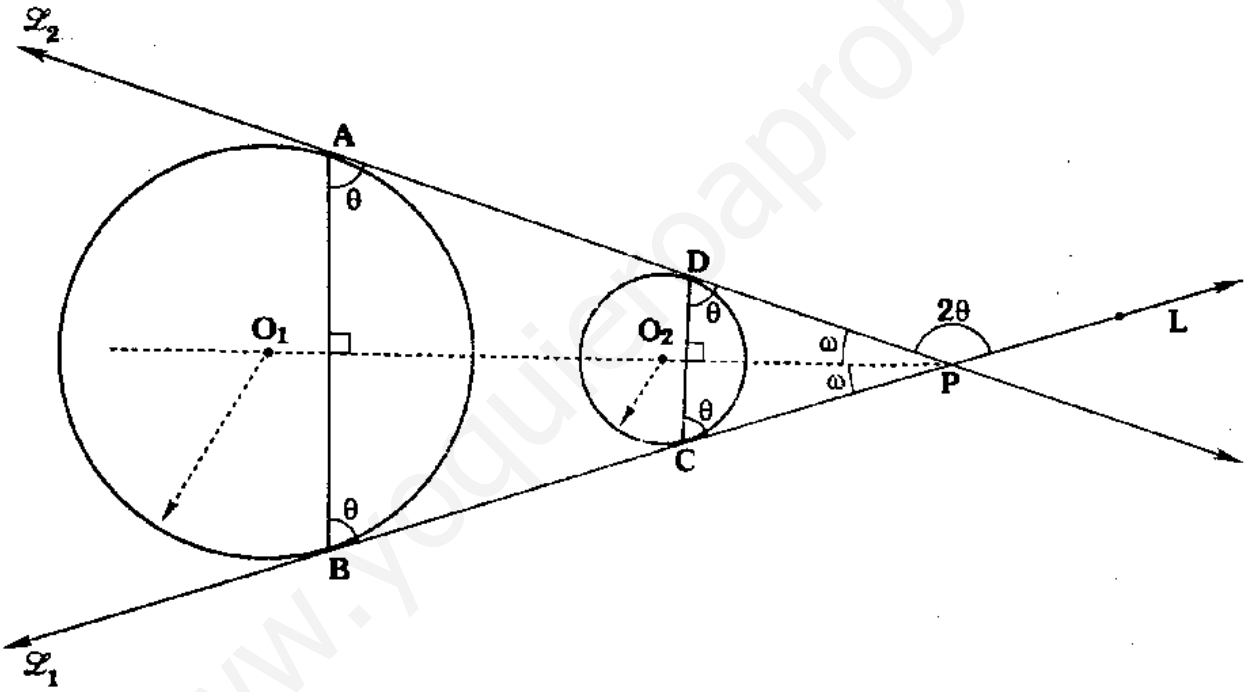
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: tangentes comunes exteriores (A, B, C y D: *puntos de tangencia*)
- Se cumple:

• $AC = BD$ • $\overline{AB} // \overline{CD}$ • $O_1$, $O_2$ y P : colineales

**Prueba**

- Como $PA = PB$ y $PC = PD$ $\Rightarrow$ $AD = PA - PD = \underbrace{PB - PC}$

$\therefore$ $AD = BC$




- Como $\Delta PCD$ y $\Delta PBA$ : isósceles

$\Rightarrow$ $m\measuredangle PDC = \theta$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle DCP = \theta$

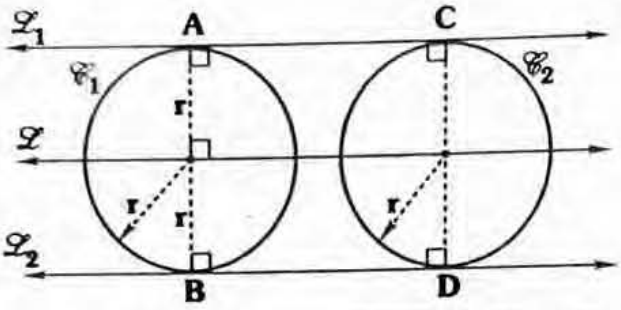
$\Rightarrow$ $m\measuredangle LDP = 2\theta$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBA$

$\Rightarrow$ $\overline{AC} // \overline{DC}$

- $O_1$ y $O_2$ están en la bisectriz del $\measuredangle APB$ $\Rightarrow$ $O_1$, $O_2$ y P : colineales

**Observación**

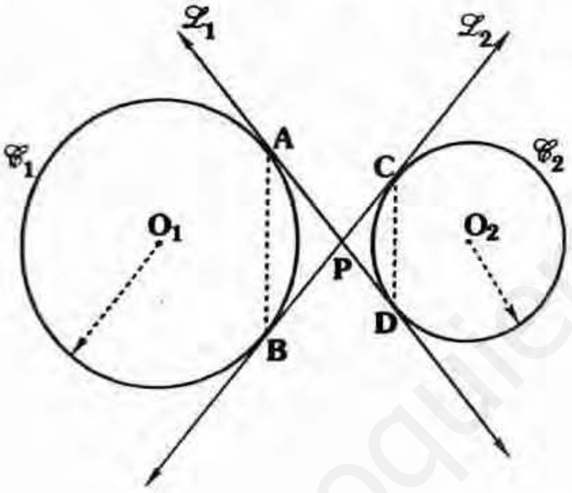
*Si* $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_2$, *entonces:*




*Se cumple:* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

*También:* AC=BD

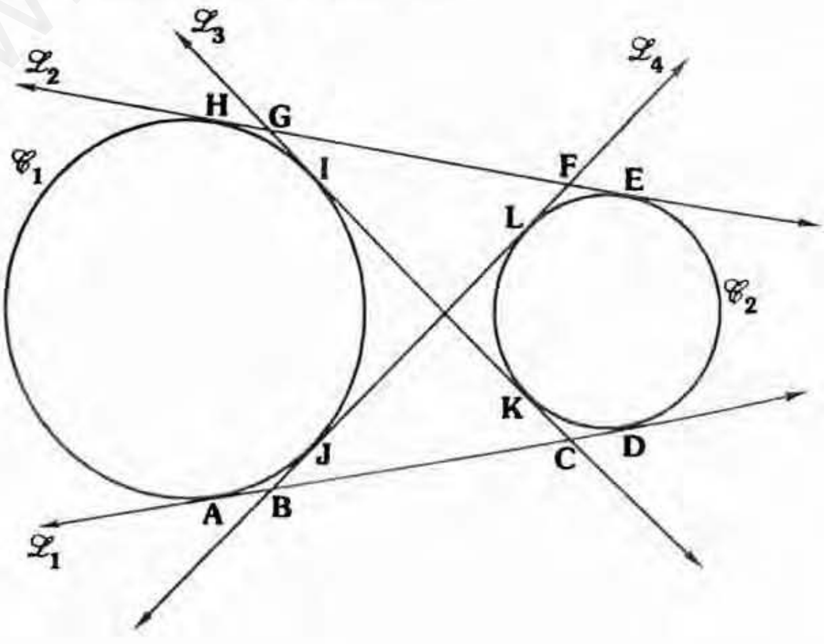
- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son exteriores




- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: tangentes comunes interiores (A, B, C y D: Puntos de tangencia)
- Se cumple:
  * AD = BC
  * $\overline{AB} // \overline{CD}$
  * $O_1$, P y $O_2$: colineales

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

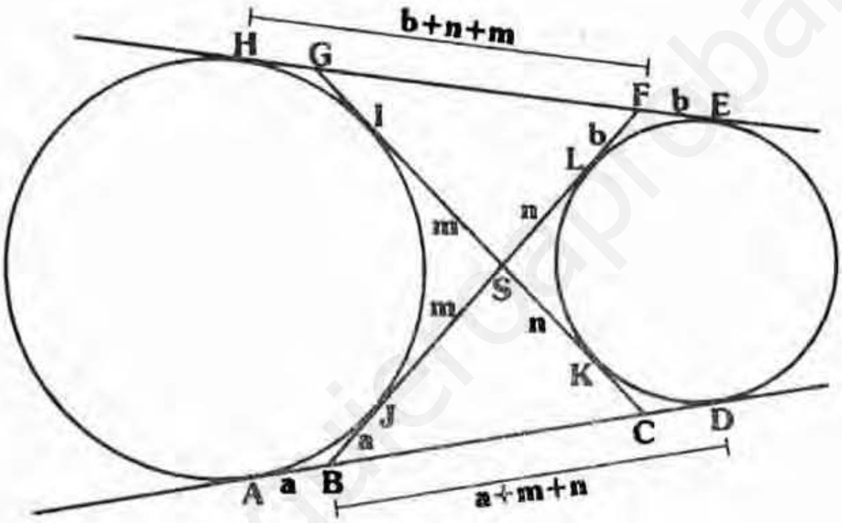
- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias exteriores



- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$: Tangentes comunes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
- Se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{c} HE = AD = BF = GC \\ AB = CD = HG = FE \end{array}}$$

**Prueba**



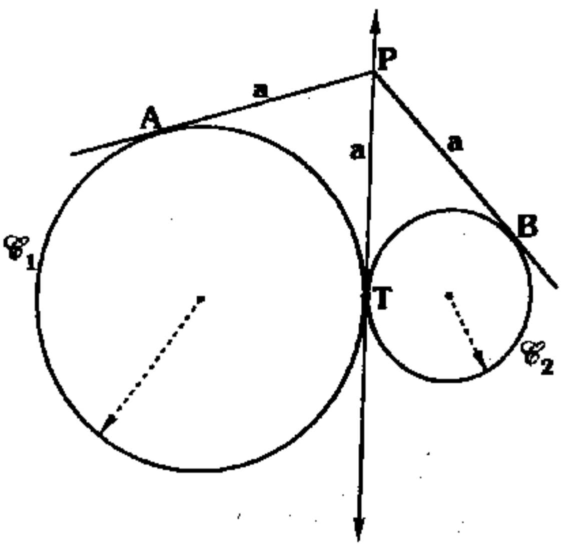

- HE=AD ya fue probado.
- Sea AB=a; JS=m; SL=n, LF=FE=b

$$\Rightarrow BL=BD=a+m+n \quad y \quad FH=FJ=m+n+b$$

- Como HE=AD $\Rightarrow 2b+\cancel{n+m}=2a+\cancel{m+n} \Rightarrow b=a$
- Luego notamos: AD=2a+m+n=BF
- También: como,

$$\left.\begin{array}{l} AD=2a+m+n \Rightarrow CD=a \\ HE=2b+n+m \Rightarrow HG=b \end{array}\right\} CD=HG$$

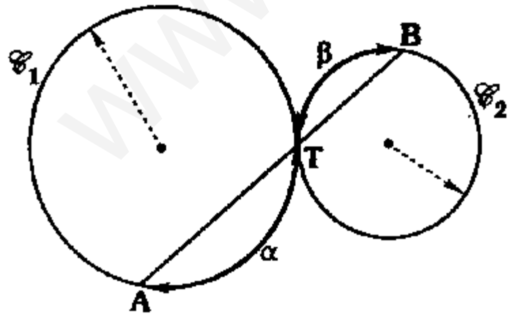
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores




- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$\boxed{PA = PT = PB}$$

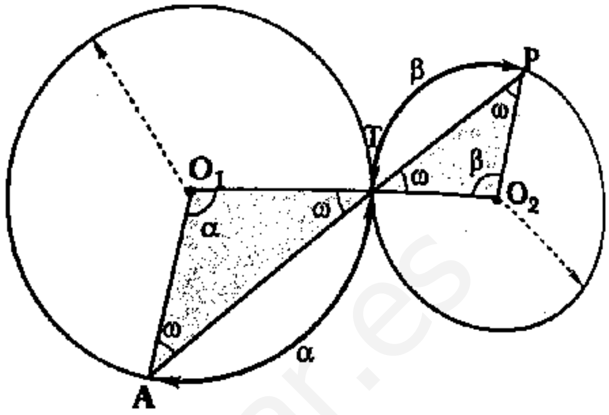
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores .




- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

**Prueba**

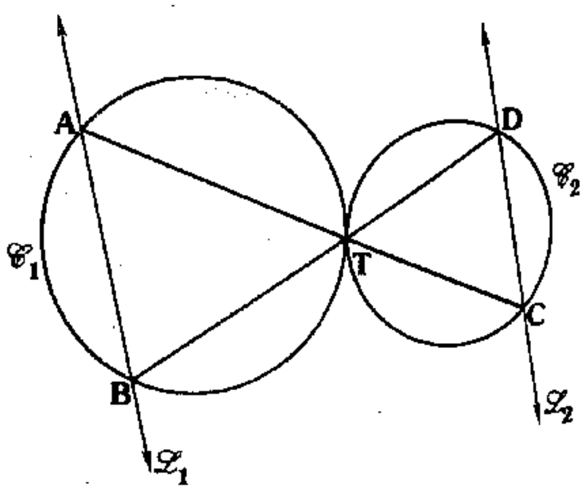



- Como $O_1$, T y $O_2$ son colineales
- $\Delta AO_1T$ y $\Delta AO_2T$ : isósceles
- En $\bowtie$:

$$\alpha + \omega = \beta + \omega$$

$$\therefore \ \alpha = \beta$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: tangentes exteriores




- T es punto de tangencia
- Se cumple:

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}}$$

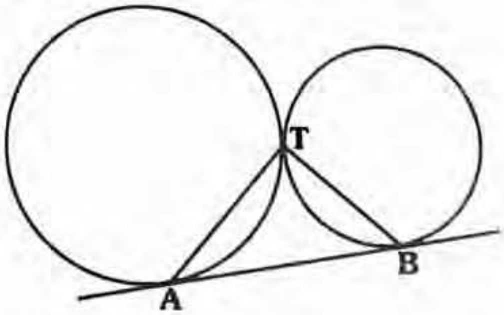
**Prueba**

- Como : $m\overset{\frown}{BT} = m\overset{\frown}{TD}$

$$\Rightarrow \; m\sphericalangle BAT = m\sphericalangle TCD$$

$$\therefore \; \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

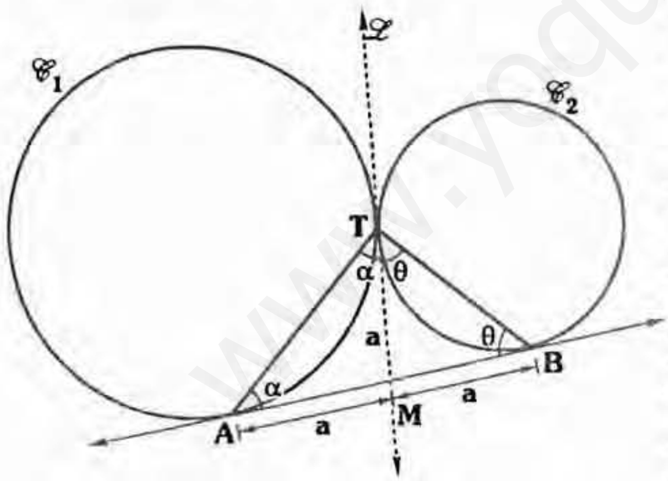
▪ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ : tangente exteriores




- A, T y B: Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\sphericalangle ATB = 90^\circ$$

**Prueba**

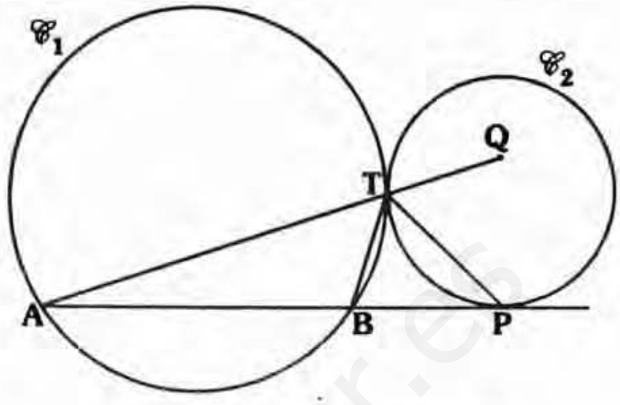



- Se traza la tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en T, la cual a $\overline{AB}$ en M entonces AM=MT=MB
- En el triángulo ATB:

$$2\alpha + 2\theta = 180^\circ$$

$$\therefore \; \alpha + \theta = 90^\circ$$

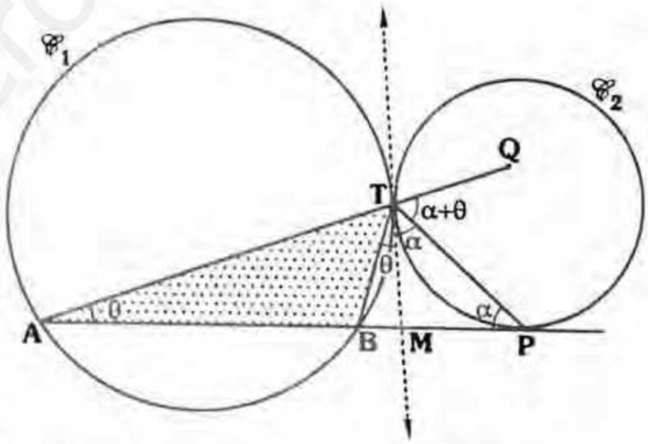
▪ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencia tangentes exteriores




- T y P: Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\sphericalangle BTP = m\sphericalangle PTQ$$

**Prueba**



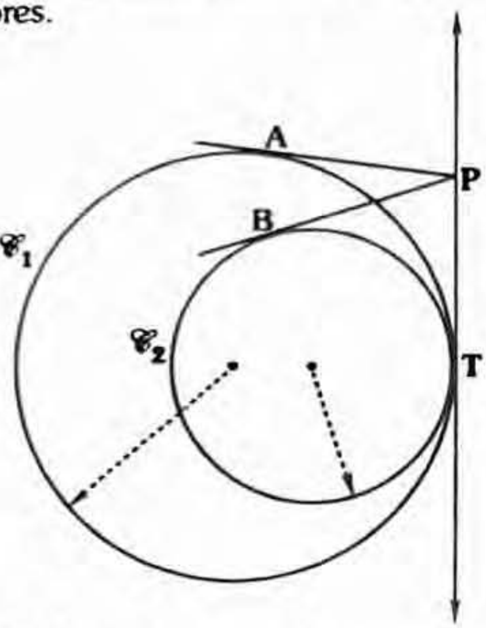

- Sea $m\sphericalangle BAT = \theta \Rightarrow m\overset{\frown}{TB} = 2\theta$
- Se traza la tangente común en T, que corta a $\overline{BP}$ en M.
- Por ∢ semiinscrito: $m\sphericalangle BTM = \theta$
- $m\sphericalangle MTP = m\sphericalangle MPT = \alpha$
- En ΔATP: $m\sphericalangle QTP = \underbrace{\alpha + \theta}_{m\sphericalangle BTP}$

$$\therefore \; m\sphericalangle BTP = m\sphericalangle QTP$$

**Observación**

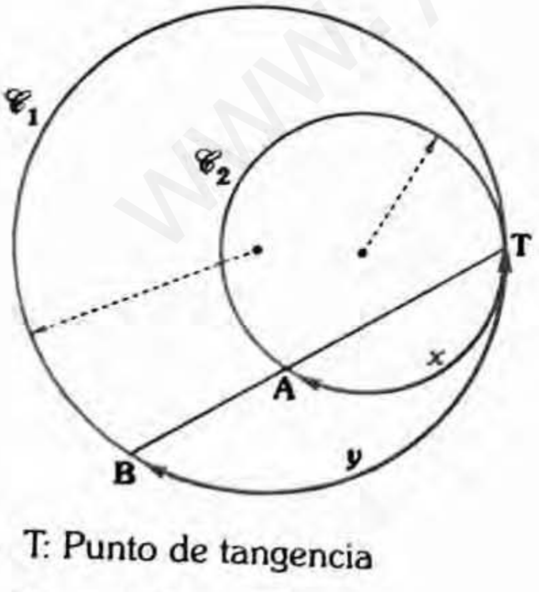
*Se cumple que $\overline{TP}$ es bisectriz exterior para el $\Delta BTA$.*

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencia tangentes interiores.



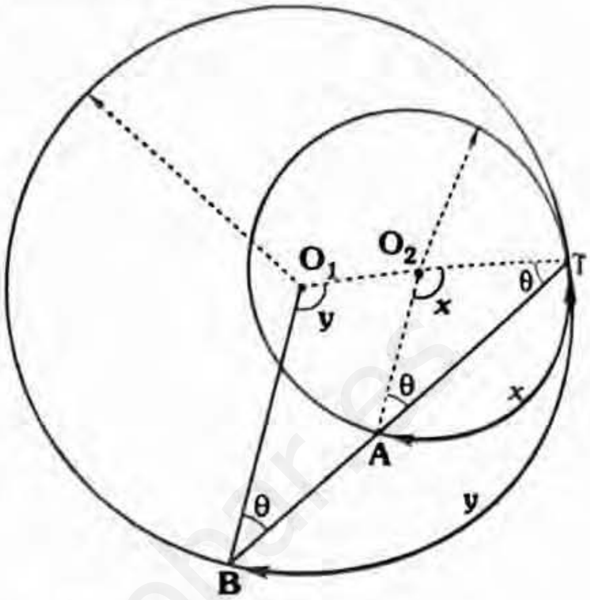

- T, A y B puntos de tangencia.
- Se cumple: $PA=PB=PT$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: son circunferencias tangentes interiores.




- T: Punto de tangencia
- Se cumple: $x=y$

**Prueba**




- Por ∢ central:

$m∢BO_1=y$ y $m∢AO_2T=x$

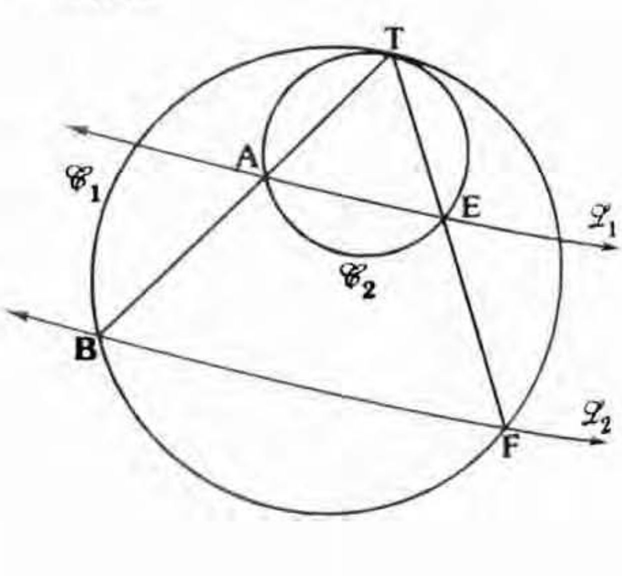
- $O_1$, $O_2$ y T son colineales
- Los triángulos: $AO_2T$ y $BO_1T$ son isósceles

$\Rightarrow\ m∢O_2TA=m∢O_2AT=m∢O_1BT$

$\Rightarrow\ \overline{O_1B}//\overline{O_2A}$

$\therefore\ x=y$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$\boxed{\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2}$$

**Prueba**

- Como:

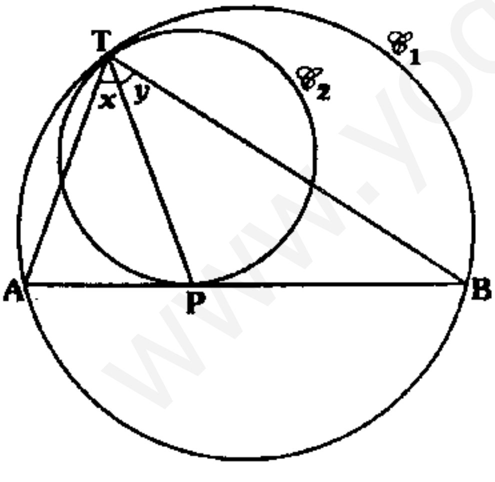
$$m\widehat{TE} = m\widehat{TF}$$

$$\Rightarrow \; m\measuredangle EAT = m\measuredangle FBT$$

- Por recíproco de la propiedad de ángulos correspondientes:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$$

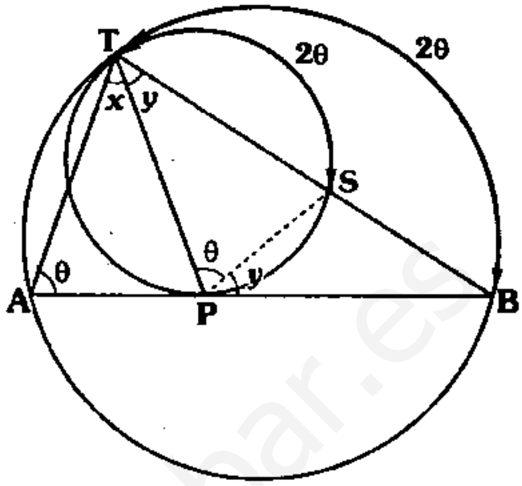
▪ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores




- En el gráfico, T y P son puntos de tangencia.
- Se cumple:

$$\boxed{x = y}$$

**Prueba**




- Como:

$$m\widehat{TS} = m\widehat{TB}$$

$$\Rightarrow \; m\measuredangle TPS = m\measuredangle TAB = \theta$$

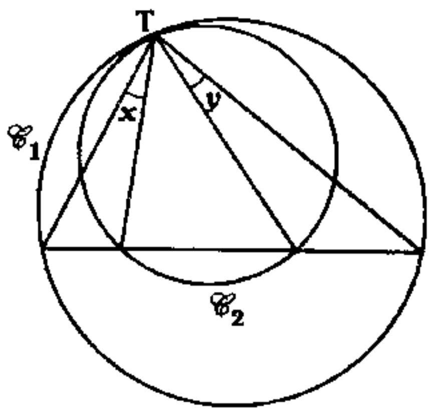
- Por ángulo inscrito y semiinscrito:

$$m\measuredangle PTS = m\measuredangle SPB = y$$

- En $\Delta ATP$: $x + \theta = \theta + y$

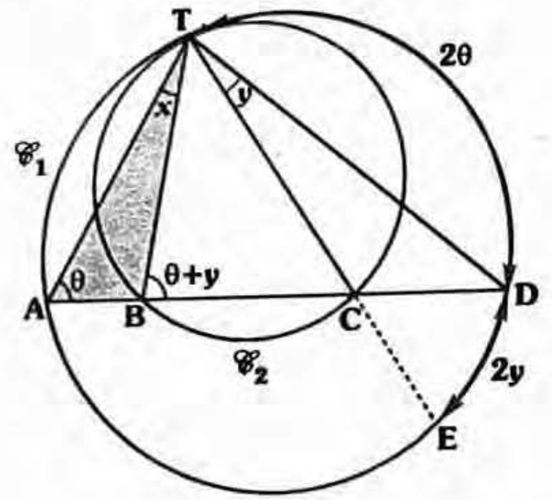
$$\therefore \; x = y$$

▪ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes interiores




- T: Punto de tangencia
- Se cumple: $\boxed{x = y}$

Prueba




- Se prolonga $\overline{TC}$ hasta que corte a $\mathscr{C}_1$ en E.
- Sea:

$$m\measuredangle TAD = \theta$$

$$\Rightarrow \ m\overset{\frown}{TD} = 2\theta$$

- Por $\measuredangle$ inscrito:

$$m\overset{\frown}{ED} = 2y$$

- Como:

$$m\overset{\frown}{TC} = m\overset{\frown}{TDE} = 2\theta + 2y$$

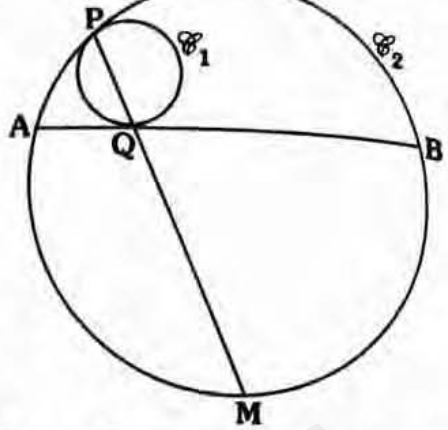
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle TBC = \theta + y$$

- En $\Delta ABT$:

$$x + \cancel{\theta} = \cancel{\theta} + y$$

$$\therefore \ x = y$$

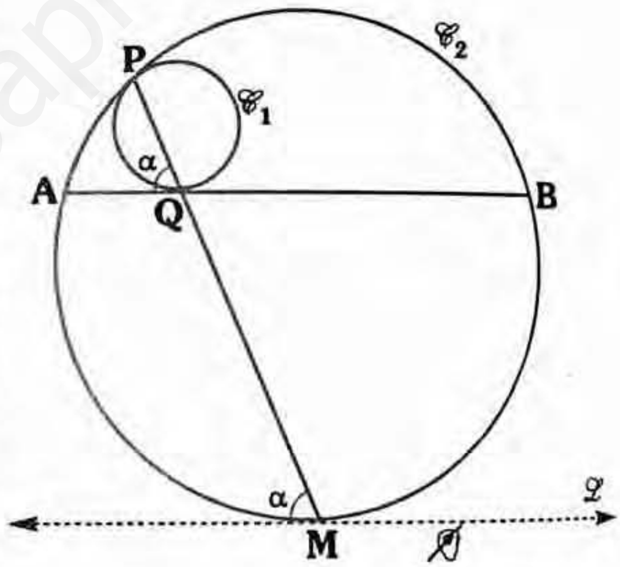
- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes interiores.




- Si P y Q son puntos de tangencia
- Se cumple:

$$\boxed{m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}}$$

Prueba




- Se traza la tangente en M, como:

$$m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{PAM}$$

$$\Rightarrow \ m\measuredangle AQP = m\measuredangle NMP$$

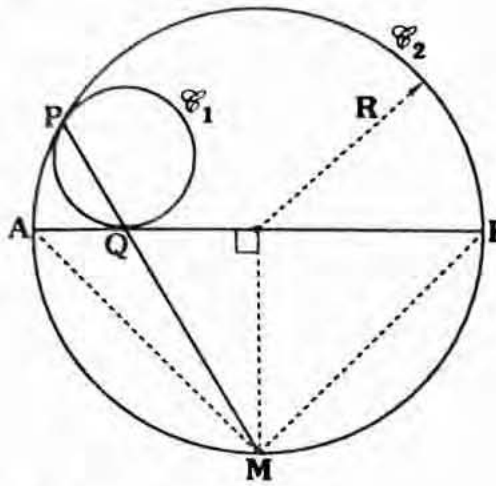
- Luego:

$$\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$$

$$\therefore \ m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$$

**Observación**

- *Como caso particular del teorema anterior veamos:*

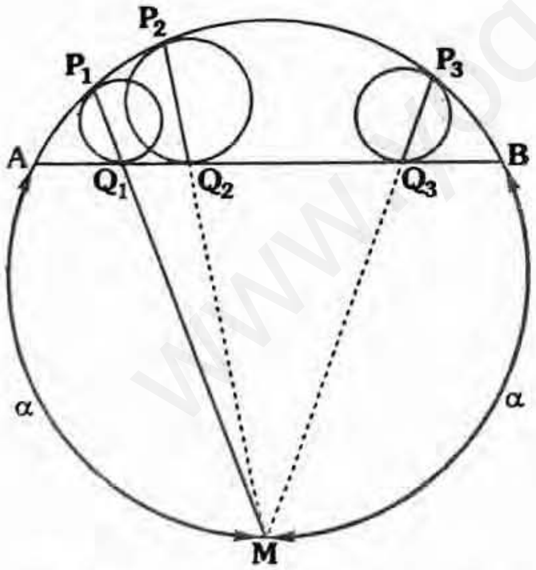



*Se cumple:*

$$m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB} = 90°$$

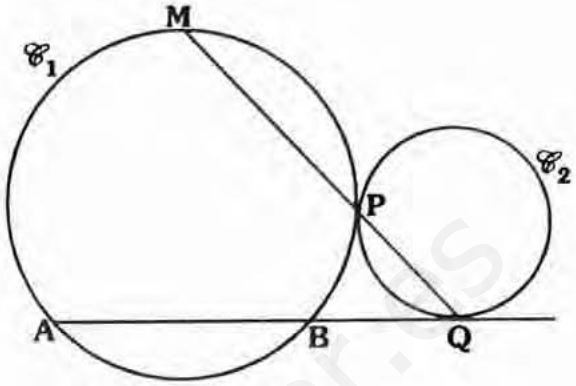
*También:*

$$AM = MB = R\sqrt{2}$$




- $P_i$ *y* $Q_i$*: Puntos de tangencia*
- *Se cumple:* $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$, $\overleftrightarrow{P_3Q_3}$ ... *concurren*

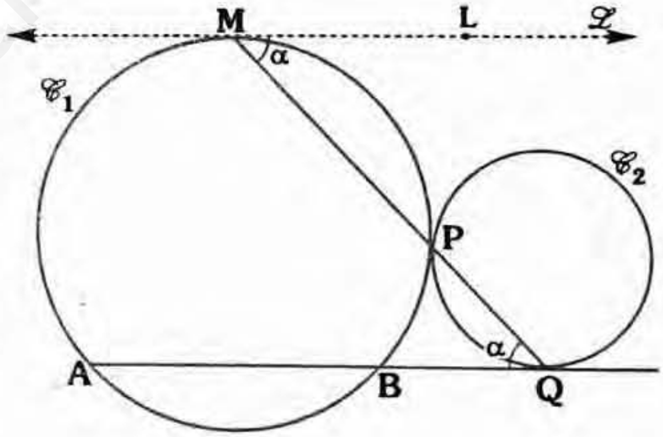
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ : circunferencias tangentes exteriores.




- Q y P : Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$$

**Prueba**




- Por M se traza la tangente a $\mathscr{C}_1$.
- Como:

$$m\overset{\frown}{MP} = m\overset{\frown}{PQ}$$

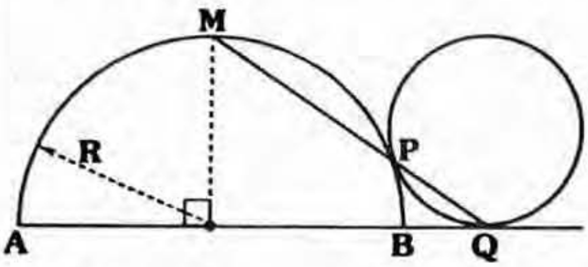
$$\Rightarrow m\measuredangle AQP = m\measuredangle PML$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \,//\, \overline{AB}$$

$$\therefore \quad m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MPB}$$

**Observación**

- *Casos particulares del teorema*

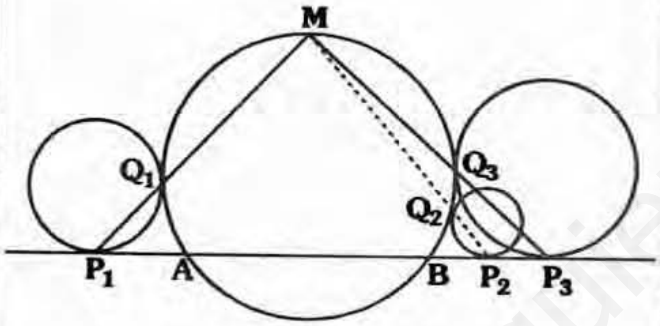



*Se cumple:*

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = 90^\circ$$

$$AM = MB = R\sqrt{2}$$

- *También:*



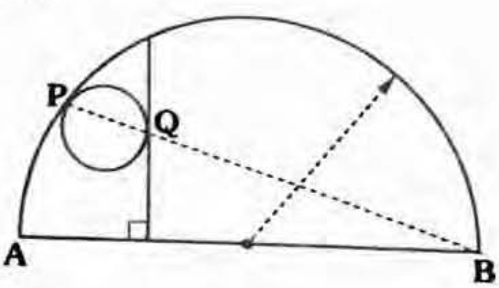

- $P_i$ y $Q_i$: *Puntos de tangencia*
- *Se cumple:*

$$\overrightarrow{P_1Q_1},\ \overrightarrow{P_2Q_2},\ \overrightarrow{P_3Q_3},\ \ldots$$

*son concurrentes*

▭ Los siguientes casos de colinealidad se pueden demostrar como casos particulares.

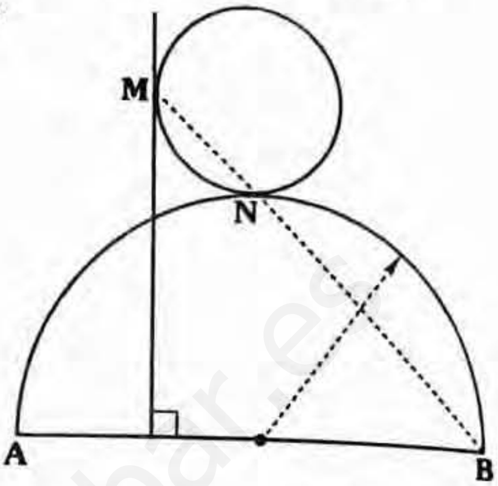
*




- P y Q: Puntos de tangencia
- Se cumple:

P, Q y B: colineales

*

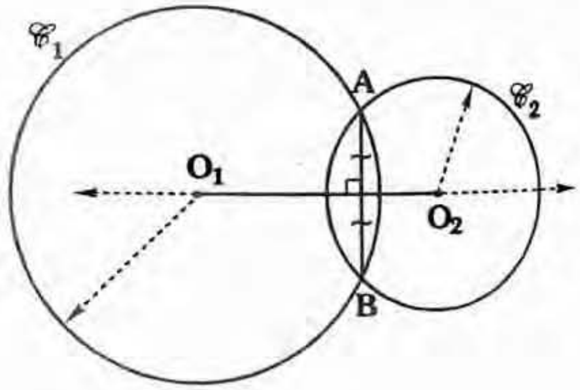



- M y N son puntos de tangencia
- Se cumple:

M, N y B: colineales

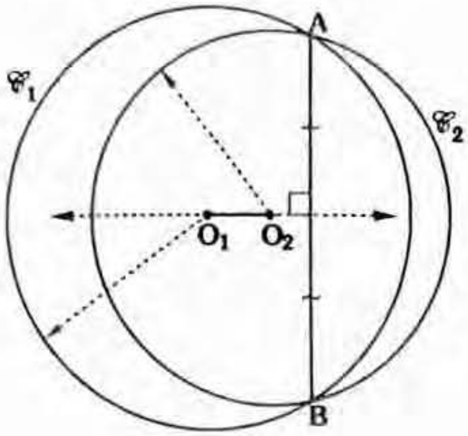
*Las pruebas se deja como ejercicio para el lector.*

▭ En dos circunferencias secantes la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda común.

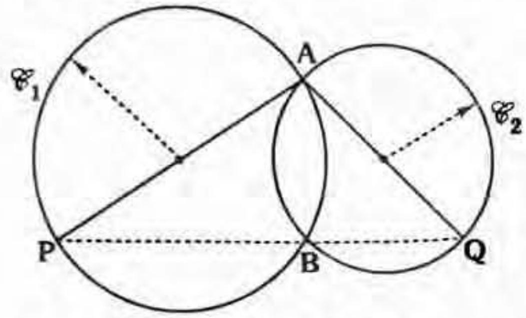



- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: secantes
- $\overline{AB}$ : Cuerda común
- Se cumple: $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

También, se puede presentar:




- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias secantes



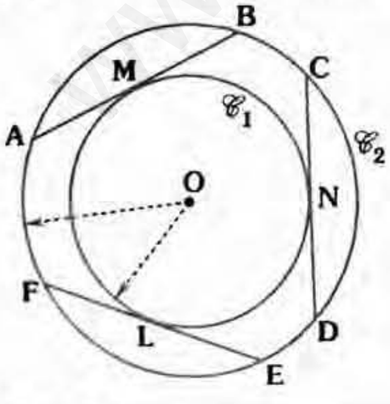

- Se cumple: P, B y Q son colineales

**Prueba**

- Basta observar que:

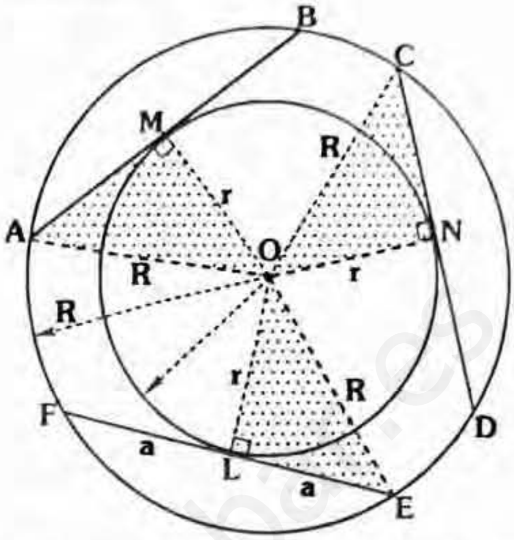
$$m\measuredangle ABP = m\measuredangle ABQ = 90^\circ$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias concéntricas




- M, N y L son puntos de tangencia
- Se cumple: AB=CD=FE

**Prueba**

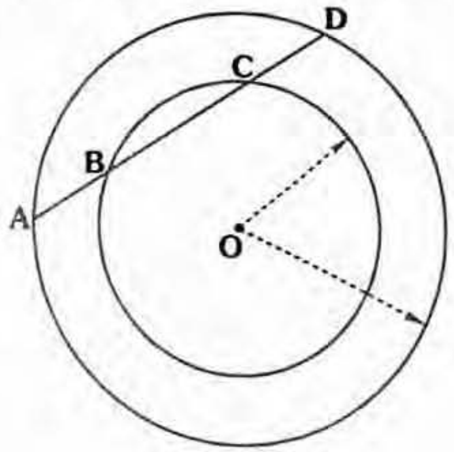



- Notemos que cada punto de tangencia es punto medio de las cuerdas
- $\triangle OLE \cong \triangle ONC \cong \triangle OMA$

$$\Rightarrow AM=CN=EL=a$$

$$\therefore AB=CD=FE$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias concéntricas




- Se cumple: AB=CD

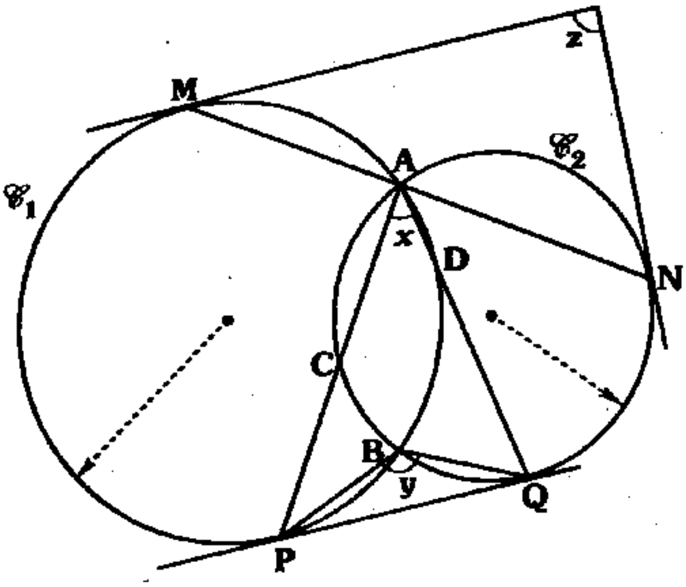
**Prueba**

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ (M en $\overline{BC}$)

$$\Rightarrow BM=MC \quad y \quad AM=MD$$

$$\therefore AB=CD$$

▭ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: ortogonales




- P, Q, M y N: Puntos de tangencia
- Se cumple:

I. $m\overset{\frown}{ACB} + m\overset{\frown}{ADB} = 180°$

II. $x = 45°$

III. $y = 135°$

IV. $z = 90°$

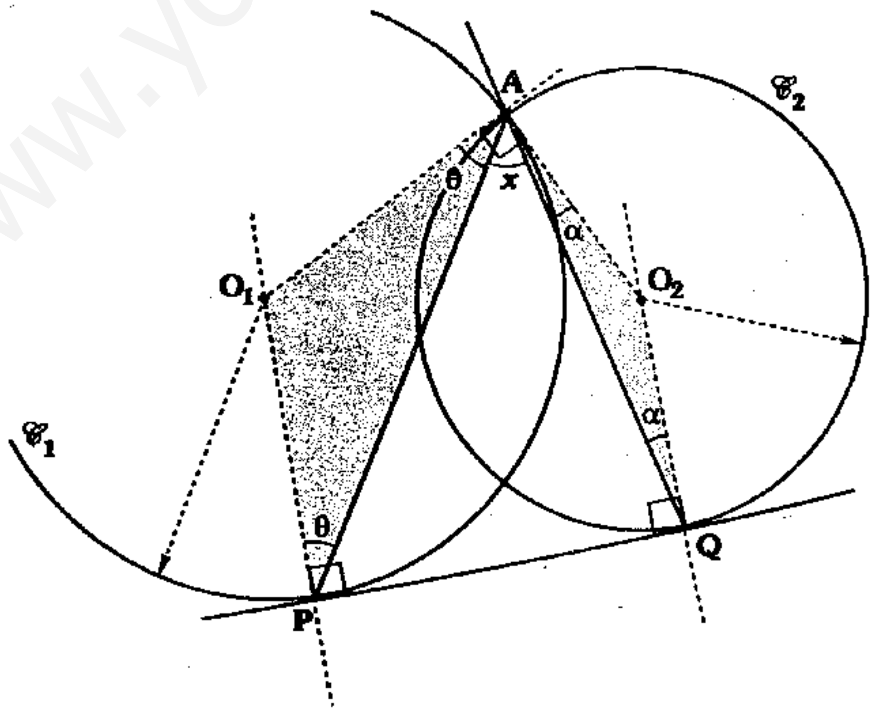
**Resolución**

**I.** La primera parte se deduce fácil, por la propiedad, como el ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es 90°

$$\Rightarrow\ 90° = \frac{m\overset{\frown}{ACB} + m\overset{\frown}{ADB}}{2}$$

$$\therefore\ m\overset{\frown}{ACB} + m\overset{\frown}{ADB} = 180°$$

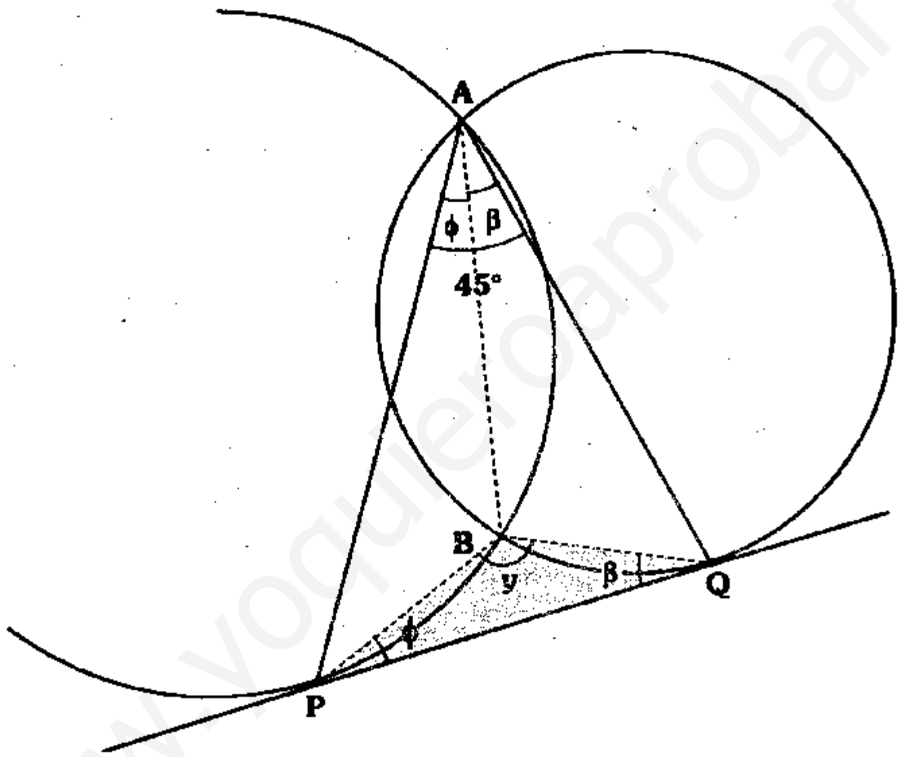
**II.**



- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales $\Rightarrow m\measuredangle O_1AO_2 = 90°$
  $\Rightarrow x+\theta+\alpha=90°$ ... (a)
- $\Delta O_1AP$ y $\Delta O_2AQ$ son isósceles
- Como: $\overleftrightarrow{O_1P} // \overleftrightarrow{O_2P}$ $\Rightarrow x=\theta+\alpha$ ... (b)
- De (a) y (b): $x+x=90°$

$$\therefore\ x=45°$$

**III.**




- Sea $m\measuredangle BPQ=\phi$ y $m\measuredangle BQP=\beta$ entonces:

$$m\widehat{PB}=2\phi \quad y \quad m\widehat{BQ}=2\beta$$

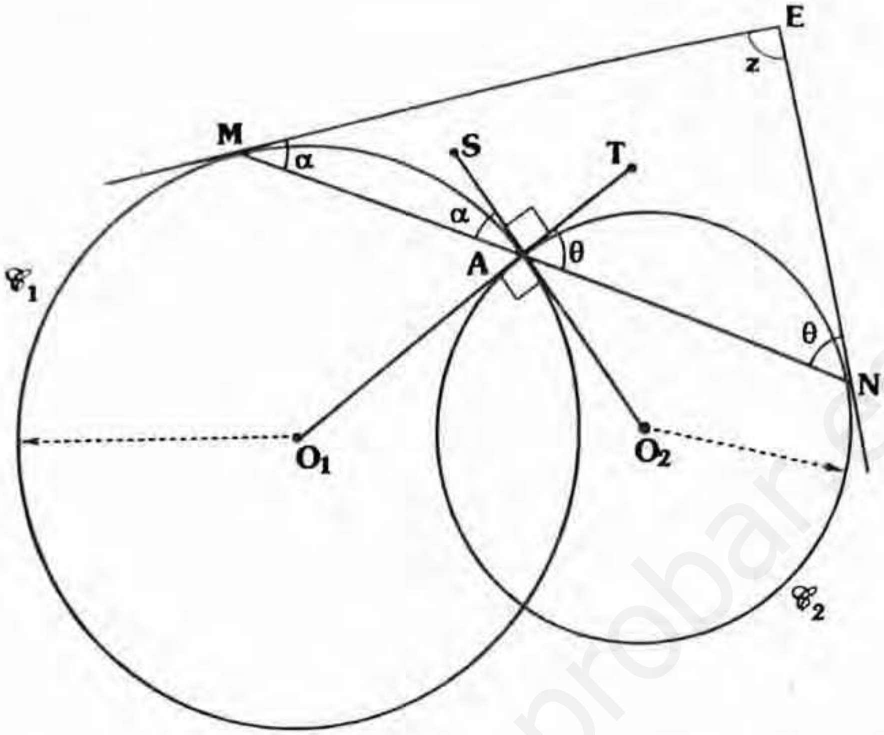
- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle PAB=\phi \quad y \quad m\measuredangle BAQ=\beta$$

- Por propiedad anterior: $\phi+\beta=45°$
- En $\Delta PBQ$: $y+\underbrace{\phi+\beta}_{45}=180°$

$$\therefore\ y=135°$$

**IV.**

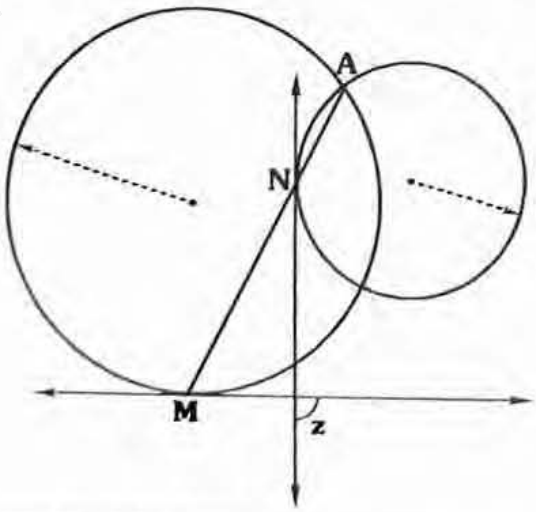



- Como $m\measuredangle O_1AO_2 = 90^\circ$ entonces $\overrightarrow{O_1A}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ y $\overrightarrow{O_2A}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$.
- Por propiedad: $m\measuredangle EMA = m\measuredangle MAS = \alpha$ y $m\measuredangle TAN = m\measuredangle ENA = \theta$
- Notemos en A: $\alpha + \theta = 90^\circ$
- En $\Delta ENM$: $z + \alpha + \theta = 180^\circ$

$$\therefore \; z = 90^\circ$$

**Observación**

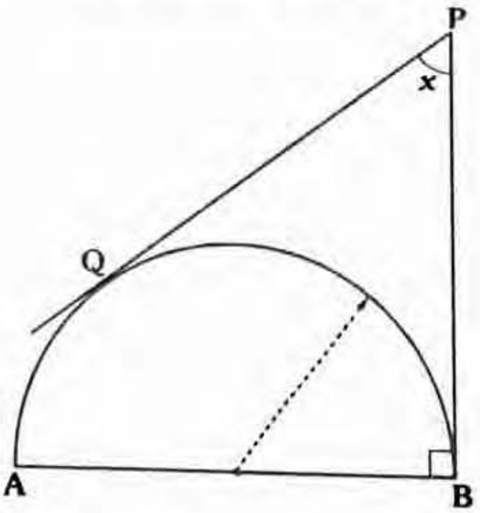
*La propiedad anterior también se verifica en:*




*Se cumple:*

$z = 90^\circ$

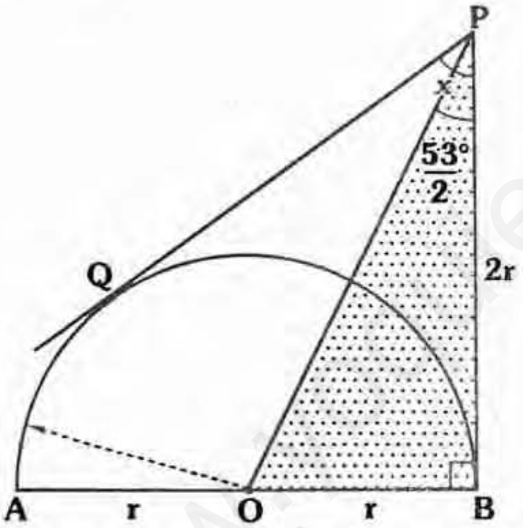
- En el gráfico, Q es punto de tangencia y AB=PB.




Se cumple:

$x=53°$

**Prueba**

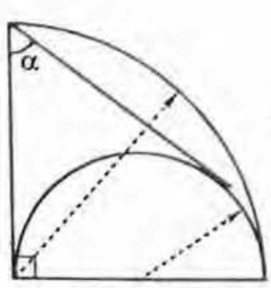



- $\overrightarrow{PO}$ es bisectriz del ∢QPB
- ⊿OBP: notable de $\dfrac{53°}{2}$

$\therefore\ x=53°$

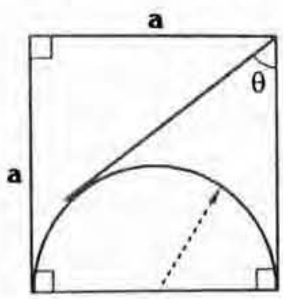
**Observación**

*La propiedad anterior es común encontrarla en las siguientes figuras:*




Se cumple:

$\boxed{\alpha=53°}$

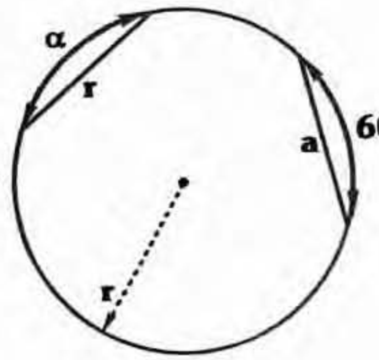



Se cumple:

$\boxed{\theta=53°}$

Nota

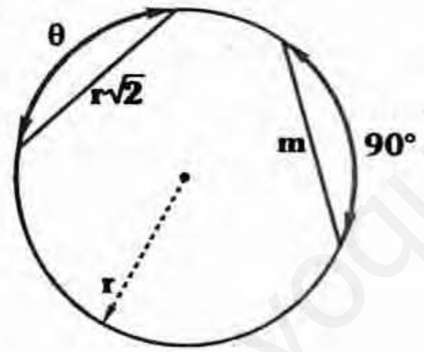
*En el capítulo de "Polígonos Regulares" se estudiará muchos casos, veamos casos de relación de arcos y cuerdas:*




*Se cumple:*

$a = r$

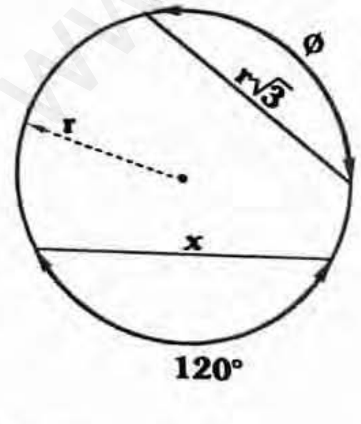
$\alpha = 60°$




*Se cumple:*

$m = r\sqrt{2}$

$\theta = 90°$




*Se cumple:*

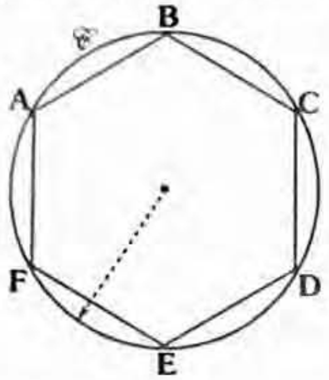
$x = r\sqrt{3}$

$\phi = 120°$

# POLÍGONO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERERENCIA

## POLÍGONO INSCRITO

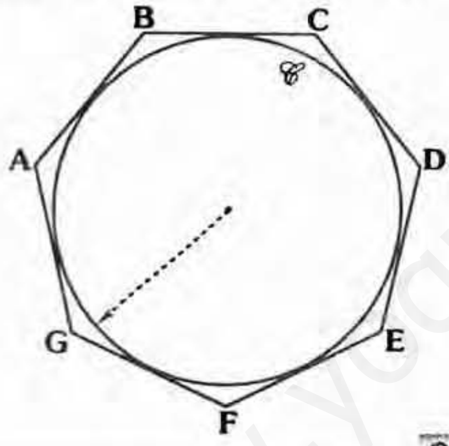
Un polígono está inscrito en una circunferencia si tiene sus vértices en dicha circunferencia.




- El polígono ABCDEF está inscrito en $\mathscr{C}$.
- La circunferencia $\mathscr{C}$ se denomina circunscrita al polígono ABCDEF.

## POLÍGONO CIRCUNSCRITO

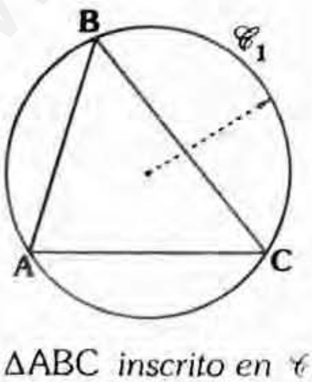
Es aquel polígono que tiene todos sus lados tangentes a la misma circunferencia.

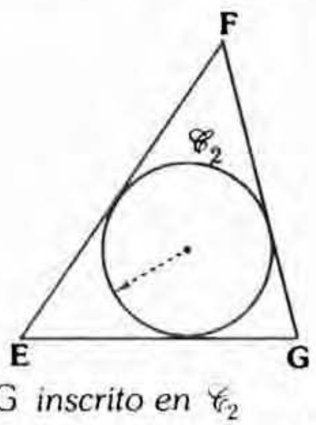



- El polígono ABCDEFG es un polígono circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$.
- La circunferencia $\mathscr{C}$ está inscrita en el polígono.

**Observación**

- *Si una figura* $f_1$ *esta inscrita en* $f_2$, *entonces* $f_2$ *está circunscrito a* $f_1$ *y viceversa.*
- *Para un triángulo:*




∗ $\Delta$ABC *inscrito en* $\mathscr{C}_1$

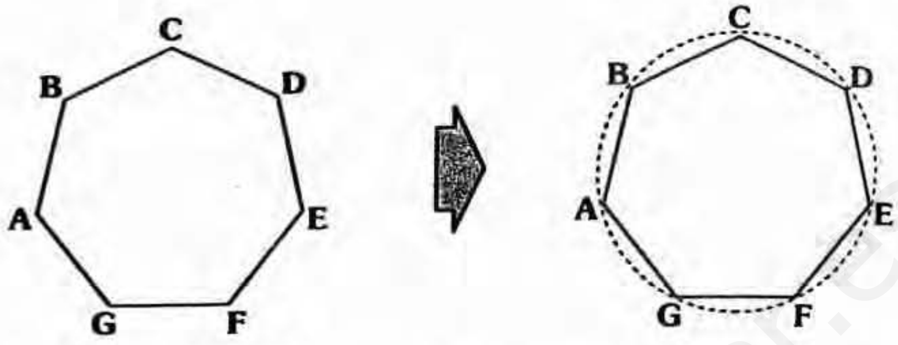
∗ $\mathscr{C}_1$ *es circunscrita al* $\Delta$ABC

∗ $\Delta$EFG *inscrito en* $\mathscr{C}_2$

∗ $\mathscr{C}_2$ *esta inscrito en el* $\Delta$EFG

## POLÍGONO INSCRIPTIBLE

Un polígono se denomina inscriptible cuando por sus vértices puede pasar una misma circunferencia.

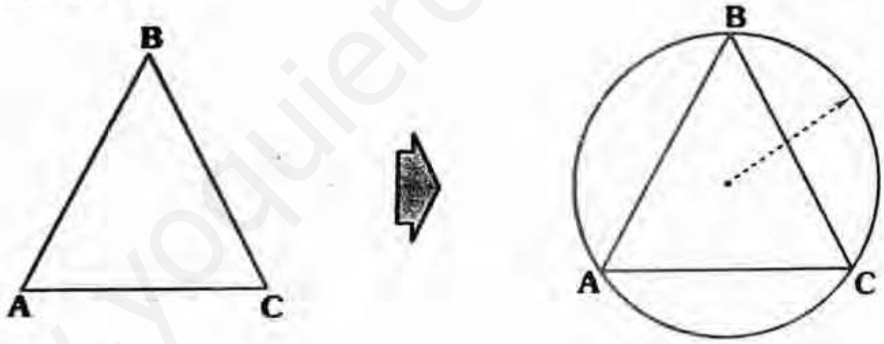



Si los vértices del polígono ABCDEFG se pueden ubicar en una misma circunferencia.

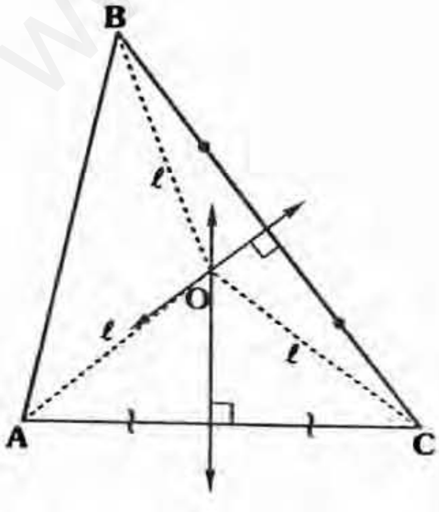
$\Rightarrow$ ABCDEFG es inscriptible

## TEOREMA

Todo triángulo es inscriptible




**Prueba**




- Se trazan las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ las cuales se cortan en O.
- Por teorema de la mediatriz:

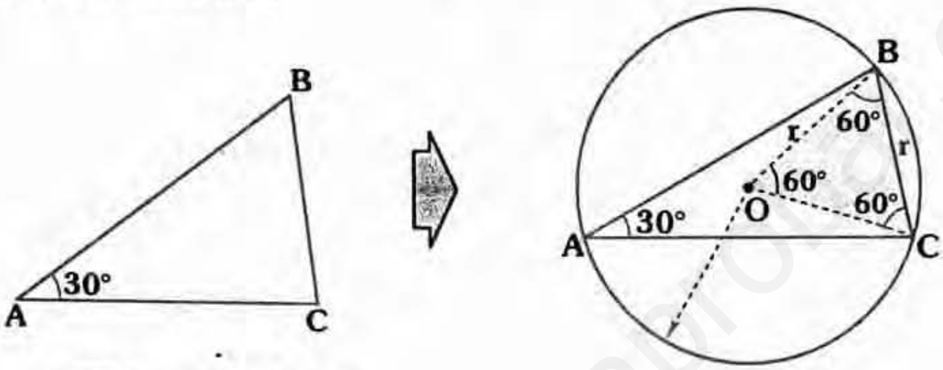
$$OA = OC = OB$$

- Como O equidista de A, B y C en dichos puntos se ubicarán en una circunferencia de centro O.
- Al punto O se llama circuncentro del $\Delta ABC$.

**Nota**

- *No todos los polígonos son inscriptibles.*
- *Más adelante estudiaremos las condiciones para que un cuadrilátero sea inscriptible.*

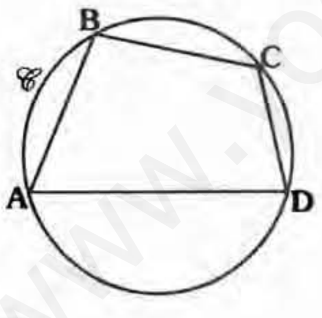
- Como por los vértices de un triángulo siempre puede pasar una circunferencia entonces es recomendable en algunos problemas trazar dicha circunferencia, en especial cuando hay un ángulo que mide 30°.




Se cumple: $\Delta OBC$ es equilátero

## ESTUDIO DEL CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

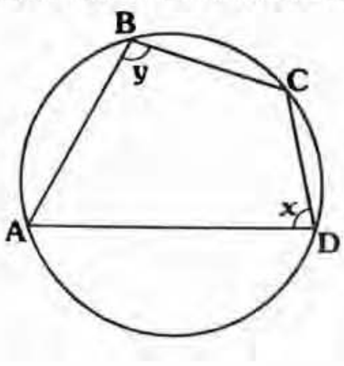
Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia si tiene sus vértices en dicha circunferencia.




- $\square ABCD$: inscrito en $\mathscr{C}$
- $\mathscr{C}$ : circunferencia circunscrita al $\square ABCD$

### PROPIEDADES

❶ En todo cuadrilátero inscrito, sus ángulos opuestos son suplementarios.




En el gráfico, se cumple:

$$x + y = 180°$$

**Prueba**

– Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{ABC} = 2x \quad y \quad m\overset{\frown}{ADC} = 2y$$

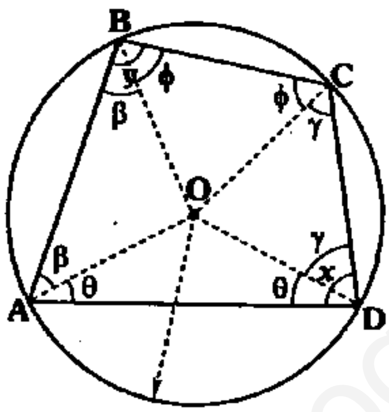
– Como:

$$m\overset{\frown}{ABC} + m\overset{\frown}{ADC} = 360°$$

$$\Rightarrow \; 2x+2y=360°$$

$$\therefore \quad x+y=180°$$

**Otra forma**




– Como los triángulos AOD, DOC, COB y AOB son isósceles entonces: $x=\theta+\gamma$ y $y=\beta+\phi$

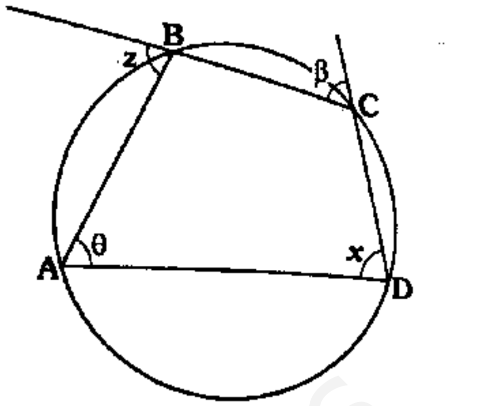
– En ⏢ABCD:

$$2\beta + 2\phi + 2\gamma + 2\theta = 360°$$

$$\Rightarrow \; \underbrace{\beta+\phi}_{y}+\underbrace{\gamma+\theta}_{x}=180°$$

$$\therefore \quad y + x = 180°$$

❷ En todo cuadrilátero inscrito un ángulo interior tiene igual medida que su ángulo exterior opuesto.

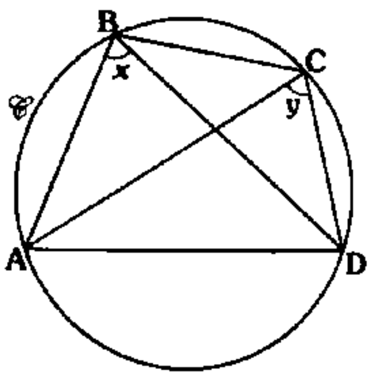



Se cumple: $\boxed{x=z}$

También: $\boxed{\theta=\beta}$

La prueba es consecuencia de la anterior.

❸ En todo cuadrilátero inscrito las diagonales determinan con los lados opuestos ángulos de igual medida.




⏢ABCD inscrito en $\mathscr{C}$

Se cumple:

$$\boxed{x=y}$$

**Prueba**

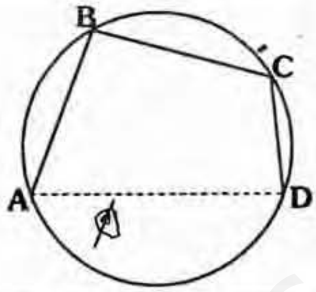
Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{AD} = 2x = 2y$$

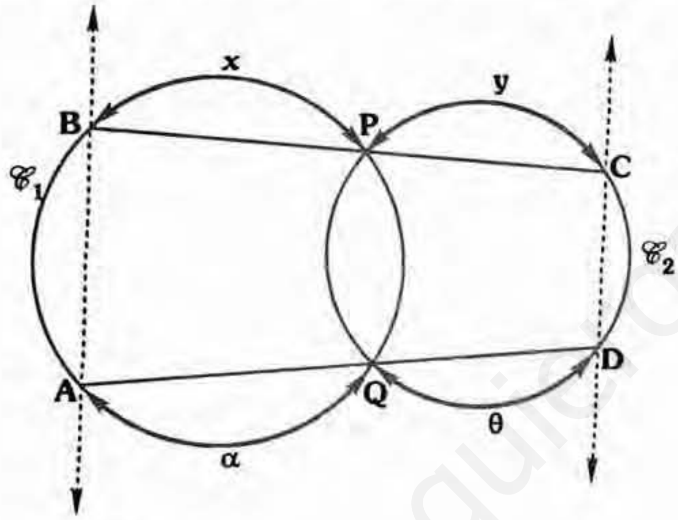
$$\therefore \; x = y$$

**Nota**

*Cuando se tenga tres cuerdas consecutivas en una circunferencia es recomendable completar el cuadrilátero inscrito.*




**4** En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias secantes.



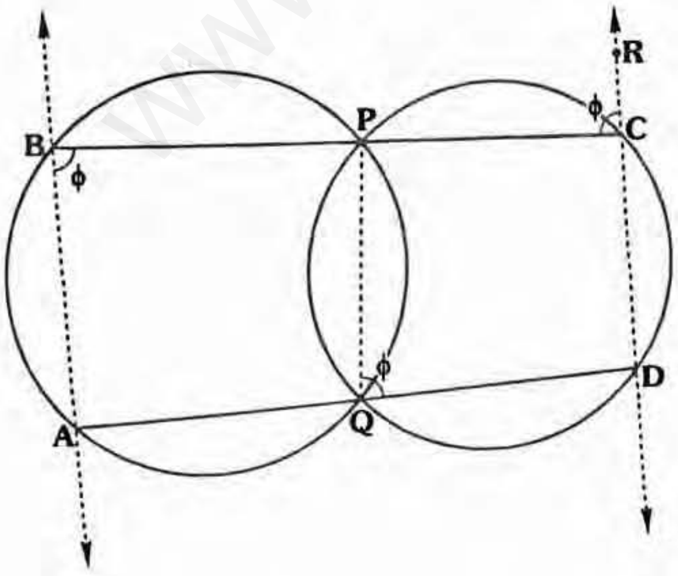

Se cumple:

I) $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

II) $x+y=\alpha+\theta$

**Prueba**

**I)**



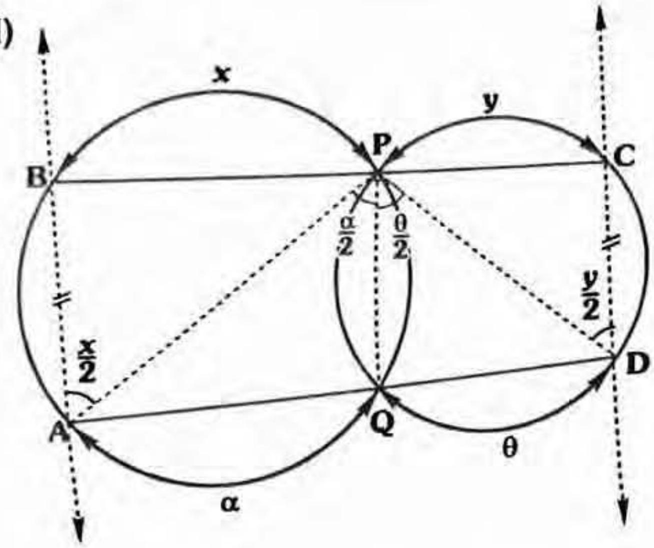

- Se traza $\overline{PQ}$ entonces $\square ABPQ$ y $\square QPCD$ son inscritos entonces:

$$m\measuredangle ABP = m\measuredangle PQD = m\measuredangle PCR$$

- Por el recíproco de ángulos alternos, internos:

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

**II)**




- Por propiedad anterior: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$
- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle BAP=\frac{x}{2} \quad ; \quad m\measuredangle APQ=\frac{\alpha}{2} \quad ;$$

$$m\measuredangle QPD=\frac{\theta}{2} \quad y \quad m\measuredangle PDC=\frac{y}{2}$$

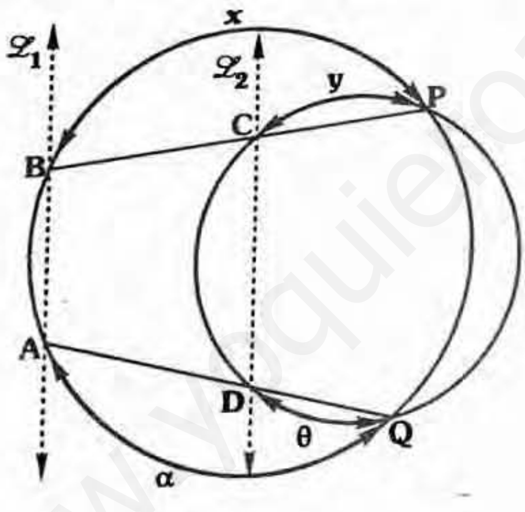
- Por propiedad de las paralelas:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad x+y=\alpha+\theta$$

**Observación**

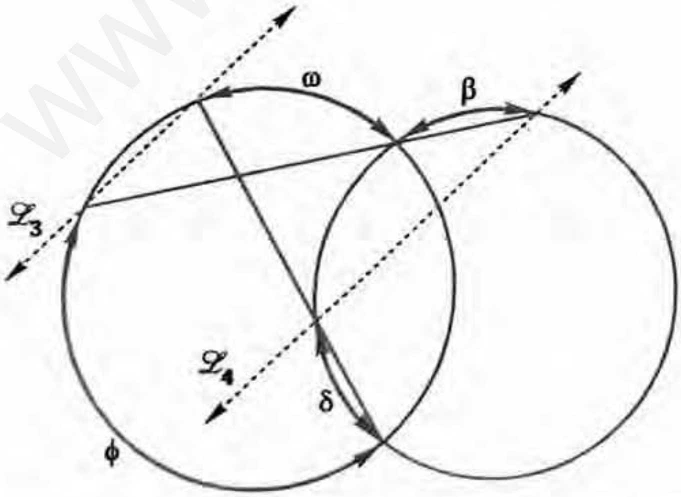
*Veamos otras posibilidades del último teorema:*




*Se cumple:*

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y

$x-y=\alpha-\theta$




*Se cumple:*

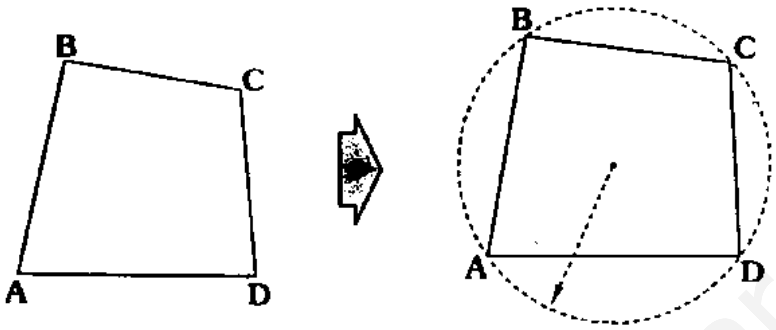
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$ y

$\phi-\delta=\omega+\beta$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

## CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

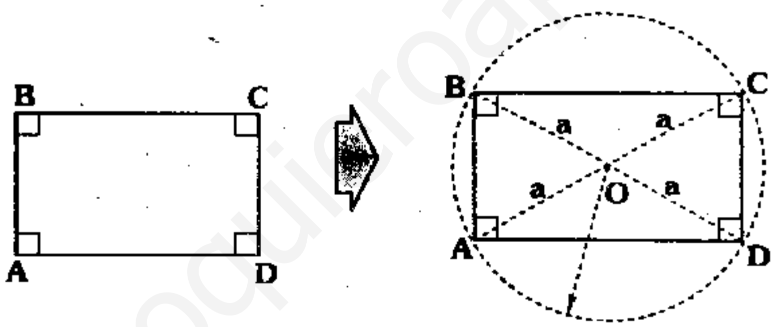
Un cuadrilátero se denomina inscriptible si por sus vértices puede pasar una misma circunferencia.




Si el ⌂ABCD se puede inscribir en una circunferencia entonces ⌂ABCD es inscriptible.

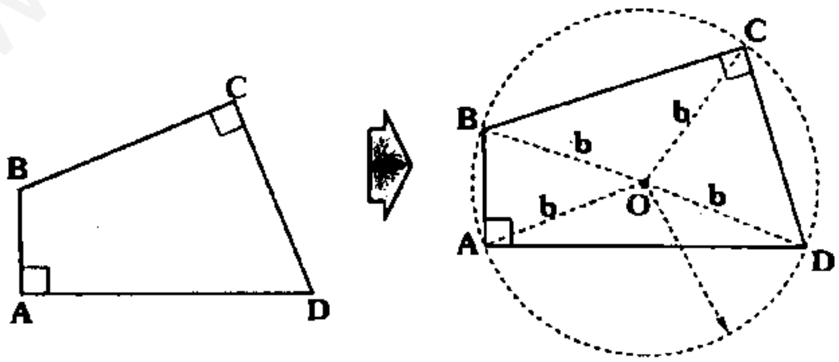
### Ejemplos

- El rectángulo en un cuadrilátero inscriptible




Como AO=OC=BO=OD, O es el centro de una circunferencia que pasa por A, B, C y D.

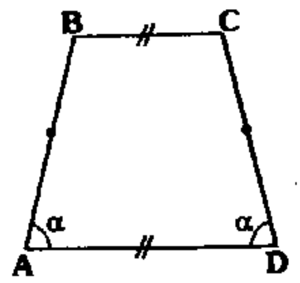
- El cuadrilátero de ángulos opuestos rectos es inscriptible.

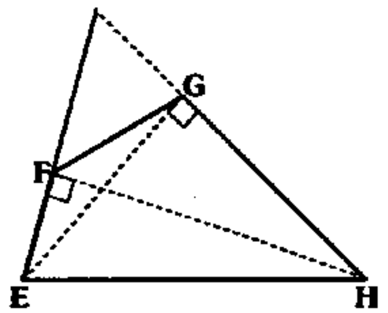



En el ⊿BAD, se traza la mediana $\overline{AO}$ $\Rightarrow$ BO = OD = AO = b y en el ⊿BCD, BO=b. O equidista de A, B, C y D.

$\therefore$ ⌂ABCD es inscriptible

- Los siguientes casos también son inscriptibles.



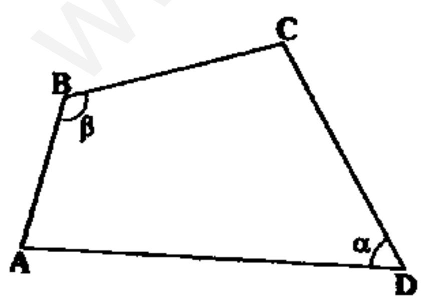




Los cuadrilateros ABCD y EFGH son inscriptibles.

## TEOREMAS

**(Casos comunes para reconocer a un cuadrilátero inscriptible)**

◆ Todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos opuestos son suplementarios es inscriptible.

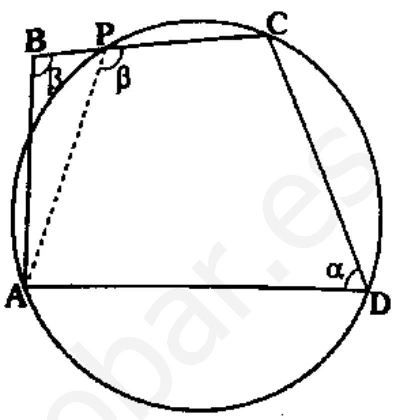



Si $\alpha+\beta=180°$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD es inscriptible

**Prueba:**

- Se traza la circunferencia que pasa por A, D y C supongamos que no pasa por B.




- Se tendrá el ⏢APCD inscrito entonces $m\sphericalangle APC+\alpha=180°$, como:

$$\alpha+\beta=180°$$

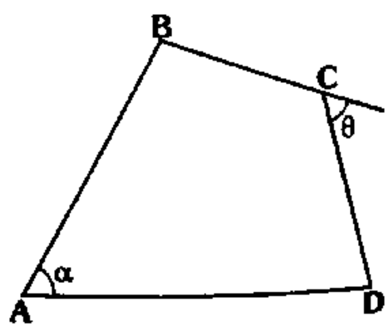
$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle APC=\beta$$

- En $\Delta ABP$:

$$m\sphericalangle ABP=m\sphericalangle APC$$

$$\Rightarrow \quad B=P$$

◆ Todo cuadrilátero que tiene un ángulo interior y su ángulo exterior opuesto de igual medida, es inscriptible.

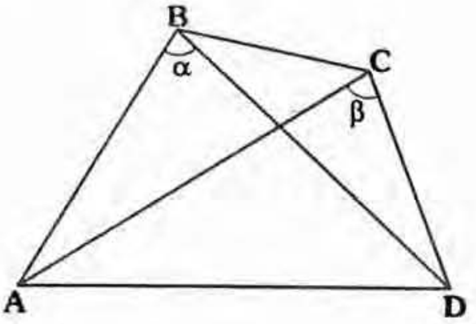



Si $\alpha=\theta$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD es inscriptible

La prueba es análoga a la anterior.

◆ En todo cuadrilátero convexo en el que las diagonales determinan ángulos de igual medida con los lados opuestos, es inscriptible.



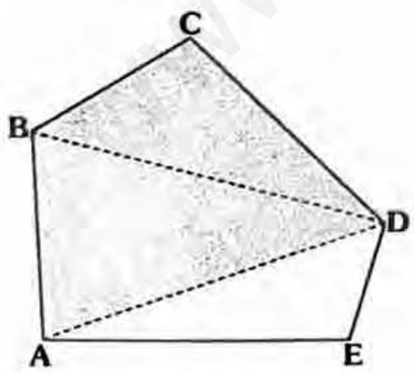

Si $\alpha=\beta$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD es inscriptible.

La prueba es análoga a la primera.

**Observación**

- *Si dos cuadriláteros que tienen como vértices los del pentágono son inscriptibles (por ejemplo:* ABCD *y* ABDE*)*



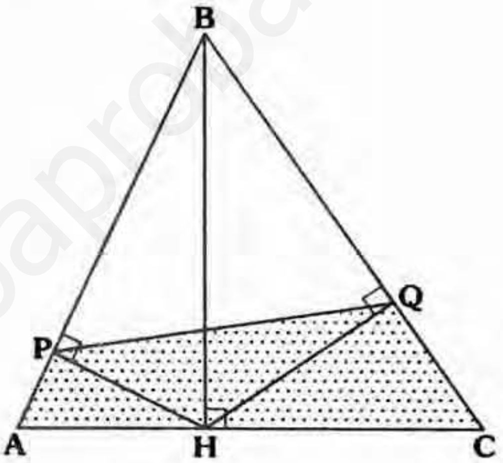

*Si* ABCD *y* ABDE *son inscriptibles entonces* ABCDE *es inscriptible*

## ALGUNOS CUADRILATEROS INSCRIPTIBLES

Acontinuación veremos algunos cuadriláteros inscriptibles que están presentes en diversas figuras algunas relacionadas con circunferencias, ángulos rectos o puntos medios.

Resulta muy interesante que definidos cuatro puntos con cierta característica, por ellos pase una misma circunferencia.

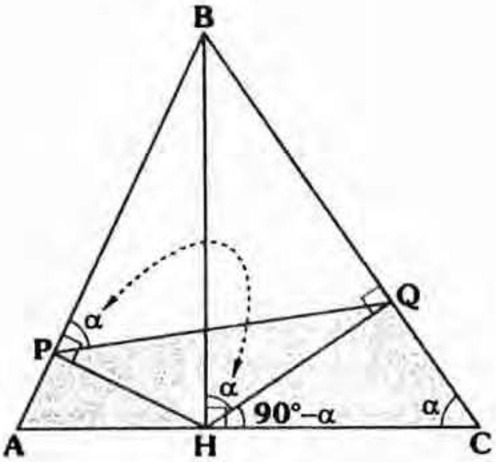
◆




Se cumple:

⏢APQC es inscriptible

**Prueba**



- Sea $m\sphericalangle BCA = \alpha$

$\Rightarrow m\sphericalangle QHC = 90° - \alpha$

$\Rightarrow m\sphericalangle QHC = \alpha$

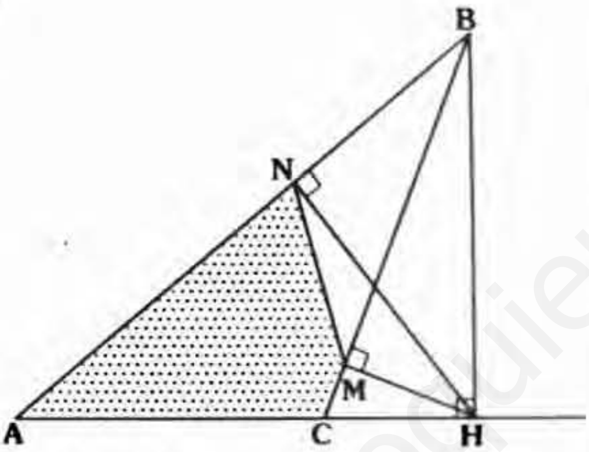
- $\square$HPBQ: inscriptible

$\Rightarrow m\sphericalangle QPB = \alpha$

- Como: $m\sphericalangle ACQ = m\sphericalangle QPB$

$\Rightarrow \square$APQC: inscriptible

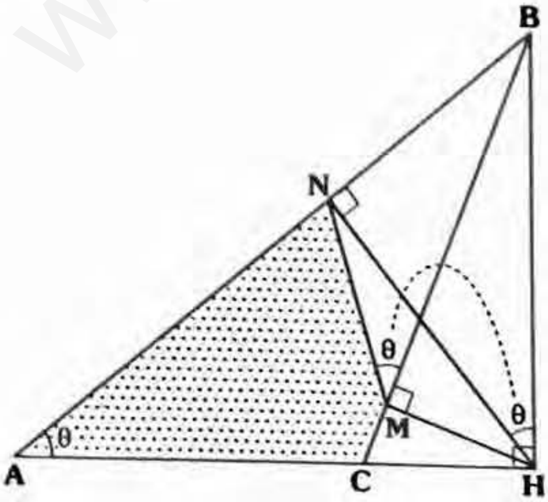
◆




Se cumple:

$\square$ANMC: inscriptible

**Prueba**




- Sea: $m\sphericalangle BAC = \theta$

- En ⊿AHB:

$m\sphericalangle HNB = \theta$

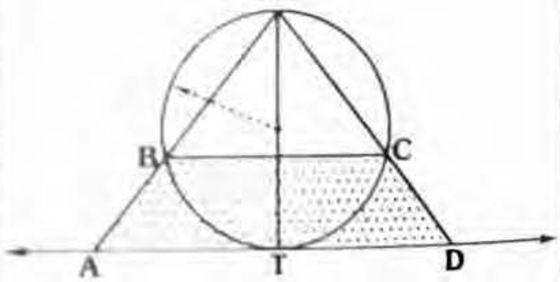
- Como el $\square$HMNB es inscriptible

$m\sphericalangle HMB = \theta$

$\therefore$ $\square$ANMC es inscriptible

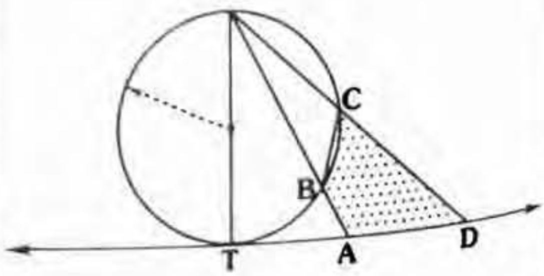
**Observación**

*Los siguientes casos son en realidad los casos anteriores*




*Se cumple*

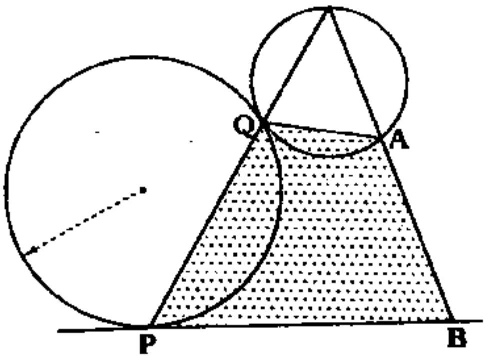
$\square$ABCD *inscriptible*




*Se cumple:*

$\square$ABCD *es inscriptible*

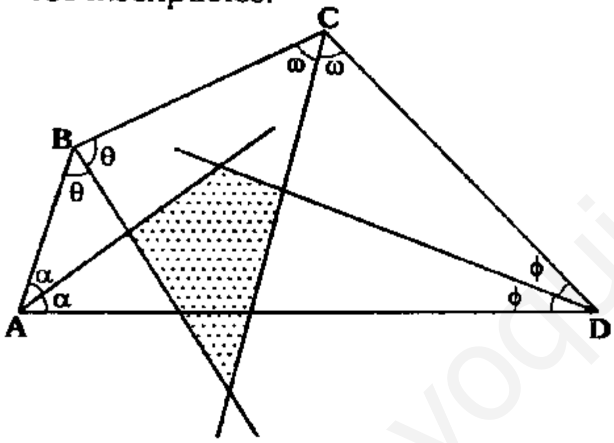
◆ P y Q son puntos de tangencia

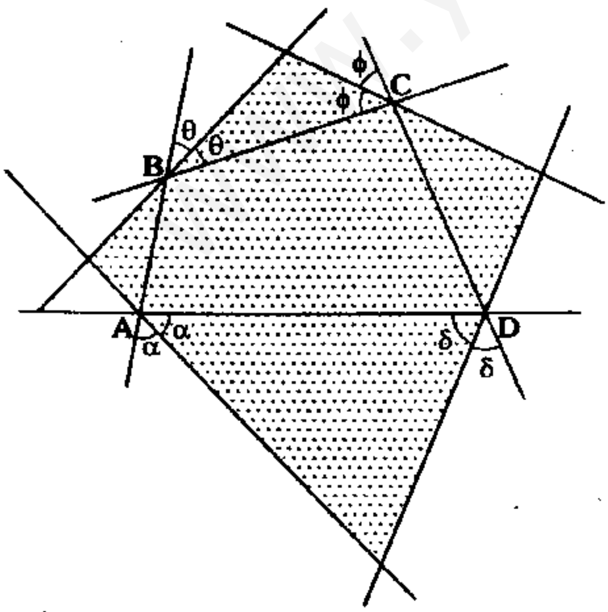



Se cumple que el ⊿PQAB es inscriptible

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

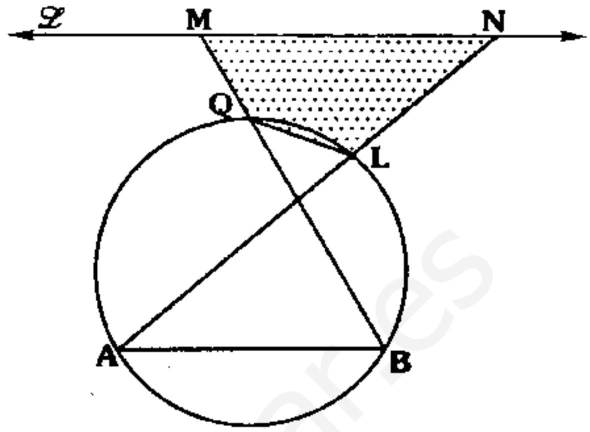
◆ En los dos casos indicados, las regiones sombreadas corresponden a cuadriláteros inscriptibles.



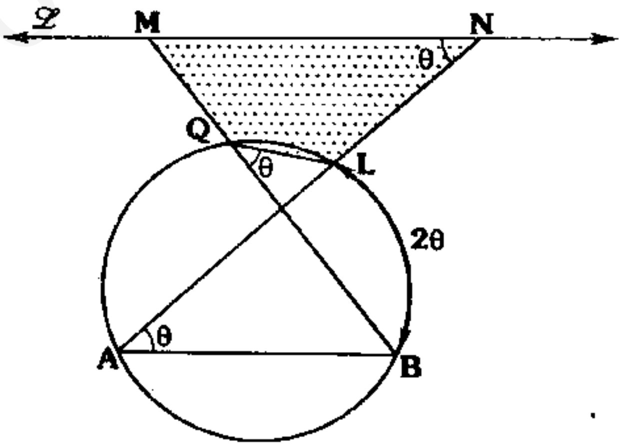

Ambas pruebas se dejan como ejercicio.

◆ En el gráfico, $\overline{AB} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$




Se cumple que el ⊿MNLQ es inscriptible

**Prueba**




- Sea:

$$m\measuredangle BAL = \theta$$

$$\rightarrow \; m\measuredangle ANM = \theta$$

- Como:

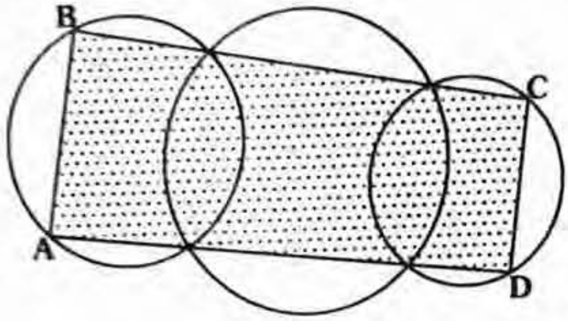
$$m\overset{\frown}{LB} = 2\theta$$

$$\rightarrow \; m\measuredangle LQB = \theta$$

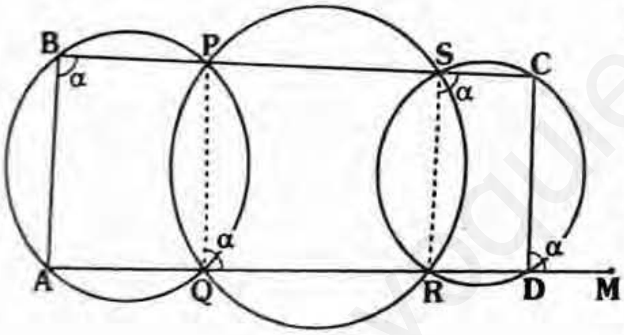
$\therefore$ ⊿MNLQ es inscriptible

◆ En el gráfico, se cumple:

$\square$ABCD es inscriptible




**Prueba**




- Notemos que los cuadrilateros ABPQ, QPSR y RSCD son inscritos.
- Sea:

$$m\measuredangle ABP = \alpha$$

$$\Rightarrow\ m\measuredangle PQR = \alpha$$

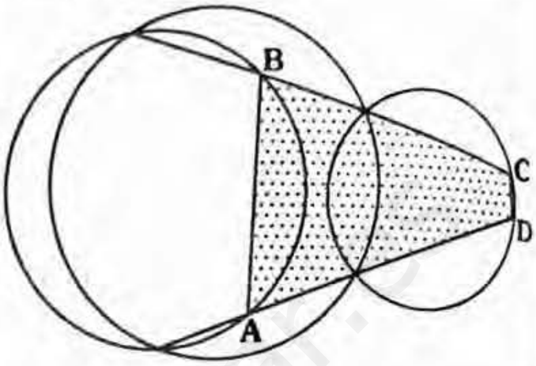
$$\Rightarrow\ m\measuredangle RSC = \alpha \quad \text{y}$$

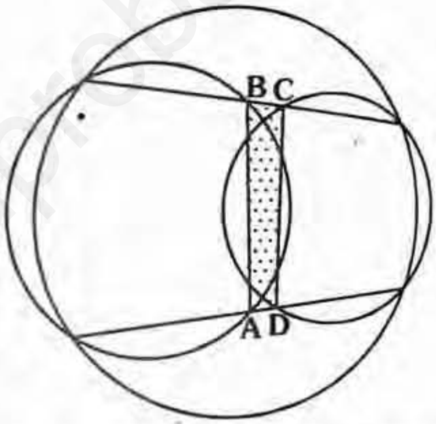
$$m\measuredangle CDM = \alpha$$

$\therefore$ $\square$ABCD es inscriptible.

**Observación**

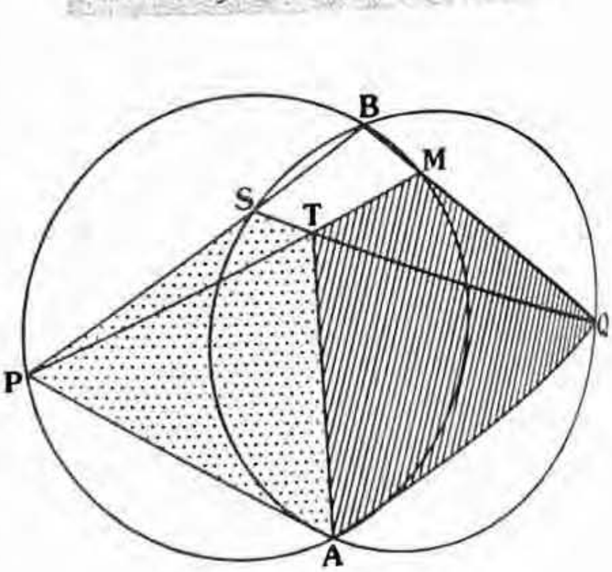
*En los siguientes casos también se cumple:*



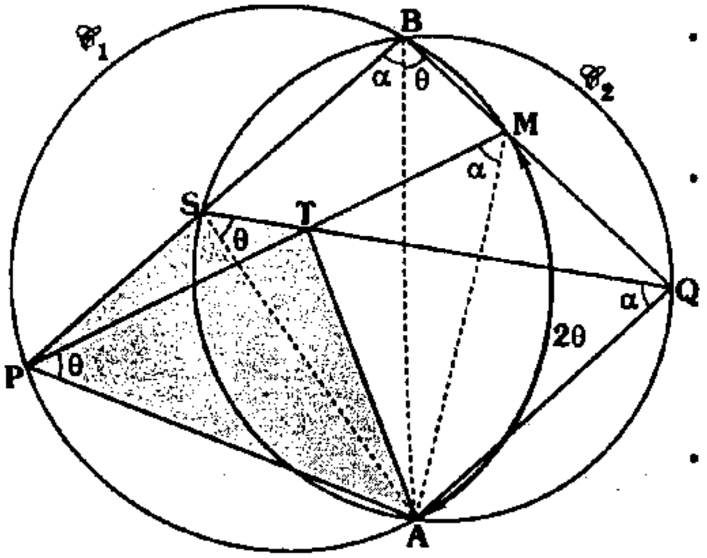




◆ En el gráfico, se cumple:

$\square$PSTA y $\square$ATMQ: inscriptibles



**Prueba**




- Sea $m\measuredangle APM=\theta$ entonces en $\mathscr{C}_1$:

$$m\measuredangle ABM=\theta$$

- En $\mathscr{C}_2$:

$$m\measuredangle ASQ=m\measuredangle ABQ=\theta$$

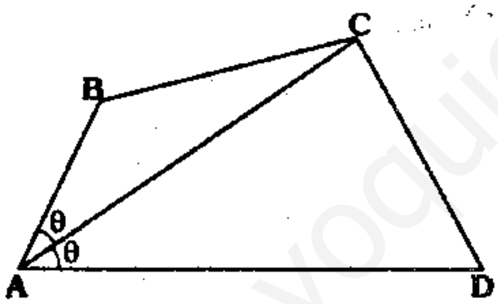
$$m\measuredangle APT=m\measuredangle AST$$

⏢PSTA: inscriptible

- Análogamente:

⏢ATMQ es inscriptible

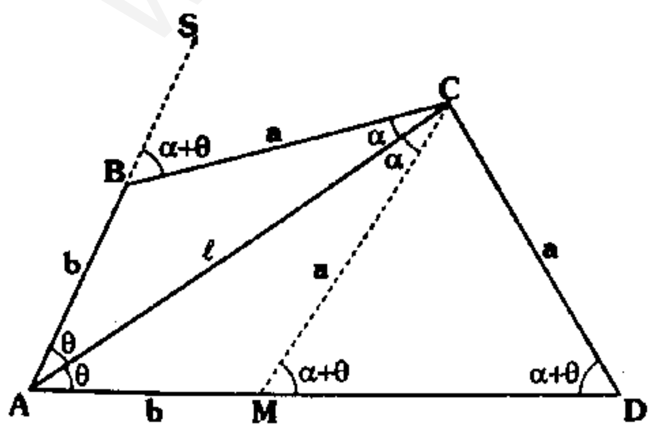
◆ En el gráfico, $BC=CD$ y $AB\neq AD$




Se cumple: ⏢ABCD es inscriptible

**Prueba**

Supongamos que $AD>AB$




- Sea $AM=AB$

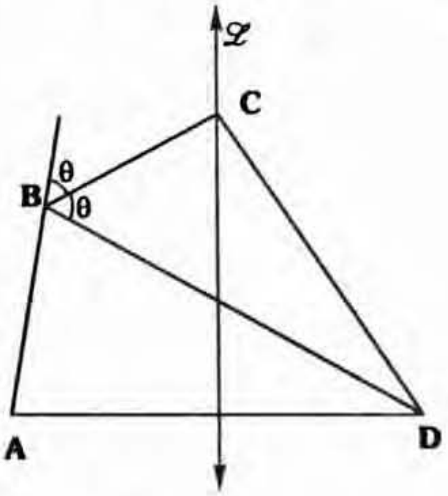
$\Rightarrow \Delta ABC\cong\Delta AMC$ (LAL)

$\Rightarrow BC=CM$

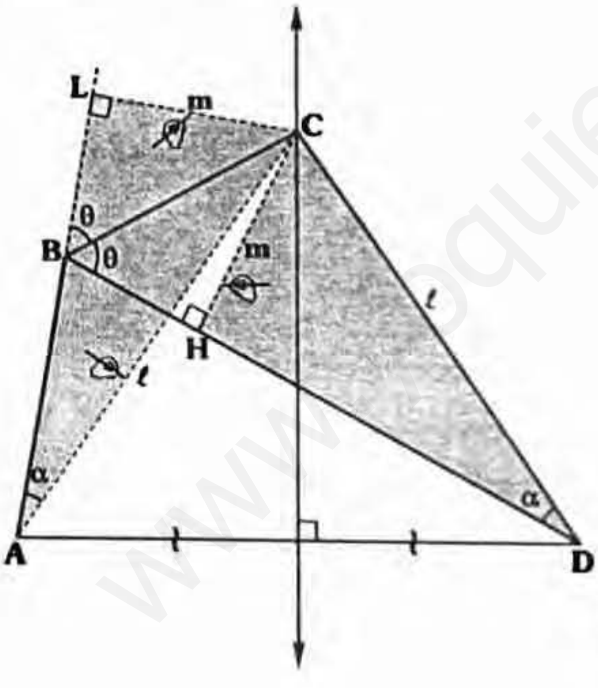
$\Rightarrow m\measuredangle ADC=m\measuredangle SBC\in \ell$

⏢ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$. Se cumple que el ⏢ABCD es inscriptible.




**Prueba**

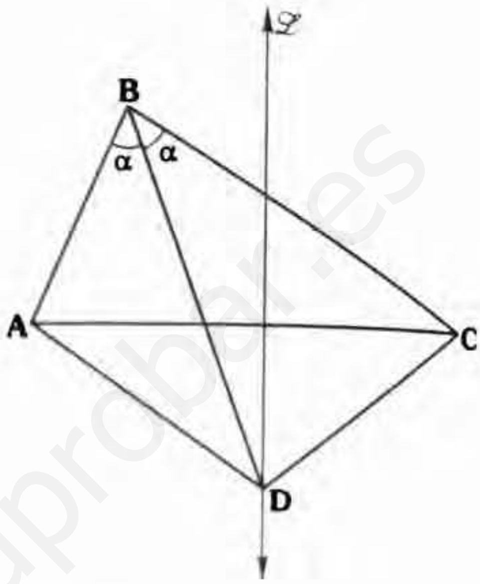



- Se traza $\overline{CL} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overline{CH} \perp \overline{BD}$ entonces CL=CH
- Por teorema de la mediatriz: CA=CD
- ⊿ALC ≅ ⊿CHD

  ⇒ m∢CAL=m∢CDB

  ∴ ⏢ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, AB ≠ BC y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$. Se cumple que el cuadrilátero ABCD es inscriptible.

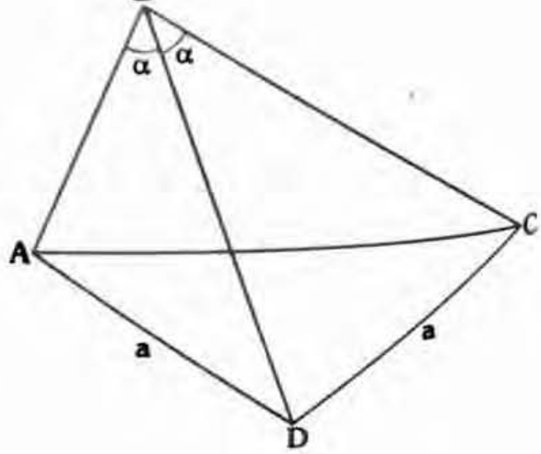



**Prueba**

- Por teorema de la mediatriz:

  DA=DC

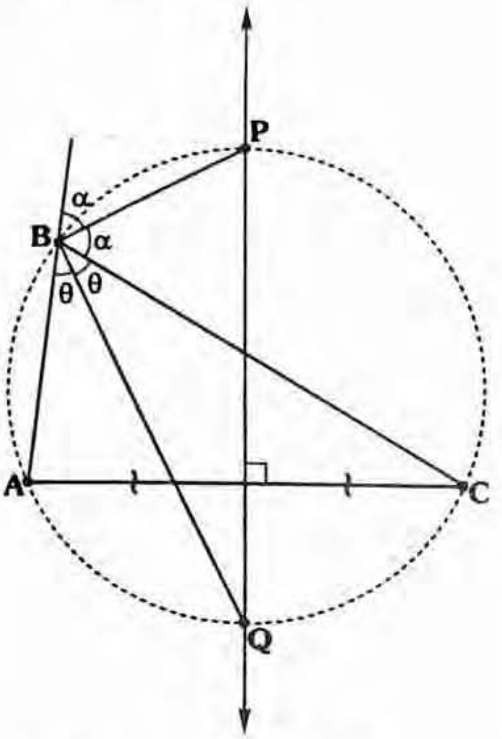
- Como AB ≠ CD entonces es el mismo caso resuelto en la pág. 61.




⏢ABCD: inscriptible

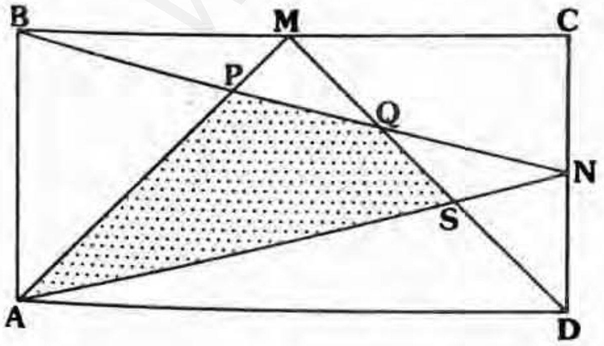
**Observación**

*Juntando los dos gráficos anteriores, tendremos:*



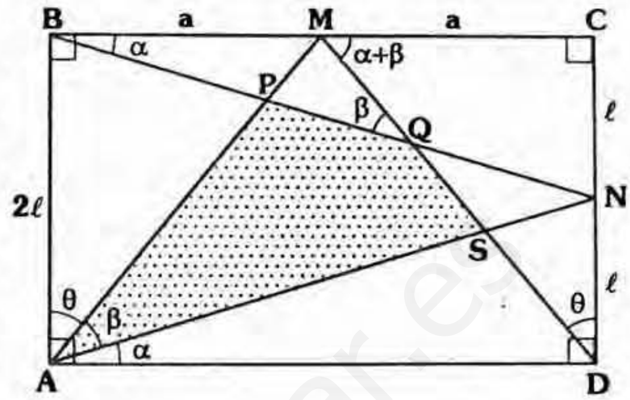

*Se cumple que* ABPCQ *es inscriptible.*

◆ En el gráfico, ABCD es un rectángulo, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.




Se cumple que ⏢APQS es inscriptible.

**Prueba**




- ⊿ABM ≅ ⊿DCM

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle CDM = \theta$

- ⊿DAN ≅ ⊿CBN

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle NAD = m\sphericalangle NBC = \alpha$

- Sea:

  $m\sphericalangle PAS = \beta$

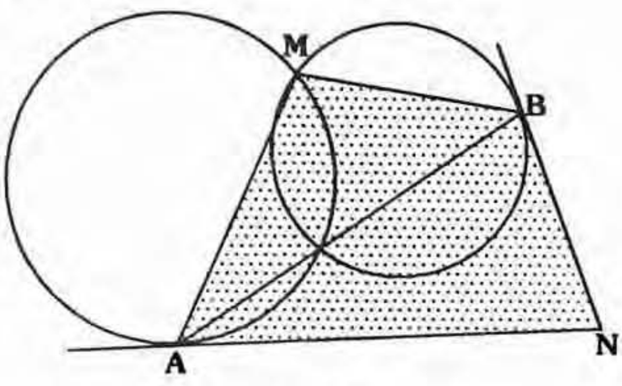
  $\rightarrow \alpha+\beta+\theta=90°$

- En ΔBMQ:

  $m\sphericalangle BQM = \beta$

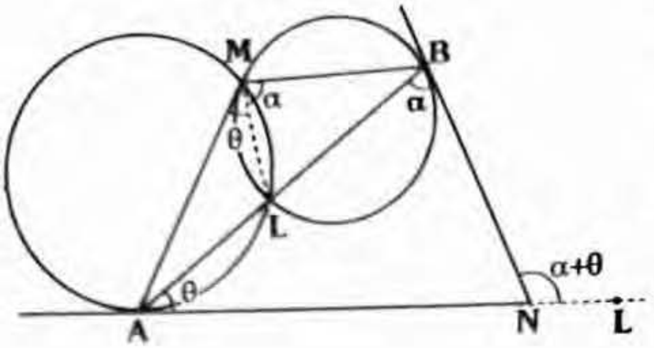
  ∴ ⏢ABQS: inscriptible

◆ A y B son puntos de tangencia




Se cumple que el ⏢AMBN es inscriptible.

Prueba




- Como :

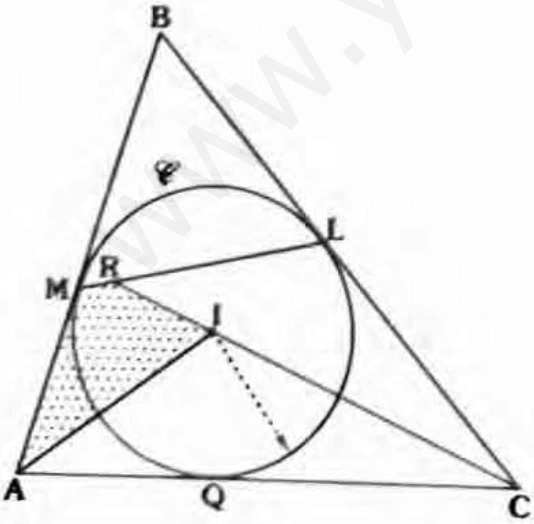
m∢AML = mBAN = θ y

m∢LMB = m∢LBN

→ m∢BNL = α∢θ

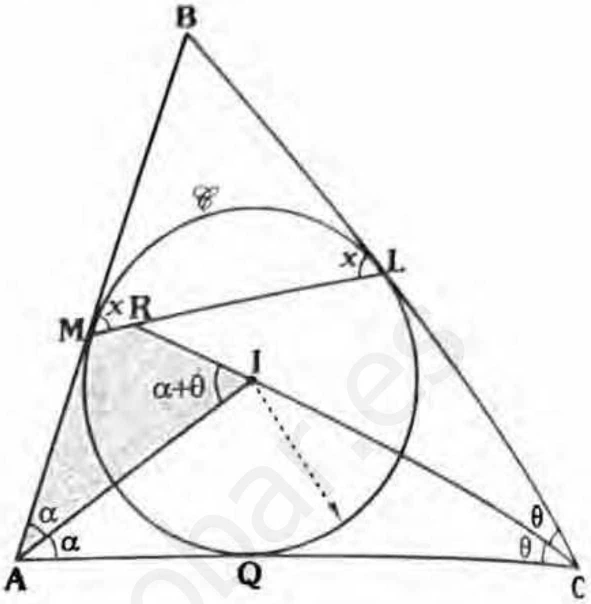
∴ ⏢AMBN es incriptible

◆ En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el ΔABC .
Se cumple:




⏢AMRI: inscriptible

Prueba




- Sea : m∢IAC = α y m∢ACI = θ

⇒ m∢IAM = α y m∢ICL = θ

- En ΔAIC:

$$m\sphericalangle AIR = \alpha + \theta$$

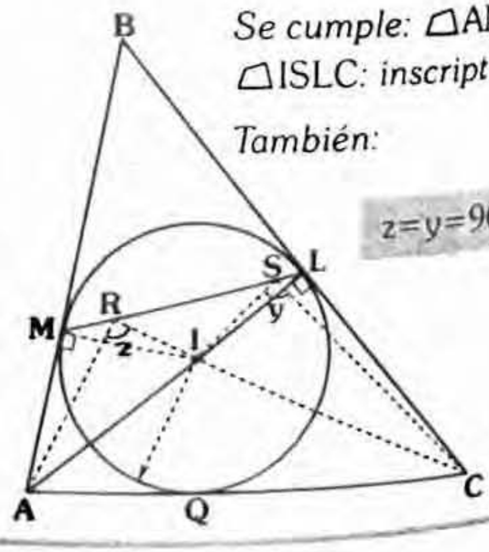
- En ⏢AMLC:

$$x + x = 2\alpha + 2\theta$$

$$\Rightarrow x = \alpha + \theta$$

- Como: m∢AIR = m∢RMB entonces el ⏢AMRI es inscriptible.

Observación ①



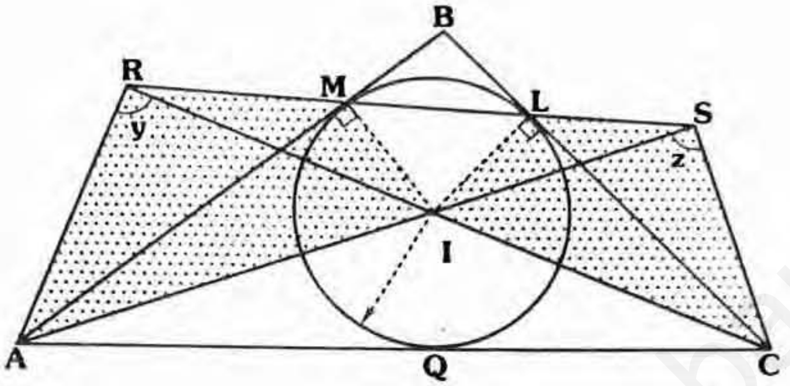

*Se cumple:* ⏢AMRI y ⏢ISLC: *inscriptibles*

*También:*

$z = y = 90°$

## Observación ②

*Otra posibilidad de gráfico, puede ser:*

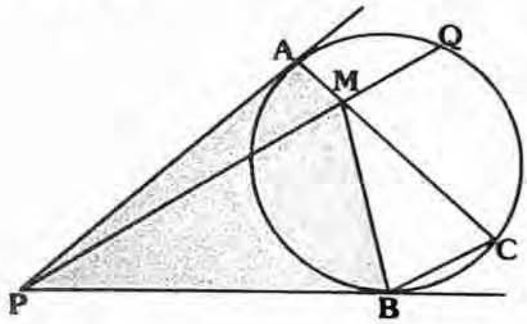



*Se cumple:*

- ⏢ARMI *y* ⏢ILSC: *inscriptibles*
- $y=z=90°$

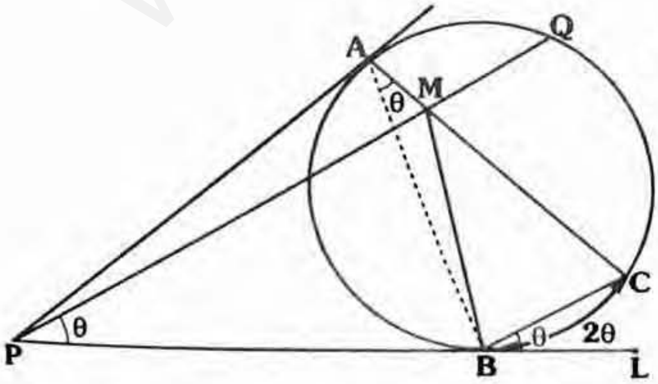
◆ En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $\overline{PQ}//\overline{BC}$.

Se cumple:




⏢PAMB: inscriptible

**Prueba**




- Sea $m\sphericalangle QPB=\theta \Rightarrow m\sphericalangle CBL=\theta$

  $\Rightarrow m\overset{\frown}{BC}=2\theta \Rightarrow m\sphericalangle BAC=\theta$

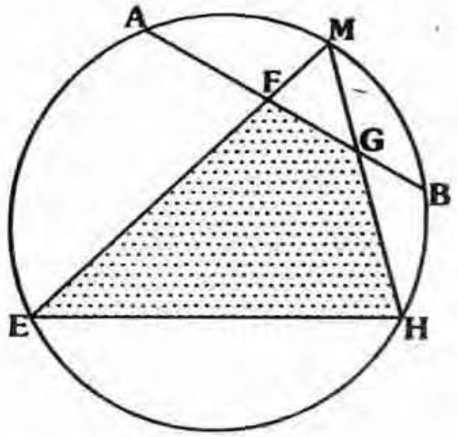
- Como:

  $m\sphericalangle BPM=m\sphericalangle BAM$

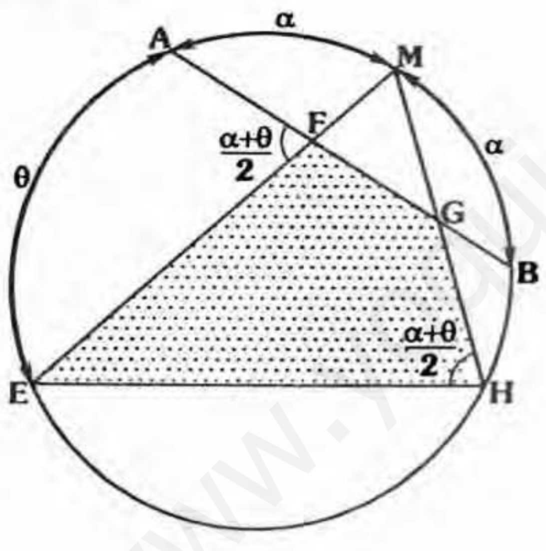
  $\Rightarrow$ ⏢PAMB es inscriptible

◆ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Se cumple:

$\triangle$EFGH: inscriptible




**Prueba**




• Sea:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = \alpha \quad y \quad m\widehat{AE} = \theta$$

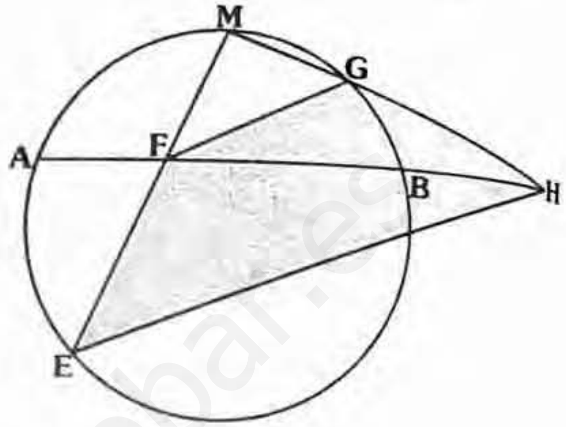
Por $\measuredangle$ inscrito: $m\measuredangle EHM = \dfrac{\alpha+\theta}{2}$

• Por $\measuredangle$ interior: $m\measuredangle AFE = \dfrac{\alpha+\theta}{2}$

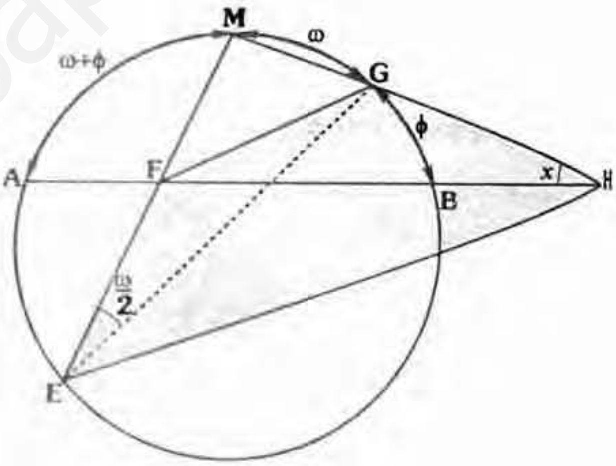
$\Rightarrow$ $\triangle$EFGH es inscriptible

◆ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Se cumple:

$\triangle$EFGH: inscriptible




**Prueba**




• Sea:

$$m\widehat{MG} = \omega \quad y \quad m\widehat{GB} = \phi$$

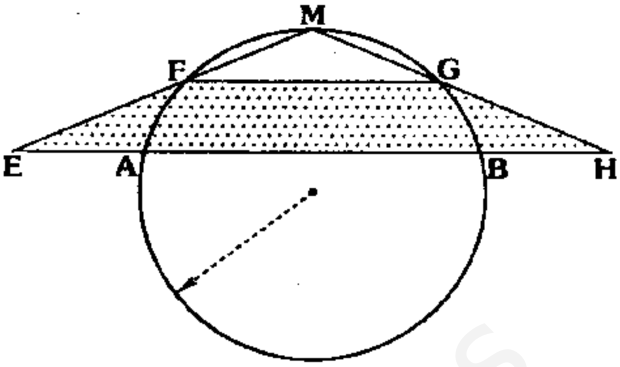
$$\Rightarrow m\widehat{AM} = \omega + \phi$$

Por $\measuredangle$ inscrito: $m\measuredangle FEG = \dfrac{\omega}{2}$

• Por $\measuredangle$ exterior: $x = \dfrac{\omega+\phi-\phi}{2} = \dfrac{\omega}{2}$

• Como $m\measuredangle FEG = m\measuredangle FHG$ entonces el $\triangle$EFGH es incriptible.

◆ En el gráfico, $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$.

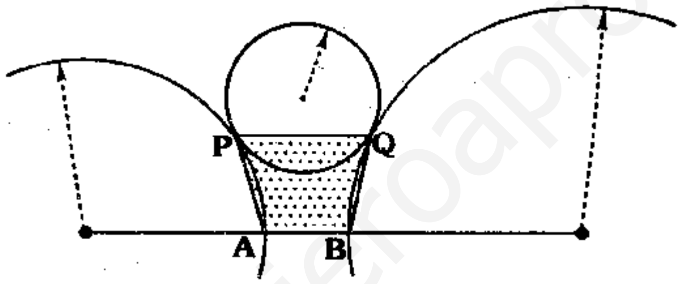



Se cumple:

⏢EFGH es inscriptible

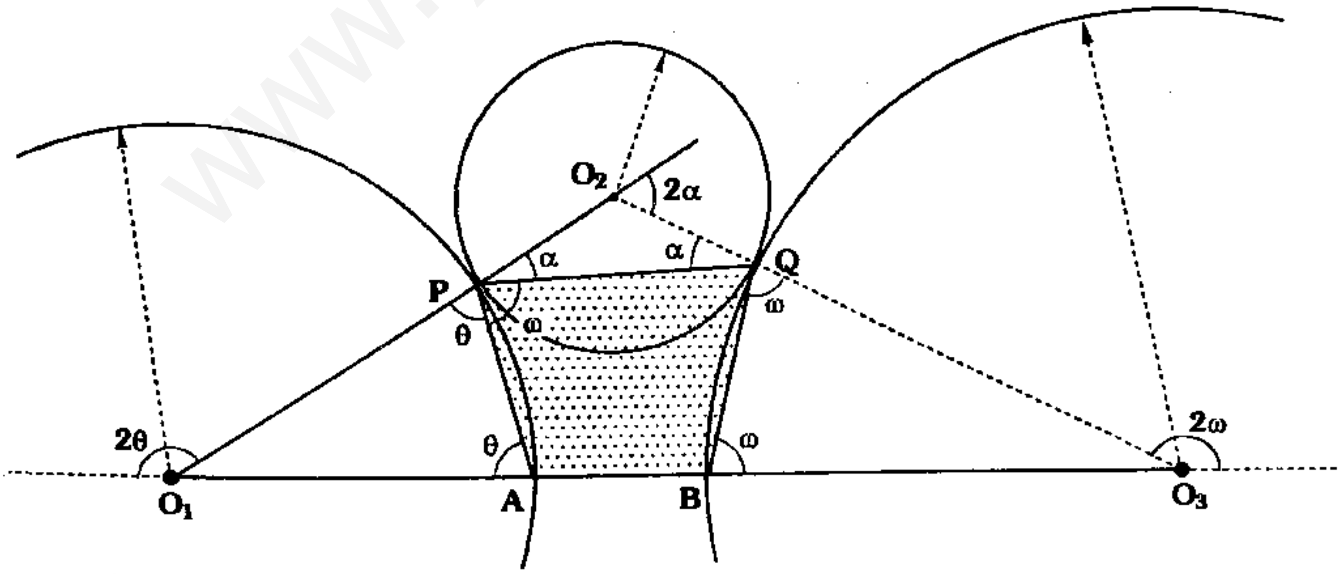
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

◆ En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia




Se cumple que el ⏢APQB es inscriptible

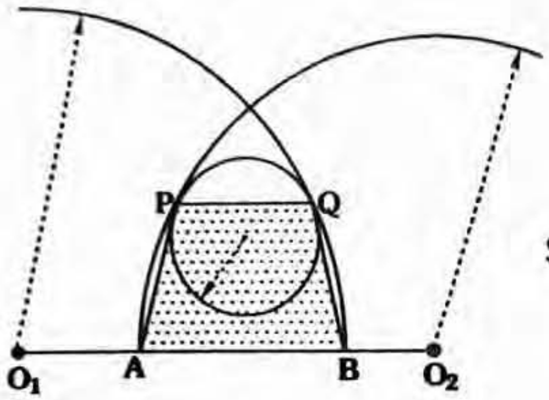
**Prueba**



- Se sabe que $O_1$, P y $O_2$ son colineales, lo mismo que $O_2$, Q y $O_3$.
- En $\Delta O_1O_2O_3$: $2\theta + 2\alpha + 2\omega = 360° \rightarrow \theta + \alpha + \omega = 180°$
- Luego $m\measuredangle APQ = \omega$

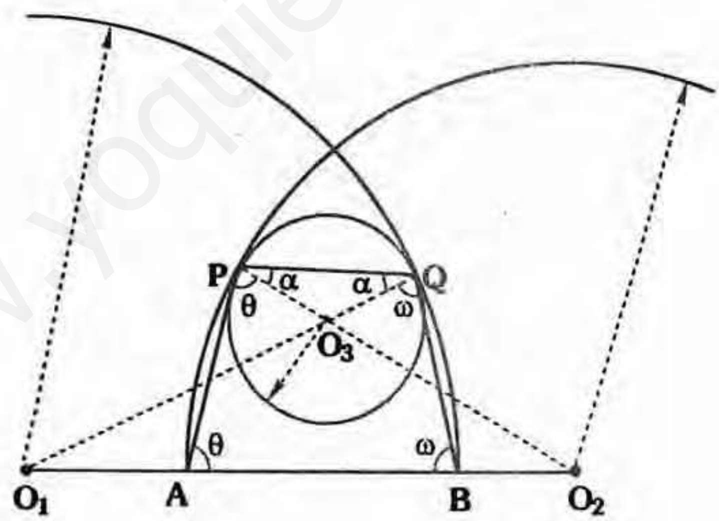
$\therefore$ ⊿APQB es inscriptible

◆ P y Q son puntos de tangencia




Se cumple que el ⊿APQB es inscriptible.

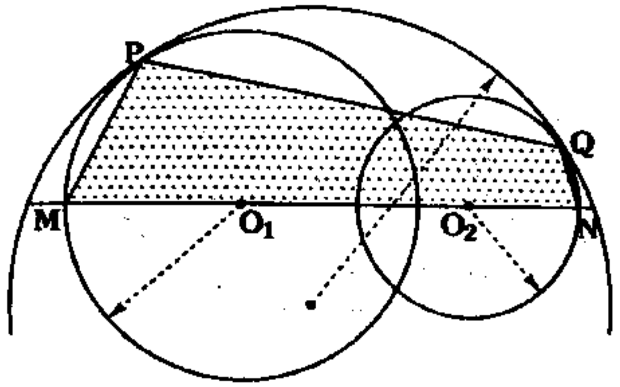
**Prueba**




- $O_1$, $O_3$ y Q: colineales
- P, $O_3$ y $O_2$ colineales
- $\Delta O_1QB$, $\Delta APO_2$ y $\Delta PO_3Q$: isósceles
- En ⊿APQB: $2\theta + 2\alpha + 2\omega = 360° \Rightarrow \theta + \alpha + \omega = 180°$

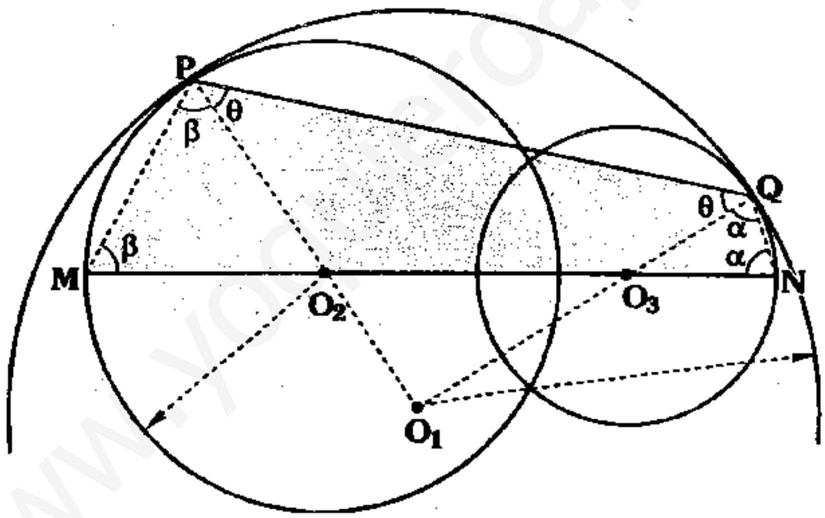
$\therefore$ ⊿APQB es inscriptible

◆ P y Q son puntos de tangencia




Se cumple: $\square$MPQN es inscriptible.

**Prueba:**

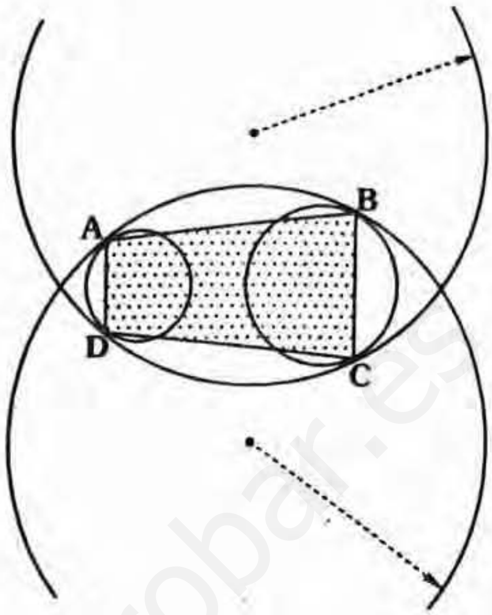



- $O_1$, $O_2$ y P son colineales lo mismo que $O_1$, $O_3$ y Q.
- $\Delta MO_2P$, $\Delta O_1PQ$ y $\Delta O_3QN$ : son isósceles
- En $\square$MPQN:

$$2\beta + 2\theta + 2\alpha = 360° \rightarrow \beta + \theta + \alpha = 180°$$

$\therefore$ $\square$MPQN es inscriptible

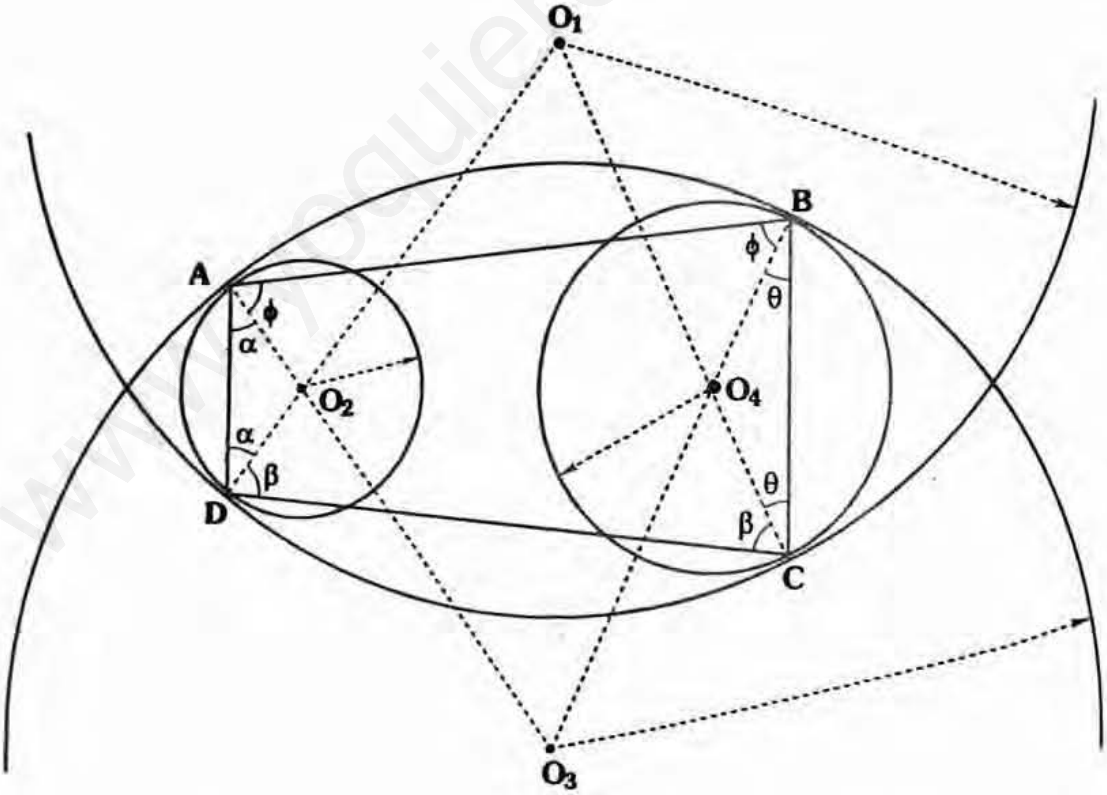
◆ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.




Se cumple:

$\triangle$ABCD es inscriptibles

Prueba




- La prueba no es difícil, basta ubicar los centros de las circunferencias y unirlos así: $(O_3,O_2,A)$; $(O_3,O_4,B)$; $(O_1,O_2,B)$ y $(O_1,O_4,C)$ las ternas indicadas son colineales.

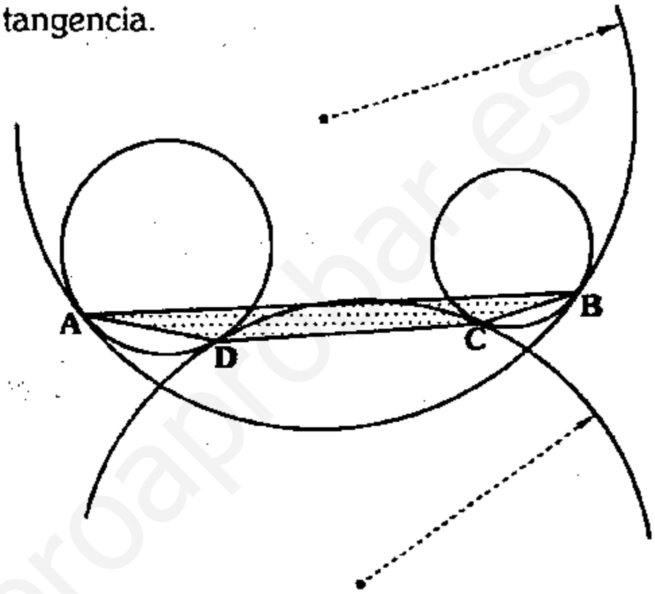
- Como los triángulos $ADO_2$, $DCO_1$, $ABO_3$ y $BCO_4$ son isósceles.
- En $\square ABCD$: $2\alpha+2\beta+2\theta+2\phi=360° \Rightarrow \alpha+\beta+\theta+\phi=180°$

Luego dicho $\square$ es incriptible.

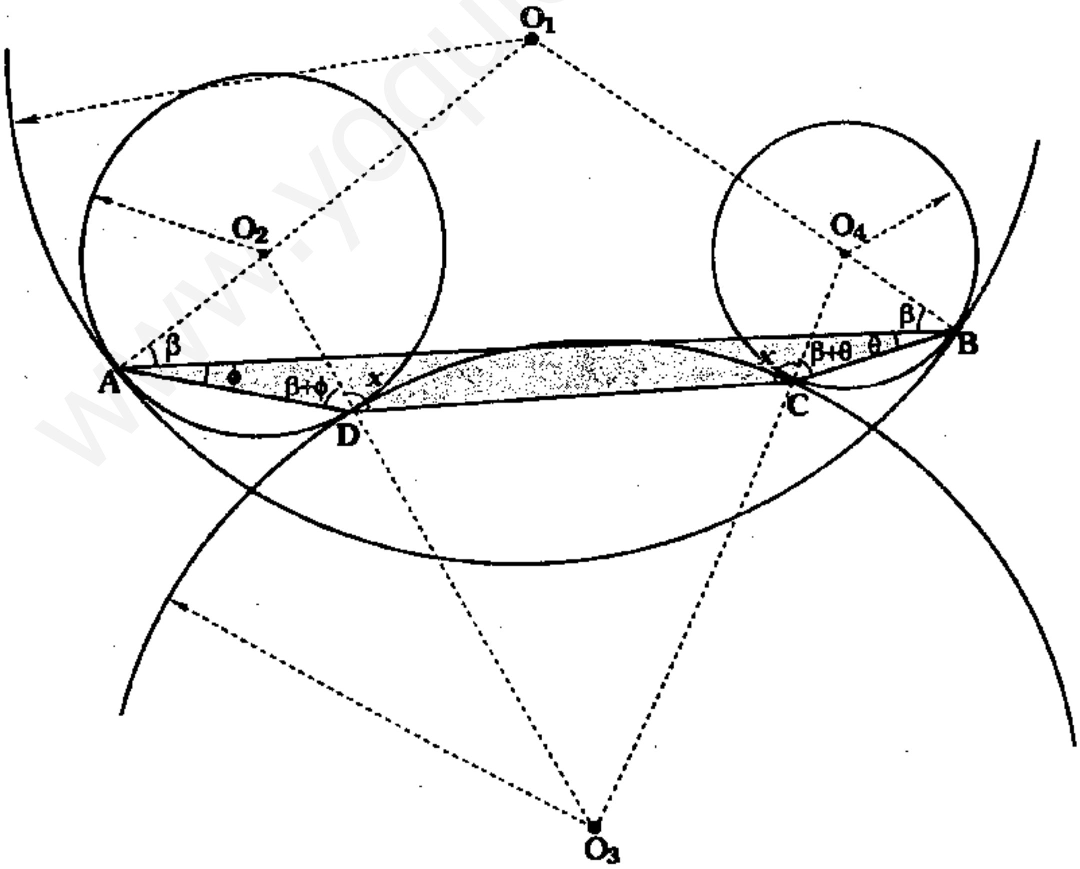
◆ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

$\square$ABCD es inscriptible




Prueba



• En forma análoga a la anterior notemos: $\Delta O_3DC$, $\Delta AO_2D$ y $\Delta CBO_4$ son isósceles

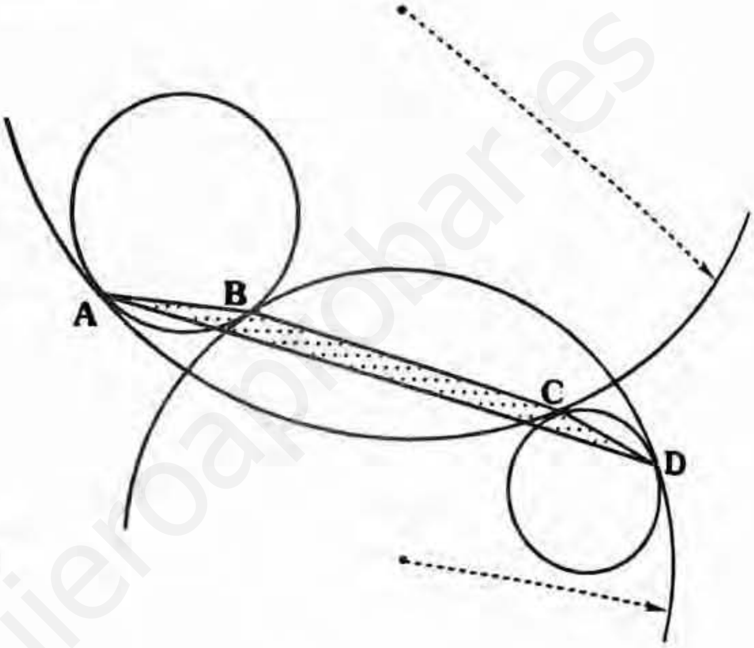
• $\square ABCD$: $2\theta+\beta+x+x+\phi+\beta+\phi=360^\circ \rightarrow \theta+\beta+x+\phi=180^\circ$

$\therefore$ $\square ABCD$ es inscriptible

◆ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

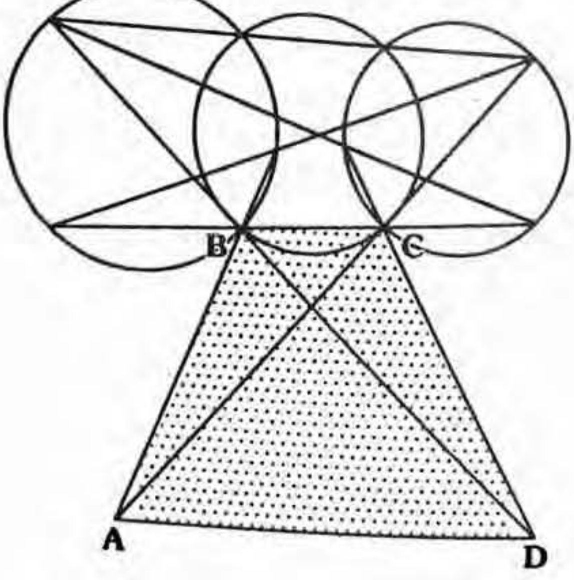
$\square ABCD$ es inscriptible



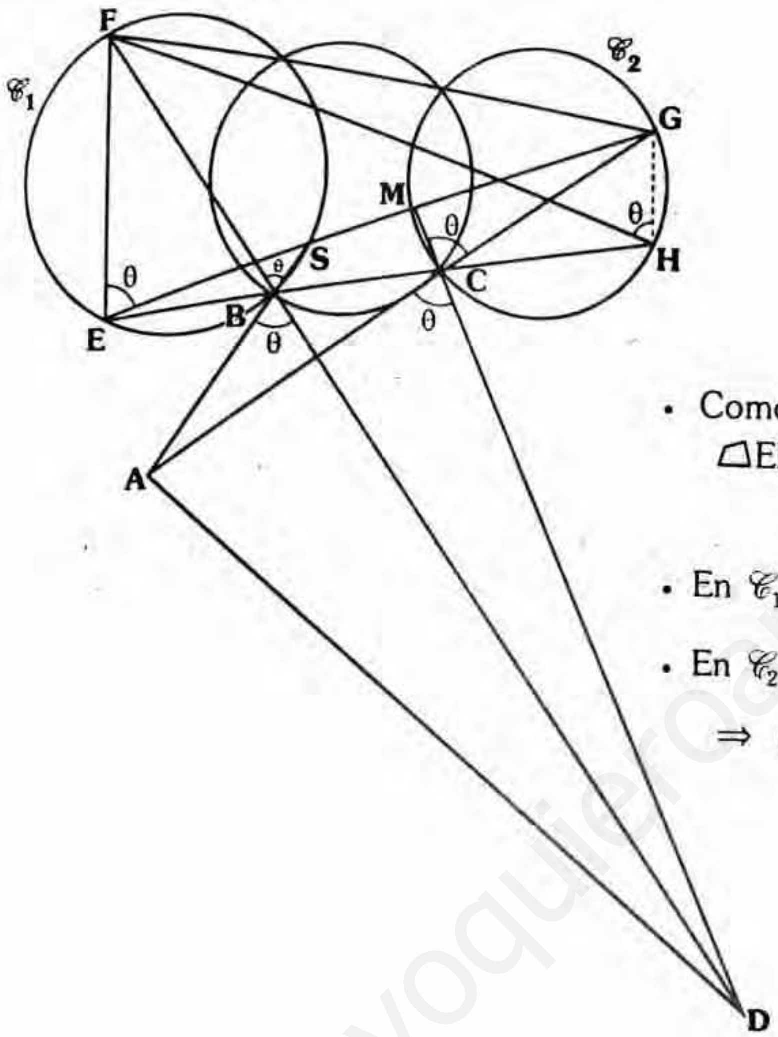

La prueba se deja como ejercicio.

◆ En el gráfico, se cumple:

$\square ABCD$ es inscriptible



Prueba




- Como aplicación de la página 60, el $\triangle$EFGH es inscriptible

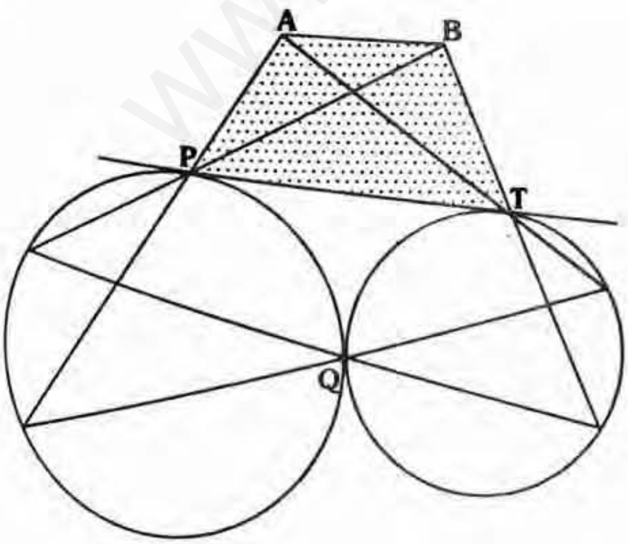
$\Rightarrow$ m∢FEG = m∢FHG = θ

- En $\mathscr{C}_1$: m∢FBS = θ

- En $\mathscr{C}_2$: m∢ABD = m∢ACD

$\Rightarrow$ $\triangle$ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.




Se cumple:

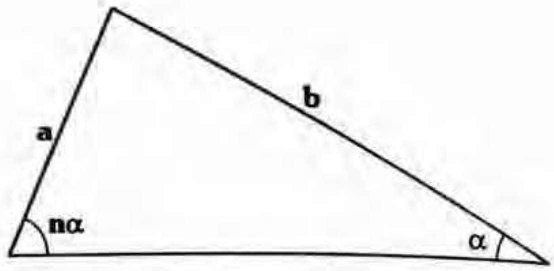
– $\triangle$ABTP es inscriptible
– m∢ PAT = m∢ PBT = 90°

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

◆ En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ y $n>1$

Se cumple:

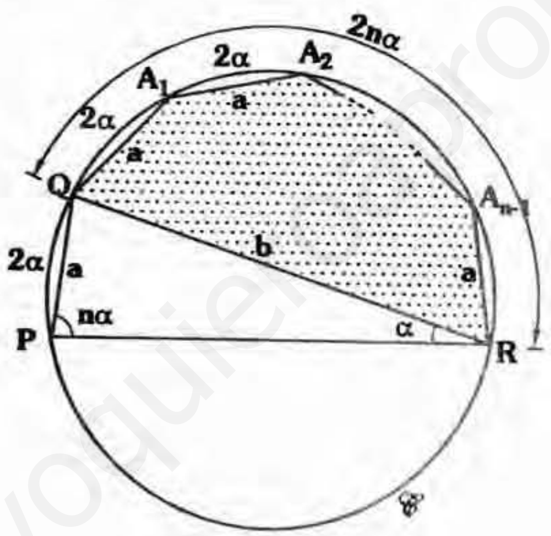
$b<na$




**Prueba**

En el capítulo de triángulos ya se demostró, pero con las herramientas dadas en circunferencia tendremos un mejor enfoque.

Veamos otra posibilidad:




- Se inscribe el $\Delta PQR$ en la circunferencia $\mathscr{C} \Rightarrow m\widehat{PQ}=2\alpha$ y

$$m\widehat{PQ}=2n\alpha \quad \Rightarrow \quad m\widehat{QR}=n\left(m\widehat{PQ}\right)$$

- Luego dividimos el arco QR en "n"
Partes iguales

$$\Rightarrow QA_1=A_1A_2...=A_{n....}R=a$$

- En la región sombreada:

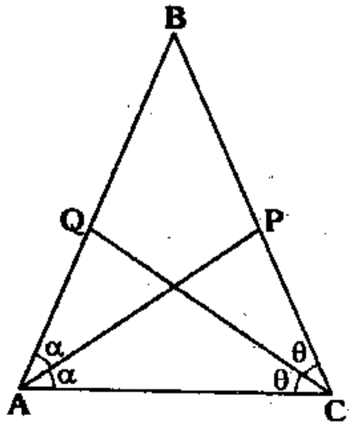
$$b<\underbrace{a+a+...+a}_{\text{n veces}}$$

$$\therefore \; b<na$$

(*Prueba por* R.Ch.S)

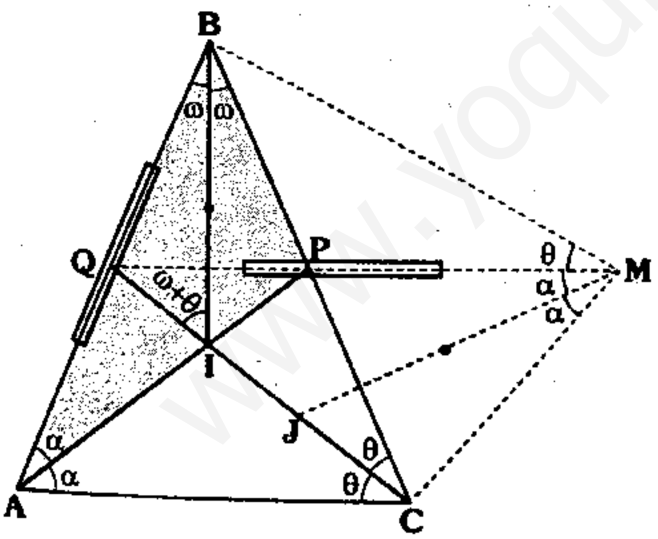
## TEOREMA DE STEINER - LEHMUS

Todo triángulo que tenga dos bisectrices interiores de igual longitud es un triángulo isósceles. El teorema fue por primera vez mencionado en 1840 en una carta escrita por C.L. Lehmus enviada por C. Sturm, en la cual pidió una prueba puramente geométrica a C. Sturn, el cual pasó la petición a otros matemáticos y Jakob Steiner fue uno de los primeros en ofrecer una solución.




Si $AP=CQ \Rightarrow AB=BC$

**Prueba**




- Como $AP=QC$ entonces construye el triángulo QMC congruente con APB talque $AB=QM$ y $BP=CM$

  $\Rightarrow m\measuredangle ABP=m\measuredangle QMC$

  $\Rightarrow$ ⌂QBMC: inscriptible

- En los triángulos ABP y QMC: $\overline{BI}$ y $\overline{MJ}$ son bisectrices homólogas entonces $BI=MJ$

- Luego: ⌂IBMJ es trapecio isósceles

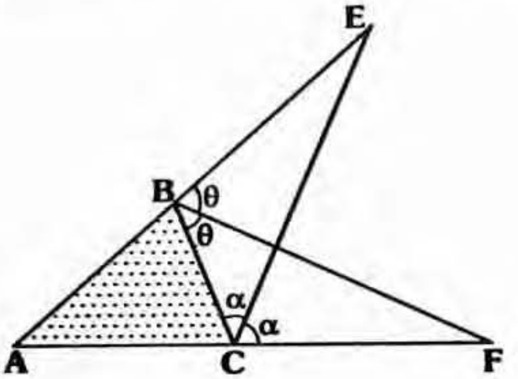
$\Rightarrow$ ⌂IBMJ es trapecio isósceles

$\Rightarrow \underbrace{QM}=BC$

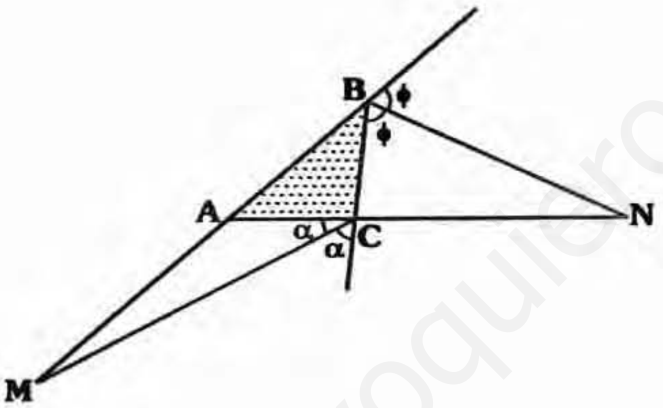
$\therefore AB=BC$

Nota

*Veamos que si dos bisectrices exteriores son de igual longitud, entonces el triángulo no necesariamente es triángulo es isósceles.*

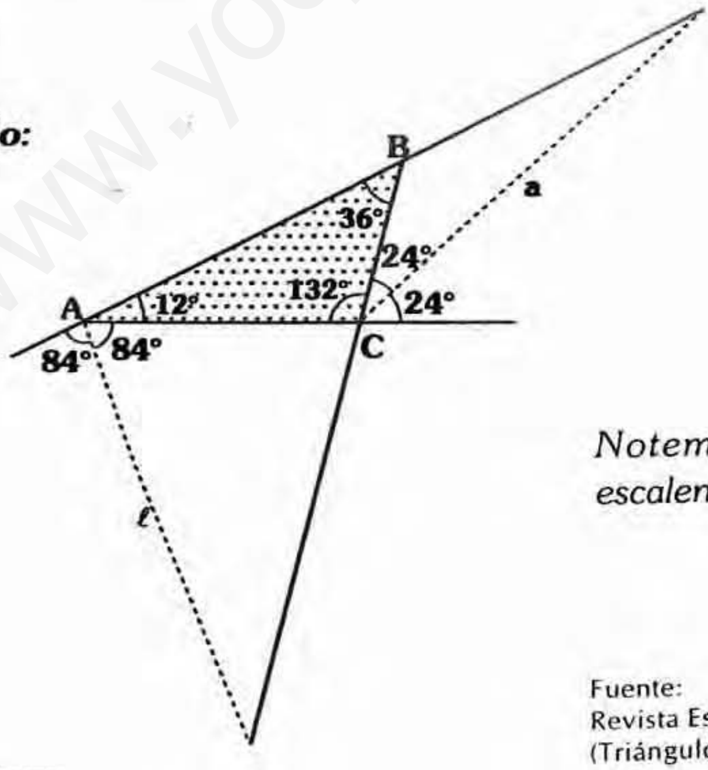



*Si* : BF=CE
$\Rightarrow$ AB=AC




*Si* CM=BN *entonces* AC *y* BC *no son iguales necesariamente.*

***Ejemplo:***



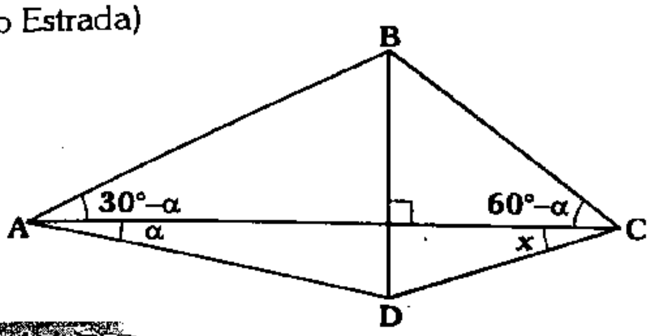

*Notemos que el* $\Delta ABC$ *es escaleno, sin embargo:*

$\boxed{a = \ell}$

Fuente:
Revista Escolar Iberoamericana de Matemáticas
(Triángulos especiales - Bellot Rosado)

## TEOREMA

(Casos genéricos de cuadriláteros convexos de diagonales perpendiculares - Por Diego Bravo Estrada)



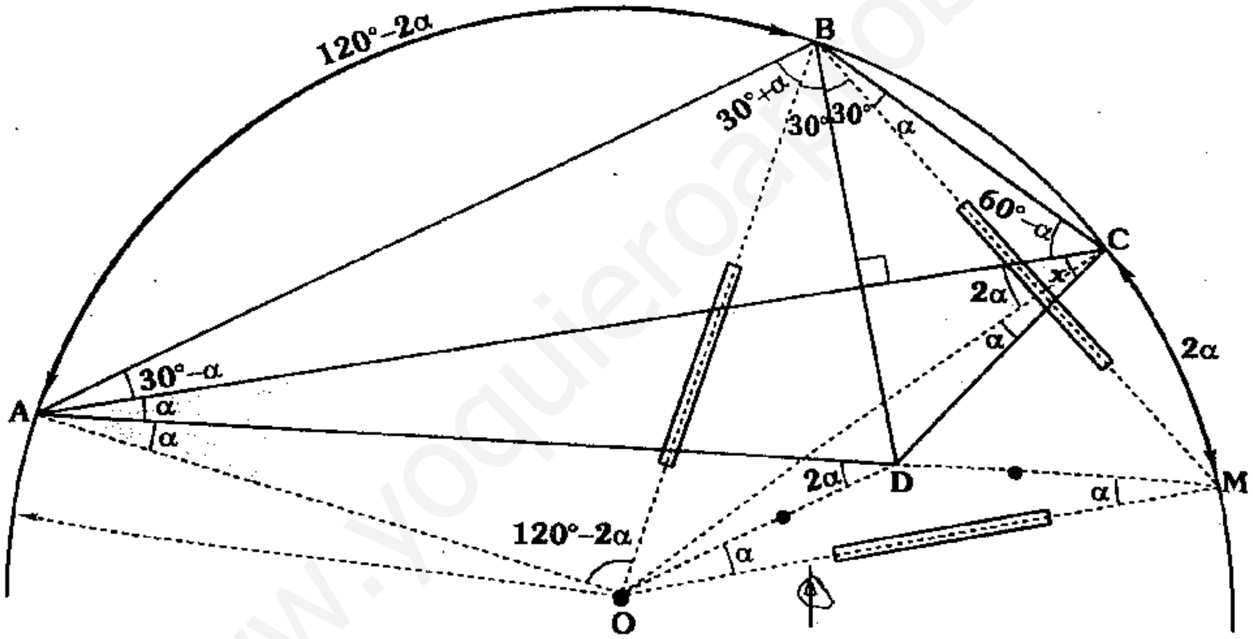

En el gráfico, $\alpha < 30°$

Se cumple:

$x = 3\alpha$

**Prueba**

- Se traza la circunferencia que pasa por A, B y C de centro O.




- La prolongación a $\overline{AD}$ corta a la circunferencia en M entonces Δ es equilátero.
- Notemos: $m\measuredangle MBC = \alpha$ y $m\overset{\frown}{AB} = 120° - 2\alpha \Rightarrow$ $m\measuredangle OAM = \alpha \Rightarrow$ $m\measuredangle ABO = 30° + \alpha$
- $\Delta AOC$ : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle OCA = 2\alpha$
- $\Delta AOM$ : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle OMA = \alpha$
- En $\Delta OBM$ equilátero, como $m\measuredangle OBD = m\measuredangle DBM = 30°$ $\Rightarrow$ $OD = DM$

  $\Rightarrow m\measuredangle DOM = \alpha \Rightarrow m\measuredangle ODA = 2\alpha$
- Como $m\measuredangle ACO = m\measuredangle ADO$ entonces ⏢AODC: inscriptible entonces $m\measuredangle DCO = \alpha$

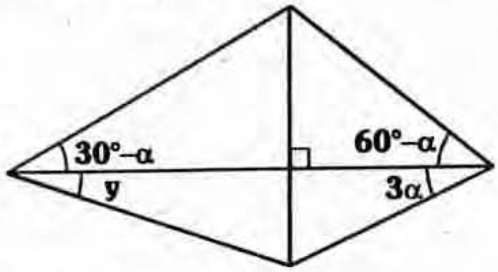
$\therefore \; x = 3\alpha$

**Observaciones**

- *La prueba anterior es equivalente a la propiedad trigonométrica*

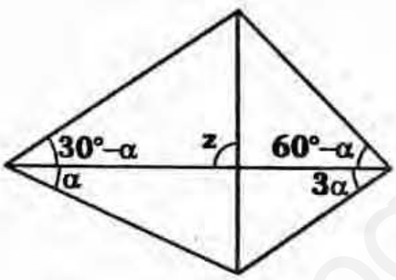
$$\boxed{\operatorname{tg}(3\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)}$$

*La propiedad anterior, es recíproca (Veamos algunos casos)*




*Se cumple*

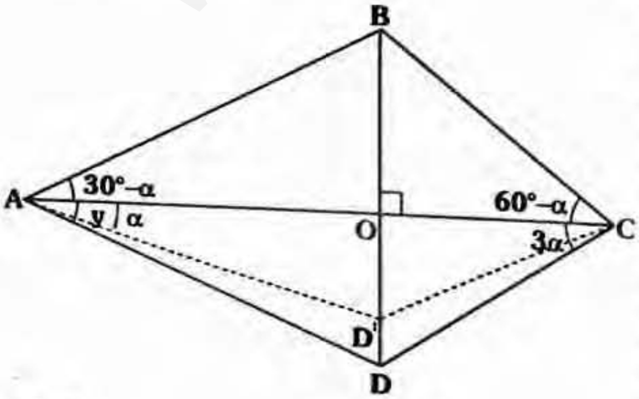
$$y=\alpha$$




*Se cumple*

$$z=90^\circ$$

◆ Para la prueba optemos por el metódo del absurdo.



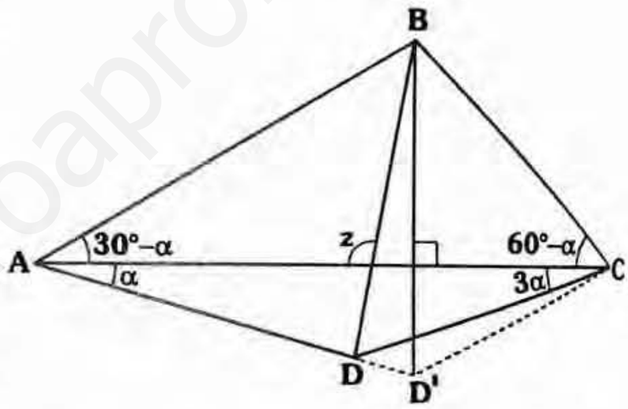

- Supongamos que $y \neq \alpha$, entonces se ubica D' en $\overleftrightarrow{OD}$ tal que $m\measuredangle CAO=\alpha$
- Por teorema:

$$m\measuredangle ACO=3\alpha \;(\Rightarrow \;\Leftarrow)$$

pues $m\measuredangle ACD=3\alpha$

$$\therefore\; y=\alpha$$

◆ Para la demostración de la segunda parte, en forma similar (por el absurdo supongamos que $z\neq 90^\circ$.




- Sea D" en $\overrightarrow{AD}$ tal que $\overline{BD"}\perp\overline{AC}$ entonces por teorema anterior:

$$m\measuredangle ACD"=3\alpha$$

- Pero: $m\measuredangle ACD=3\alpha \quad (\Rightarrow \;\Leftarrow)$

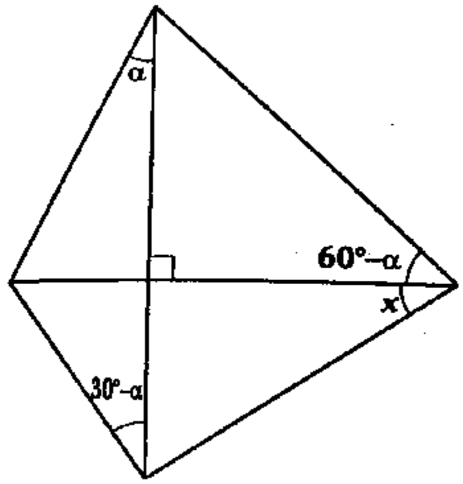
$$\therefore\; D=D"$$

$$\therefore\; z=90^\circ$$

**Prueba**

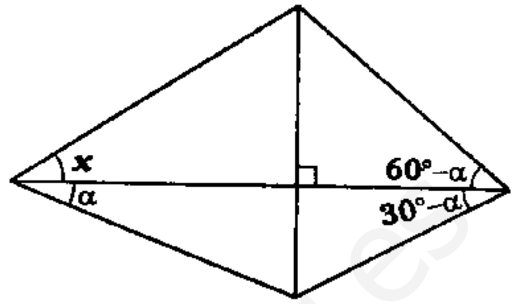
- Las siguientes propiedades son consecuencias de la anterior (estas a su vez son recíprocas).

Se cumple:



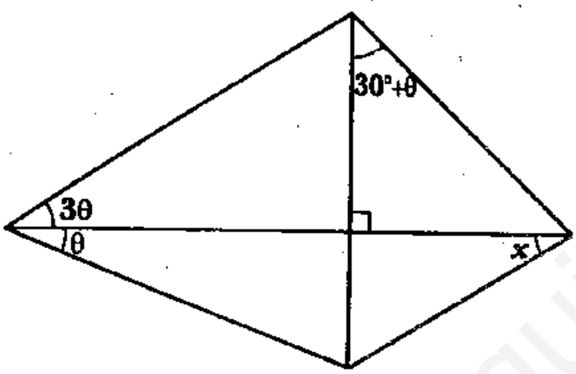

$x = 3\alpha$

Se cumple:



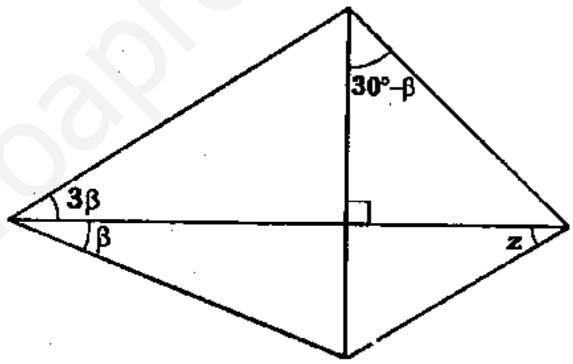

$x = 3\alpha$

Se cumple:



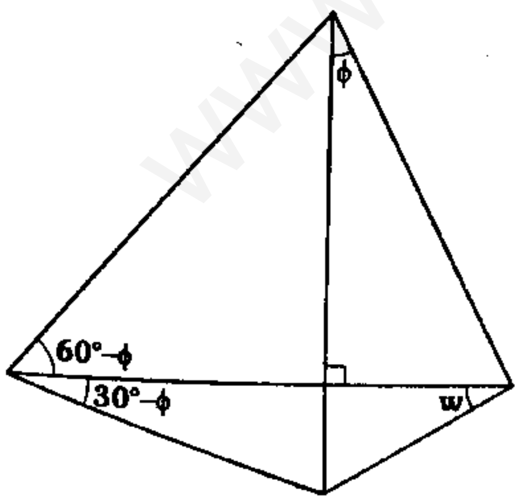

$x = 30° - \theta$

Se cumple:



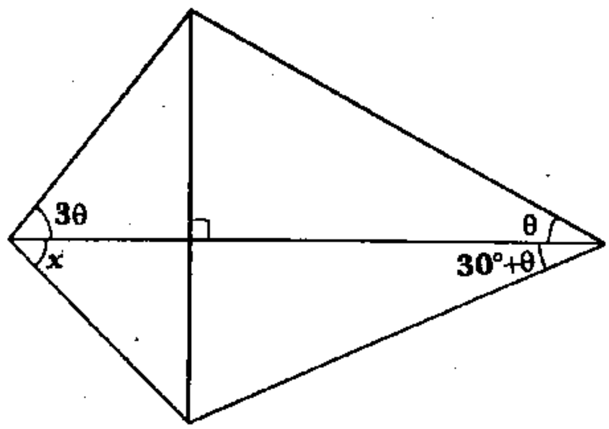

$z = 30° + \beta$

Se cumple:




$w = 3\phi$

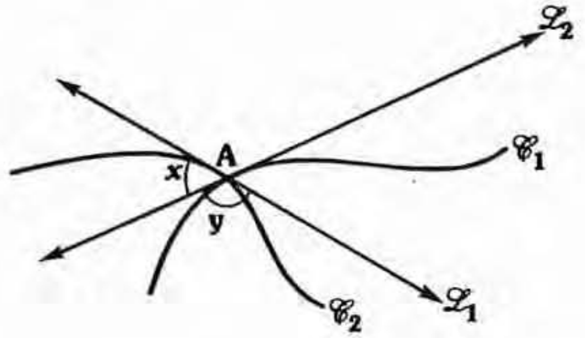
Se cumple:




$x = 60° + \theta$

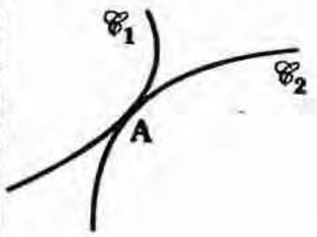
# ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

## ÁNGULO ENTRE CURVAS

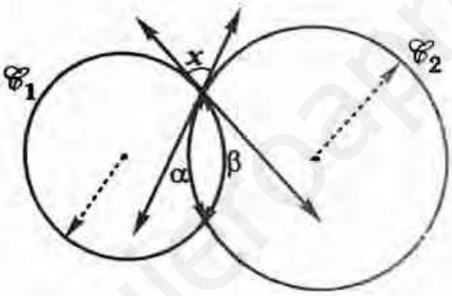



- Sea $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ secante en A $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en A.
- x ó y: Medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
- Donde: $x + y = 180°$

*Veamos algunos casos partículares*

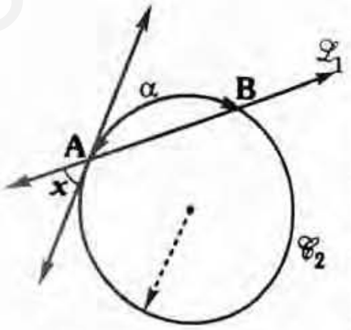



Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es 0° ó 180°




$x$ : medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

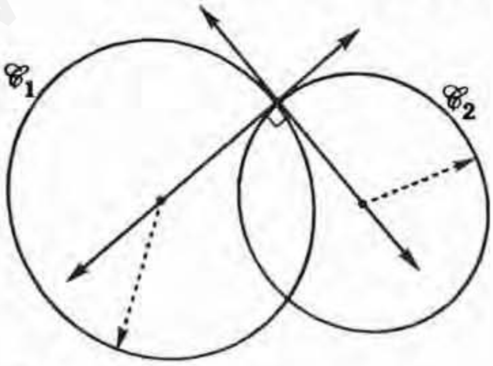
$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$



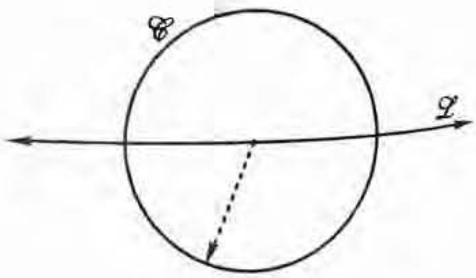

$x = \dfrac{\alpha}{2}$ : Medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

### Observaciones

- Si $x = 90° \rightarrow \mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales (*curvas ortogonales*).



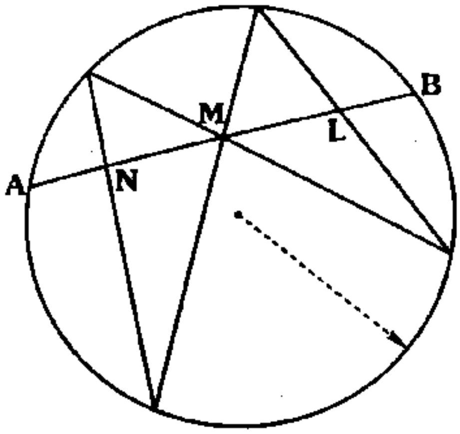

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ : ortogonales

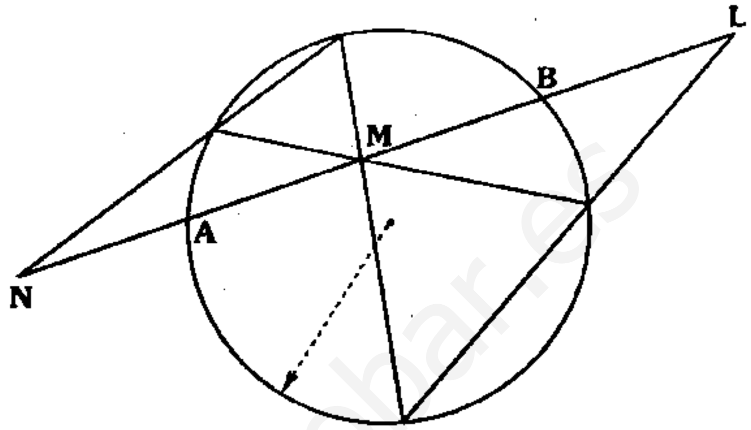



$\mathscr{C}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: ortogonales

## TEOREMAS DE PAPILON

Tenemos los siguientes casos (*todos se prueban en forma similar*).



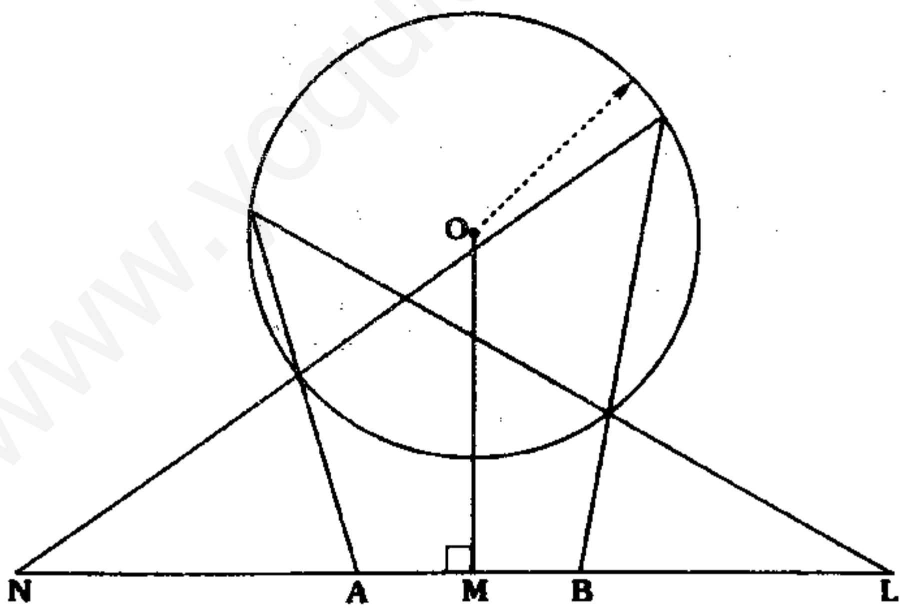




Si AM=MB, se cumple:

NM=ML

Si AM=MB, se cumple

MN=ML



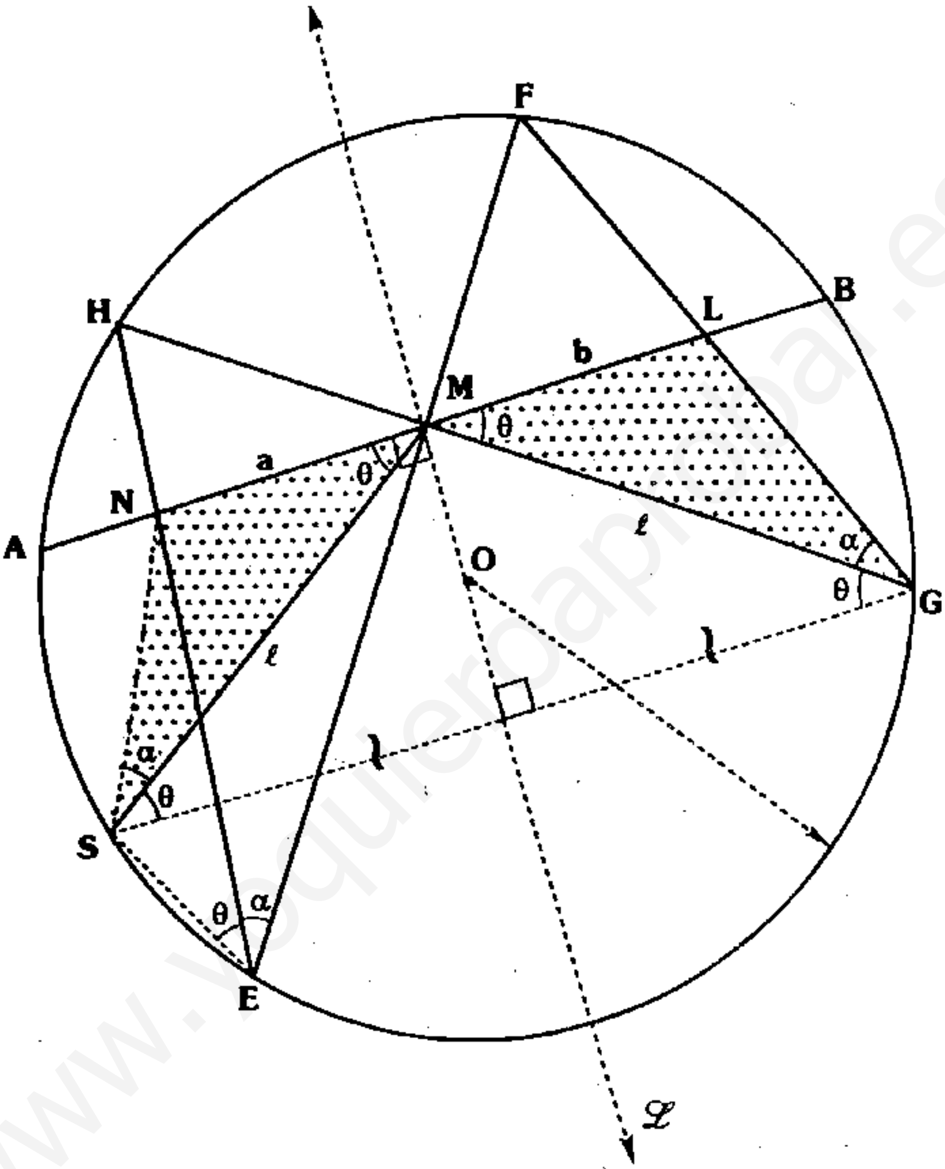

Si AM=MB, se cumple:

NM=ML

**Pruebas**

Las tres pruebas son similares

**Caso (1) :**



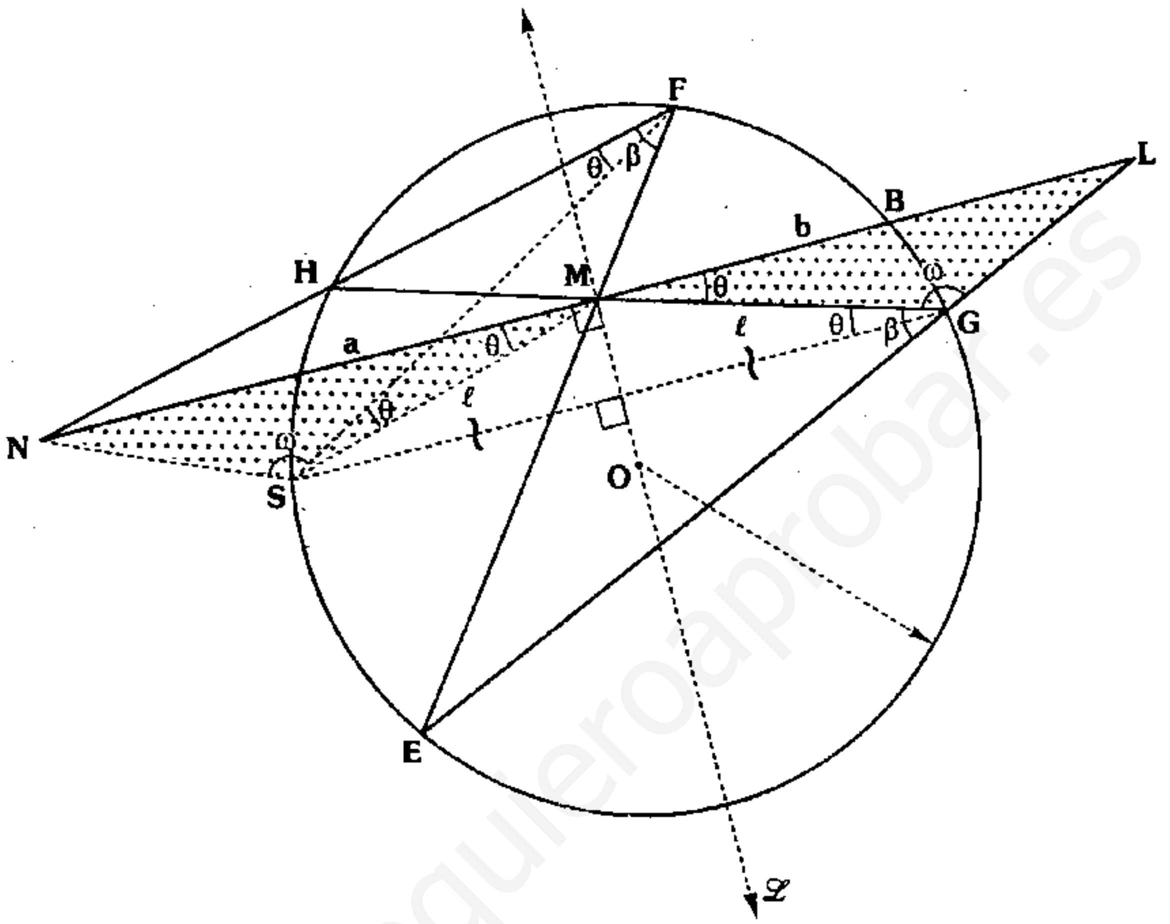

- Como $AM = MB \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$
- Se traza $\overline{GS} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \Rightarrow MS = MG$
- $\Delta SMG$: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MSG = m\measuredangle SGM$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle SEH = \theta \Rightarrow$ ⌂SNME: inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle NSM = m\measuredangle NEM = \alpha$

- $\Delta SMN \cong \Delta GML$ (ALA)

$\therefore$ **a = b**

**Caso (2) :**




Con la misma idea anterior:

- Se ubica S en la circunferencia tal que $\overline{SG} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- También:

  – $\Delta SMG$ : isósceles

  – Como $m\measuredangle HFS = m\measuredangle SMN = \theta$

- Entonces $\square NFMS$: inscriptible, luego:

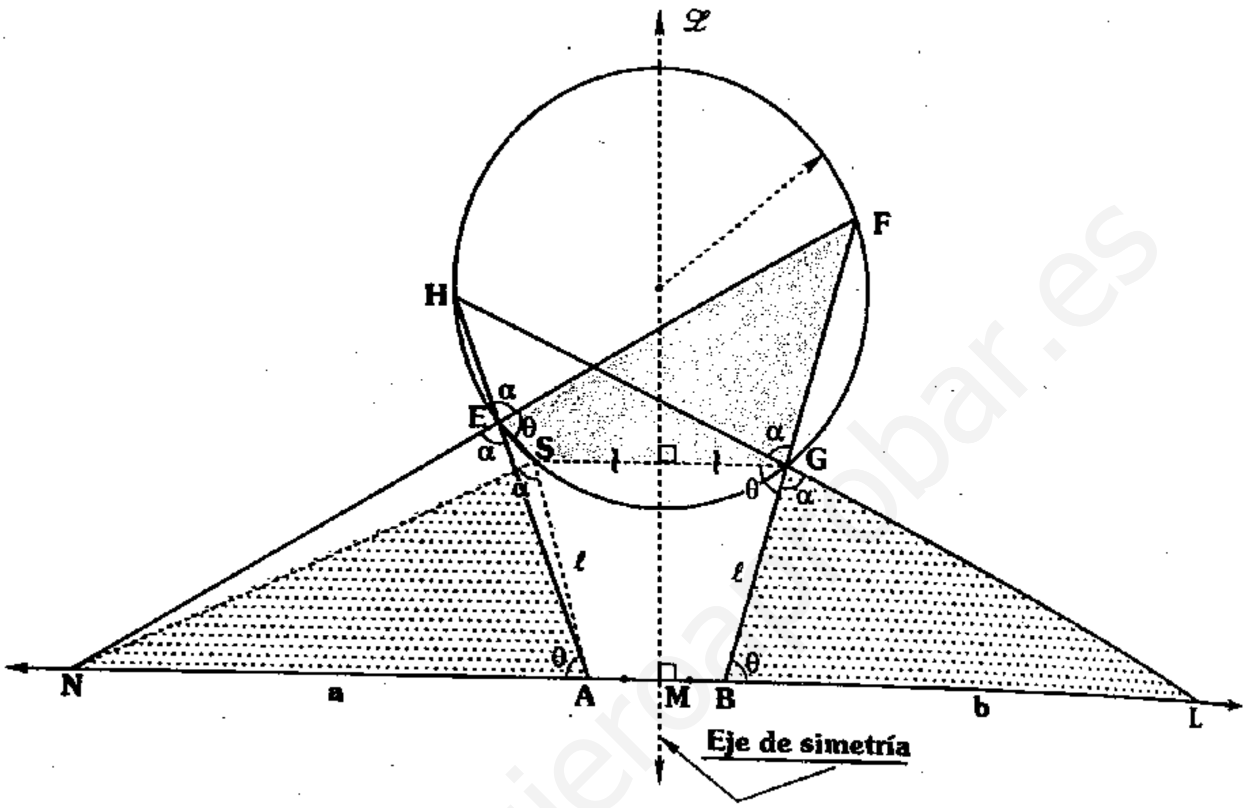
$$\underbrace{m\measuredangle NFM}_{\beta} = \underbrace{m\measuredangle NSM}_{\omega} = 180°$$

– Como: $m\measuredangle HGE = \beta \rightarrow m\measuredangle MGL = \omega$

– $\Delta SMN \cong \Delta MGL$ (ALA)

$$\therefore \ \mathbf{a = b}$$

**Caso (3) :**




- Se traza la cuerda SG, tal que $\overline{SG} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \rightarrow BG = AS$
- También:

$$m\sphericalangle GBL = m\sphericalangle SGB = m\sphericalangle SAN = \theta$$

- Como ⏢SEFG es inscrito

$$\rightarrow m\sphericalangle SEF = \theta$$

Entonces ⏢NESA es inscriptible

$$\rightarrow m\sphericalangle NEA = \alpha$$

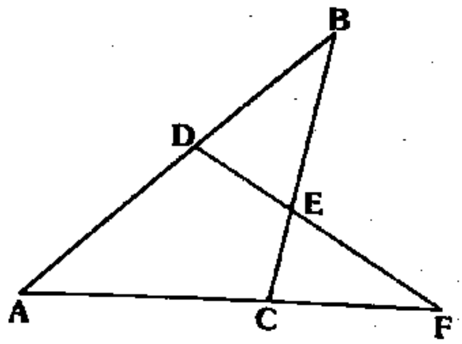
- $\Delta NSA \cong \Delta LGB$ (ALA)

$$\therefore \ \mathbf{a = b}$$

# APLICACIONES DE LOS CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES

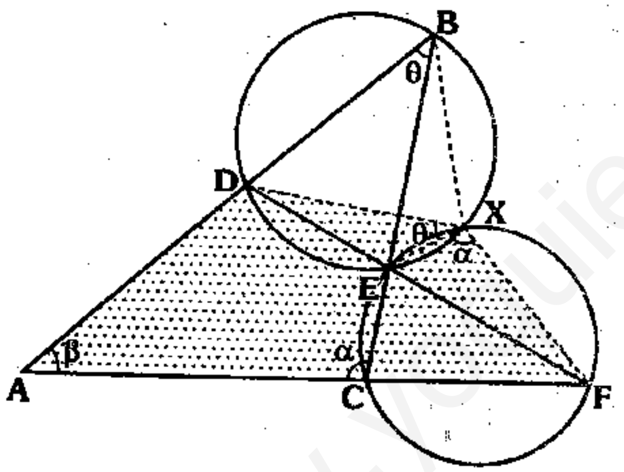
Una de las aplicaciones de los cuadriláteros inscriptible es la aplicación para la concurrencia de circunferencias.
Veamos algunos casos:

## TEOREMA



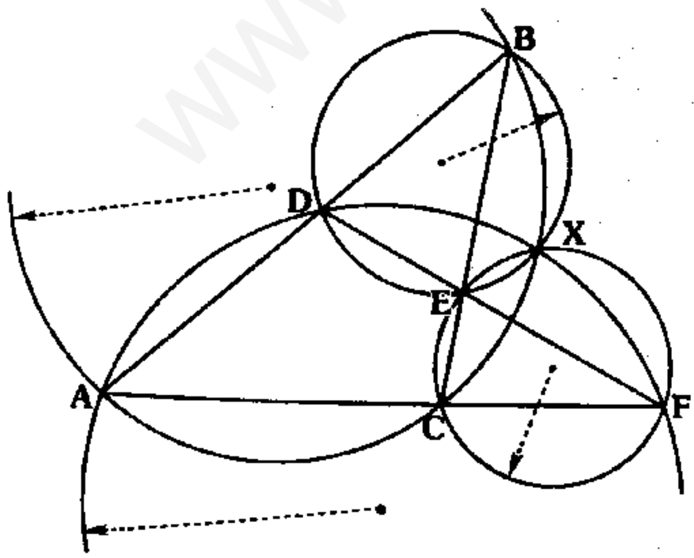

En la gráfica las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ADF, DEB y CEF son concurrentes.

## Prueba



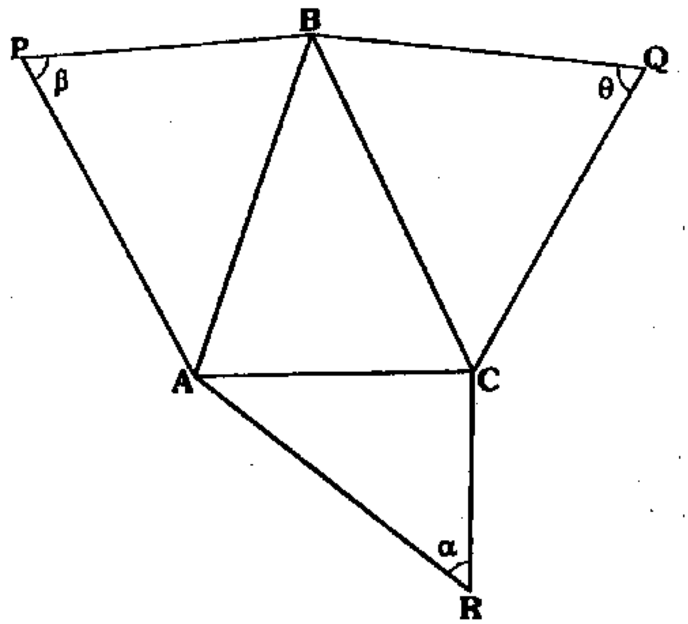

- Trazamos las circunferencias circunscritas a los triángulo DEB y CEF secantes en E y X.
- Sea $m\measuredangle BAC = \beta$, $m\measuredangle ABC = \theta$ y
  $m\measuredangle ACB = \alpha \rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180°$
- En los cuadriláteros DBDXE y CEXF:
  $m\measuredangle DXE = \theta$ y $m\measuredangle EXF = \alpha$
  $\rightarrow \triangle$ADXF es inscriptible.
- Análogamente se prueba que el $\triangle$ABXC es inscriptible

La figura quedaría así:




Las circunferencias concurren en X.

## TEOREMA

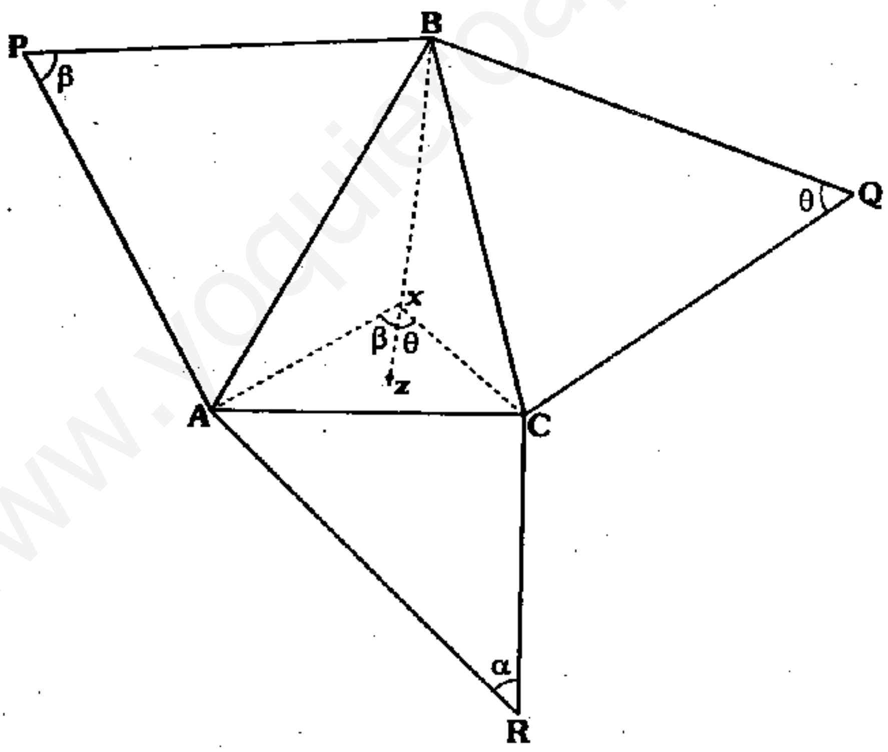



En el gráfico, si $\alpha+\beta+\theta=180°$

Se cumple:

Las circunferencias circunscritas a los triángulos APB, BQC y ACR son concurrentes.

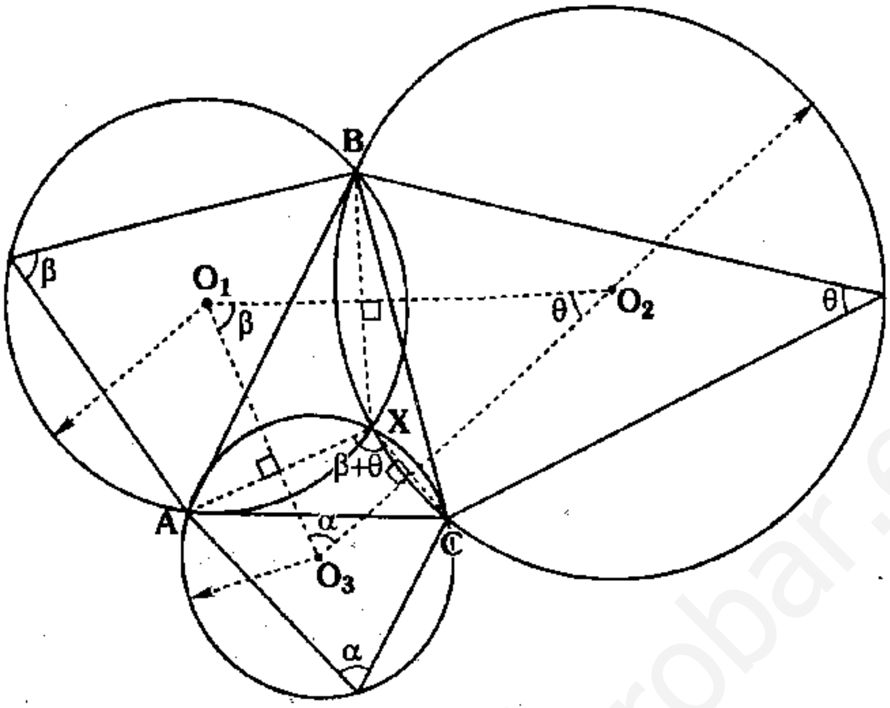
## Prueba




- Sean B y X los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABP y BQC, entonces los cuadriláteros APBX y CQBX son inscriptibles
- Luego: $m\measuredangle AXZ=\beta$ y $m\measuredangle CXZ=\theta$
- Podemos afirmar que el cuadrilátero AXCR es inscriptible.

$\therefore$ Las circunferencias a los triángulos APB, BQC y ACR concurren en X.

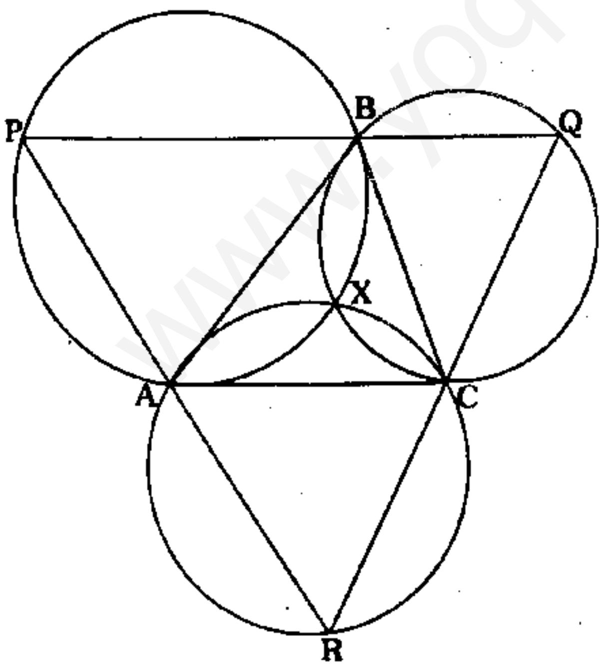
La figura, quedaría así:

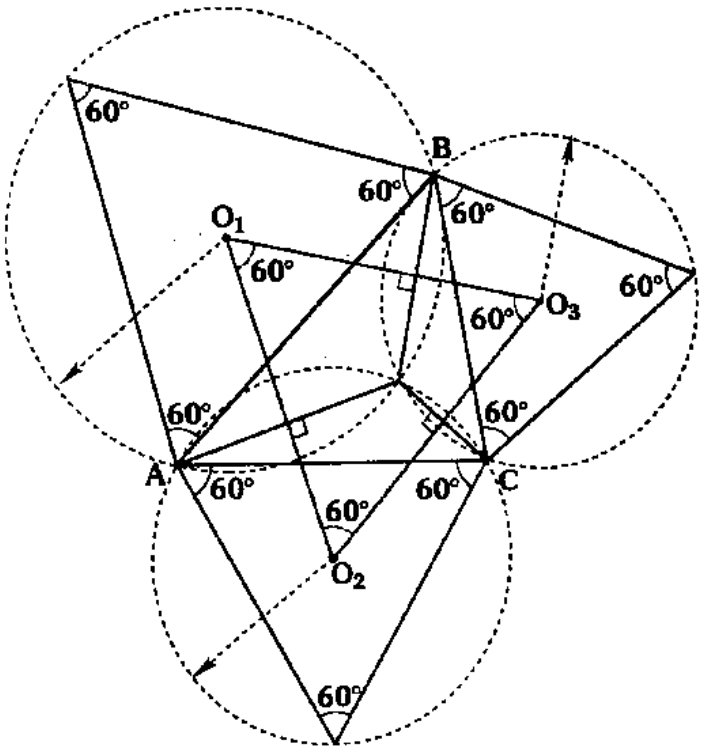



Es fácil ver que el triángulo que tiene vértices los centros de las circunferencias tiene sus ángulos internos de medidas: $\alpha$, $\beta$ y $\theta$

**Observación**

*Veamos algunos casos partículares.*

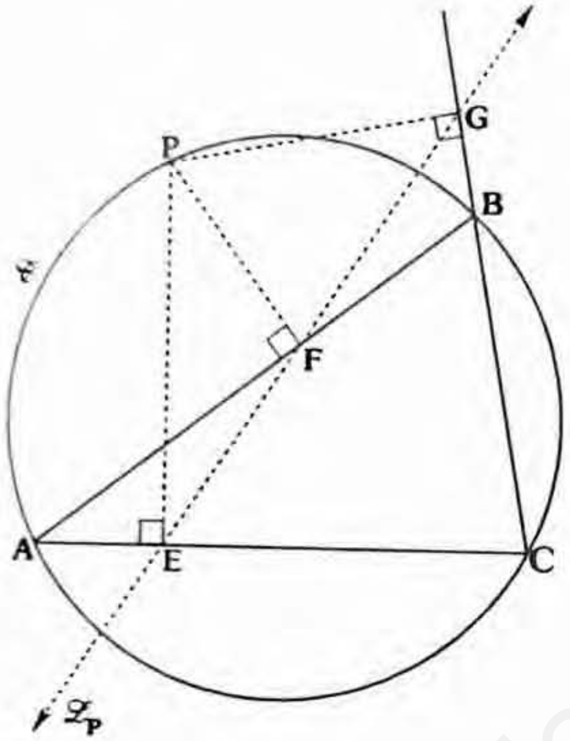



Se cumple que: $\Delta O_1O_2O_3$ es quilátero

## RECTA DE SIMSON – WALLACE

En todo triángulo, las proyecciones ortogonales de un punto de la circunferencia circunscrita hacia los lados, son colineales. La recta que contiene a dichos puntos se llama recta de Simson – Wallace.



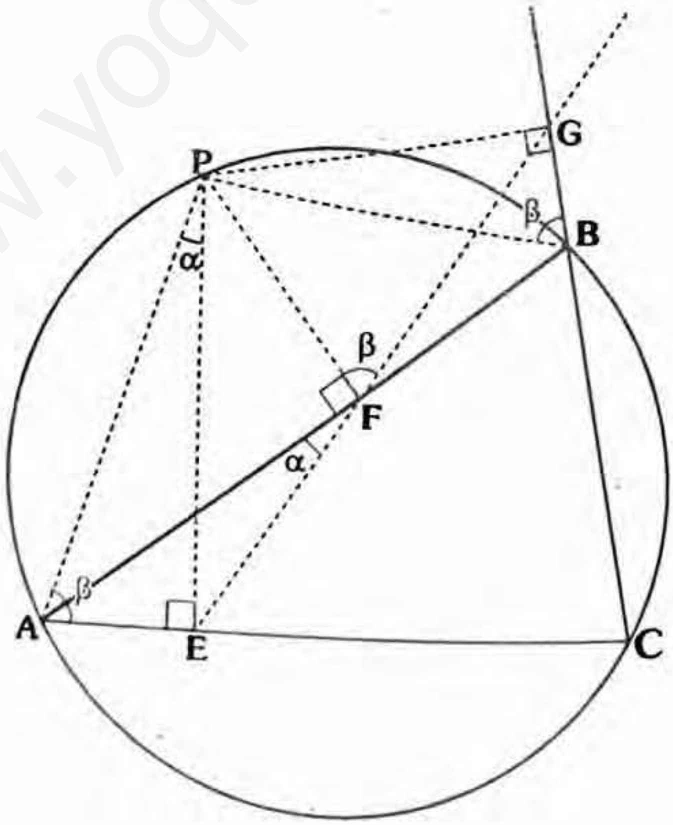

Se cumple:

$P \in \mathscr{C}$

E, F y G: colineales

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_P}$: Recta de Simson del punto P.

**Prueba**



- Sea $m\measuredangle AFE = \alpha$ y $m\measuredangle PFG = \beta$
- Vamos a demostrar: $\alpha + \beta = 90°$
- Como los cuadriláteros APFE y PFBG son inscriptible, entonces:

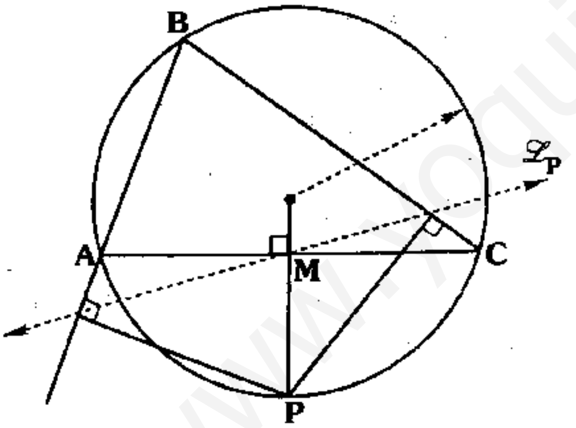
$$m\measuredangle APE = \alpha \quad y \quad m\measuredangle PBG = \beta$$

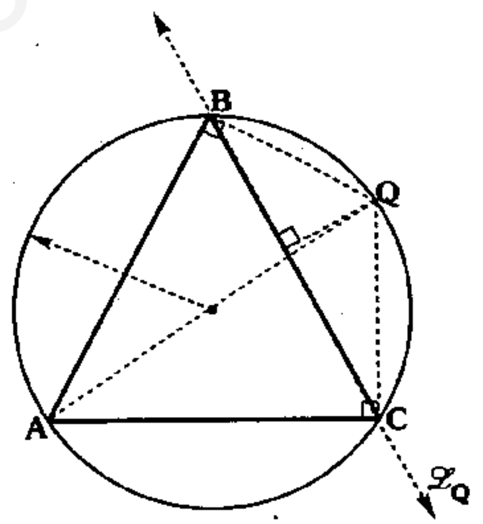
- En $\triangle$APBC: $m\measuredangle PAC = \beta$
- En $\triangle$AEP: $\beta + \alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle EFA + m\measuredangle AFG = 180°$

$\therefore$ E, F y G son colineales.

**Observación**

*Veamos algunos casos de la recta de Simson*



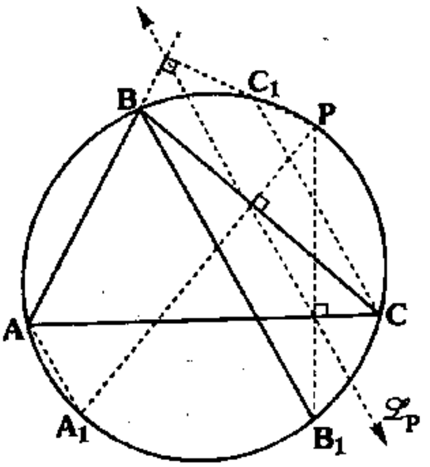




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_P}$: Recta de Simson del punto P respecto del $\Delta$ABC

*Notemos que la recta de Simson para este caso pasa por el punto medio de un lado*

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_Q}$: Recta de Simson de Q respecto del $\Delta$ABC

*Notemos que la recta de Simson pueda estar sobre un lado*



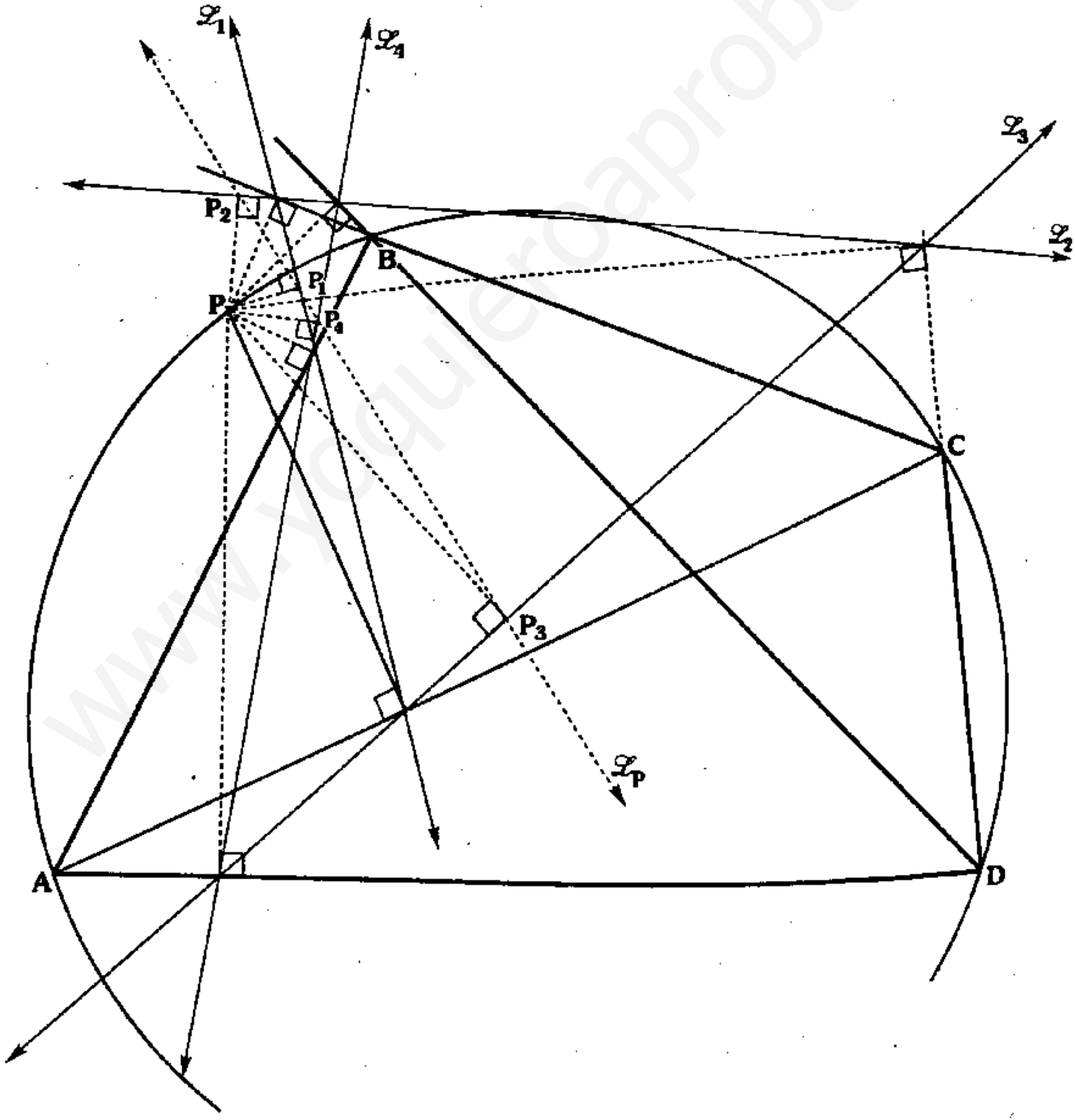

Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_P$: recta de Simson del punto P

Se cumple:

$$\mathscr{L}_P \,//\, \overline{AA_1} \,//\, \overline{BB_1} \,//\, \overline{CC_1}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

## RECTA DE SIMSON PARA EL CUADRILÁTERO

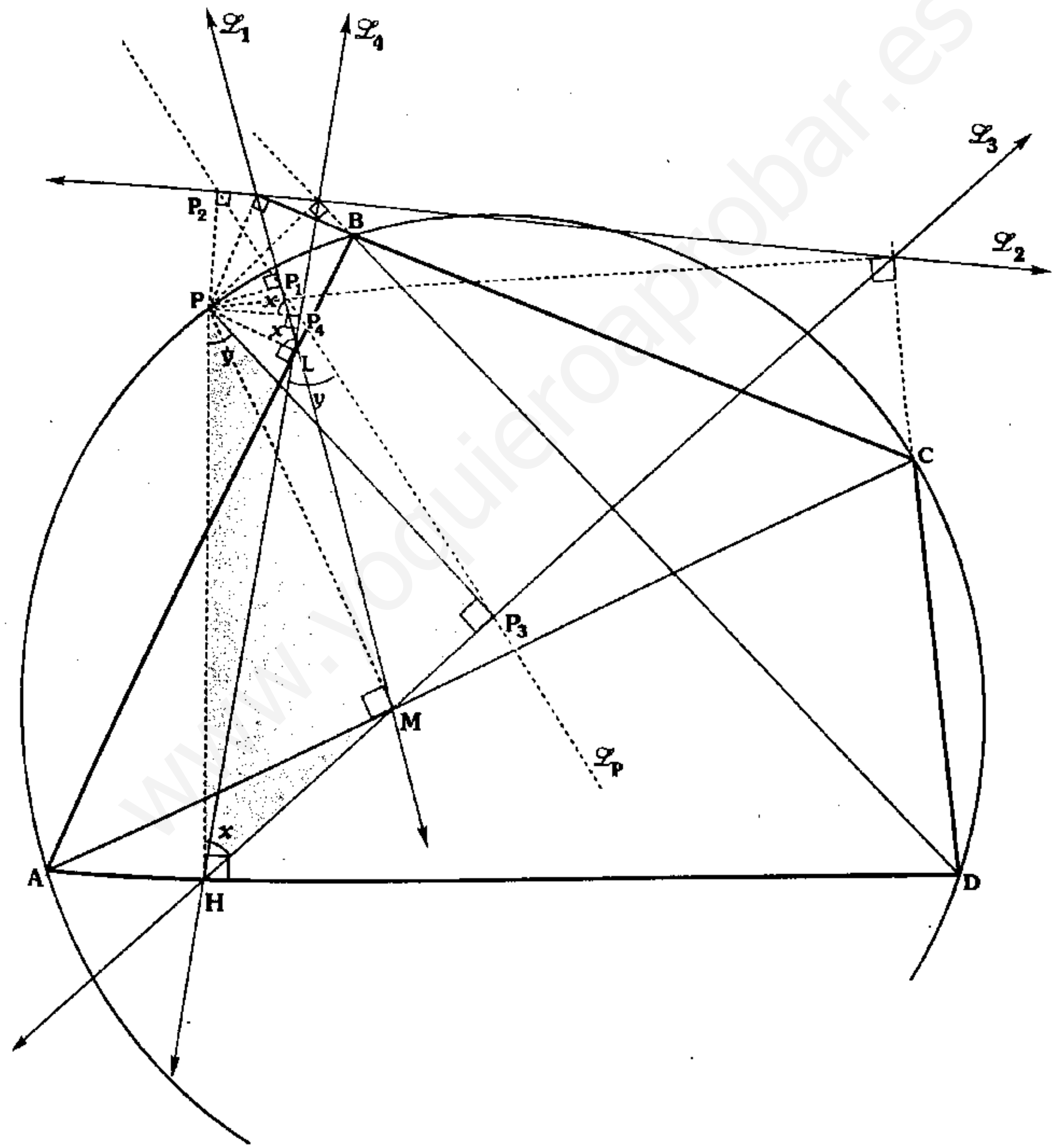


Se da el cuadrilátero inscrito ABCD:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: Recta de Simson de P respecto al $\Delta ABC$
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: Recta de Simson de P respecto al $\Delta BCD$
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Recta de Simson de P respecto al $\Delta ACD$
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$: Recta de Simson de P respecto al $\Delta ABD$

Se cumple: $P_1$, $P_2$, $P_3$ y $P_4$ : colineales y la recta que los contiene se denomina: recta de Simson de P respecto del cuadrilátero ABCD.

**Prueba**



- Sea:

$$m\sphericalangle PP_4P_1 = x \quad y$$

$$m\sphericalangle HP_4P_3 = y$$

- Vamos a demostrar que:

$$x + y = 90°$$

- $\triangle PP_4P_3H$ : inscriptible

$$\rightarrow \ m\sphericalangle HPP_3 = y$$

- $\triangle PP_1P_4L$ : inscriptible

$$\rightarrow \ m\sphericalangle PLP_1 = x$$

- Como los puntos P, L, M, H y A son cíclicos.
- $\triangle PLMH$: inscriptible

$$\rightarrow \ m\sphericalangle PHM = x$$

- En $\triangle HP_3P$ : $x + y = 90°$

$$\rightarrow \ P_3, \ P_4 \text{ y } P_1 : \text{colineales.}$$

# Geometría

## ENUNCIADO DE LOS

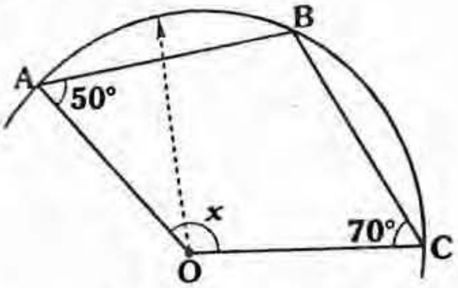
# PROBLEMAS RESUELTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

**CIRCUNFERENCIA**


**PROBLEMA Nº 1**

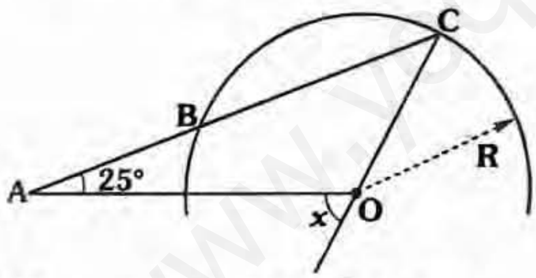
En el gráfico, calcule "$x$".




A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 135°

**PROBLEMA Nº 2**

En el gráfico, AB=R. Calcule "$x$".




A) 50° B) 60° C) 65°
D) 75° E) 80°

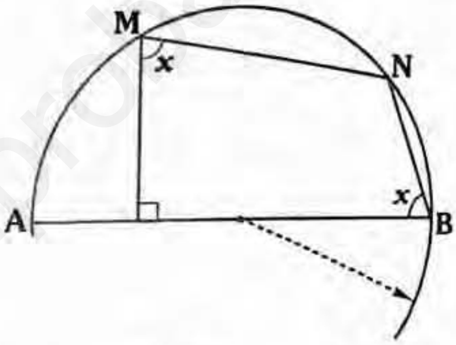
**PROBLEMA Nº 3**

Se tienen los puntos consecutivos A, T, C y D sobre una recta, tal que AT=3 y TC=2, con centro en A y radio AT se traza la circunferencia $\mathscr{C}$. Desde C, se traza la tangente $\overline{CM}$ (M *es punto de tangencia*). Calcule m∢MCD.

A) 120° B) 127° C) 143°
D) 121° E) 105°

**PROBLEMA Nº 4**

En el gráfico, $m\widehat{AM} = 60°$, calcule "$x$".




A) 60° B) 75° C) 80°
D) 50° E) 70°

**PROBLEMA Nº 5**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) La unión de todos los puntos que equidistan de un punto fijo, forman una circunferencia.

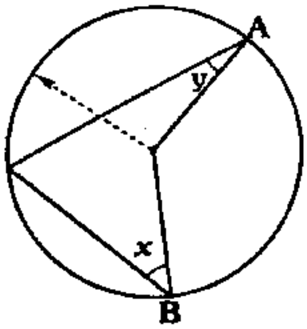
II) Si una recta coplanar a un circunferencia se intersecan en un punto entonces la recta es tangente a dicha circunferencia.

III) Si una recta coplanar a un arco de circunferencia la corta en un solo punto es tangente a dicho arco.

A) VFV B) FVF C) FFF
D) VVV E) VVF

**PROBLEMA Nº 6**

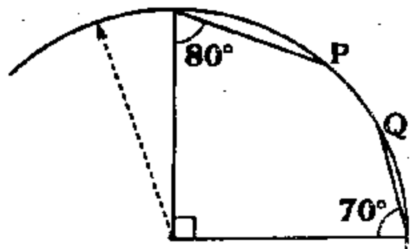
Si $m\widehat{AB}=100°$. Calcule $x+y$




A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

**PROBLEMA Nº 7**

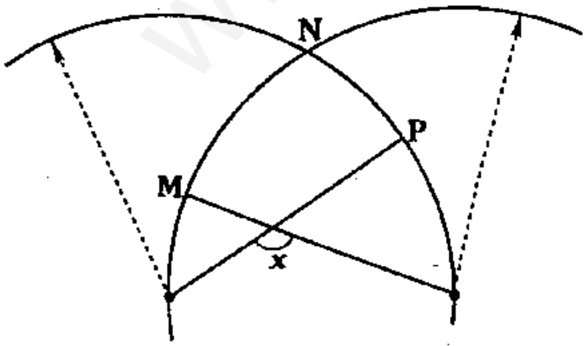
En el gráfico, calcule $m\widehat{PQ}$.




A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

**PROBLEMA Nº 8**

Si $m\widehat{MN}+m\widehat{NP}=50°$, calcule "x".




A) 110° B) 140° C) 150°
D) 170° E) 135°

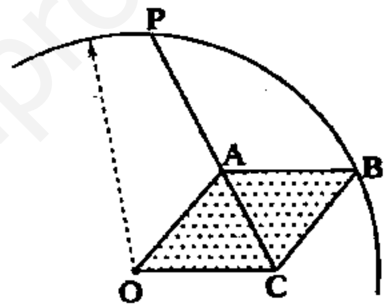
**PROBLEMA Nº 9**

Se tiene una circunferencia de diámetro $\overline{FG}$ y centro O, $\overline{AM}$ es una cuerda secante a $\overline{FG}$, con F en $\widehat{AM}$. Si $m\widehat{FM}=65°$ y $m\sphericalangle OAM=40°$. Calcule $m\widehat{AG}$.

A) 130° B) 135°
C) 140° D) 145°
E) 155°

**PROBLEMA Nº 10**

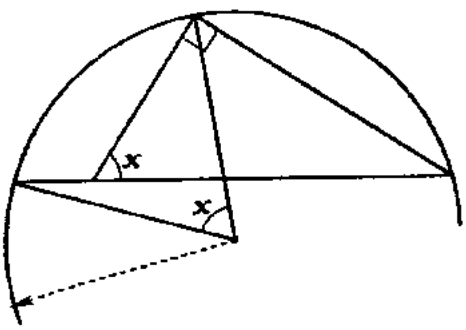
En el gráfico, OABC es un rombo.
Calcule $m\widehat{BP}$




A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 11**

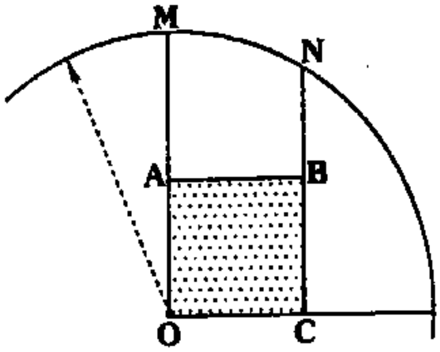
Calcule $x$.




A) 72° B) 60°
C) 45° D) 36°
E) 30°

**PROBLEMA Nº 12**

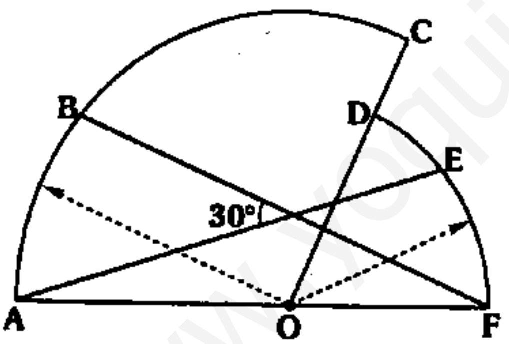
En el gráfico, OABC es un cuadrado y OA=AM. Calcule $m\widehat{MN}$.




A) $\frac{53°}{2}$  B) $\frac{37°}{2}$  C) 30°
D) 37°  E) 14°

**PROBLEMA Nº 13**

En el gráfico, $m\widehat{AB}=m\widehat{EF}$.
Calcule $m\widehat{BC}+m\widehat{DE}$.

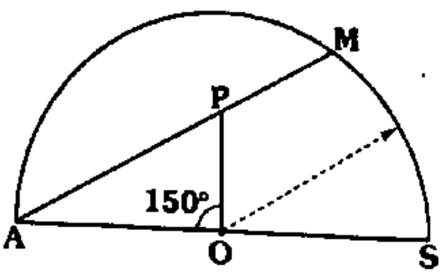



A) 150°  B) 140°  C) 120°
D) 100°  E) 145°

**PROBLEMA Nº 14**

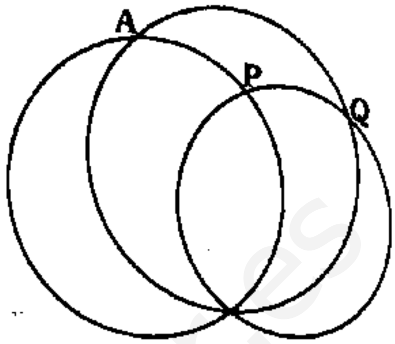
En el gráfico, OP=PM. Calcule $m\widehat{SM}$.

A) 10°
B) 18°
C) 20°
D) 25°
E) 30°




**PROBLEMA Nº 15**

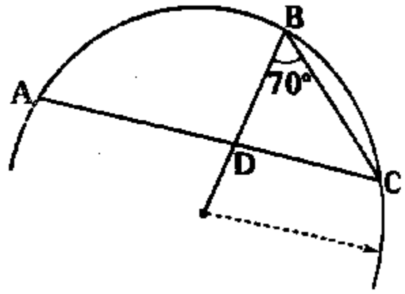
En el gráfico, $m\widehat{AP}=40°$ y $m\widehat{PQ}=30°$.
Calcule $m\widehat{AQ}$.




A) 60°  B) 50°  C) 70°
D) 35°  E) 80°

**PROBLEMA Nº 16**

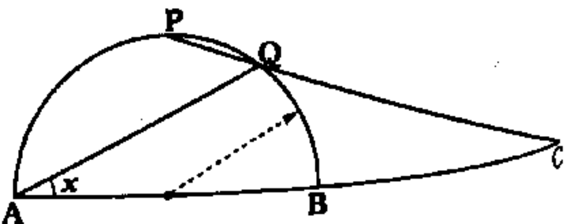
En el gráfico, BC=CD. Calcule $m\widehat{ABC}$.




A) 110°  B) 120°  C) 130°
D) 140°  E) 150°

**PROBLEMA Nº 17**

En el gráfico, AB=BC y $m\widehat{AP}=m\widehat{PQB}$.
Calcule "x".




A) 16°  B) 18°30'  C) 15°
D) 26°30'  E) 22°30'

**PROBLEMA Nº 18**

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Si $BQ=3$, $QD=2$ y $m\measuredangle DBC = m\overset{\frown}{AD}$.

Calcule $m\overset{\frown}{AD}$. $\left(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{Q\}\right)$

A) 37°   B) 53°   C) 74°

D) 60°   E) $\dfrac{127^\circ}{2}$

**PROBLEMA Nº 19**

En la semicircunferencia de diámetro AE se ubican los puntos B y D (B en $\overset{\frown}{AD}$), las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se cortan en C. Si $AB=BC$ y $m\measuredangle ACE = 70^\circ$.

Calcule $m\overset{\frown}{ED}$.

A) 140°   B) 130°

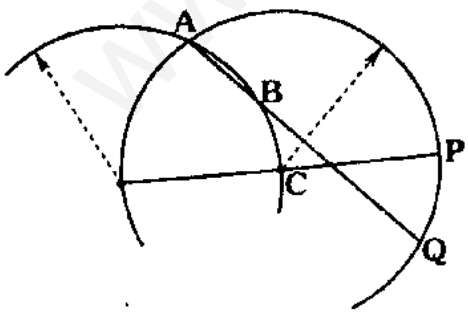
C) 120°   D) 110°

E) 100°

**PROBLEMA Nº 20**

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 2\left(m\overset{\frown}{BC}\right)$.

Calcule $m\overset{\frown}{PQ}$.



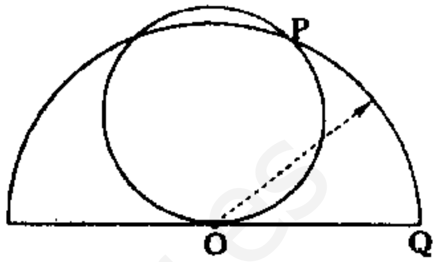

A) 60°   B) 45°

C) 40°   D) 30°

E) 35°

**PROBLEMA Nº 21**

En el gráfico, O es punto de tangencia y $m\overset{\frown}{OP} = 140^\circ$. Calcule $m\overset{\frown}{PQ}$.




A) 40°

B) 50°

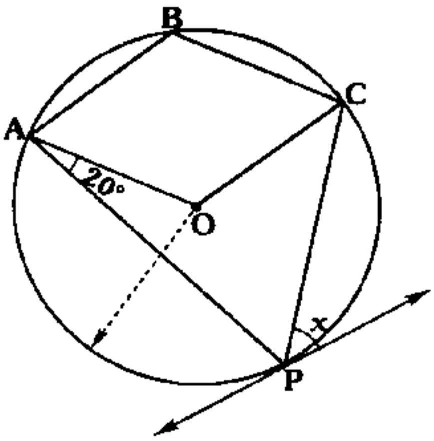
C) 60°

D) 70°

E) 80°

**PROBLEMA Nº 22**

En el gráfico, ABCO es un paralelogramo, P es punto de tangencia. Calcule "$x$".




A) 60°

B) 70°

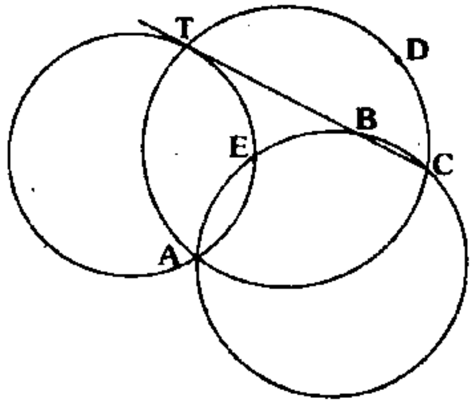
C) 80°

D) 50°

E) 40°

**PROBLEMA Nº 23**

En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule: $m\overset{\frown}{TDC} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{AET}$




A) 180°

B) 270°

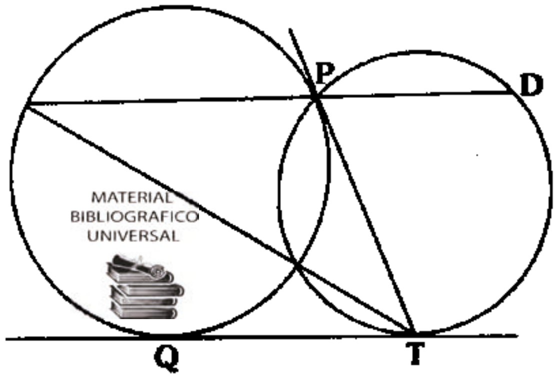
C) 360°

D) 450°

E) 330°

**PROBLEMA Nº 24**

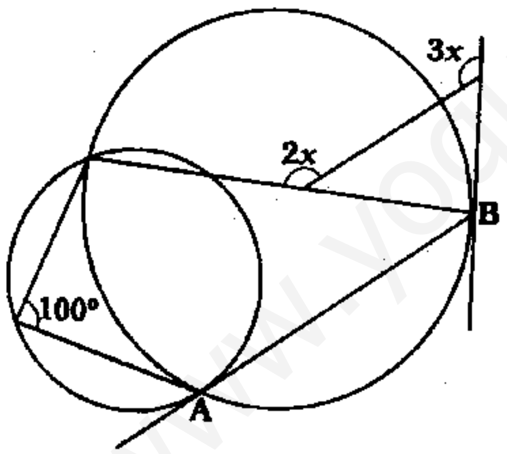
En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $m\overparen{PD}=80°$, calcule $m\overparen{TD}$.




A) 100° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 150°

**PROBLEMA Nº 25**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule "$x$".



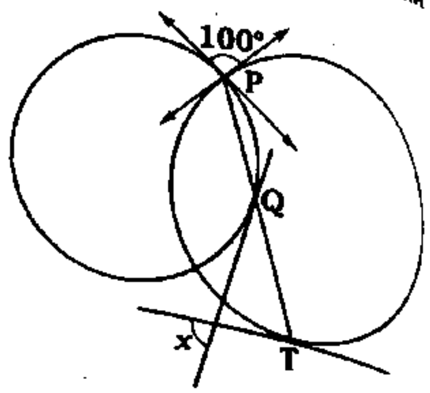

A) 40° B) 56° C) 54°
D) 44° E) 52°

**PROBLEMA Nº 26**

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.

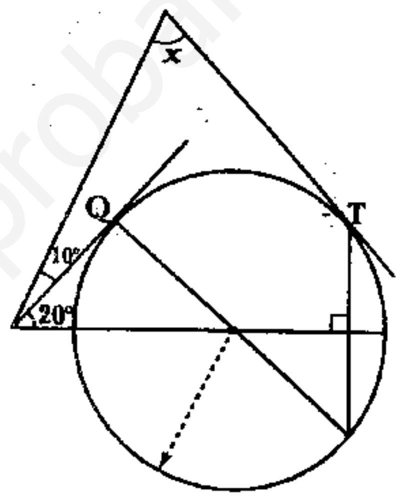
Calcule "$x$".

A) 55°
B) 110°
C) 70°
D) 80°
E) 65°




**PROBLEMA Nº 27**

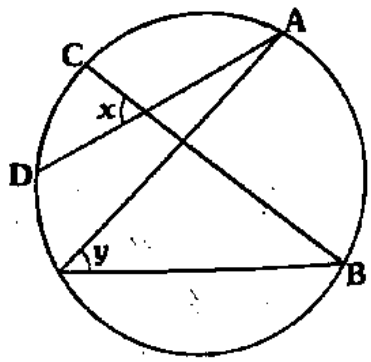
En el gráfico, Q y T son puntos de tangencia. Calcule "$x$".




A) 100° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 110°

**PROBLEMA Nº 28**

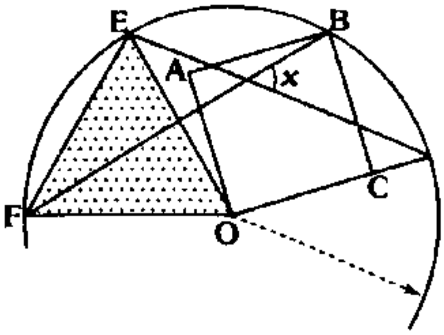
En el gráfico, $m\overparen{AB}=100°$ y $m\overparen{CD}=20°$. Calcule $x+y$.




A) 100° B) 105° C) 110°
D) 120° E) 130°

**PROBLEMA Nº 29**

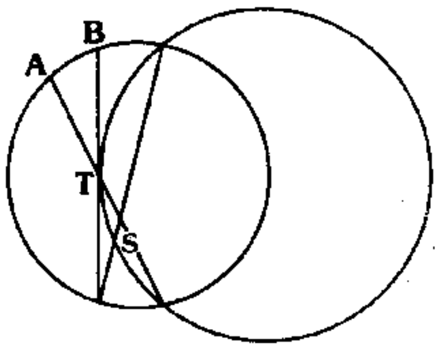
En el gráfico, las regiones sombreadas son regulares. Calcule "x".




A) 60°
B) 67,5°
C) 52,5°
D) 37,5°
E) 77,5°

**PROBLEMA Nº 30**

En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\widehat{AB} = 40°$. Calcule $m\widehat{TS}$.

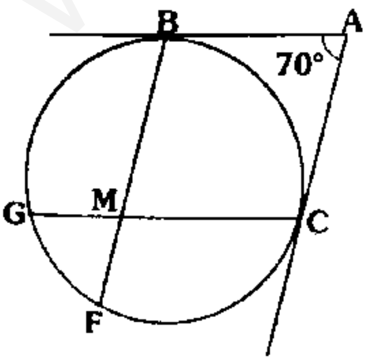



A) 20°  B) 30°  C) 40°
D) 50°  E) 60°

**PROBLEMA Nº 31**

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia y MBAC es un paralelogramo.

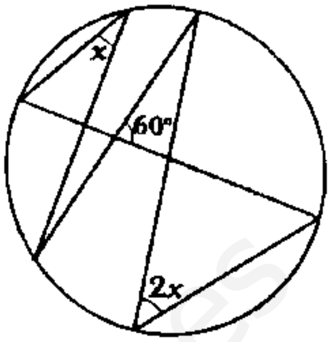
Calcule $m\widehat{FG}$.




A) 20°  B) 30°  C) 40°
D) 45°  E) 50°

**PROBLEMA Nº 32**

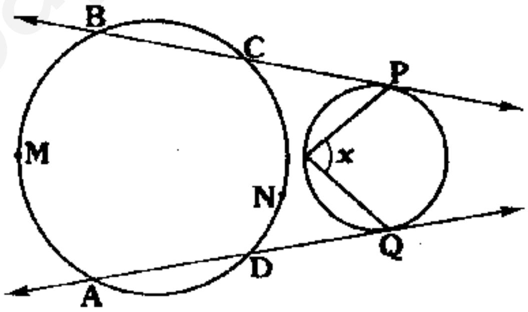
Calcule "x", en:




A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 25°

**PROBLEMA Nº 33**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AMB} = 200°$ y $m\widehat{CND} = 100°$. Calcule "x".

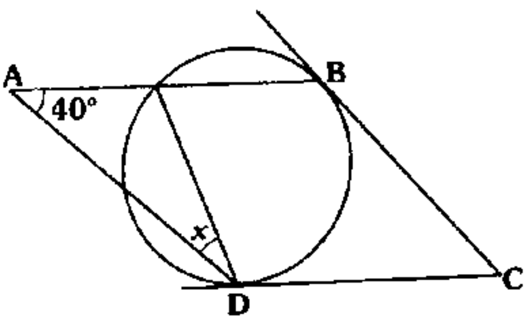



A) 30°  B) 50°  C) 65°
D) 45°  E) 75°

**PROBLEMA Nº 34**

En el gráfico, B y D son puntos de tangencia y ABCD es un paralelogramo.

Calcule "x".

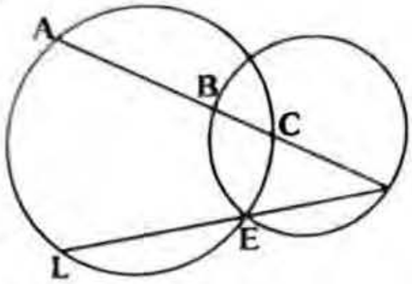



A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°

**PROBLEMA Nº 35**

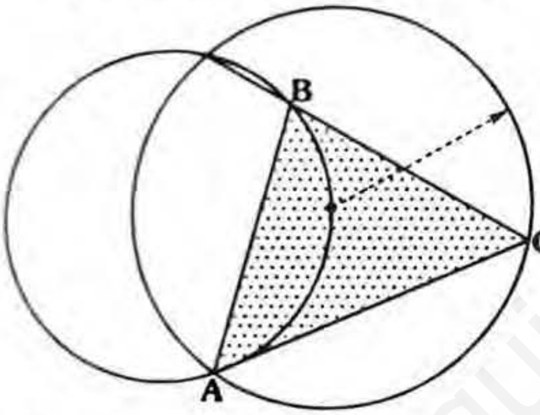
En el gráfico, $m\widehat{BE}=2\left(m\widehat{EC}\right)$ y $m\widehat{AL}+m\widehat{BE}+m\widehat{EC}=240°$.
Calcule $m\widehat{BE}$.

A) 40°
B) 70°
C) 80°
D) 100°
E) 120°




**PROBLEMA Nº 36**

Indique que tipo de triángulo es ABC.

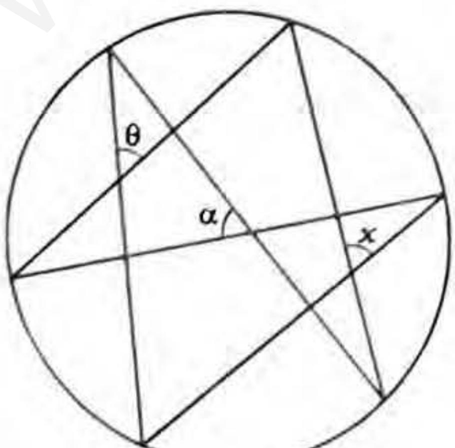



A) Escaleno
B) Rectángulo
C) Equilátero
D)Acutángulo
E) Isósceles

**PROBLEMA Nº 37**

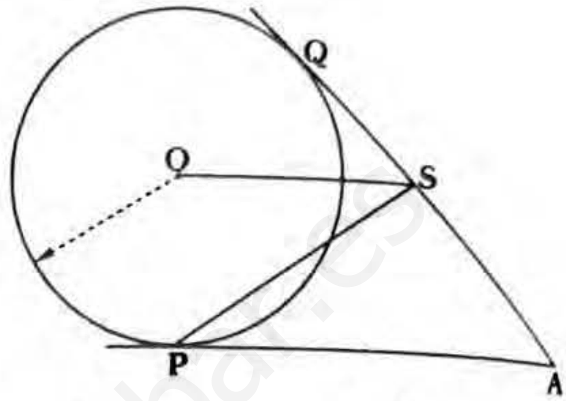
Si $\alpha+\theta=100°$. Calcule "x".

A) 50°
B) 40°
C) 80°
D) 70°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 38**

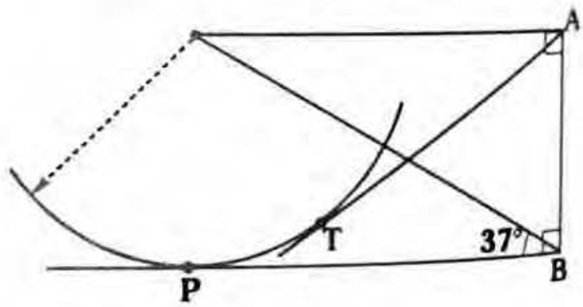
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $\overline{OS}//\overline{PA}$, QS=a y AS=b.
Calcule SP.




A) $\sqrt{ab}$
B) $\dfrac{a+b}{2}$
C) $\sqrt{b^2+a^2}$
D) $\sqrt{2b^2+a^2}$
E) $\sqrt{2b^2-a^2}$

**PROBLEMA Nº 39**

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si PB=4, calcule AT.

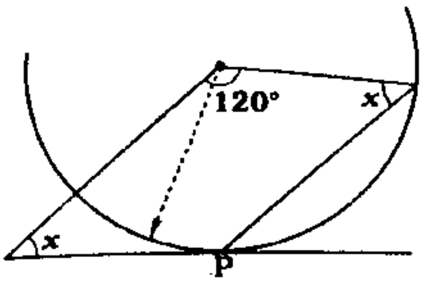



A) 5
B) $\sqrt{29}$
C) $\sqrt{34}$
D) $\sqrt{30}$
E) $\sqrt{7}$

**PROBLEMA Nº 40**

En el gráfico, P es punto de tangencia.
Calcule "x".

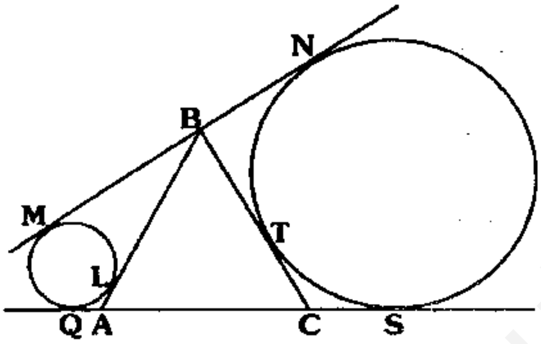
A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 36°




**PROBLEMA Nº 41**

En el gráfico, M, N, L, T, S y Q son puntos de tangencia.

Si el triángulo ABC es equilátero, calcule: $\dfrac{MN}{AB}$.




A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1,5

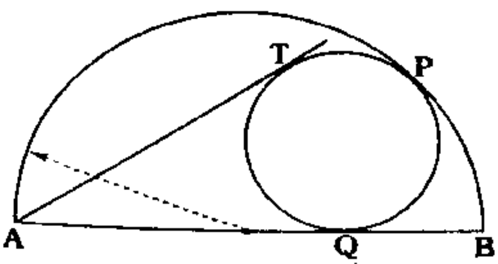
D) $\sqrt{3}$ E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**PROBLEMA Nº 42**

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TQ}+m\widehat{PB}=200°$.

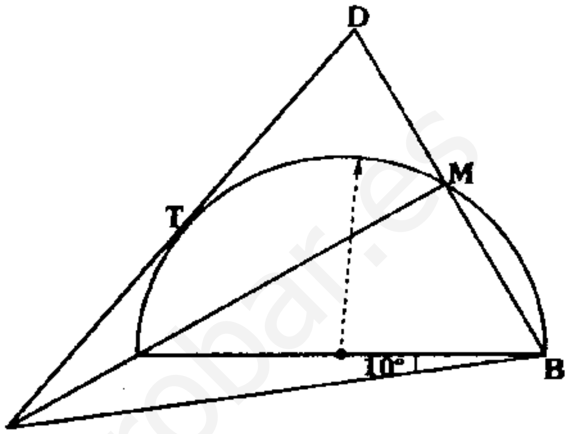
Calcule $m\widehat{TP}$.

A) 70°
B) 75°
C) 60°
D) 80°
E) 120°




**PROBLEMA Nº 43**

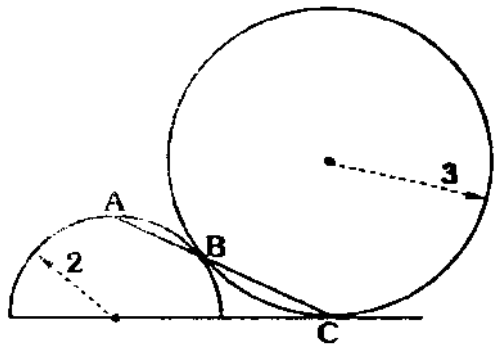
En el gráfico, T es punto de tangencia y BM=MD. Calcule $m\widehat{MT}$.




A) 90° B) 80° C) 50°
D) 70° E) 60°

**PROBLEMA Nº 44**

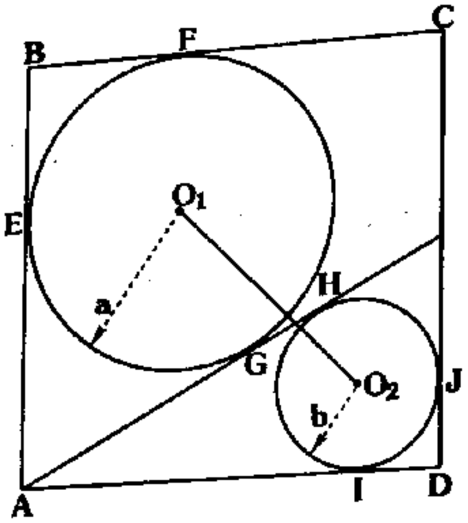
B y C son puntos de tangencia.
Calcule $m\widehat{AB}$.




A) 37° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 30°

**PROBLEMA Nº 45**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y E, F, G, H, I y J son puntos de tangencia.
Si $a^2+b^2=100$, calcule $O_1O_2$.




A) 10

B) $5\sqrt{2}$

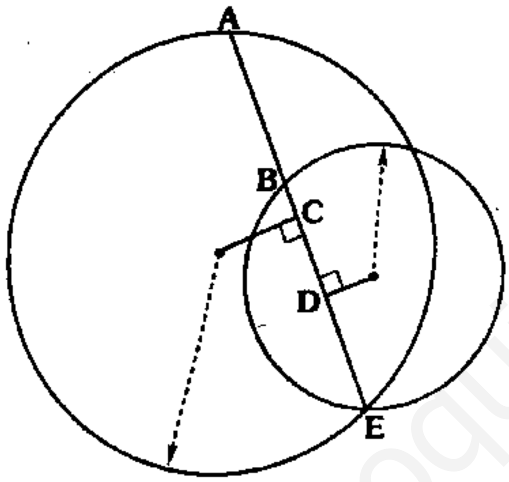
C) $10\sqrt{2}$

D) 15

E) 12,5

## PROBLEMA Nº 46

En el gráfico, AB=10. Calcule CD.




A) 10 B) 7,5 C) 5

D) 6,5 E) 8

## PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, calcule $m\overset{\frown}{AB}$. Si ABCD es un cuadrado.

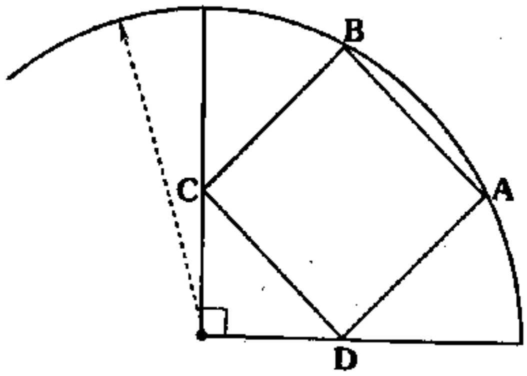
A) 30°

B) 53°

C) 37°

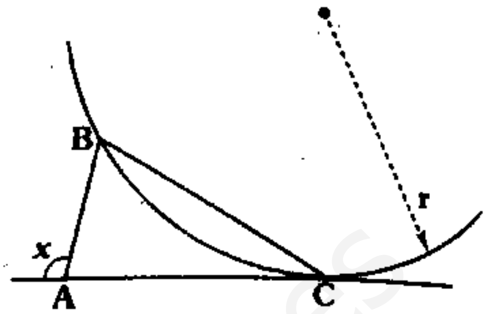
D) 28°

E) 16°




## PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, C es punto de tangencia. Si AC=BC=r, calcule "x".



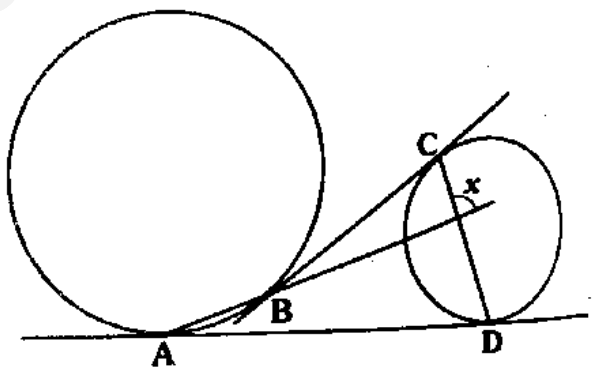

A) 90° B) 75° C) 84°

D) 105° E) 115°

## PROBLEMA Nº 49

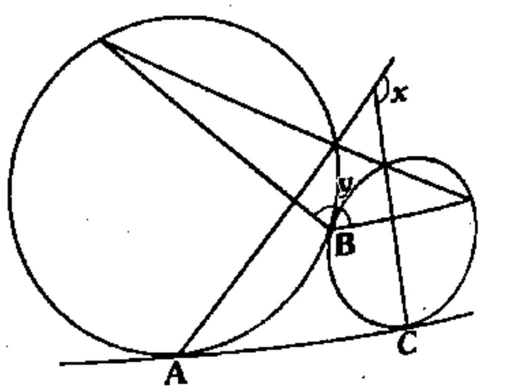
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Demostrar que $x=90°$.




## PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencias. Indique la relación entre $x$ e $y$.



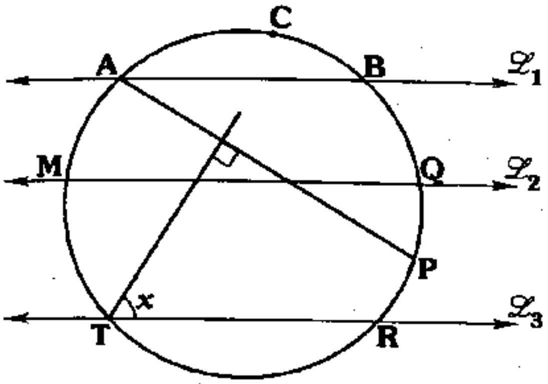
A) $x=y$ B) $x+y=180°$

C) $y=90°+x$ D) $x+y=270°$

E) $y=45°+x$

**PROBLEMA Nº 51**

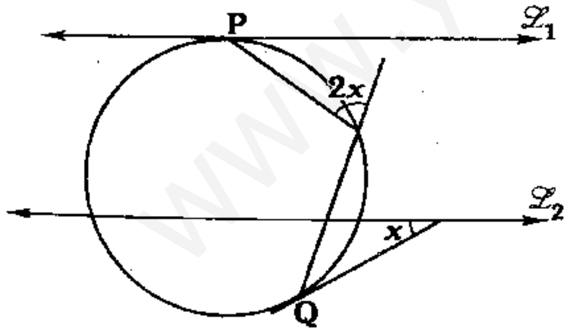
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $m\overset{\frown}{QP}=m\overset{\frown}{PR}$ y $m\overset{\frown}{ACB}+m\overset{\frown}{MTR}=160°$. Calcule "$x$".




A) 60° B) 65° C) 70°
D) 40° E) 80°

**PROBLEMA Nº 52**

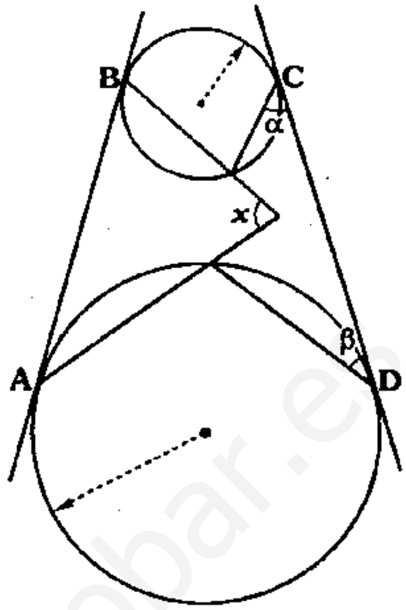
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule "$x$".




A) 30° B) 18° C) 36°
D) 35° E) 40°

**PROBLEMA Nº 53**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $\alpha+\beta=86°$. Calcule "$x$".




A) 94° B) 104° C) 86°
D) 152° E) 133°

**PROBLEMA Nº 54**

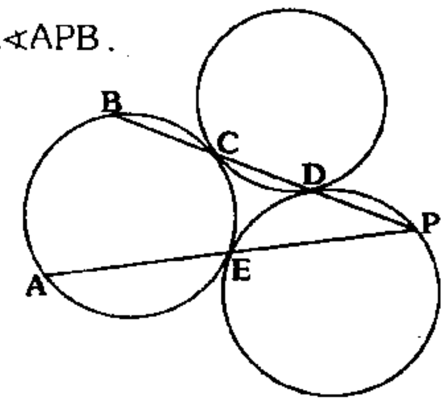
En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, P, B, Q y S, las tangentes en P y Q son perpendiculares y $m\measuredangle ABS=80°$. Calcule la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{PS}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$.

A) B) 80° C) 65°
D) 55° E) 75°

**PROBLEMA Nº 55**

En el gráfico, C, D y E son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{AE}-m\overset{\frown}{BC}=40°$.

Calcule $m\measuredangle APB$.




A) 10°

B) 20°

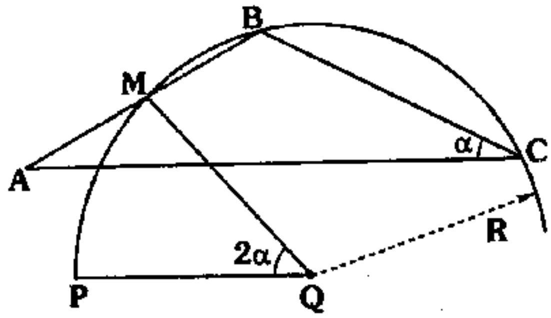
C) 30°

D) 40°

E) 50°

**PROBLEMA Nº 56**

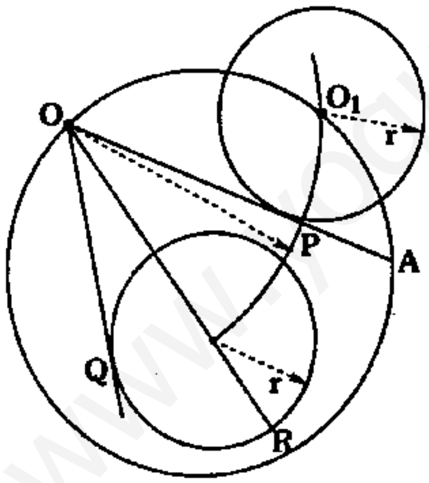
En el gráfico, AM=MB, $\overline{AC}//\overline{PQ}$ y R=4. Calcule AC.




A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

**PROBLEMA Nº 57**

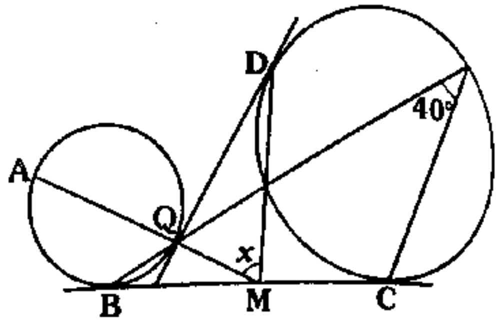
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{O_1A}=2\alpha$. Calcule $m\widehat{QR}$.




A) $2\alpha$ B) $90°-\alpha$
C) $90°+\alpha$ D) $90°-2\alpha$
E) $90°+2\alpha$

**PROBLEMA Nº 58**

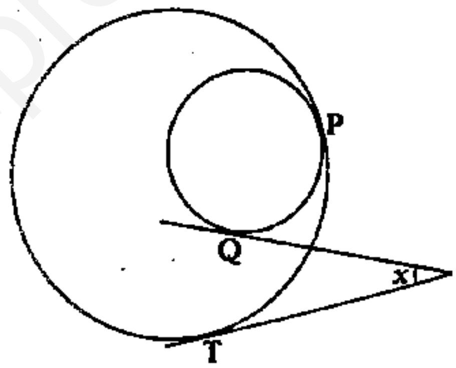
Calcule "x", si $m\widehat{AB}=80°$ (B, Q, D y C son puntos de tangencia).




A) 90° B) 40° C) 50°
D) 80° E) 70°

**PROBLEMA Nº 59**

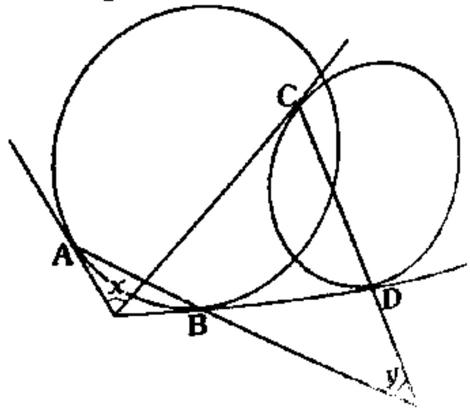
En el gráfico, calcule "x", si $m\widehat{PQ}-m\widehat{PT}=40°$. (P, Q y T son puntos de tangencia).




A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

**PROBLEMA Nº 60**

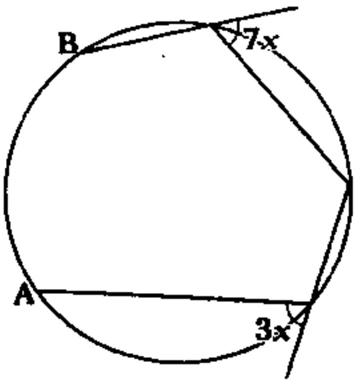
En el gráfico, calcule $x/y$ (A, B, C y D son puntos de tangencia).




A) 1
B) 2
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{2}{3}$

**PROBLEMA Nº 61**

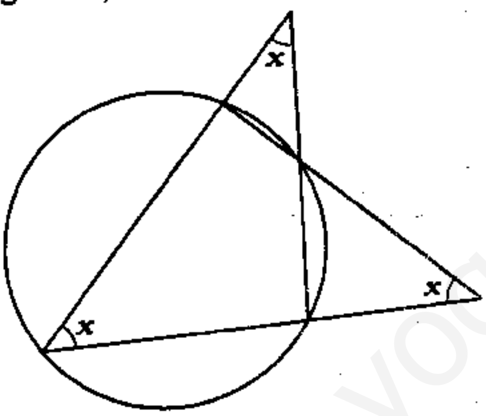
En el gráfico, $m\widehat{AB}=120°$. Calcule "x".




A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

**PROBLEMA Nº 62**

En el gráfico, calcule "x".

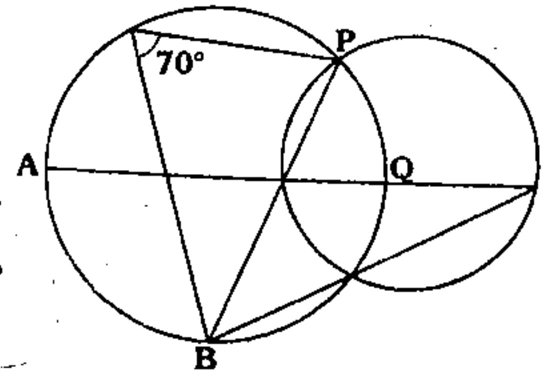



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) 72°

**PROBLEMA Nº 63**

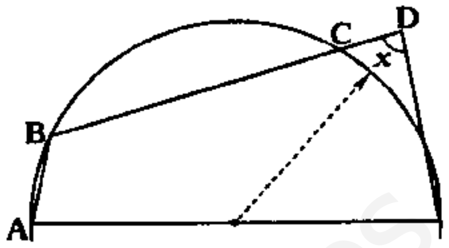
En el gráfico, calcule $m\widehat{AB}+m\widehat{PQ}$.

A) 140°
B) 150°
C) 160°
D) 120°
E) 110°




**PROBLEMA Nº 64**

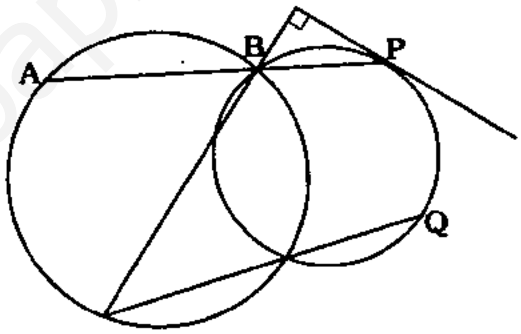
En el gráfico, AB=CD, $m\widehat{AB}=20°$ y $m\widehat{BC}=100°$. Calcule "x".




A) 60° B) 70° C) 80°
D) 100° E) 65°

**PROBLEMA Nº 65**

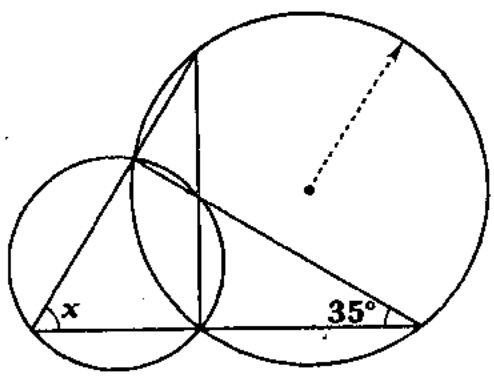
P es punto de tangencia y $m\widehat{PQ}=80°$. Calcule $m\widehat{AB}$.




A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

**PROBLEMA Nº 66**

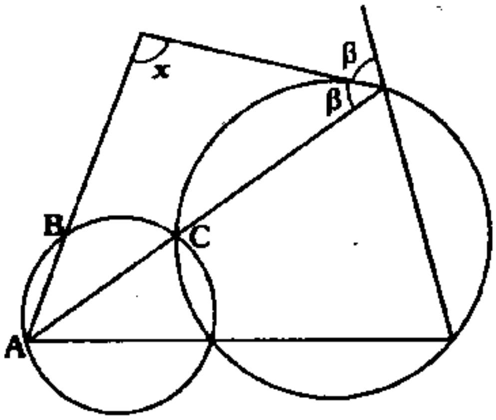
Calcule "x", en:




A) 35° B) 55° C) 70°
D) 80° E) 65°

**PROBLEMA Nº 67**

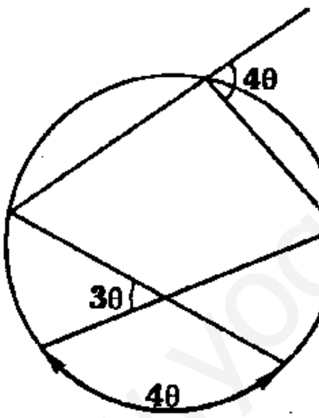
Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule "x" en:




A) 60° B) 90° C) 120°
D) 75° E) 65°

**PROBLEMA Nº 68**

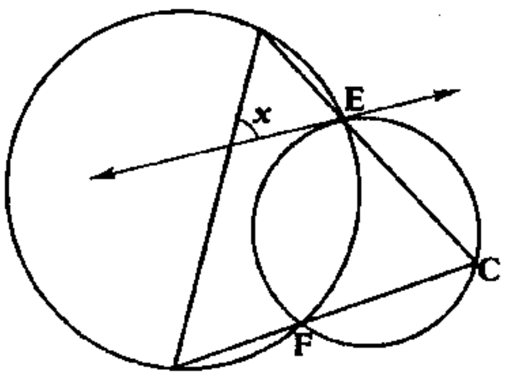
En el gráfico, calcule "$\theta$".




A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°

**PROBLEMA Nº 69**

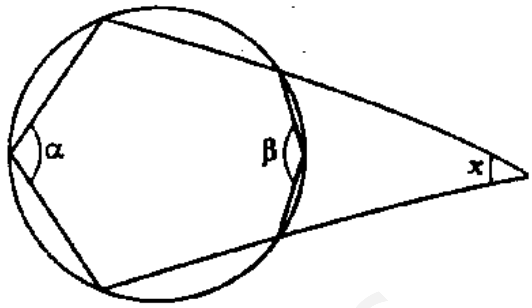
En el gráfico, E es punto de tangencia y $m\widehat{EFC} = 230°$. Calcule "x".




A) 70°
B) 60°
C) 55°
D) 65°
E) 50°

**PROBLEMA Nº 70**

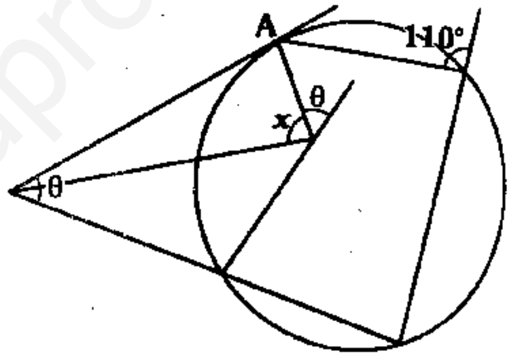
En el gráfico, $\beta - \alpha = 40°$. Calcule "x".




A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 80°

**PROBLEMA Nº 71**

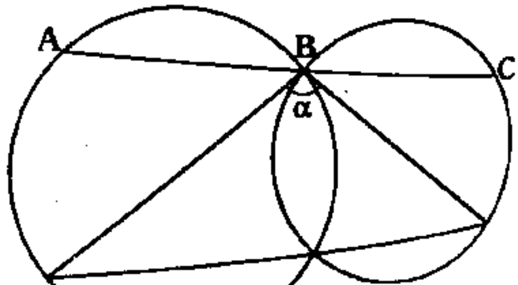
A es punto de tangencia. Calcule "x".




A) 55° B) 70° C) 80°
D) 100° E) 90°

**PROBLEMA Nº 72**

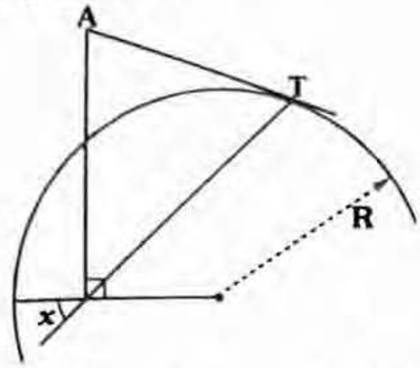
En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 210°$. Calcule "x".




A) 150° B) 75° C) 105°
D) 100° E) 90°

**PROBLEMA Nº 73**

En el gráfico, T es punto de tangencia y AT=R. Calcule "$x$".




A) 30° B) 53° C) 60°

D) 45° E) $\frac{127°}{2}$

**PROBLEMA Nº 74**

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB}=50°$. Calcule "$x$".

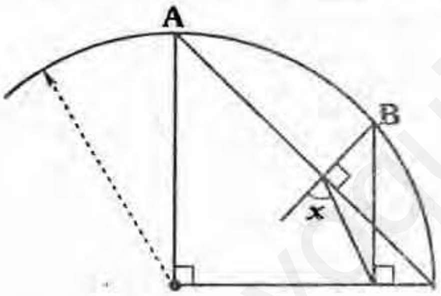
A) 50°

B) 40°

C) 65°

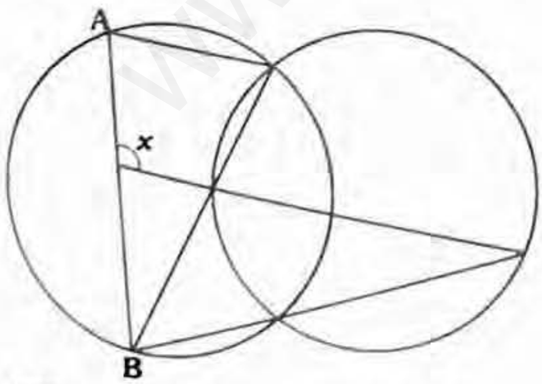
D) 75°

E) 70°




**PROBLEMA Nº 75**

Si $m\overset{\frown}{AB}=160°$, calcule "$x$".

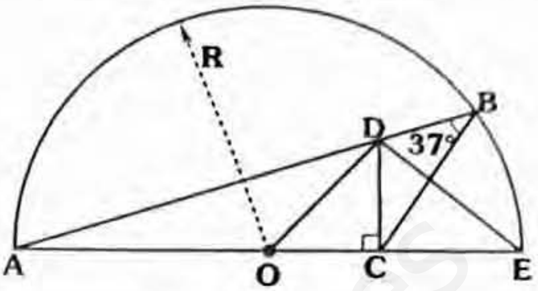



A) 100° B) 80° C) 160°

D) 140° E) 120°

**PROBLEMA Nº 76**

En el gráfico, DE=5 y R=7, calcule OD.

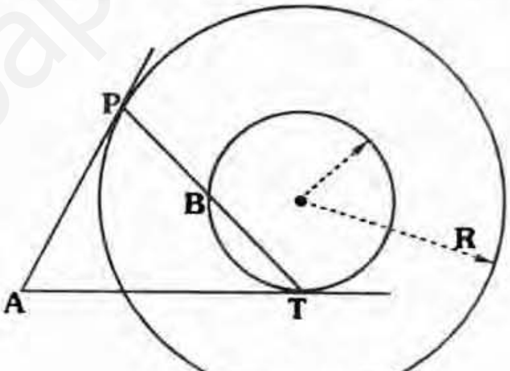



A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 4

D) 3 E) $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 77**

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{BT}=74°$ y AP=6. Calcule R.




A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

**PROBLEMA Nº 78**

Si BPQR y NLRM son cuadrados y $m\overset{\frown}{AP}=40°$. Calcule "$x$".

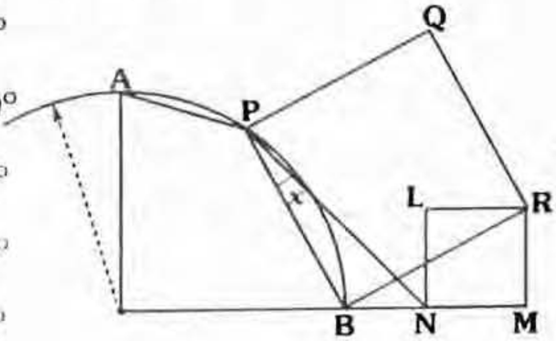
A) 15°

B) 20°

C) 25°

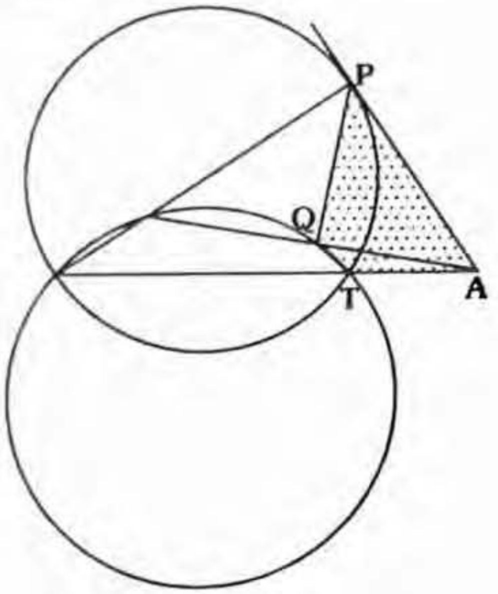
D) 30°

E) 35°



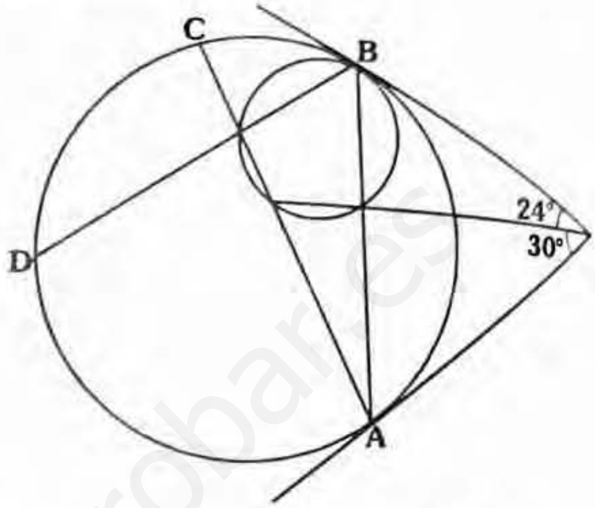
**PROBLEMA Nº 79**

En el gráfico, P es punto de tangencia. Demostrar que el cuadrilátero ATQP es inscriptible.




**PROBLEMA Nº 80**

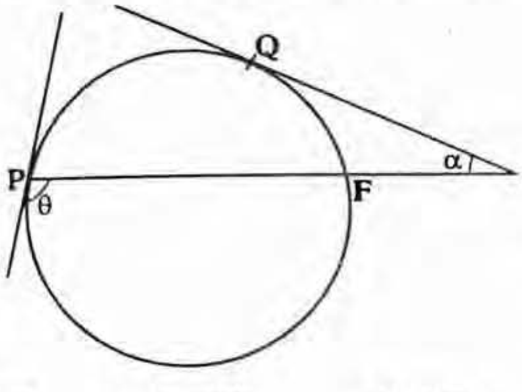
En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule $m\overset{\frown}{CD}$.




A) 40° B) 50° C) 60°
D) 48° E) 68°


**PROBLEMA Nº 81** **(Seminario)**

En la figura adjunta, P y Q son puntos de tangencia, $\alpha+\theta=150°$. Halle $m\widehat{QF}$.




A) 26°  B) 28°  C) 30°
D) 32°  E) 34°

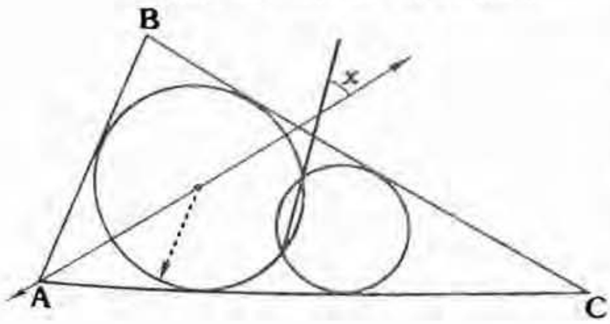
**PROBLEMA Nº 82** **(Seminario)**

Dos circunferencias congruentes contenidas en el mismo plano, no puede tener solamente el siguiente número de tangentes comunes:

A) 1  B) 2  C) 3
D) 4  E) N.A

**PROBLEMA Nº 83** **(Seminario)**

En un triángulo ABC; $m\measuredangle B=\beta$. Halle: "x".




A) $\frac{\beta}{4}$  B) $\frac{\beta}{2}$  C) $\beta$

D) $90-\beta$  E) $90-\frac{\beta}{2}$

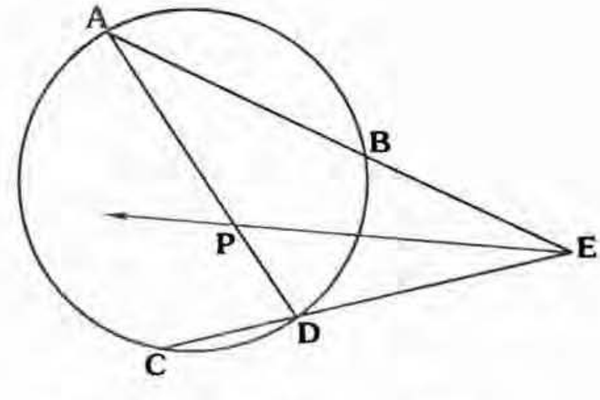
**PROBLEMA Nº 84** **(Seminario)**

Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios congruentes y centro O y O' respectivamente. Si desde O y O' se trazan las tangentes a la otra circunferencia determinando un ángulo que mide 5X, luego el mayor valor de X es:

A) 12°  B) 15°  C) 18°
D) 21°  E) 24°

**PROBLEMA Nº 85** **(Seminario)**

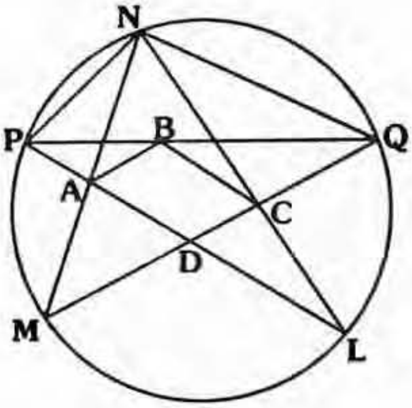
En la figura mostrada $m\widehat{AB}+m\widehat{CD}=120°$ y $m\measuredangle AEP=m\measuredangle PED$. Calcule la medida del ángulo agudo determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EP}$.




A) 20°  B) 30°  C) 40°
D) 45°  E) 60°

**PROBLEMA Nº 86** (PRÁCTICA CALIFICADA)

En la figura mostrada ABCD es un paralelogramo y $m\widehat{PNQ}=160°$. Calcule la medida del ángulo MNL.




A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

**PROBLEMA Nº 87** (Seminario)

Se tienen las circunferencias exteriores con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (B y C en $\overline{AD}$), en $\overline{BC}$ se ubica el punto P y en una recta tangente común exterior se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MP}$ y $\overline{NP}$ son tangentes a las circunferencias en los puntos Q y T respectivamente y $m\measuredangle DPT = m\measuredangle QPA$.

Si PQ=a y PT=b entonces, la longitud de $\overline{MN}$ es:

A) $a+b$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

**PROBLEMA Nº 88** (Seminario)

Sea ABC un triángulo rectángulo; $m\measuredangle B=90$. La circunferencia ex–inscrita relativa al cateto $\overline{BC}$, determina los puntos de tangencia: Q en $\overline{BC}$ y M, N en las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se traza $\overline{QJ}\perp\overline{MN}$ (J en $\overline{MN}$). Halle $m\measuredangle CJB$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

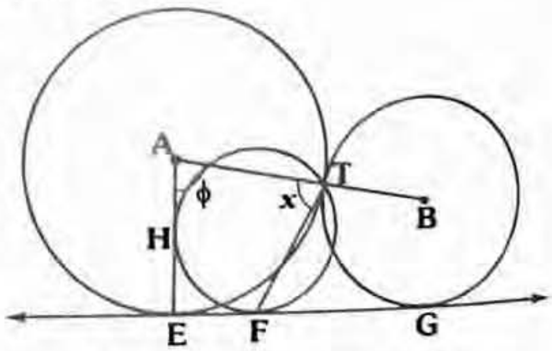
**PROBLEMA Nº 89** (Seminario)

ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ inscrito en una circunferencia talque AD=2BC, CH es altura y su prolongación intercepta a la circunferencia en G. Si DG=BD y AD=8. Halle CH.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**PROBLEMA Nº 90** (Seminario)

En la figura A, B son centros de las circunferencias: E, F, G, H y T son puntos de tangencia. Halle $x$, si dos circunferencias son de igual radio.




A) $90°+\dfrac{\phi}{2}$ B) $180°-2\phi$

C) $180°-\dfrac{3}{2}\phi$ D) $90°-\dfrac{\phi}{2}$

E) $180°-\dfrac{\phi}{2}$

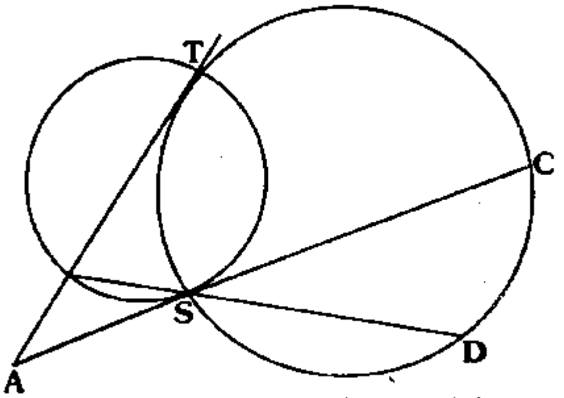
**PROBLEMA Nº 91** (Seminario)

Una circunferencia $\mathscr{C}_2$ contiene al centro O de la circunferencia $\mathscr{C}_1$ y la interseca en A y B; si en $\mathscr{C}_2$ se trazan las cuerdas perpendiculares $\overline{OP}$ y $\overline{AQ}$ de modo $m\widehat{PQ}=120°$. Calcule la $m\widehat{AB}$ en $\mathscr{C}_1$.

A) 100°  B) 110°
C) 120°  D) 130°
E) 140°

**PROBLEMA Nº 92** (Seminario)

En la figura $m\widehat{DC}=80°$, $m\widehat{DS}=40°$ y T y S son puntos de tangencia, halle $m\sphericalangle TAS$.




A) 20°  B) 30°  C) 35°
D) 40°  E) 60°

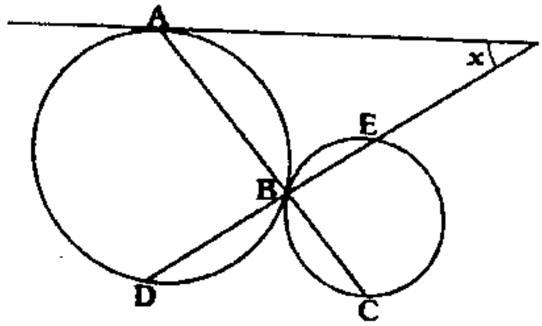
**PROBLEMA Nº 93** (Seminario)

Dos circunferencias de centros $O_1$ y $O_2$ se interceptan en los puntos P y Q. En los arcos mayores PQ de cada circunferencia se ubican los puntos A y B respectivamente. Si $m\widehat{AP}=40°$, $m\widehat{PB}=50°$ y la suma de las medidas de los arcos menores PQ es 110°. Halle $m\sphericalangle APB$.

A) 90°  B) 95°  C) 100°
D) 110°  E) 120°

**PROBLEMA Nº 94** (Seminario)

En la figura A, B, son puntos de tangencia y $m\widehat{BD}=102°$ y $m\widehat{BC}=114°$.
Halle "$x$".




A) 5°  B) 10°  C) 15°
D) 20°  E) 25°

**PROBLEMA Nº 95** (Seminario)

Dos circunferencias congruentes se intersectan en C y E. Si en una de ellas se eligen los puntos A y B tal que $\overline{AE}\cap\overline{BC}=\{D\}$ y D pertenece a la otra circunferencia. Si $m\widehat{AB}=122°$.
Calcule $m\sphericalangle CDE$.

A) 110°  B) 118,5°  C) 120,5°
D) 135°  E) 140°

**PROBLEMA Nº 96** (Seminario)

Dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes exteriores y la recta que pasa por el punto de tangencia E intercepta a $\mathscr{C}_1$ en A a $\mathscr{C}_2$ en B. Si $\overline{AF}$ es cuerda en $\mathscr{C}_1$, $\overline{BG}$ es cuerda en $\mathscr{C}_2$, $\overleftrightarrow{FG}$ es tangente común y los rayos AX y BY forman con AB ángulos de medidas "$\alpha$" y "$\omega$", siendo $2\alpha$ y $2\omega$ las medidas de los ángulos que forman FA con AX y GB con BY; calcule la medida del menor ángulo que determinan AX con BY.

A) 30°  B) 70°  C) 75°
D) 90°  E) A y D

**PROBLEMA Nº 97** (Seminario)

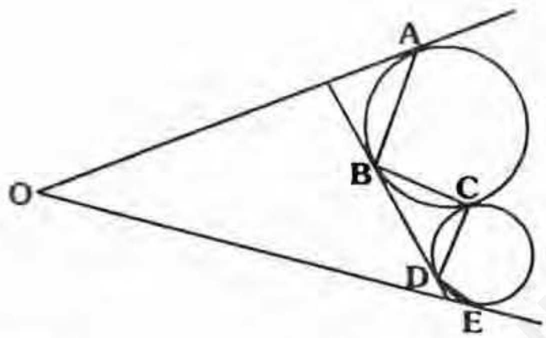
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes exteriores en P, desde un punto exterior Q se trazan una recta tangente a cada circunferencia en T y S ( $T \in \mathscr{C}_1$ y $S \in \mathscr{C}_2$ ). Si $m\sphericalangle TQS = 80^\circ$.

Halle la medida del ángulo agudo que forman las rectas PS y TP.

A) 40° B) 45° C) 50°
D) 55° E) 60°

**PROBLEMA Nº 98** **(Seminario)**

En la figura mostrada los puntos A, B, C, D y E son de tangencia. Si $m\sphericalangle AOE = 2^\circ$, entonces $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle CDE$ es:




A) 179° B) 180°
C) 181° D) 182°
E) 190°

**PROBLEMA Nº 99** **(Seminario)**

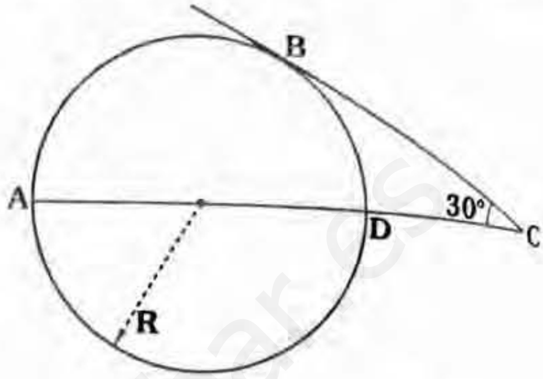
Desde un punto C exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{CT}$ y la secante $\overline{CBA}$. En la prolongación de la cuerda TB se ubica el punto D tal que la $m\sphericalangle BDC = 40^\circ$. En la prolongación del segmento CT se ubica el punto E y en la prolongación del segmento DC se ubica el punto F. Si $m\sphericalangle ATE = m\sphericalangle TCF$.

Halle $m\sphericalangle ACT$.

A) 20° B) 40° C) 45°
D) 60° E) 80°

**PROBLEMA Nº 100** **(Seminario)**

En la figura mostrada, calcular el radio de una circunferencia que equidista de A, B, C y D.




A) R B) 2R C) $\frac{3R}{2}$
D) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2R}{3}$

**PROBLEMA Nº 101** **(Seminario)**

En un cuadrado ABCD se traza la circunferencia inscrita determinando los puntos de tangencia P y T con los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $\overline{AP}$ y $\overline{BD}$ intersecan a la circunferencia, y al arco menor PT en los puntos M y N respectivamente, calcule $m\overset{\frown}{MN}$.

A) 80° B) 82° C) 84°
D) 86° E) 88°

**PROBLEMA Nº 102** **(Seminario)**

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle A = 30^\circ$ y $m\sphericalangle B = 96^\circ$, $E \in \overline{AB}$. Si AE=BC.

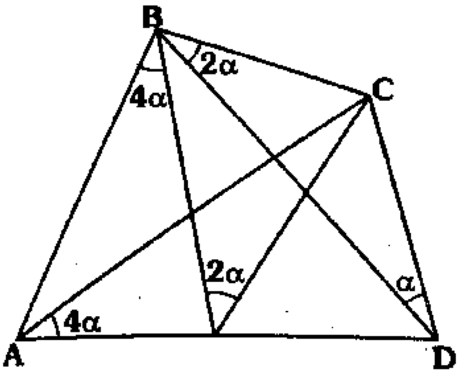
Calcule la $m\sphericalangle ACE$.

A) 15° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 30°

**PROBLEMA Nº 103** **(Seminario)**

En la figura adjunta, AB=AD.

Halle el valor de "$\alpha$".



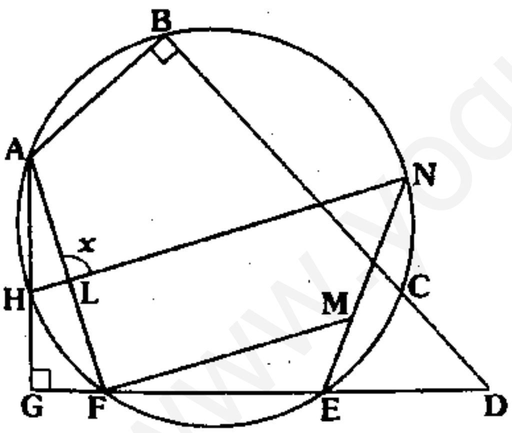

A) 6° B) 8° C) 10°
D) 12° E) 15°

**PROBLEMA Nº 104** **(Seminario)**

En la figura adjunta:

$$m\measuredangle ABD = m\measuredangle AGD = 90°$$

$MN = ME$, $NC \cong CE$, $m\measuredangle MGE = 20°$, Halle el valor de X.




A) 60° B) 70° C) 80°
D) 90° E) 100°

**PROBLEMA Nº 105** **(Seminario)**

Las circunferencias que tienen como diámetros las tres cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ de una circunferencia dada, se intersecan por pares en los puntos P, Q, y R respectivamente, luego podemos afirmar que:

A) $m\measuredangle BCD = 120°$
B) $m\measuredangle PCD = 90°$
C) P, Q y R son colineales
D) $m\measuredangle PQD = 120°$
E) Todas las proposiciones son falsas.

**PROBLEMA Nº 106** **(Seminario)**

En un triángulo ABC, se circunscribe una circunferencia, se traza la cuerda $\overline{DE}$ que intersecta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q respectivamente, $BD \cong BE$, la $m\measuredangle ABC = 10°$, la $m\measuredangle PCB = 5°$.

Halle la $m\measuredangle AQC$.

A) 10 B) 15 C) 18
D) 20 E) 25

**PROBLEMA Nº 107** **(Seminario)**

ABCD es un cuadrilátero bicentrico: I es el centro de la circunferencia inscrita $\mathscr{C}_1$. O es el centro de la circunferencia circunscrita $\mathscr{C}_2$ la recta IO interseca a las circunferencias $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_1$, en los puntos consecutivos P, Q, S y T. Si PQ=a, ST=b y b>a, halle OI.
(P y T en $\mathscr{C}_2$ y Q y S en $\mathscr{C}_1$).

A) $\dfrac{b-a}{2}$ B) $\dfrac{a+b}{2}$ C) $a-b+1$

D) $\sqrt{ab}$ E) $\dfrac{2b-a}{2}$

**PROBLEMA Nº 108** **(Seminario)**

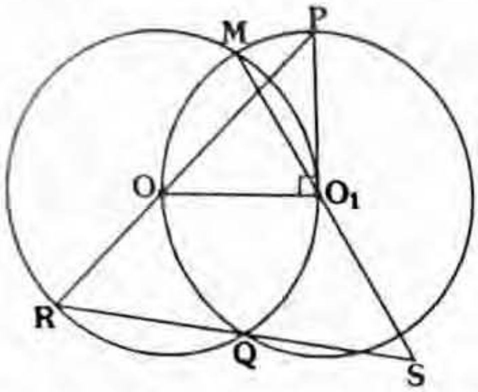
En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BQ}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{QC}$ y $m\measuredangle A = 80°$ y $m\measuredangle ABQ = 70°$.

Halle $m\measuredangle BCA$

A) 15° B) 18° C) 20°
D) 25° E) 30°

**PROBLEMA Nº 109** **(Seminario)**

En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes. O y $O_1$ son los centros $m\measuredangle OO_1P = 90$. Halle la $m\measuredangle RSM$.




A) 30° B) 36° C) 80°
D) 45° E) 52,5°

**PROBLEMA Nº 110** **(Seminario)**

En un triángulo ABC, demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo biseca al segmento que une el incentro con el excentro.

**PROBLEMA Nº 111** **(Seminario)**

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CP}$.

Si $m\measuredangle BAC = \alpha$, $m\measuredangle ABC = \beta$ y $m\measuredangle BCA = \gamma$, entonces demostrar que:

A) $m\measuredangle PQF = 180° - 2\alpha$

B) $m\measuredangle PFQ = 180° - 2\beta$

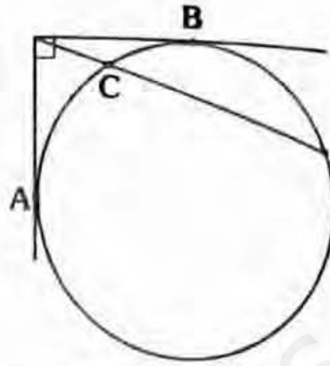
C) $m\measuredangle QPF = 180° - 2\gamma$

D) $m\measuredangle QPF = 170° - 4\gamma$

E) $m\measuredangle QPF = 184° - 2\theta$

**PROBLEMA Nº 112** **(Práctica)**

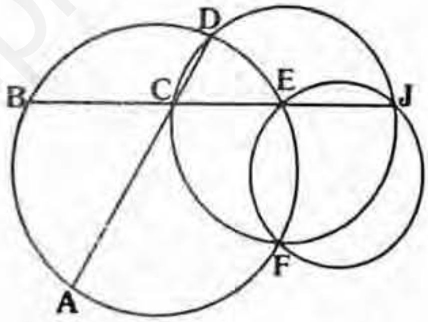
En la figura, A y B son puntos de tangencia, $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$, halle $m\widehat{BD}$.




A) 30° B) 43° C) 45°
D) 60° E) 53°

**PROBLEMA Nº 113** **(Seminario)**

En la figura, $m\widehat{EJ} = 50°$. Hallar $m\widehat{AB}$

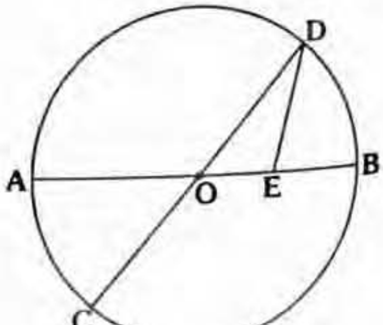



A) 50° B) 40° C) 130°
D) 65° E) 75°

**PROBLEMA Nº 114** **(Seminario)**

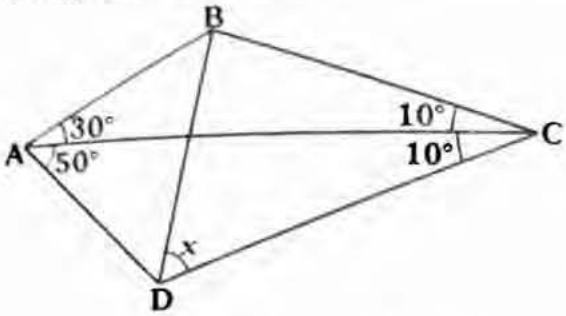
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ diámetro de la circunferencia, si $DE = 5u$ y $2(m\measuredangle CDE) + 3(m\measuredangle DOB) = 180°$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



**PROBLEMA Nº 115** **(Seminario)**

En la figura, hallar "x".




A) 30° B) 45° C) 49°
D) 55° E) 60°

**PROBLEMA Nº 116** **(Seminario)**

Indicar el valor de verdad de:

I. Todo diámetro que biseca a una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.
II. Si dos circunferencias son secantes, entonces el segmento que une los centros intercepta a la cuerda común.
III. La mediatriz de una cuerda contiene al centro de la circunferencia.

A) FFV B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

**PROBLEMA Nº 117** **(Seminario)**

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

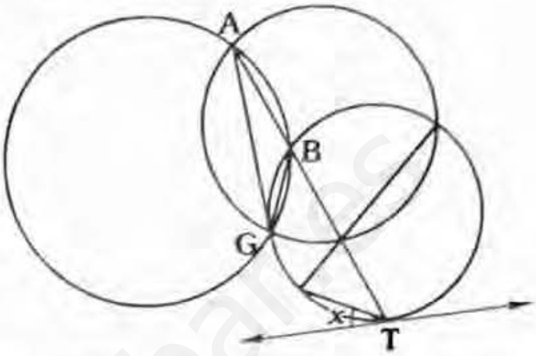
I. Dos puntos distintos de una circunferencia determinan un solo arco.
II. Si un segmento intercepta a una circunferencia en un punto, entonces es tangente.
III. Si dos circunferencias coplanares, no tienen un punto común, entonces son exteriores.

A) FFV B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

**PROBLEMA Nº 118** **(Seminario)**

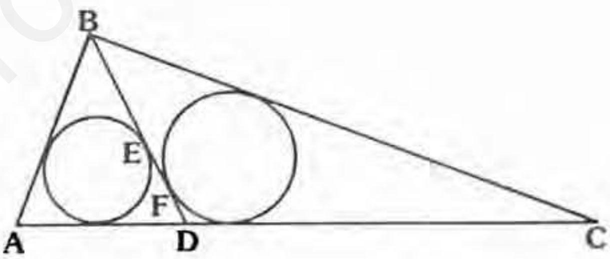
Se tienen tres circunferencias que pasan por el punto G, siendo $m\measuredangle AGB = 50^\circ$ ; calcule "x". (T es punto de tangencia)

A) 45°
B) 25°
C) 65°
D) 50°
E) 75°




**PROBLEMA Nº 119** **(Seminario)**

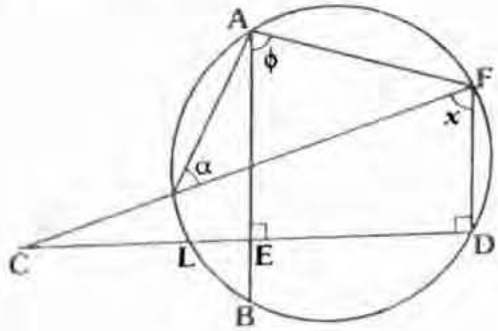
En el triángulo rectángulo ABC, E y F son puntos de tangencia $BE - FD = 8$, halle la longitud del inradio de ABC.




A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

**PROBLEMA Nº 120** **(Seminario)**

En la figura mostrada, R es radio de la circunferencia CL=2R. Hallar "x".



A) $90^\circ+\alpha-\phi$ B) $90^\circ+\phi-\alpha$

C) $90^\circ+\frac{1}{2}(\alpha-\phi)$ D) $90^\circ+\frac{1}{2}(\phi-\alpha)$

E) $90^\circ+\frac{1}{4}(\alpha-\phi)$

**PROBLEMA Nº 121** (Seminario)

Indique cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. Sean A y B dos puntos de una circunferencia de centro O, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta que contiene a los puntos medios de la cuerda $\overline{AB}$ y del arco $\overset{\frown}{AB}$. Entonces $O\in\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

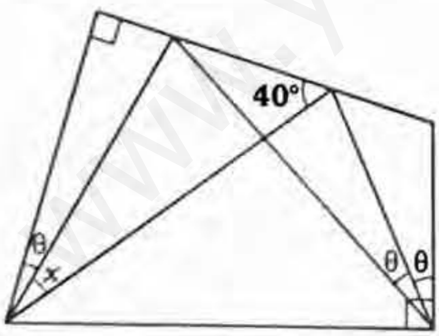
II. El teorema de Pithot, se aplica a un polígono circunscrito de número par de lados.

III. Todo paralelogramo es inscriptible.

A) I B) II C) I y II
D) I y III E) III

**PROBLEMA Nº 122** (Seminario)

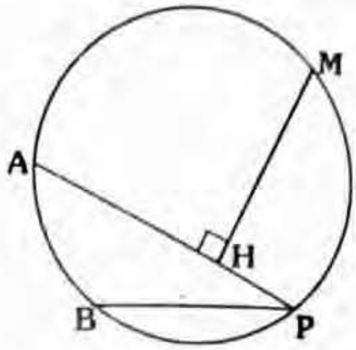
En la figura, hallar "x".




A) 20° B) 40° C) 50°
D) 70° E) 25°

**PROBLEMA Nº 123** (Seminario)

En la figura: $m\overset{\frown}{AM}=m\overset{\frown}{MB}$ y $AH=5$. Halle el valor de $HP+PB$.




A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

**PROBLEMA Nº 124** (Seminario)

En un triángulo ABC $m\measuredangle A=30^\circ$ y $m\measuredangle C=20^\circ$. Se ubica F en $\overline{AC}$ talque AF=BC. Halle $m\measuredangle FBC$.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

**PROBLEMA Nº 125** (Seminario)

En un cuadrilátero inscrito ABCD se ubica M en el arco BC, tal que las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{DC}$ se interceptan en N. Si $\overline{AB}//\overline{DN}$ y $m\measuredangle ADM=50$, halle $m\measuredangle DNB$.

A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

**PROBLEMA Nº 126** (Práctica)

En un triángulo rectángulo ABC se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ y se circunscribe una circunferencia al triángulo BHM. Si $m\overset{\frown}{HM}=\theta$, halle $m\measuredangle C$.

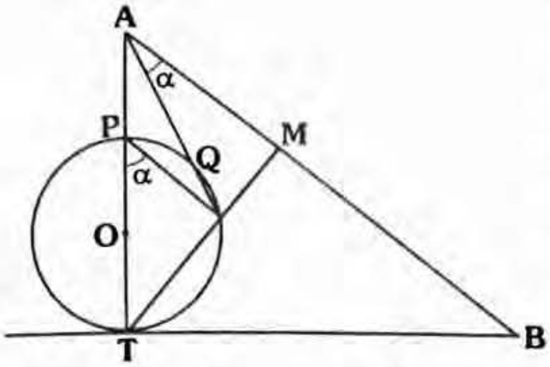
A) $30^\circ-\frac{\theta}{2}$ B) $75^\circ-\frac{\theta}{4}$ C) $60^\circ-\frac{\theta}{4}$

D) $30^\circ-\frac{\theta}{4}$ E) $45^\circ-\frac{\theta}{4}$

**PROBLEMA Nº 127** **(Seminario)**

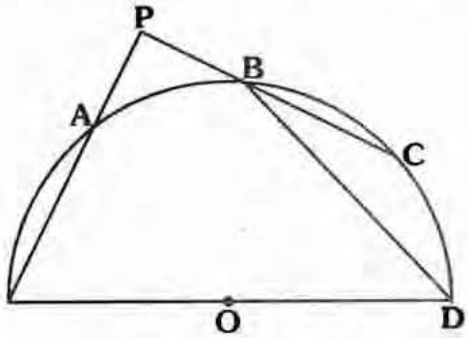
En la figura adjunta, AM=MB y $m\widehat{PQ}=24$. Halle el valor de "$\alpha$", siendo O el centro y T el punto de tangencia.

A) 30°
B) 32°
C) 34°
D) 36°
E) 40°




**PROBLEMA Nº 128** **(Seminario)**

En la figura adjunta, BD=2(AP) y O es centro y $m\widehat{AB}=m\widehat{CD}$. Halle $m\widehat{AB}$.

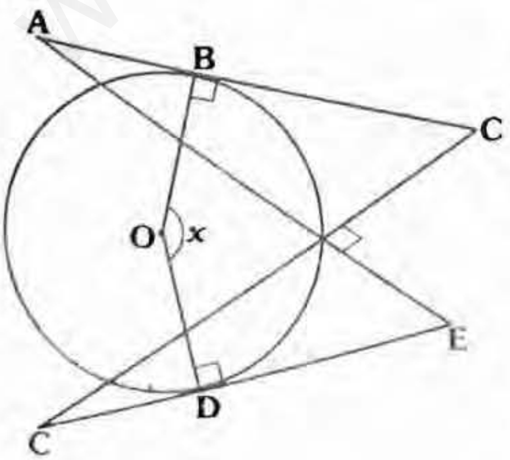



A) 40° B) 45° C) 50°
D) 55° E) 60°

**PROBLEMA Nº 129** **(Seminario)**

En la figura, AB=BC y CD=DE. Halle "x". (O es centro).

A) 100°
B) 110°
C) 115°
D) 120°
E) 130°




**PROBLEMA Nº 130** **(Seminario)**

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{CE}$ y $\overline{BF}$ que se interceptan en I. La circunferencia inscrita en el cuadrilátero AFIE es tangente a $\overline{FI}$ en P, a $\overline{IE}$ en Q y en M a $\overline{AE}$. Si $m\measuredangle A=2m\measuredangle PMQ$, halle $m\measuredangle BIC$.

A) 110° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 150°

**PROBLEMA Nº 131** **(Seminario)**

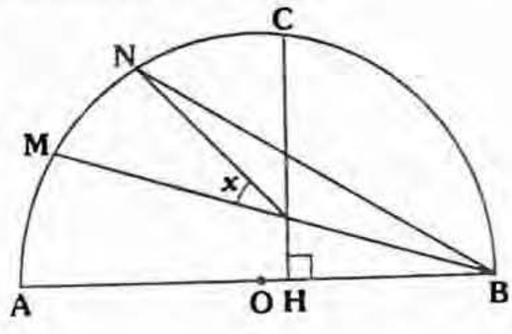
Se tienen dos circunferencias de centros $O_1$ y $O_2$ secantes en B y D en cada circunferencia se toman los puntos A y C de manera que $m\widehat{ABD}=120°$ y $m\widehat{CBD}=150°$. Hallar la $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 75°
D) 135° E) 120°

**PROBLEMA Nº 132** **(Seminario)**

En la figura, $m\widehat{AM}=40°$, $m\widehat{MN}=20°$, $m\widehat{BC}=80°$ y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{AB}$ es diámetro (AO=OB).

A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°




**PROBLEMA Nº 133** **(Seminario)**

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tales que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sean diámetros de dos semicircunferencias que se interceptan en M. Por M se traza una secante que determinan los puntos E y F en las semicircunferencias.

Si $m\widehat{EM} + m\widehat{MF} = \theta$, halle $m\measuredangle BMC$.

A) $90° - \dfrac{\theta}{3}$ B) $90° - \dfrac{\theta}{4}$ C) $90° + \dfrac{\theta}{2}$

D) $90° - \dfrac{\theta}{2}$ E) $90° - \dfrac{\theta}{4}$

**PROBLEMA Nº 134** **(Seminario)**

Se tienen tres circunferencias $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ secantes dos a dos que se interceptan $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ se cortan en A y B; $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ en A y C; $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ en A y D. La prolongación de $\overline{BC}$ intercepta a $\mathscr{C}_3$ en F y a $\mathscr{C}_2$ en E, la prolongación de $\overline{DE}$ corta a $\mathscr{C}_3$ en Q. Si $m\widehat{BC} = 2\alpha$, halle $m\widehat{QF}$.

A) $\alpha$ B) $3\alpha$ C) $90-2\alpha$

D) $2\alpha$ E) $90°-\alpha$

**PROBLEMA Nº 135** **(Seminario)**

En un triángulo ABC, $m\measuredangle A = 96°$ y $m\measuredangle C = 30°$. Si se traza la ceviana $\overline{BQ} / \overline{AB} \cong \overline{QC}$, halle $m\measuredangle QBC$.

A) 18° B) 20° C) 22° D) 24° E) 28°

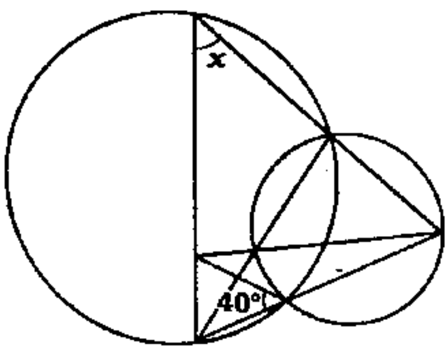
**PROBLEMA Nº 136** **(Seminario)**

Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la secante $\overline{APQ}$; tal que $m\widehat{CQ} = 2(m\widehat{CP})$ y $m\measuredangle BAC = 90°$. Calcular $m\measuredangle PAC$

A) 15° B) 30° C) 45° D) 18° E) 22°30'

**PROBLEMA Nº 137** **(Seminario)**

En la figura adjunta, halle "x".




A) 40°

B) 30°

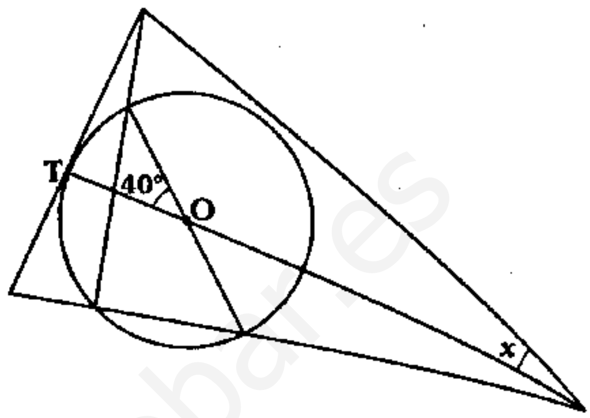
C) 20°

D) 50°

E) 80°

**PROBLEMA Nº 138** **(Seminario)**

En la figura adjunta, O es el centro de la circunferencia, T es el punto de tangencia, halle el valor de "x".

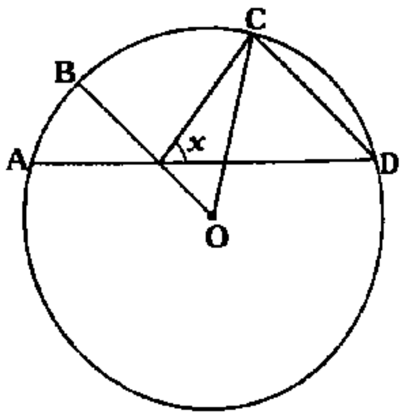



A) 10° B) 15° C) 20°

D) 25° E) 30°

**PROBLEMA Nº 139** **(Seminario)**

En la figura adjunta: $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$, O es el centro y $m\measuredangle OCD = 70°$. Halle el valor de "x".




A) 30°

B) 25°

C) 40°

D) 45°

E) 60°

**PROBLEMA Nº 140** **(Seminario)**

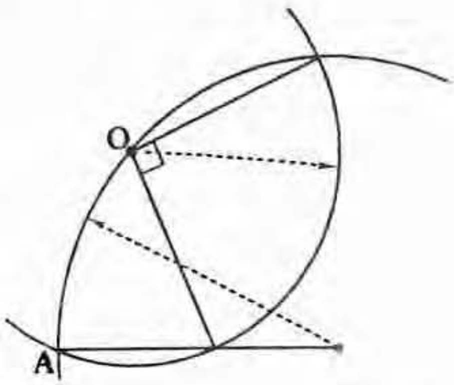
Se tienen dos circunferencias ortogonales $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ que se interceptan en M y N. En $\mathscr{C}_1$ se ubica un punto A y en $\mathscr{C}_2$ un punto B. Por A y B se trazan tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ que se interceptan en C. Si MBA es una cuerda de $\mathscr{C}_1$, halle $m\measuredangle ACB$.

A) 45° B) 55° C) 75°

D) 80° E) 90°

**PROBLEMA Nº 141**

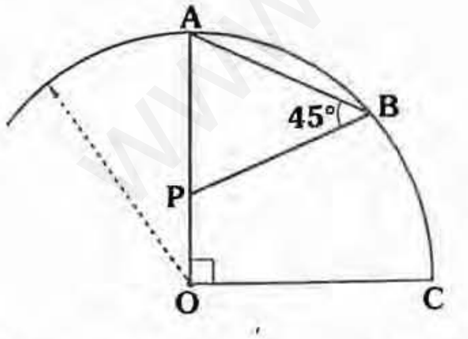
En el gráfico, calcule $m\overset{\frown}{AO}$.




A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 54°

**PROBLEMA Nº 142**

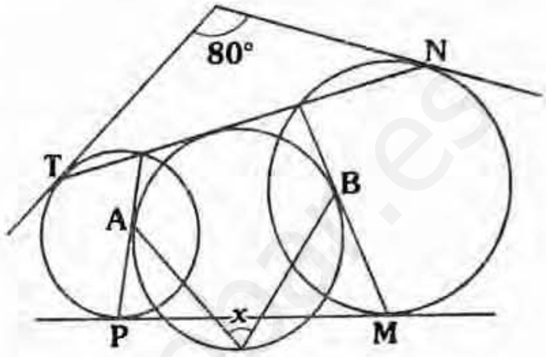
Si BC=4 y PC toma su menor valor entero. Calcule $m\overset{\frown}{BC}$.




A) 30° B) 53° C) 45°
D) 36° E) 37°

**PROBLEMA Nº 143**

Si T, P, M, N, A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

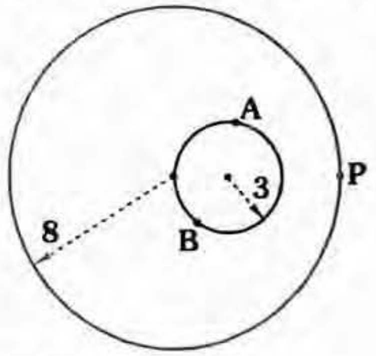



A) 40° B) 50° C) 65°
D) 80° E) 100°

**PROBLEMA Nº 144**

En el gráfico, A, B y P son puntos de tangencia. Calcule el mayor valor de $m\measuredangle APB$.

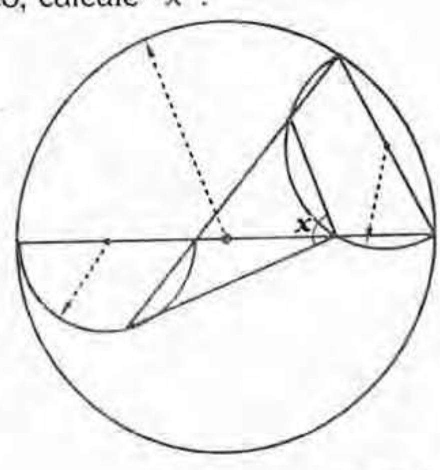
A) 45°
B) 60°
C) 74°
D) 53°
E) 106°




**PROBLEMA Nº 145**

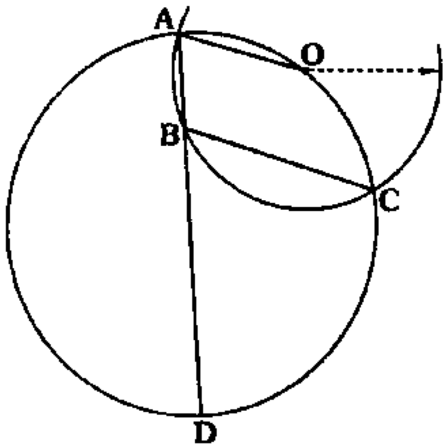
En el gráfico, calcule "x".

A) 60°
B) 75°
C) 106°
D) 90°
E) 180°



**PROBLEMA Nº 146**

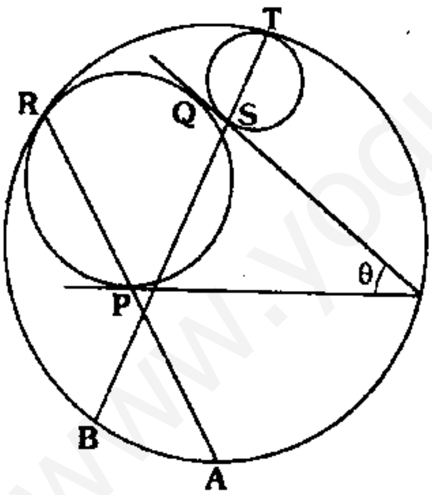
En el gráfico, $\overline{AO} // \overline{BC}$. Calcule $m\overset{\frown}{AD}$




A) 150°  B) 120°  C) 106°
D) 180°  E) 205°

**PROBLEMA Nº 147**

En el gráfico, P, Q, R, S y T son puntos de tangencia. Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.



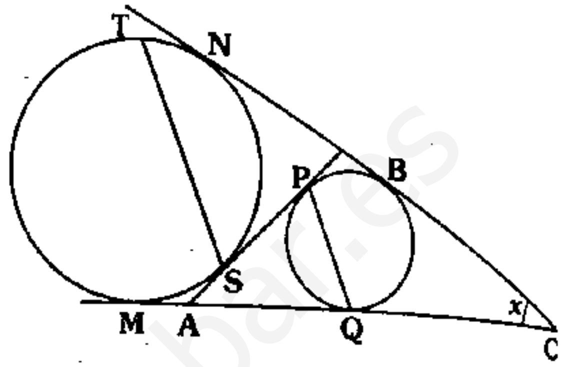

A) $\theta$  B) $2\theta$  C) $\dfrac{3\theta}{2}$
D) $90°-\theta$  E) $90°-2\theta$

**PROBLEMA Nº 148**

En una circunferencia de centro O, se ubican los puntos A, B y C. En $\overline{OB}$ se ubica P y D en $\overline{AC}$ tal que el cuadrilátero BPDC es inscriptible. Demuestre que $\overline{OB} \perp \overline{PD}$.

**PROBLEMA Nº 149**

En el gráfico, P, Q, R, M, L y N son puntos de tangencia, si $\overline{LS} // \overline{QP}$, calcule $x$ en función de $\alpha$.




A) $\alpha$  B) $2\alpha$  C) $90°-\alpha$
D) $45°-\alpha$  E) $60°-\alpha$

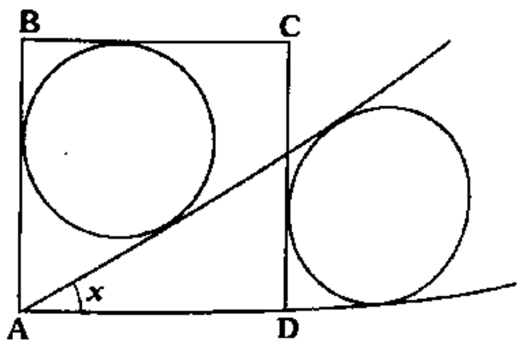
**PROBLEMA Nº 150**

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubican M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{AD}$, tal que BM=MC y DN=3(AN). Si $\overline{CN}$ y $\overline{DM}$ se cortan en P. Calcule $m\sphericalangle APN$.

A) 10°  B) 12°30'  C) 11°30'
D) 13°30'  E) 39°

**PROBLEMA Nº 151**

En el gráfico, las circunferencias son congruentes. Calcule "x".

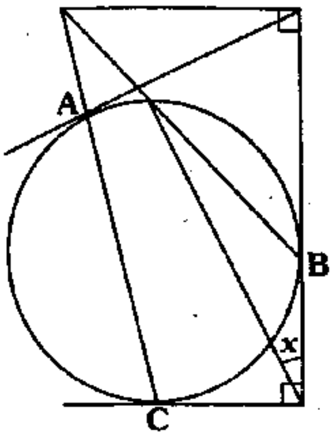


A) $\frac{53^\circ}{2}$  B) $\frac{45^\circ}{2}$  C) 30°

D) 23°  E) 37°

**PROBLEMA Nº 152**

Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".

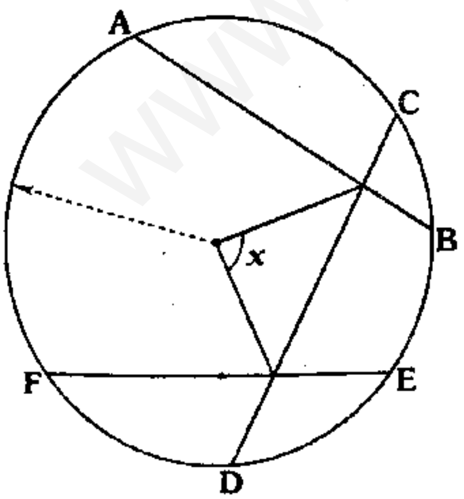



A) 37°/2  B) 15°  C) 45°/2

D) 53°/2  E) 30°

**PROBLEMA Nº 153**

Si AB = CD = EF; $m\widehat{EB}=40^\circ$ y $m\widehat{CD}=110^\circ$. Calcule "x".

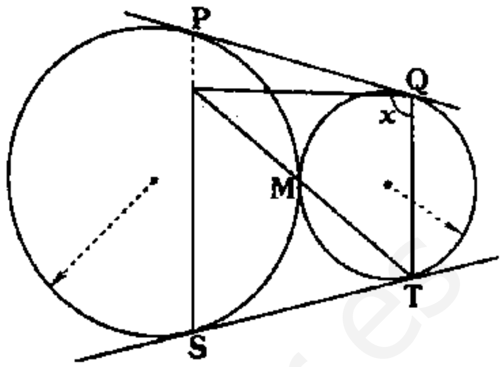



A) 15°  B) 45°  C) 67°

D) 70°  E) 75°

**PROBLEMA Nº 154**

En el gráfico, P, Q, T, S y M son puntos de tangencia. Calcule *x*.




A) 90°  B) 120°  C) 60°

D) 135°  E) 106°

**PROBLEMA Nº 155**

Si AB=2(PQ). Calcule $m\widehat{BC}$.

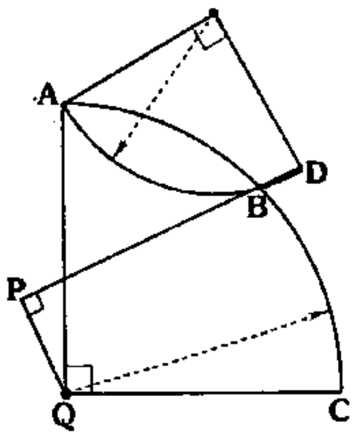
A) 30°

B) 60°

C) 45°

D) 53°

E) 37°




**PROBLEMA Nº 156**

Si ABCD es un romboide; B y D son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{CD}$.

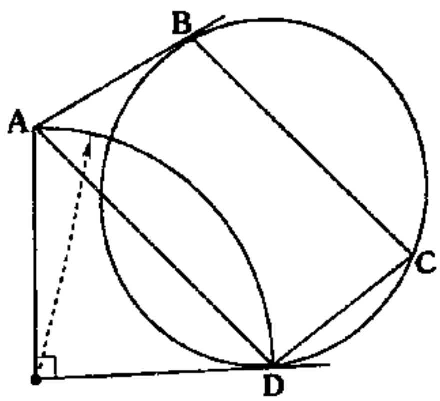
A) 120°

B) 60°

C) 150°

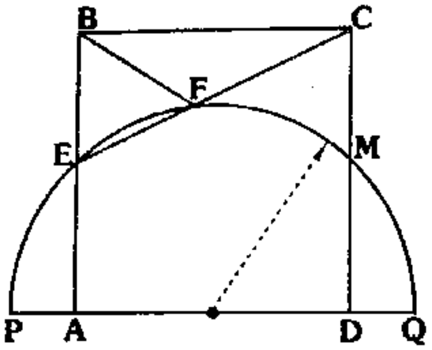
D) 90°

E) 175°



**PROBLEMA N° 157**

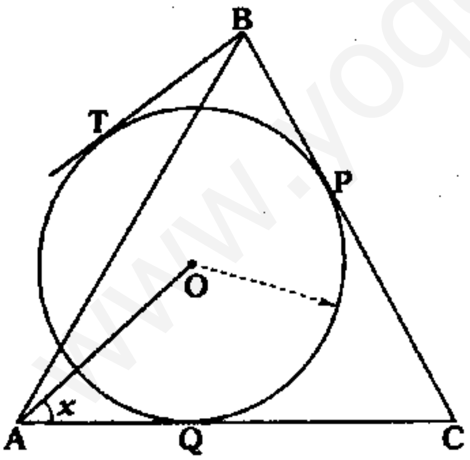
Si ABCD es un cuadrado, si AP=DQ; EB=BF. Calcule m$\overset{\frown}{FM}$.




A) 60°　　B) 75°　　C) 53°
D) 37°　　E) 45°

**PROBLEMA N° 158**

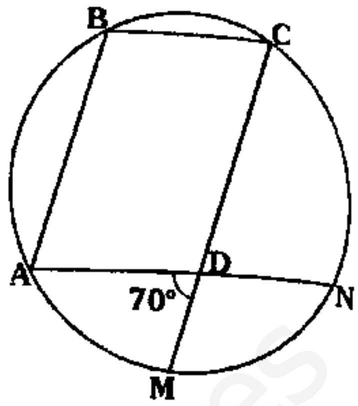
Si ABC es equilátero y $\overline{TB}//\overline{AO}$; T, P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".




A) 40°　　B) 30°　　C) 20°
D) 50°　　E) 45°

**PROBLEMA N° 159**

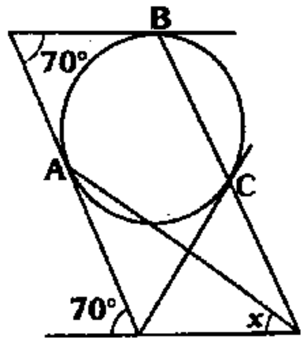
Si ABCD es un paralelogramo.
Calcule m$\overset{\frown}{MN}$.




A) 80°　　B) 60°　　C) 70°
D) 50°　　E) 40°

**PROBLEMA N° 160**

Si A, B y C son puntos de tangencia.
Calcule "x".

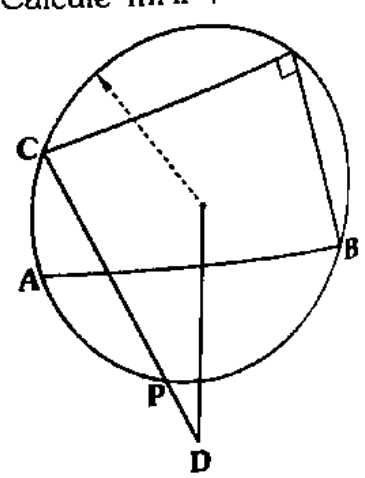



A) 45°　　B) 55°　　C) 35°
D) 20°　　E) 25°

**PROBLEMA N° 161**

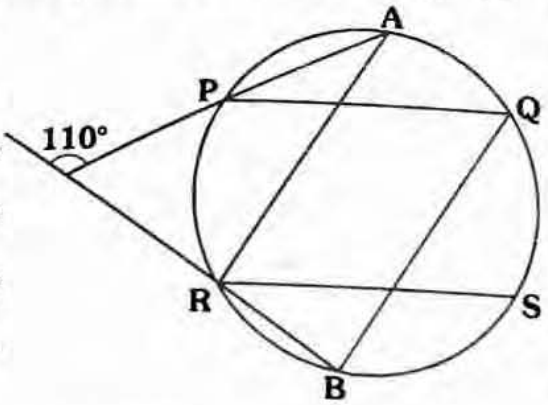
Si AB=CD. Calcule m$\overset{\frown}{AP}$.

A) 45°
B) 30°
C) 90°
D) 60°
E) 53°



**PROBLEMA Nº 162**

Si $\overline{PQ} // \overline{RS}$ y $\overline{AR} // \overline{QB}$. Calcule $m\widehat{RBS}$




A) 70°

B) 140°

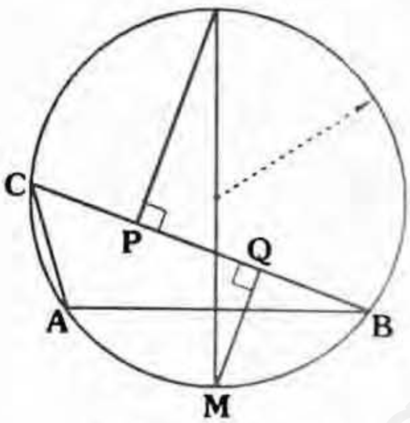
C) 110°

D) 120°

E) 130°

**PROBLEMA Nº 163**

Si $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$ ; AC=6. Calcule PQ.




A) 6 B) 4,5 C) $6\sqrt{2}$

D) 3 E) $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 164**

Si T, P, Q y L son puntos de tangencia y MLPQ es un paralelogramo. Calcule $\alpha$.

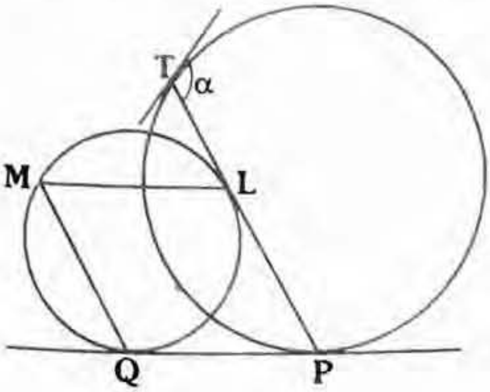
A) 150°

B) 135°

C) 143°

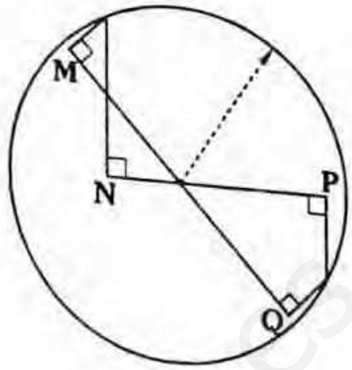
D) 120°

E) 127°




**PROBLEMA Nº 165**

Si PQ=1. Calcule MN.




A) 0,5 B) 1 C) 0,8

D) 1,2 E) 1,5

**PROBLEMA Nº 166**

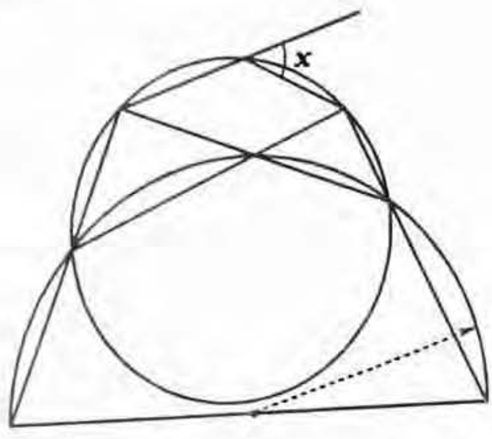
En una semicircunferencia de diametro $\overline{AB}$ se ubica el punto P y se traza $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$). En $\widehat{PB}$ se ubica el punto Q tal que $m\measuredangle APH = m\measuredangle HPQ$ ; AQ=8. Calcule PH.

A) 2 B) 4 C) 6

D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 167**

Calcule "x".

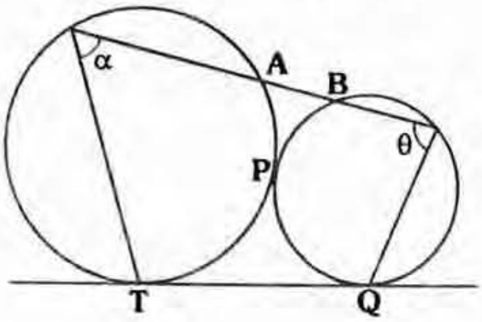



A) 15° B) 30° C) 37°

D) 45° E) 53°

**PROBLEMA Nº 168**

Si T, P y Q son puntos de tangencia; $\alpha+\theta=140^\circ$. Calcule $m\measuredangle APB$.

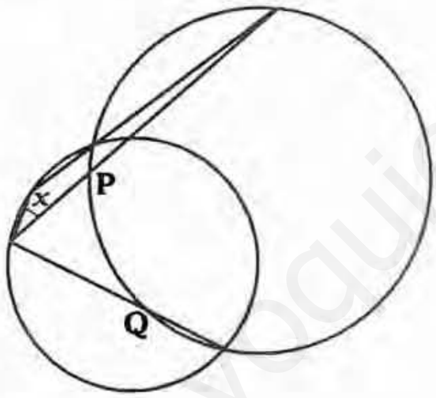



A) 40°  B) 55°  C) 50°
D) 35°  E) 70°

**PROBLEMA Nº 169**

Si $m\overset{\frown}{PQ}=50^\circ$. Calcule "x".

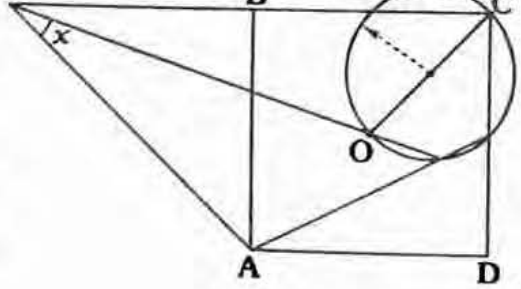
A) 50°
B) 25°
C) 40°
D) 20°
E) 75°




**PROBLEMA Nº 170**

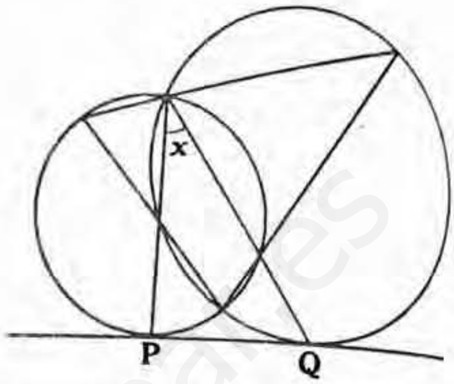
Si O es centro del cuadrado ABCD.
Calcule "x".

A) $\frac{53^\circ}{2}$
B) $\frac{37^\circ}{2}$
C) 45°
D) 30°
E) 15°




**PROBLEMA Nº 171**

Si P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".

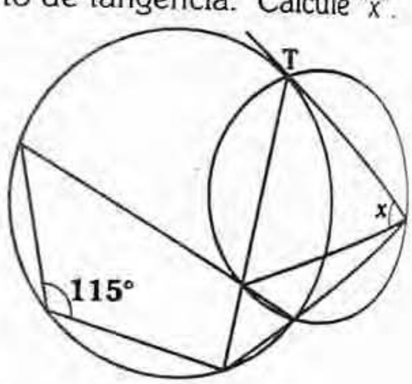



A) 45°  B) 30°  C) 60°
D) 36°  E) 54°

**PROBLEMA Nº 172**

Si T es punto de tangencia. Calcule "x".

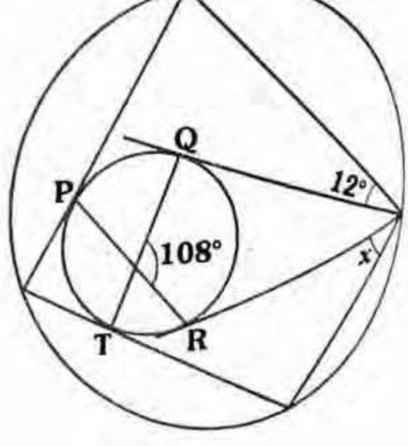
A) 65°
B) 50°
C) 25°
D) 70°
E) 35°




**PROBLEMA Nº 173**

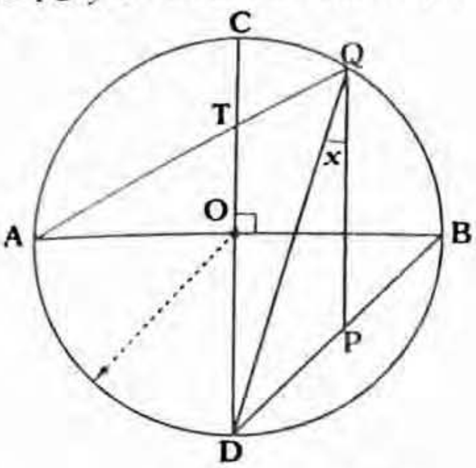
Si P, Q, T y R son puntos de tangencia.
Calcule "x".

A) 48°
B) 36°
C) 24°
D) 12°
E) 60°



**PROBLEMA Nº 174**

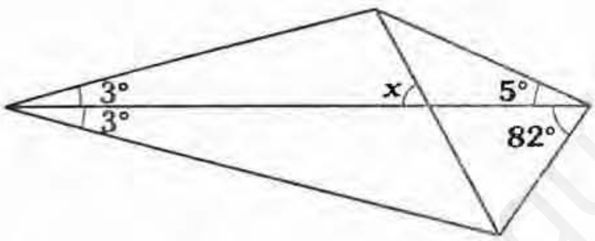
Si CT=TO y BP=PD. Calcule "x".




A) 4°  B) 14°  C) 8°
D) 16°  E) 15°

**PROBLEMA Nº 175**

Calcule "x".

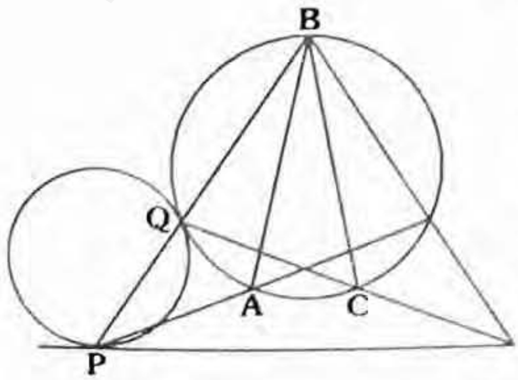



A) 13°  B) 15°  C) 18°
D) 22.5°  E) 10°

**PROBLEMA Nº 176**

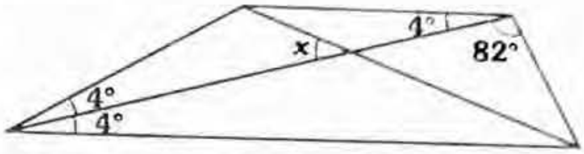
P y Q son puntos de tangencia. Calcule $\frac{AB}{BC}$

A) 1
B) 2
C) 3/2
D) $\sqrt{2}$
E) F.D.




**PROBLEMA Nº 177**

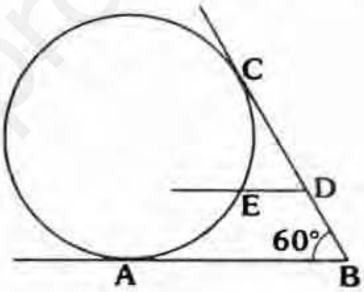
Calcule "x".




A) 8°  B) 12°  C) 15°
D) 16°  E) 24°

**PROBLEMA Nº 178**

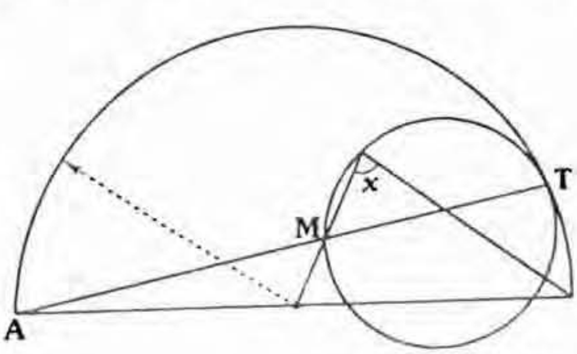
Si A y C son puntos de tangencia, $\overline{ED} // \overline{AB}$ y 11(BD)=4(CD). Calcule m$\widehat{EC}$.




A) 30°  B) 60°  C) 67°
D) 45°  E) 70°

**PROBLEMA Nº 179**

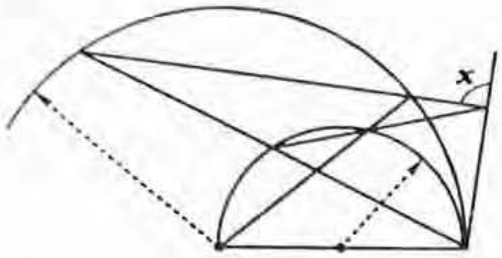
En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule "x" en función de $\alpha$ $\left(m\widehat{AT}=\alpha\right)$.




A) $90°-\alpha$  B) $45°+\alpha$  C) $\alpha$
D) $90°-2\alpha$  E) $2\alpha$

**PROBLEMA Nº 180**

En el gráfico, calcule "x".




A) 60° B) 75°
C) 90° D) 105°
E) 120°

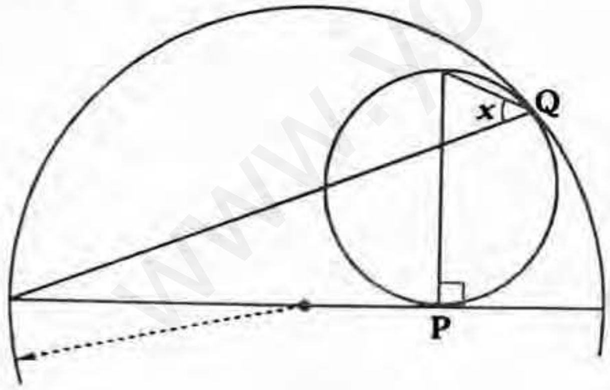
**PROBLEMA Nº 181**

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los cuadrados ABPQ y BCMN, sea $\overline{MA} \cap \overline{QC} = \{S\}$.

Demostrar que $\overline{BS} \perp \overline{AC}$.

**PROBLEMA Nº 182**

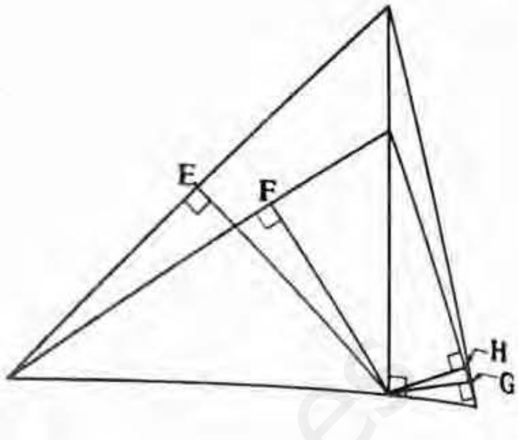
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".




A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

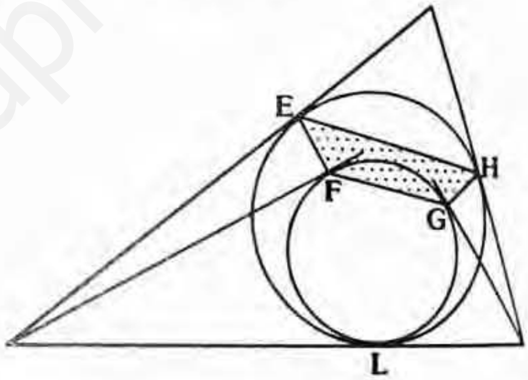
**PROBLEMA Nº 183**

En el gráfico, demostrar que el cuadrilátero EFHG inscriptible.




**PROBLEMA Nº 184**

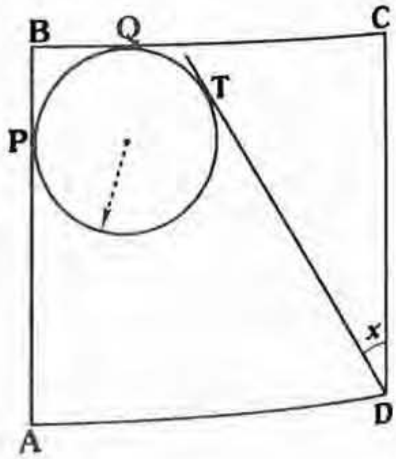
En el gráfico, L, E, F, G y H son puntos de tangencia, demostrar que el cuadrilátero EFGH es inscriptible.




**PROBLEMA Nº 185**

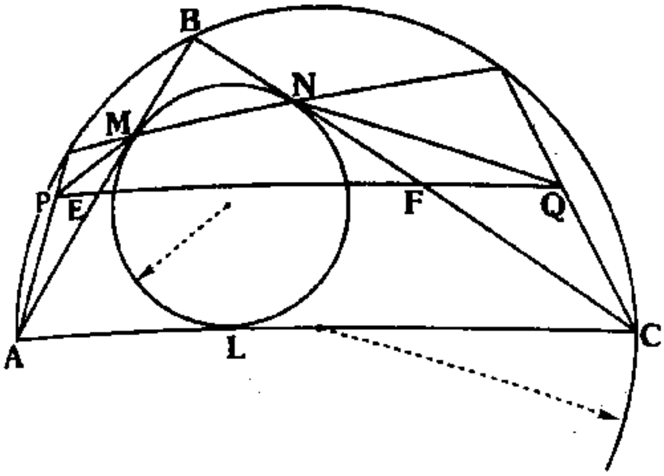
Si ABCD es un cuadrado; P, Q y T son puntos de tangencia y TD=AB.

Calcule "x".



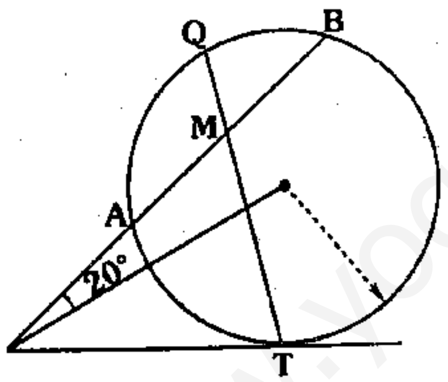
**PROBLEMA Nº 186**

En el gráfico, BE=EA y BF=FC, tangencia, demostrar que el cuadrilátero es inscriptible.




**PROBLEMA Nº 187**

Si T es punto de tangencia y AM=MB.
Calcule $m\widehat{TAQ}$ .




A) 140° B) 120° C) 100°
D) 90° E) 70°

**PROBLEMA Nº 188**

En un triángulo ABC ($m\measuredangle ABC > 90°$) se traza la ceviana interior $\overline{BN}$, tal que AN=3(NC) además $m\measuredangle BAC = 37°$ y $m\measuredangle NBC = 37°/2$.
Calcule $m\measuredangle ANB$ .

A) 37° B) 60° C) 143°
D) 53° E) 127°

**PROBLEMA Nº 189**

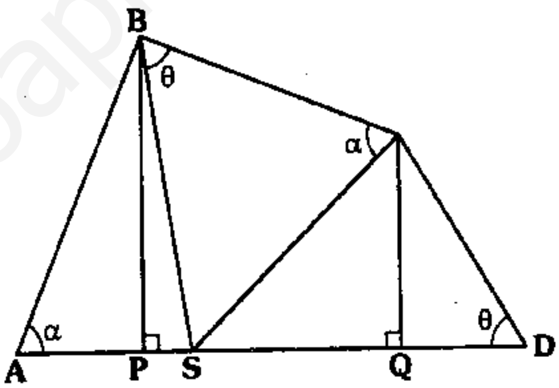
En un rectángulo ABCD se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$); además P y Q son puntos medios de $\overline{HC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Calcule $m\measuredangle BPQ$ .

A) 60° B) 120°
C) 135° D) 90°
E) 150°

**PROBLEMA Nº 190**

En el gráfico, demostrar que:

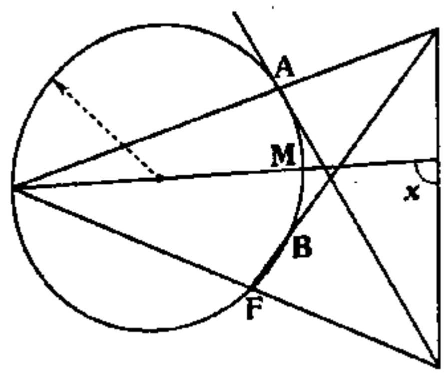
$$AD = 2(PQ)$$




**PROBLEMA Nº 191**

Si A es punto de tangencia y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$ .
Calcule $\alpha$ .

A) 60°
B) 90°
C) 120°
D) 75°
E) 135°



**PROBLEMA Nº 192**

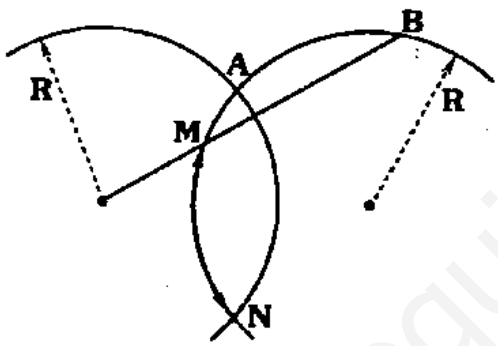
Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia en el arco BC se ubica el punto P y se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PL}$ a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente (Q en $\overline{BC}$ y L en $\overline{AC}$); además A, Q y P son colineales, $\overleftrightarrow{LQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en S, si la $m\measuredangle BSL=\theta$. Calcule $m\widehat{AB}$.

A) $\theta$ B) $2\theta$ C) $90-\theta°$

D) $\dfrac{\theta}{2}$ E) $180°-\dfrac{\theta}{2}$

**PROBLEMA Nº 193**

En el gráfico, $m\widehat{AB}=60°$. Calcule $m\widehat{MN}$




A) 45° B) 53° C) 60°

D) 30° E) 90°

**PROBLEMA Nº 194**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, talque: $m\measuredangle ACD=x$; $m\measuredangle DAC=4x$; $m\measuredangle ABD=2x$, $m\measuredangle DBC=9x$ y $m\measuredangle ACB=5x$. Calcule "$x$".

A) 12° B) 9° C) 10°

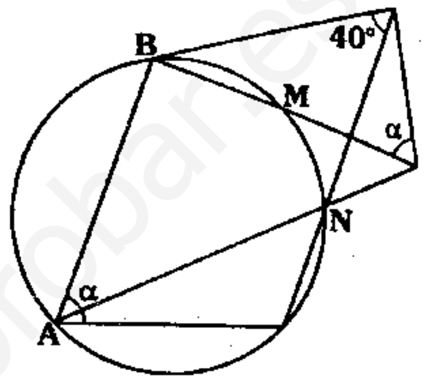
D) 15° E) 18°

**PROBLEMA Nº 195**

Se tiene el triángulo isósceles ABC(AB=BC), una circunferencia es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Desde A se traza $\overline{AL}$ tangente a la circunferencia en L. La prolongación de $\overline{QL}$ corta a $\overline{AC}$ en S. Demostrar que AS=SC.

**PROBLEMA Nº 196**

Si $m\widehat{AB}=100°$. Calcule $m\widehat{MN}$.

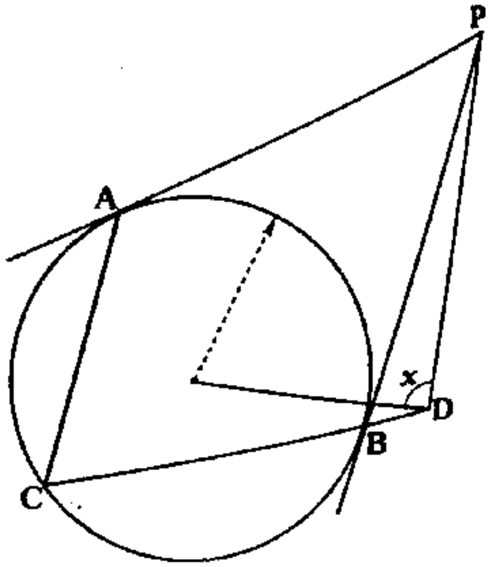



A) 25° B) 10° C) 20°

D) 35° E) 15°

**PROBLEMA Nº 197**

Si A y B son puntos de tangencia y $\overline{AC}//\overline{PD}$. Calcule "$x$".

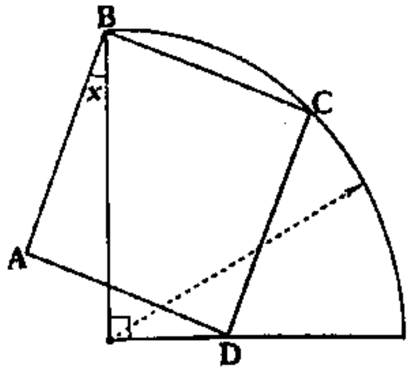



A) 60° B) 45° C) 90°

D) 75° E) 36°

**PROBLEMA Nº 198**

Si ABCD es un cuadrado. Calcule "x".

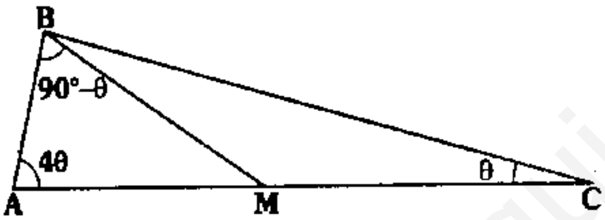



A) 15° B) 37°/2 C) 53°/2

D) 45°/2 E) 14°

**PROBLEMA Nº 199**

Si AB=MC. Calcule $\theta$

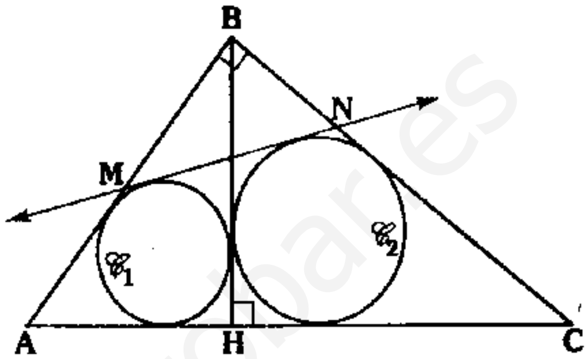



A) 12° B) 10° C) 15°

D) 18° E) 20°

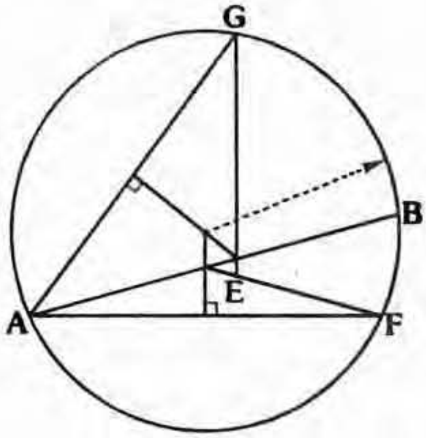
**PROBLEMA Nº 200**

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y BHC. Si $\overleftrightarrow{MN}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Demuestre que el cuadrilátero AMNC es inscriptible.



**Problema N° 201**

En el gráfico, EF=5 y EG=12. Calcule AB.




A) 13

B) 17

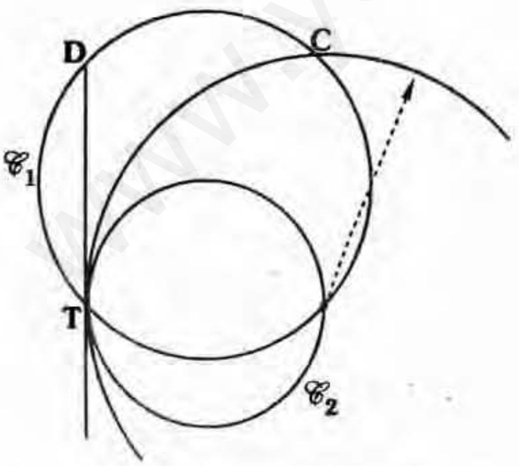
C) $2\sqrt{15}$

D) 18

E) 8,5

**Problema N° 202**

En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\overset{\frown}{CD}=\theta$. Calcule la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

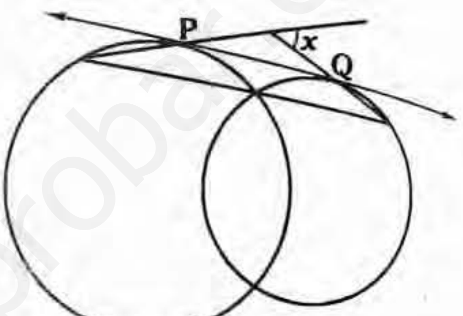



A) $\theta$ B) $90°-\theta$ C) $2\theta$

D) $\dfrac{\theta}{2}$ E) $90°-\dfrac{\theta}{2}$

**Problema N° 203**

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales. P y Q son puntos de tangencia, calcule "x".

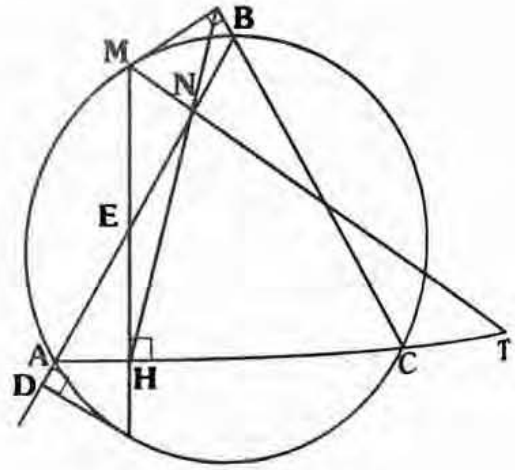



A) 30° B) 60° C) 15°

D) 45° E) $\dfrac{45°}{2}$

**Problema N° 204**

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Si AE=b y AD=a. Calcule CT.



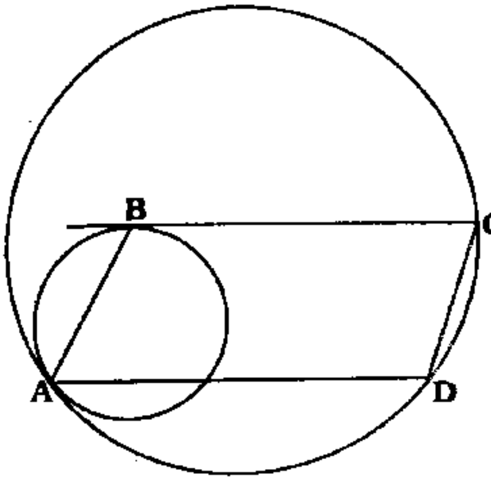

A) $(a+b)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{a+b}{2}$

C) $2b+a$ D) $2a+b$

E) $(a+2b)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**PROBLEMA Nº 205**

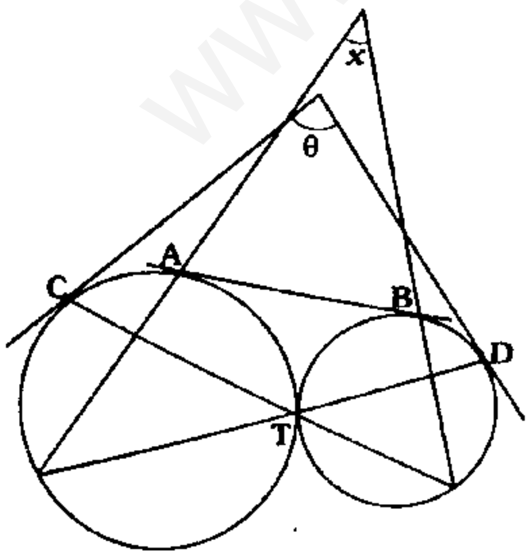
Si A y B son puntos de tangencia ABCD es un paralelogramo y $m\overset{\frown}{AD}=100°$.
Calcule $m\overset{\frown}{CD}$.




A) 50° B) 40° C) 30°
D) 75° E) 80°

**PROBLEMA Nº 206**

Si A, B, C, D y T son puntos de tangencia.
Calcule "x".

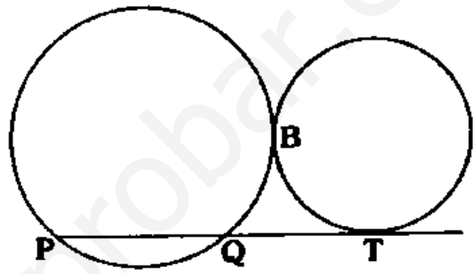



A) $\dfrac{\theta}{2}$ B) $180°-\theta$ C) $90°-\dfrac{\theta}{2}$

D) $\dfrac{3\theta}{2}$ E) $49°+\dfrac{\theta}{2}$

**PROBLEMA Nº 207**

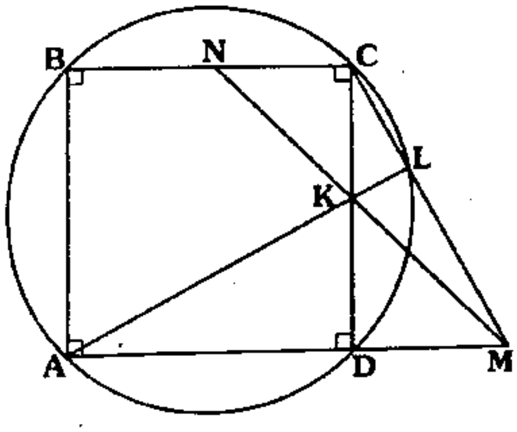
Si B y T son puntos de tangencia y $QT=3(PQ)$; $m\overset{\frown}{BT}=90°$. Calcule $m\overset{\frown}{PQ}$.




A) 16° B) 37° C) 53°
D) 32° E) 45°

**PROBLEMA Nº 208**

Si ABCD es un cuadrado probar que B, N, L y M están en una misma circunferencia.




**PROBLEMA Nº 209**

Si P, T, Q y R son puntos de tangencia; $m\overset{\frown}{TS}=150°$. Calcule "x".

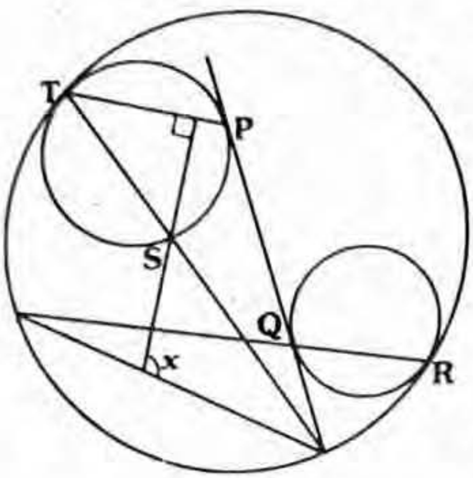
A) 105°

B) 115°

C) 120°

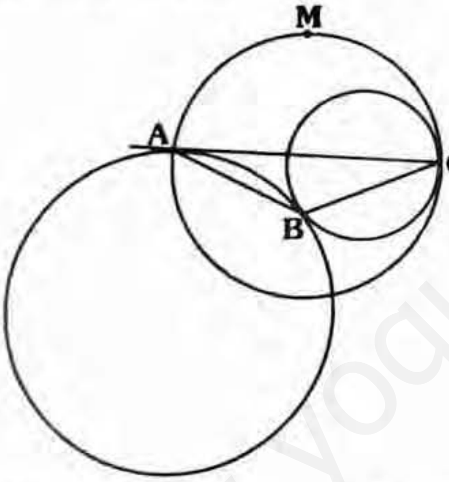
D) 95°

E) 110°




**PROBLEMA Nº 210**

Si A, B y C son puntos de tangencia; $m\widehat{AMC}=100°$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

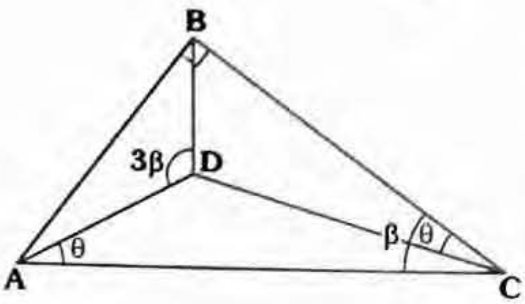



A) 115° B) 105° C) 125°

D) 130° E) 140°

**PROBLEMA Nº 211**

De acuerdo al gráfico, calcule $\dfrac{CD}{BD}$

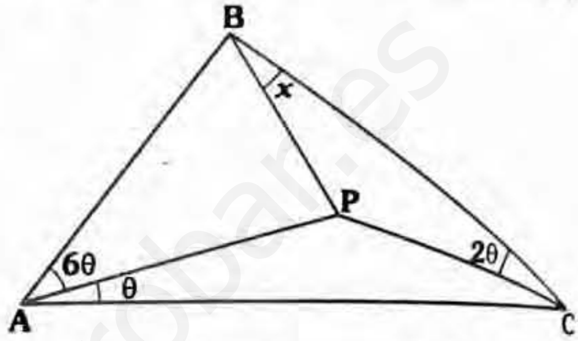



A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 2

D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 212**

En el gráfico, AB=AP=PC. Calcule "$x$".

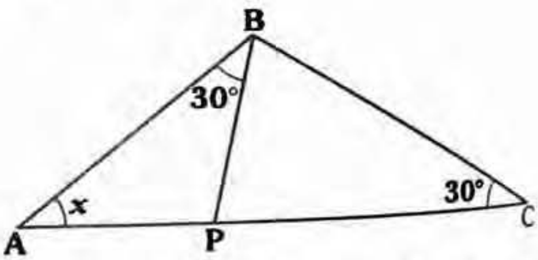



A) 30° B) 36° C) 20°

D) 18° E) 30°

**PROBLEMA Nº 213**

Si AB=PC, calcule "x".




A) 12° B) 24° C) 30°

D) 18° E) 36°

**PROBLEMA Nº 214**

Calcule "x".

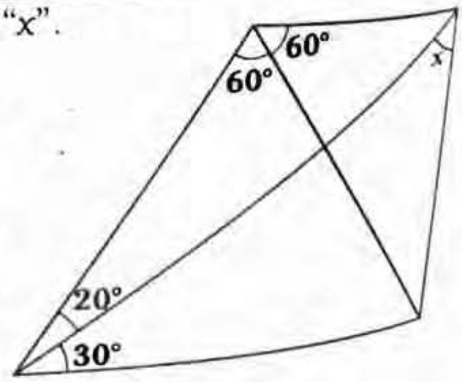
A) 20°

B) 40°

C) 50°

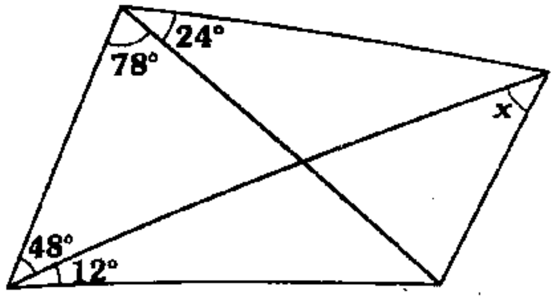
D) 30°

E) 25°



**PROBLEMA Nº 215**

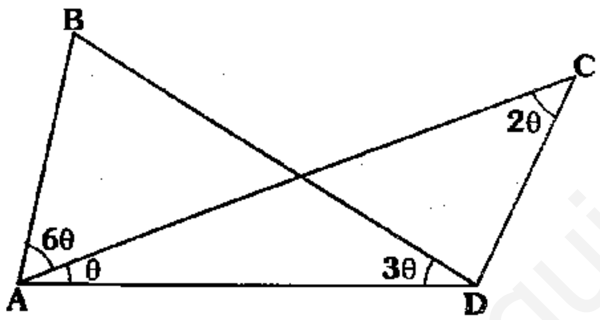
Calcule "x".




A) 30° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 24°

**PROBLEMA Nº 216**

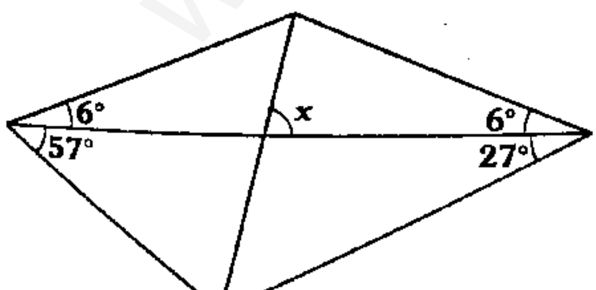
Si AB=CD, calcule " θ ".




A) 12° B) 15° C) 10°
D) 9° E) 14°

**PROBLEMA Nº 217**

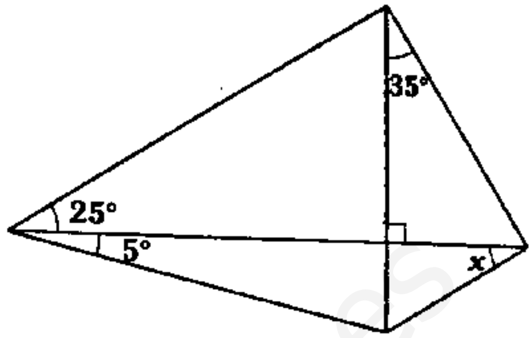
Calcule "x".




A) 90° B) 80° C) 60°
D) 57° E) 63°

**PROBLEMA Nº 218**

Calcule "x".




A) 12° B) 15° C) 18°
D) 25° E) 30°

**PROBLEMA Nº 219**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en A), P está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$ tal que $\overline{PQ} // \overline{AC}$, si $AC = 2(PQ) = 6$ y el cuadrilátero APQC es circunscriptible. Calcule el inradio del triángulo BPQ.

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 1

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**PROBLEMA Nº 220**

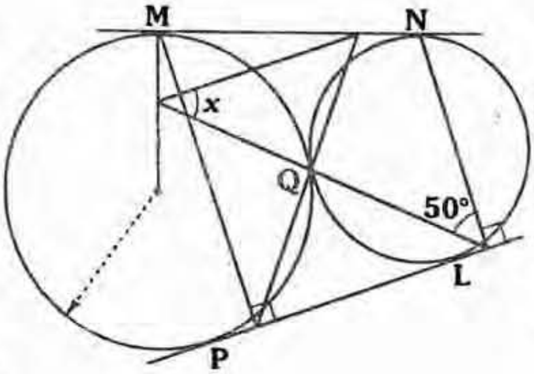
En la región interior a un triángulo equilátero ABC, se ubica el punto P y en $\overline{AP}$, su punto medio Q; si $m\measuredangle PAC = 30°$ y $m\measuredangle PCB = m\measuredangle QBA$.

Calcule $m\measuredangle QBA$.

A) 10° B) 12°
C) 15° D) 16°
E) 20°

**PROBLEMA Nº 221**

Si L, M, N, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "$x$".




A) 50°

B) 25°

C) 40°

D) 20°

E) 30°

**PROBLEMA Nº 222**

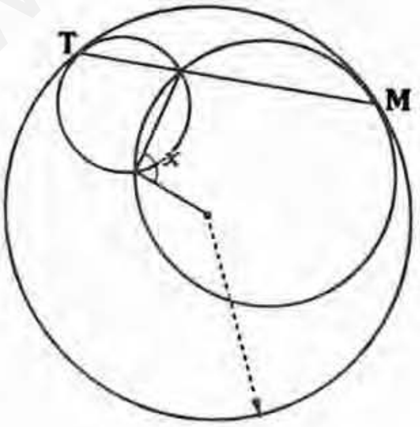
En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubica el punto P, se traza $\overline{PH} \perp \overline{AB}$, en $\overset{\frown}{PB}$ se ubican los puntos M y N ($N \in \overset{\frown}{MB}$); $\overline{AM} \cap \overline{PH} = \{Q\}$, $\overline{AN} \cap \overline{QH} = \{T\}$, la prolongación de $\overline{NQ}$ interseca a $\overset{\frown}{AP}$ en C; si $m\overset{\frown}{CPM} = 50°$. Calcule $m\measuredangle QTM$.

A) 40° B) 25° C) 20°

D) 75° E) 35°

**PROBLEMA Nº 223**

Si T y M son puntos de tangencia. Calcule "$x$".




A) 60°

B) 120°

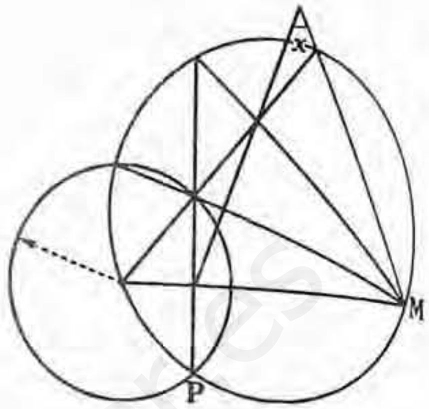
C) 90°

D) 135°

E) 106°

**PROBLEMA Nº 224**

Si $m\overset{\frown}{PM} = 100°$. Calcule "$x$".




A) 50°

B) 40°

C) 20°

D) 25°

E) 45°

**PROBLEMA Nº 225**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en cuya prolongación se ubica P, luego se traza la secante PQS. T es punto en la región interior del cuadrilátero ASQB, tal que los cuadriláteros ASTO y OTQB son inscriptibles, donde AO=OB. Demostrar que $m\measuredangle OTP = 90°$.

**PROBLEMA Nº 226**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH y se traza el rombo APQH de centro O, tal que P está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$. Calcule $m\measuredangle BOC$.

A) 60° B) 120° C) 135°

D) 90° E) 108°

**PROBLEMA Nº 227**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica Q en $\overline{AB}$, R en $\overline{BC}$ y P en $\overline{AC}$ tal que PQBR es un cuadrado. H es la proyección de Q sobre $\overline{AC}$.

Sea $\overline{AR} \cap \overline{QP} = \{S\}$. Calcule $m\measuredangle SHP$.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

**PROBLEMA Nº 228**

Se tiene el triángulo ABC, D es un punto exterior relativo a $\overline{BC}$.

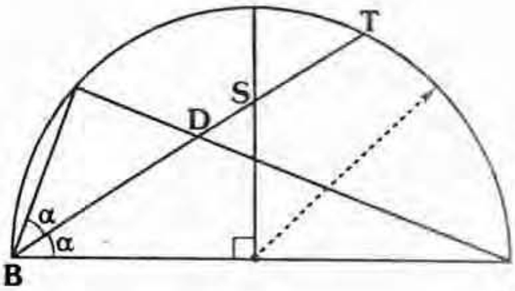
Si AB=CD, $m\sphericalangle ACB = x$, $m\sphericalangle BCD = 2x$, $m\sphericalangle ADC = 5x$ y $m\sphericalangle ABC = 4x$.

Calcule "x".

A) 5° B) 8° C) 10°
D) 18° E) 20°

**PROBLEMA Nº 229**

En el gráfico, calcule $\dfrac{BD}{ST}$

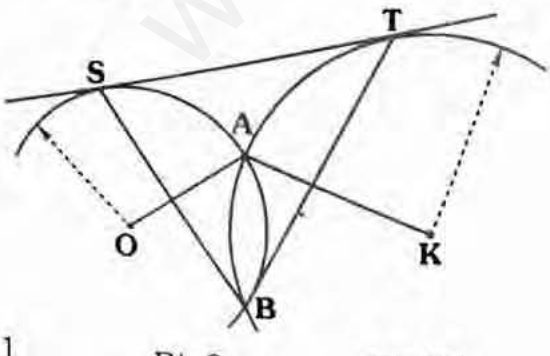



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 2

**PROBLEMA Nº 230**

S y T son puntos de tangencia.

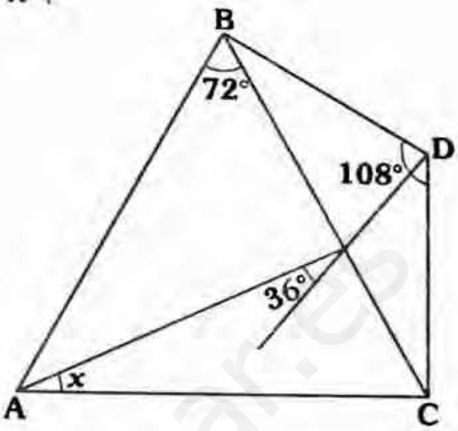
Calcule $\dfrac{m\sphericalangle SBT}{m\sphericalangle OAK}$




A) 1 B) 2 C) 2/3
D) 1/2 E) 3/2

**PROBLEMA Nº 231**

En el gráfico, AB=BC y BD=DC.
Calcule "x".




A) 12°
B) 18°
C) 24°
D) 36°
E) 27°

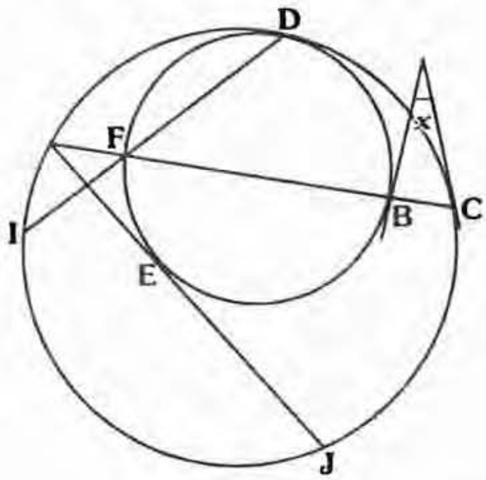
**PROBLEMA Nº 232**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica R en $\overline{BC}$ y Q en en $\overline{AC}$ tal que $\overline{RQ} \perp \overline{AC}$. Si $m\sphericalangle RAC = 45°$ y BR es igual al inradio del triángulo RQC. Calcule $m\sphericalangle BAR$.

A) 15° B) 14° C) $\dfrac{37°}{2}$
D) $\dfrac{53°}{2}$ E) $\dfrac{45°}{2}$

**PROBLEMA Nº 233**

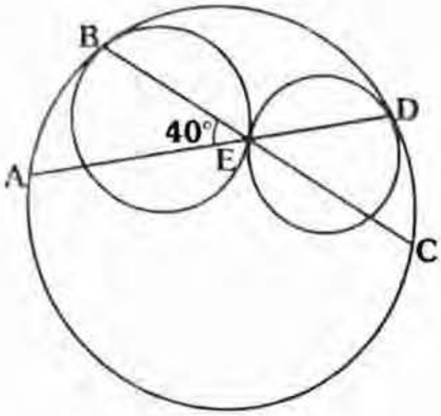
Si B, C, D y E son puntos de tangencia $m\overset{\frown}{IJ} = 80°$ y $m\overset{\frown}{EF} = 30°$. Calcule "x".




A) 25°
B) 20°
C) 15°
D) 24°
E) 30°

**PROBLEMA Nº 234**

Si B, D y E son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.




A) 50°

B) 80°

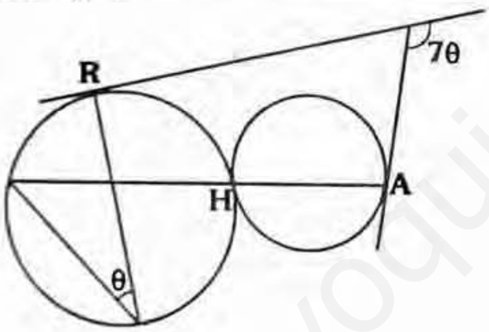
C) 20°

D) 40°

E) 25°

**PROBLEMA Nº 235**

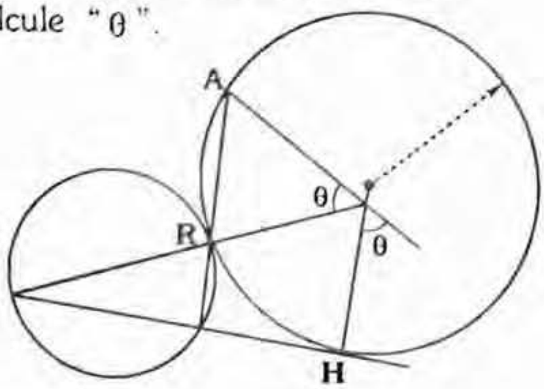
Si R, H y A son puntos de tangencia.
Calcule "θ".




A) 22° 30'  B) 20°  C) 15°
D) 18°  E) 10°

**PROBLEMA Nº 236**

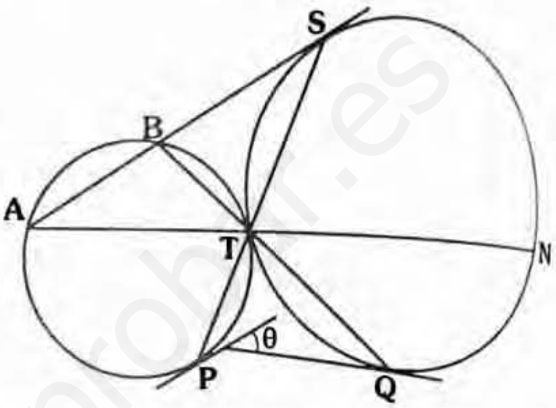
Si R y H son puntos de tangencia.
Calcule "θ".




A) 45°  B) 75°  C) 60°
D) 36°  E) 80°

**PROBLEMA Nº 237**

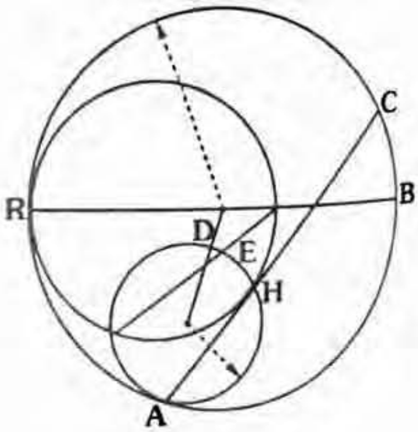
Si P, Q, T y S son puntos de tangencia; $m\measuredangle STN = m\overset{\frown}{AB}$. Calcule "θ".




A) 30°  B) 40°  C) 36°
D) 38°  E) 60°

**PROBLEMA Nº 238**

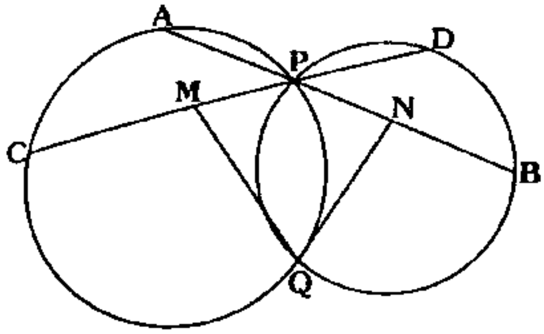
Si R, H y A son puntos de tangencia; $m\overset{\frown}{AB} = 100°$ y $m\overset{\frown}{BC} = 30°$.
Calcule $m\overset{\frown}{DE}$.




A) 10°  B) 15°
C) 20°  D) 10,5°
E) 25°

**PROBLEMA Nº 239**

En el gráfico, AN=NB y CM=MD. Demuestre que el cuadrilátero QNPM es inscriptible.




**PROBLEMA Nº 240**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BL}$ secantes en Q y la mediana $\overline{BM}$ que corta a $\overline{AD}$ en P. Si $m\sphericalangle BAD=10°$, $m\sphericalangle DAC=30°$, $m\sphericalangle CBL=20°$, MP=a, LQ=b y CD=c. Halle la relación entre a, b y c.

A) $2b=a+c$ B) $b^2=a^2+c^2$

C) $c^2=a^2+b^2$ D) $2c=a+b$

E) $2a=b+c$

**PROBLEMA Nº 241**

En el gráfico, ABCD es un rombo y AM=MD. Calcule "x".

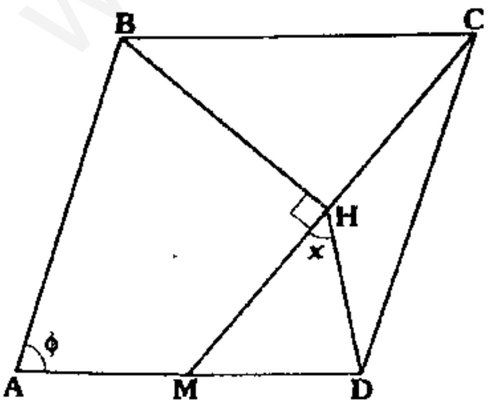
A) $\phi$

B) $2\phi$

C) $\frac{3}{2}\phi$

D) $90°-\phi$

E) $90°-\frac{\phi}{2}$




**PROBLEMA Nº 242**

Del gráfico, calcule "x".

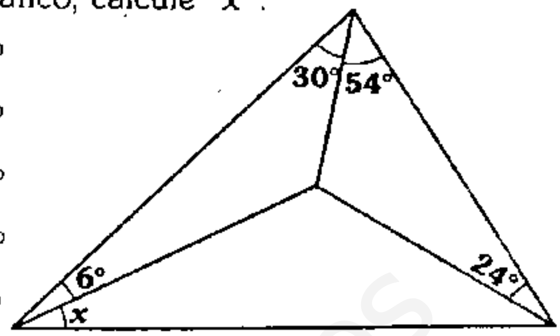
A) 12°

B) 15°

C) 16°

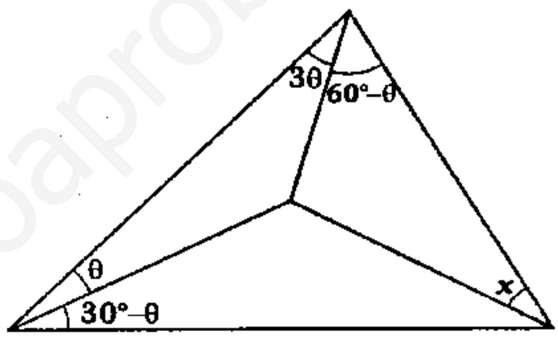
D) 24°

E) 18°




**PROBLEMA Nº 243**

Calcule "x" en:




A) 22,5° B) 26,5° C) 30°

D) 37,5° E) 36°

**PROBLEMA Nº 244**

En el gráfico, AB=BC y AC=BD.

Calcule "x".

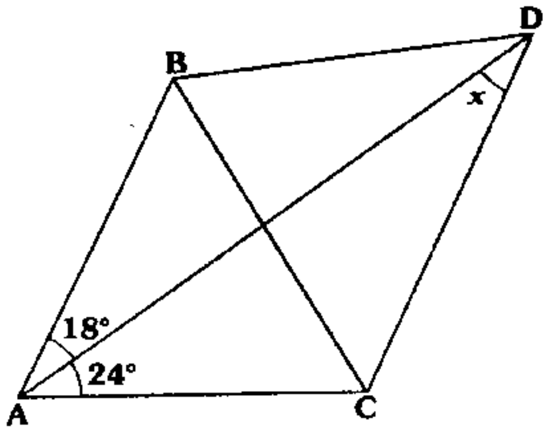
A) 30°

B) 45°

C) 55°

D) 60°

E) 75°

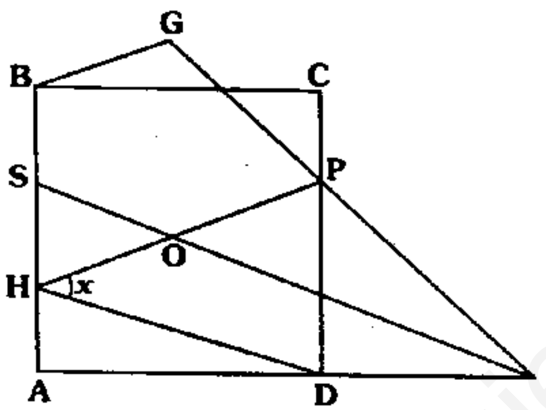


**PROBLEMA Nº 245**

Se tiene el rectángulo ABCD, P es un punto coplanar a dicho rectángulo, desde C y B se trazan las perpendiculares a $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{DP}$ respectivamente, las cuales se cortan en L. Demostrar que $\overline{LP} \perp \overline{BC}$.

**PROBLEMA Nº 246**

ABCD es un cuadrado de centro O, HBGP es un trapecio isósceles y $3(BS)=4(AH)$. Calcule "x".




A) 45°  B) 37°  C) 81°/2

D) 53°  E) 74°

**PROBLEMA Nº 247**

ABCD es un cuadrado, N, M, P, Q, T y L son puntos de tangencia. Calcule "x".

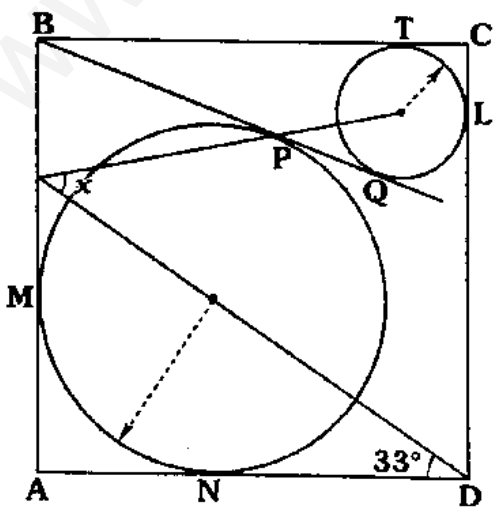
A) 53°

B) 63°

C) 37°

D) 45°

E) 23°




**PROBLEMA Nº 248**

Se tiene el triángulo ABC (AB=BC), se traza la circunferencia inscrita $\mathscr{C}$ la cual es tangente a $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ en T, E y D respectivamente. Se ubica L en la prolongación de $\overline{AB}$, la prolongación de $\overline{LE}$ corta a $\mathscr{C}$ en G, $\overline{GA}$ corta a $\mathscr{C}$ en F y $\overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{k\}$. Calcule $\dfrac{Ak}{BL}$

A) 2  B) $\dfrac{2}{3}$  C) $\dfrac{1}{3}$

D) 1  E) $\dfrac{1}{2}$

**PROBLEMA Nº 249**

Se tiene el triángulo ABC, con BC=2(AB), P es un punto interior talque:

$m\sphericalangle BPC=90°$, $m\sphericalangle PCB=\theta$, $m\sphericalangle PAC=2\theta$ y $m\sphericalangle BAP=20°+\theta$.

Calcule $m\sphericalangle PCA$

A) 10°  B) 20°  C) 30°

D) 40°  E) 50°

**PROBLEMA Nº 250**

Se tienee la circunferencia de radio R circunscrita al triángulo ABC. P es un punto coplanar a dicho triángulo, A' es la proyección de P sobre la altura trazada desde A en el triángulo ABC, análogamente se ubica B' y C'. Si $\Delta ABC \cong A'B'C'$, calcule la distancia de P al ortocentro del $\Delta ABC$.

A) R  B) $R\sqrt{2}$

C) 2R  D) $R\sqrt{3}$

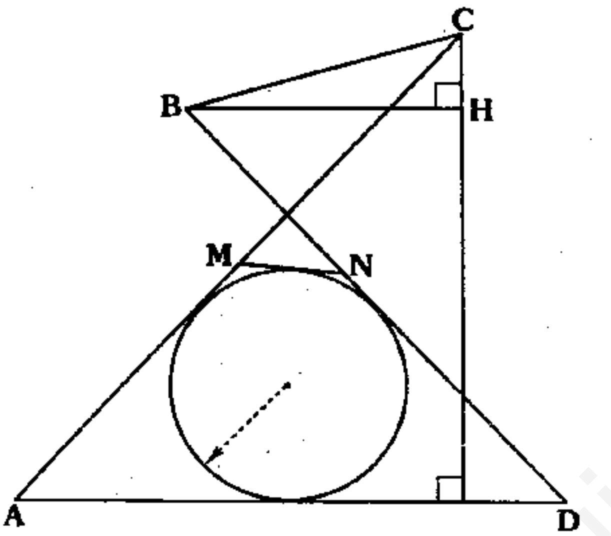
E) $R/2$

**PROBLEMA Nº 251**

En el triángulo ABC (AB=BC) M es punto medio de $\overline{AC}$ y P es un punto interior del triángulo ABC tal que $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle PCA$. Demuestre que $m\sphericalangle APM + m\sphericalangle PBC = 180°$.

**PROBLEMA Nº 252**

En el gráfico, BC=6, BH=5, AD=10,, AM=MC y BN=ND. Calcule AC+BD.

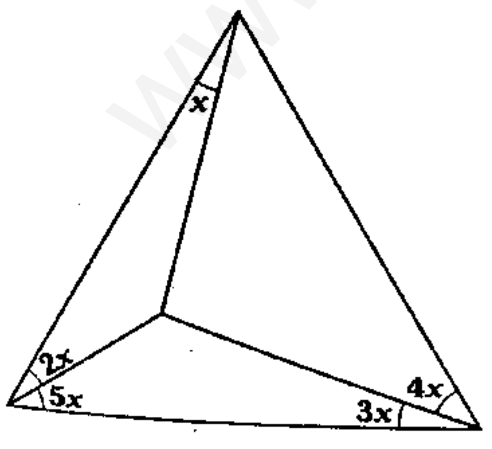



A) 20 B) 25 C) 21

D) 26 E) 15

**PROBLEMA Nº 253**

Del gráfico, calcule "x".

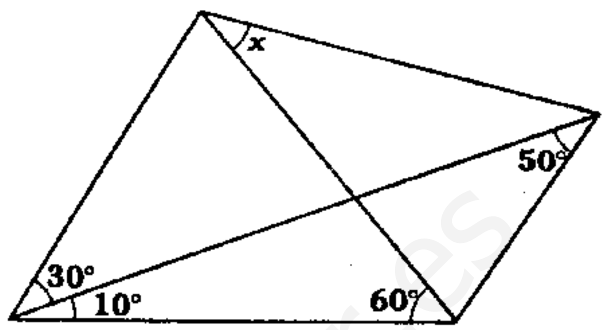



A) 5° B) 10° C) 12°

D) 7,5° E) 9°

**PROBLEMA Nº 254**

Calcule "x" en el siguiente gráfico:




A) 10° B) 15° C) 18°

D) 20° E) 30°

**PROBLEMA Nº 255**

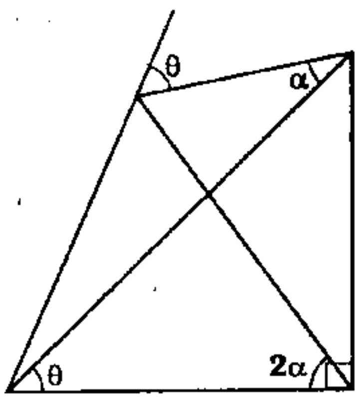
En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$, si $m\sphericalangle BAC = 28°$ y $m\sphericalangle BCA = 23°$. Calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 53° B) 60° C) 74°

D) 76° E) 71,5°

**PROBLEMA Nº 256**

Calcule $\alpha$, en el gráfico:




A) 45° B) $45° - \theta$ C) $2\theta$

D) $3\theta$ E) $90° - \theta$

**PROBLEMA Nº 257**

Se tiene el triángulo ABC, se ubica Q en $\overline{BC}$, R en $\overline{AC}$ y P en la región interior del triángulo ABQ tal que PBQR es un romboide. Si $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle ABP$, $m\sphericalangle APB = 3(m\sphericalangle AQB)$.

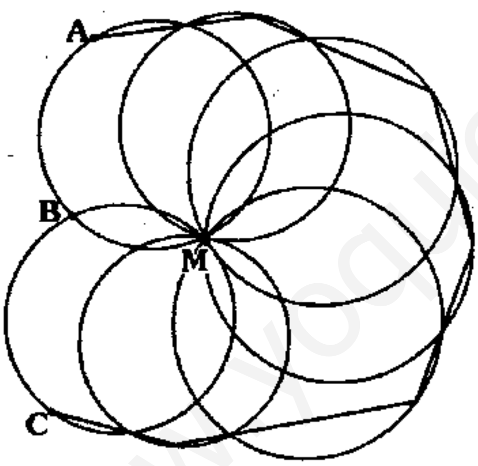
Calcule $m\sphericalangle AQB$.

A) 30° B) 15° C) 45°

D) 37° E) 53°

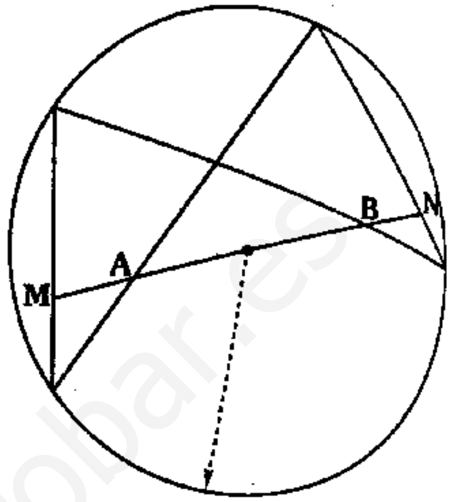
**PROBLEMA Nº 258**

En el gráfico, demostrar que A, B y C son colineales.




**PROBLEMA Nº 259**

En el gráfico, OA=OB. Demostrar que AM=BN.




**PROBLEMA Nº 260**

Sea el triángulo ABC, (AB=BC) con $m\sphericalangle ABC = 2\phi$, M es punto medio de $\overline{BC}$. Se ubica X en el menor arco MA de la circunferencia circunscrita del triángulo ABM y T es un punto interior del $\sphericalangle BMA$ tal que $m\sphericalangle TMX = 90°$ y $AX = XT$.

Calcule $m\sphericalangle MTA - m\sphericalangle CTM$.

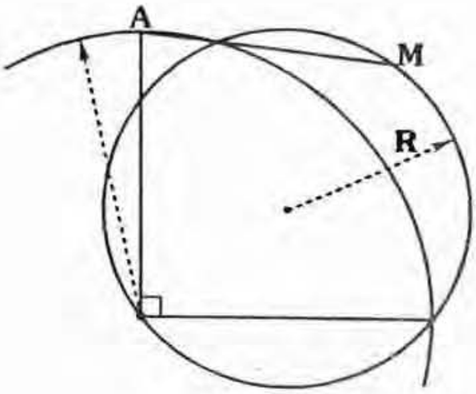
A) $\phi$ B) $2\phi$ C) $90° - \phi$

D) $90° - \frac{\phi}{2}$ E) $90° - \frac{\phi}{4}$

# Problemas Resueltos
## Ciclo Repaso

**PROBLEMA Nº 261**

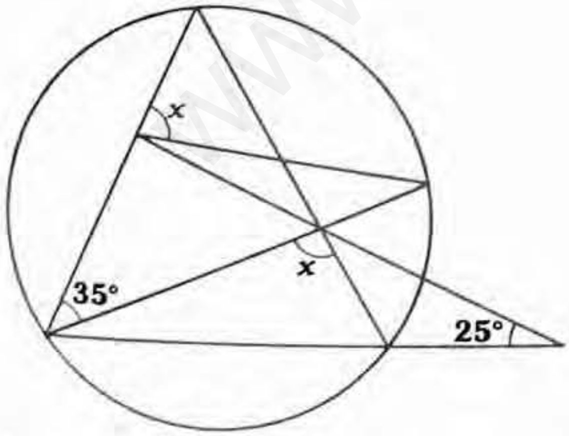
Si R=5, calcule AM.




A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$
D) 10 E) 7,5

**PROBLEMA Nº 262**

En el gráfico, calcule "$x$".




A) 60° B) 90° C) 80°
D) 70° E) 50°

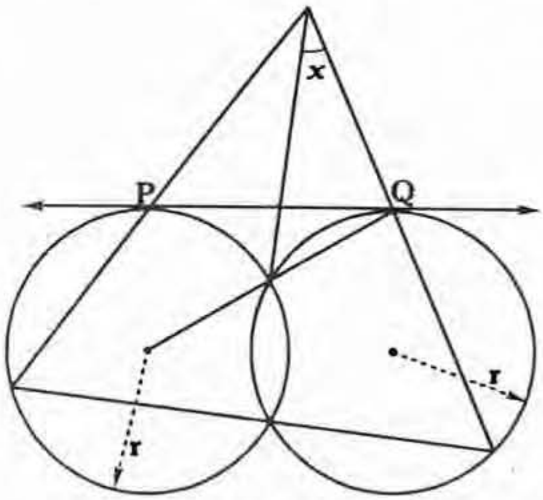
**PROBLEMA Nº 263**

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$. Si $m\sphericalangle BQP=50°$ y $m\sphericalangle ACQ=40°$. Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 40° B) 50°
C) 60° D) 30°
E) 20°

**PROBLEMA Nº 264**

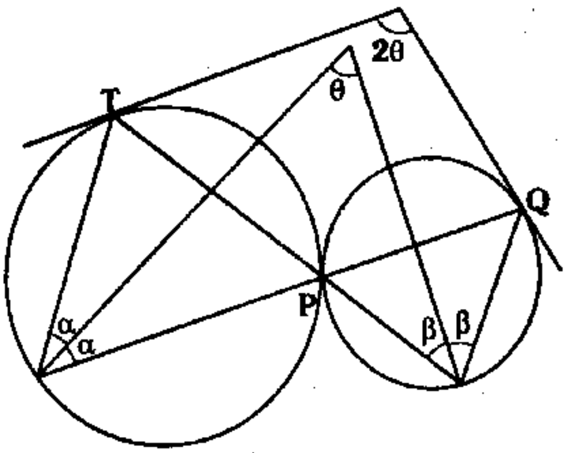
P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "$x$".




A) 37° B) 36°
C) 45° D) 15°
E) 30°

**PROBLEMA Nº 265**

En el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "$\theta$".

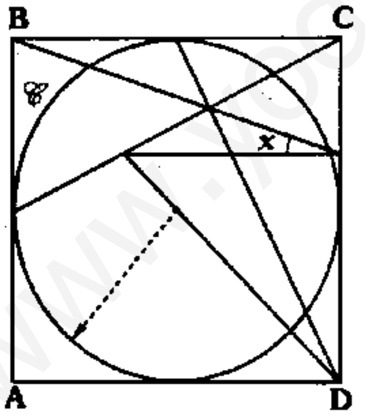



A) 60°  B) 45°  C) $\frac{135°}{2}$

D) 40°  E) 80°

**PROBLEMA Nº 266**

En el gráfico, la circunferencia $\mathscr{C}$ está inscrita en el cuadrado ABCD.
Calcule "x".



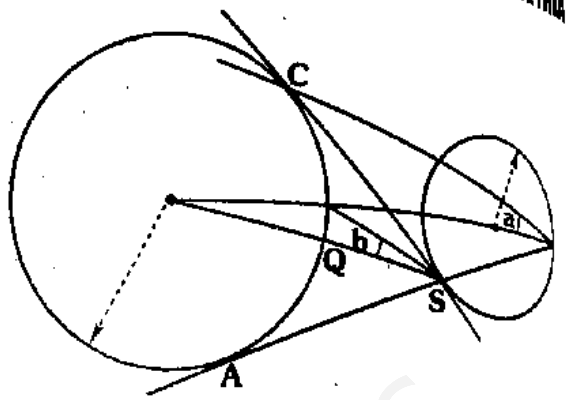

A) 15°  B) 18° 30'

C) 22° 30'  D) 26° 30'

E) 30°

**PROBLEMA Nº 267**

En el gráfico, A, C y S son puntos de tangencia. Si a+b=32°, calcule $m\overset{\frown}{AQ}$.

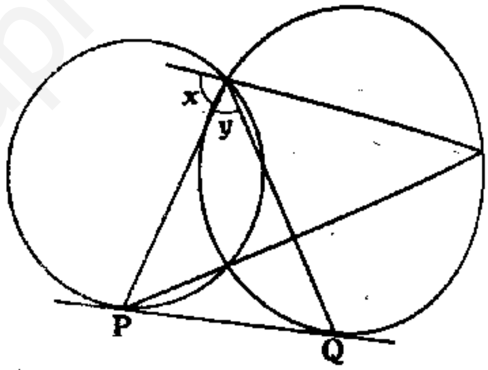



A) 76°  B) 64°  C) 58°

D) 74°  E) 32°

**PROBLEMA Nº 268**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Indique la relación entre "x" e "y".




A) $x=y$  B) $x+y=120°$

C) $x=2y$  D) $x=180°-2y$

E) $x+3y=180°$

**PROBLEMA Nº 269**

T, P, Q, S y M son puntos de tangencia.
Calcule $m\overset{\frown}{PQ}-m\overset{\frown}{TN}$.

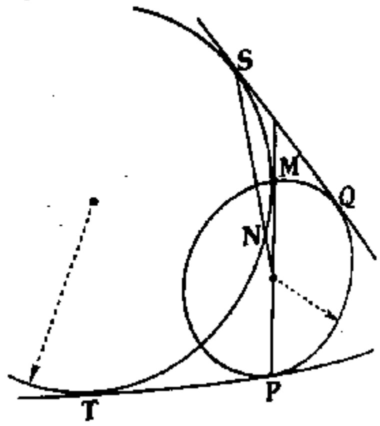
A) 30°

B) 37°

C) 45°

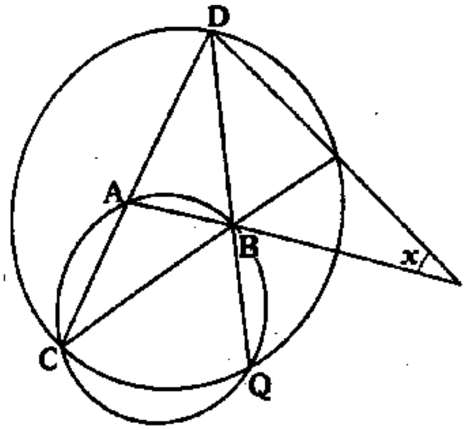
D) 53°

E) 60°



**PROBLEMA Nº 270**

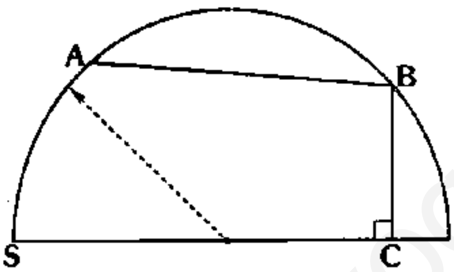
En el gráfico, $m\widehat{AB}=40°$. Calcule x.




A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 40°

**PROBLEMA Nº 271**

Si $m\widehat{AB}=80°$ y AB=2(BC). Calcule $m\widehat{AS}$.

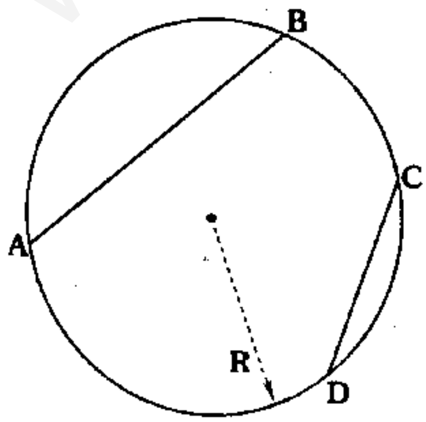



A) 60° B) 40° C) 50°
D) 20° E) 75°

**PROBLEMA Nº 272**

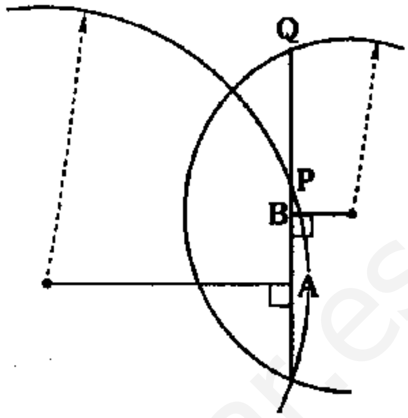
Si $m\widehat{BC}+m\widehat{AD}=180°$; AB=15 y CD=8.
Calcule R.

A) 7,5
B) 8,5
C) 7
D) 9
E) 9,5




**PROBLEMA Nº 273**

Si AB=3. Calcule PQ.

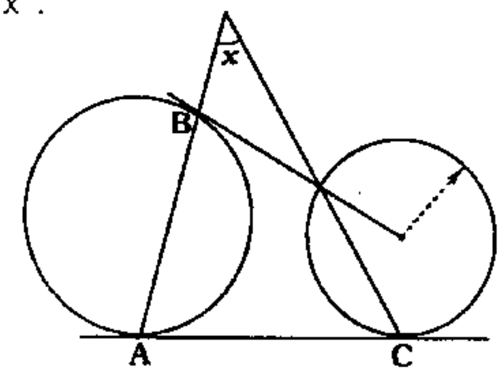



A) 6 B) 5 C) 3
D) 4 E) 2,5

**PROBLEMA Nº 274**

Si A, B y C son puntos de tangencia.
Calcule "x".

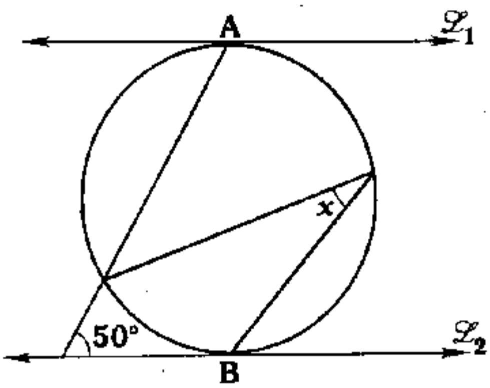
A) 30°
B) 45°
C) 36°
D) 75°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 275**

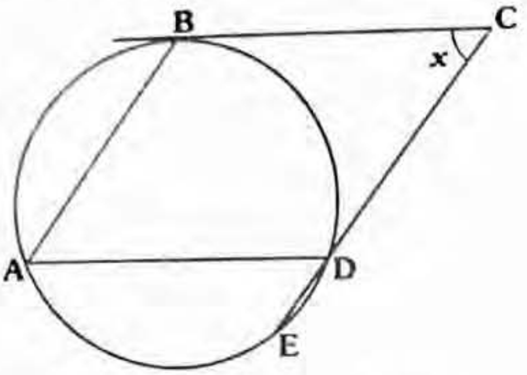
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$; A y B son puntos de tangencia.
Calcule "x".

A) 25°
B) 40°
C) 80°
D) 35°
E) 50°



**PROBLEMA Nº 276**

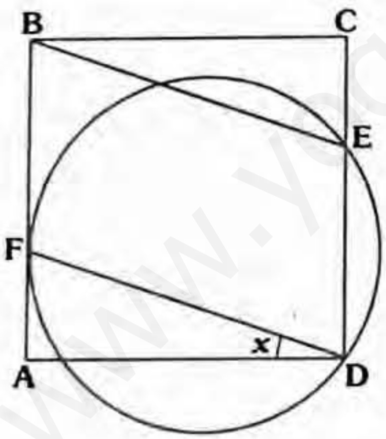
Si ABCD es un paralelogramo. B es punto de tangencia y $m\widehat{DE}=30°$. Calcule "x".




A) 60° B) 55° C) 50°
D) 75° E) 70°

**PROBLEMA Nº 277**

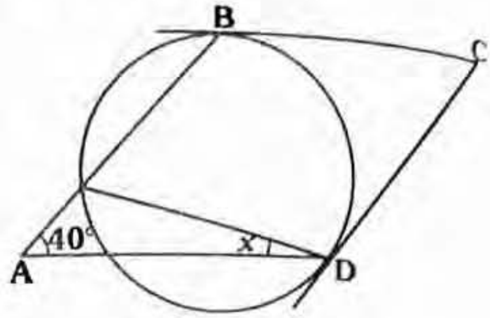
Si ABCD es un cuadrado y FBED es un romboide; F es punto de tangencia.
Calcule "x".




A) 15° B) 29°
C) 37°/2 D) 53°/2
E) 30°

**PROBLEMA Nº 278**

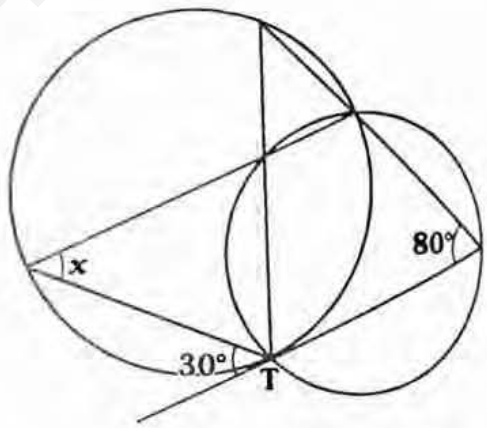
Si B y D son puntos de tangencia y ABCD es un paralelogramo.
Calcule "x".




A) 70° B) 35° C) 30°
D) 50° E) 40°

**PROBLEMA Nº 279**

En el gráfico, T es punto de tangencia.
Calcule "x".




A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

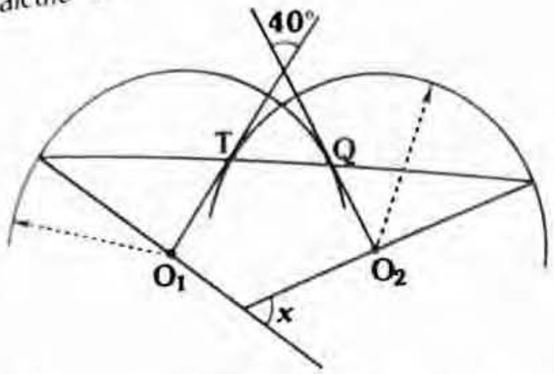
**PROBLEMA Nº 280**

En el cuadrado ABCD, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Se traza $\overline{PH}\perp\overline{AQ}$ (H en $\overline{AQ}$) tal que BH=7, HQ=3 y m∢ABH = m∢HPC.
Calcule PH.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

**PROBLEMA Nº 281**

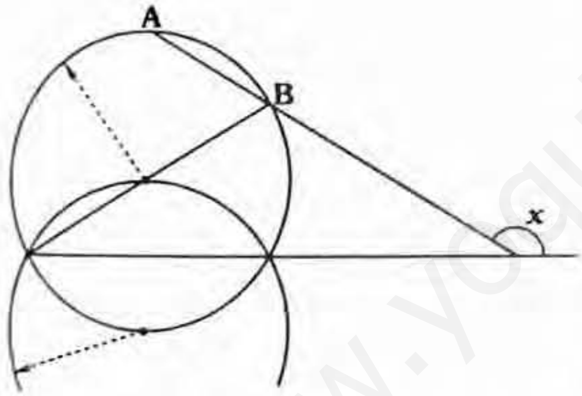
T y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x"




A) 40° B) 50° C) 100°
D) 80° E) 60°

**PROBLEMA Nº 282**

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 40°$. Calcule "x".




A) 100° B) 130° C) 140°
D) 110° E) 155°

**PROBLEMA Nº 283**

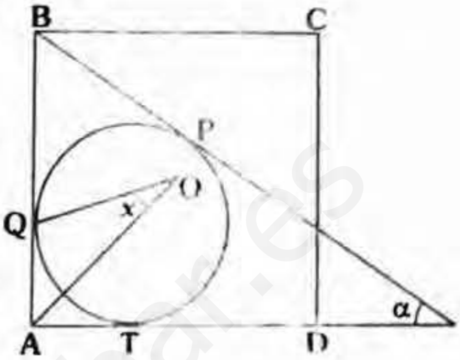
Se tiene el cuadrado ABCD en el cual se traza interiormente las semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, en dichá semicircunferencia se ubica P talque PD=4 y $AB = 4\sqrt{3}$.
Calcule m∢CPD

A) 90° B) 100° C) 127°
D) 106° E) 112°30'

**PROBLEMA Nº 284**

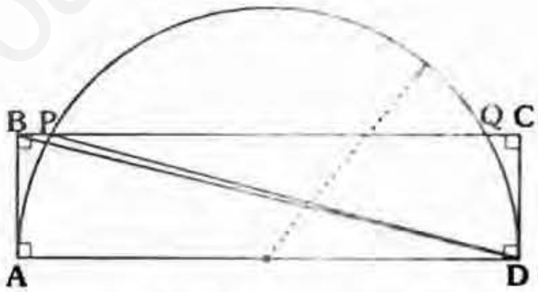
En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O, calcule "x", si P, Q y T son punto de tangencia.

A) α
B) 2α
C) 90°−α
D) $45° - \frac{\alpha}{2}$
E) 45°+α




**PROBLEMA Nº 285**

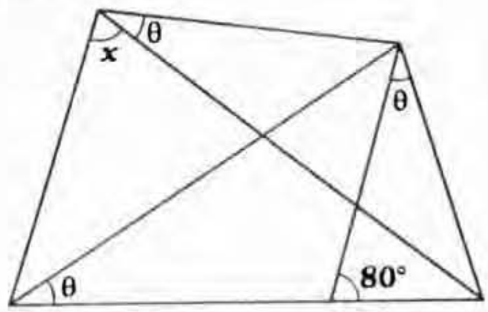
En el gráfico, $m\widehat{PQ} = 120°$. Calcule m∢BDP.




A) 1° B) 2° C) 5°
D) 7,5° E) 3,75°

**PROBLEMA Nº 286**

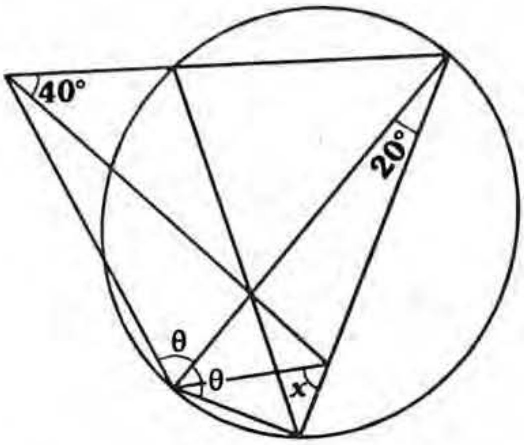
Calcule "x", es:




A) 70° B) 75° C) 80°
D) 40° E) 50°

**PROBLEMA Nº 287**

En el gráfico, calcule "x".

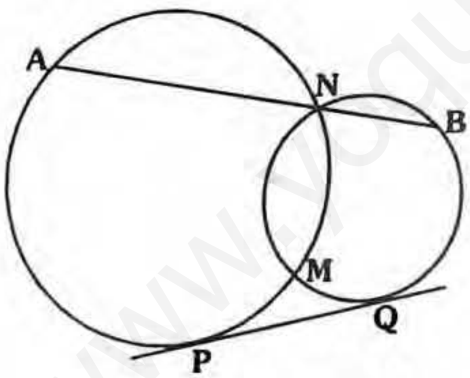



A) 20° B) 60° C) 30°
D) 40° E) 80°

**PROBLEMA Nº 288**

En el gráfico, $m\widehat{AN} = 2(m\widehat{PM})$.

Calcule $\dfrac{PQ}{AB}$.




A) $\dfrac{1}{2}$ B) 2 C) $\dfrac{2}{3}$

D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

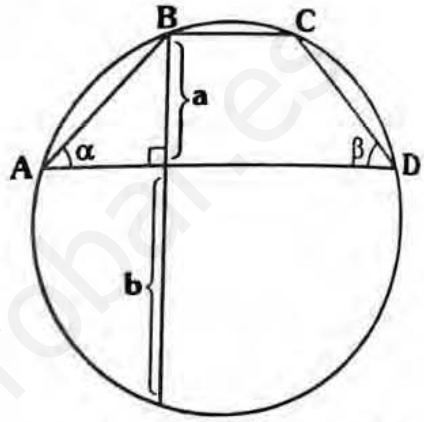
**PROBLEMA Nº 289**

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro) se traza una circunferencia tangente a $\overline{OB}$ en T y al arco AB en P. Si $3(TB) = 2(OT)$. Calcule $m\sphericalangle BAP$.

A) 37° B) 53° C) 14°
D) 23° E) 28°

**PROBLEMA Nº 290**

$\alpha + \beta = 90°$, entonces el valor de la longitud del segmento BC es:




A) a B) $\sqrt{b^2 - a^2}$

C) $b - a$ D) $\dfrac{a+b}{4}$

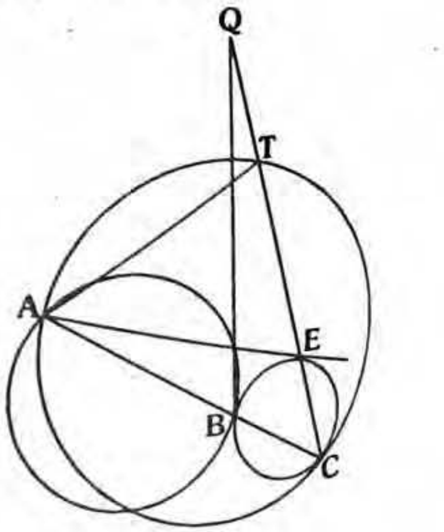
E) $\dfrac{b}{3}$

**PROBLEMA Nº 291**

Según la figura, calcule $m\sphericalangle TAE = 40°$ y $m\sphericalangle EAC = 15°$.

(B, E, C son puntos de tangencia).

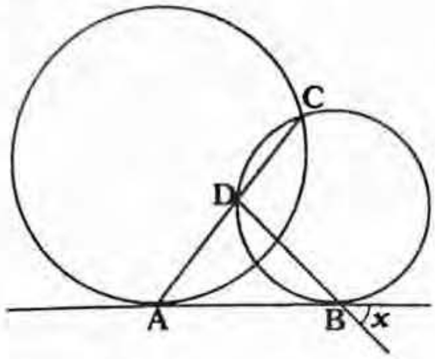
A) 40°
B) 20°
C) 15°
D) 30°
E) 60°



**PROBLEMA Nº 292**

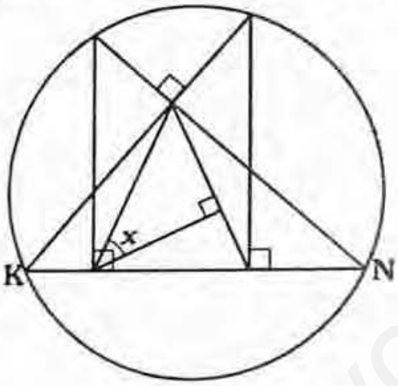
Según la figura las circunferencias son ortogonales A y B son puntos de tangencia. Calcule el valor de "x".

A) 75°
B) 60°
C) 45°
D) 40°
E) 30°




**PROBLEMA Nº 293**

En el gráfico, $m\overset{\frown}{KN}=\phi$. Calcule "x".

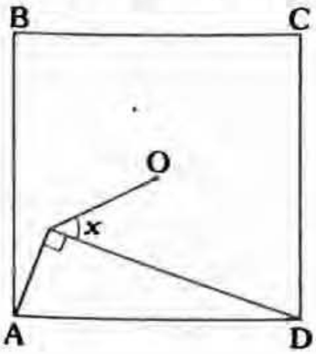



A) $180°-\phi$
B) $\phi-90°$
C) $\phi-60°$
D) $\phi-75°$
E) $\phi-45°$

**PROBLEMA Nº 294**

O es centro del cuadrado ABCD, calcule "x".

A) 60°
B) 53°
C) 45°
D) 30°
E) 37°



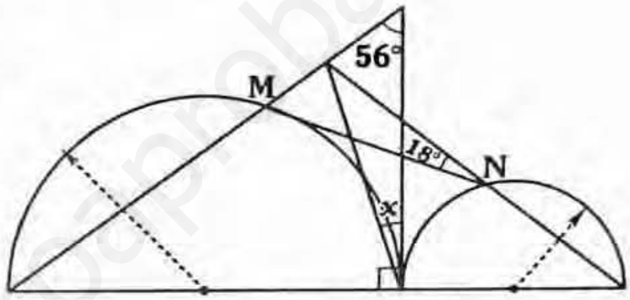

**PROBLEMA Nº 295**

Se tiene dos circunferencia coplanares de radios 7 y15 y su distancia de centros es 20. Calcule la medida del ángulo entre dichas circunferencias.

A) 30°
B) 60°
C) 37°
D) 53°
E) 74°

**PROBLEMA Nº 296**

En el gráfico, calcule "x".

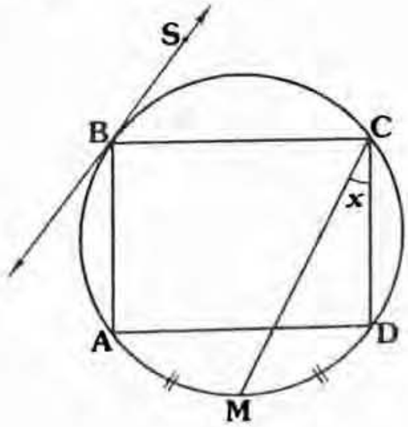



A) 18°
B) 16°
C) 14°
D) 12°
E) 20°

**PROBLEMA Nº 297**

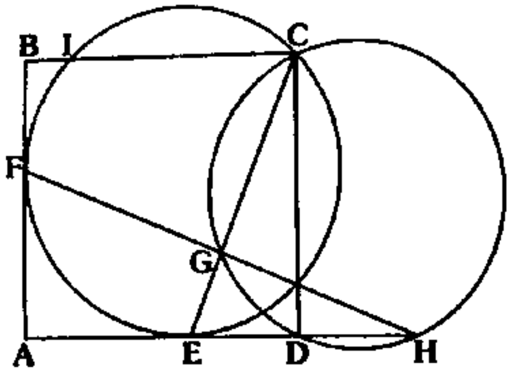
Se tiene un rectángulo ABCD inscrito en una circunferencia de manera que la recta tangente trazada por B es paralela a la recta que pasa por C y M punto medio del arco AD. Calcule x.

A) 53°
B) 30°
C) 37°
D) 60°
E) 45°



**PROBLEMA Nº 298**

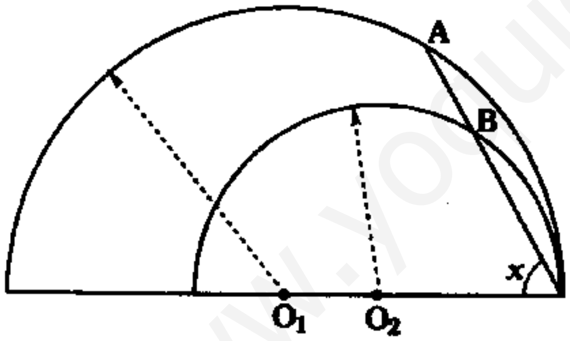
Calcular $m\widehat{IC}$, ABCD: rectángulo, E y F son puntos de tangencia.




A) 45°  B) 60°  C) 90°
D) 120°  E) 75°

**PROBLEMA Nº 299**

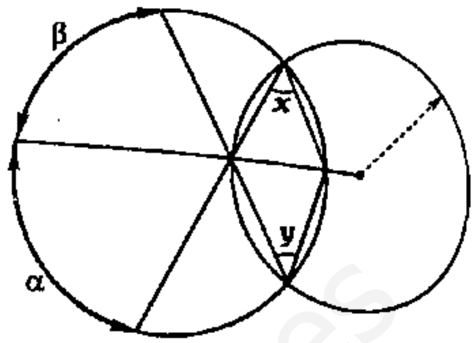
Si: $O_1O_2 = AB$, calcule "x".




A) 45°  B) 60°  C) 53°
D) 37°  E) 75°

**PROBLEMA Nº 300**

Calcule $x-y$ en función de $\alpha$ y $\beta$.




A) $\alpha-\beta$  B) $\alpha+\beta$
C) $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$  D) $90°-(\alpha+\beta)$
E) $180°-(\alpha+\beta)$

# Geometría

# SOLUCIONARIO

- Anual
- Cepre Uni
- Semestral
- Semestral Intensivo
- Repaso

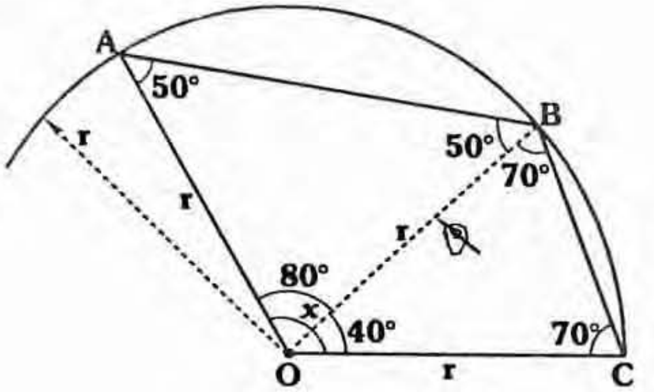


## CIRCUNFERENCIA

# Solucionario

## Ciclo Anual

**RESOLUCIÓN Nº 1**




Nos piden "$x$".

- Por definición de circunferencia:

$$AO = BO = CO$$

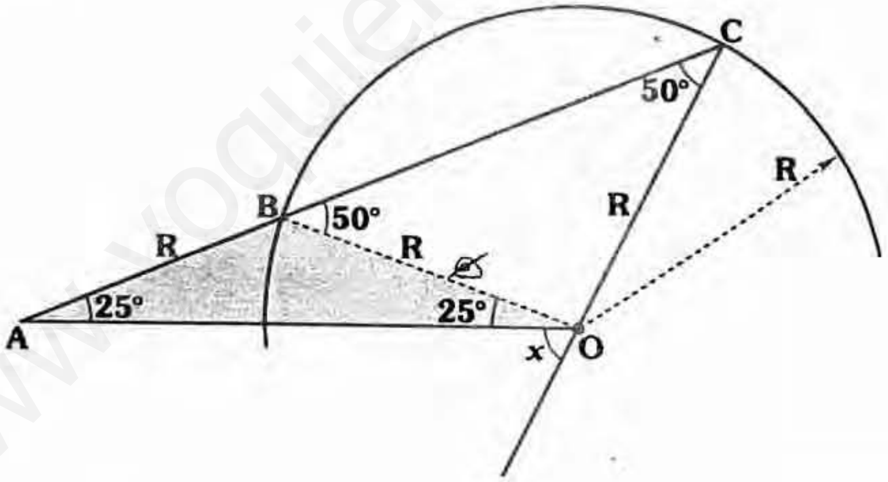
$\Rightarrow$ $\Delta AOB$ y $\Delta BOC$ son isósceles

$$x = 80° + 40°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 120°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 2**




Nos piden "$x$".

- Por definición: $OB = R \Rightarrow \Delta ABO$ y $\Delta BOC$ son isósceles entonces:

$$m\measuredangle AOB = 25° \quad \text{y} \quad m\measuredangle OBC = m\measuredangle BCO = 50°$$

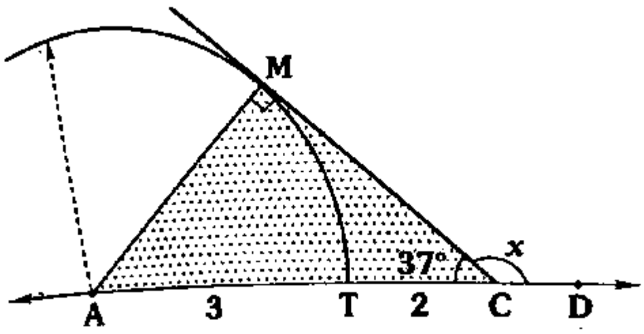
- En $\Delta AOC$: por ángulo exterior:

$$x = 50° + 25°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 75°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 3




Nos piden "$x$".

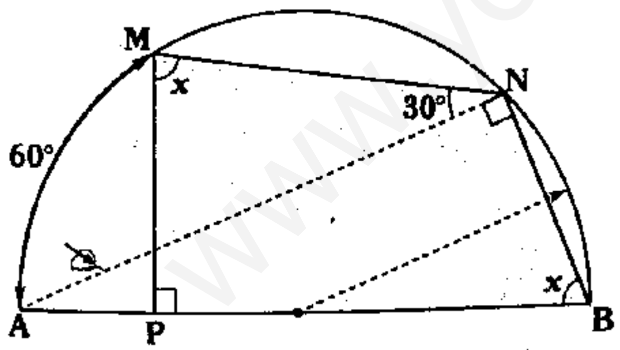
- Al unir "A" con "M" tendremos: $\overline{AM} \perp \overline{MC}$
- ⊿AMC: notable de 37°

$$\Rightarrow \quad x+37°=180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=143°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 4




Nos piden "$x$".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ANM=30°$$

- En la semicircunferencia:

$$m\measuredangle ANB=90°$$

- En el cuadrilátero PBNM:

$$x+90°+x+120°=360°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=75°}$$

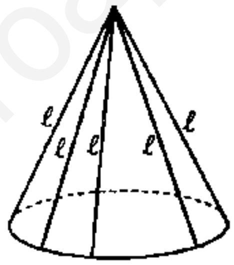
**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 5

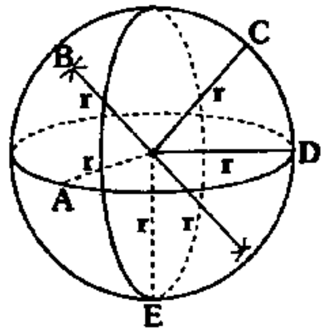
Analizando cada proposición:

I) **FALSO**

Los puntos deben estar en el mismo plano, pues también tenemos las siguientes figuras cumplen la definición:

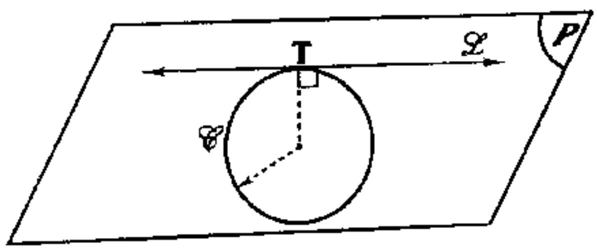



**Superficie lateral del cono**



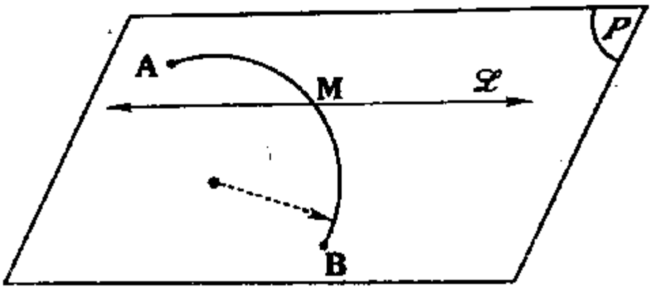

**Superficie esférica**

II) **VERDADERO**




Por definición, una recta es tangente ($\mathscr{L}$) a una circunferencia ($\mathscr{C}$) si está en el mismo plano y la intersección es un solo punto (T).

III) FALSO

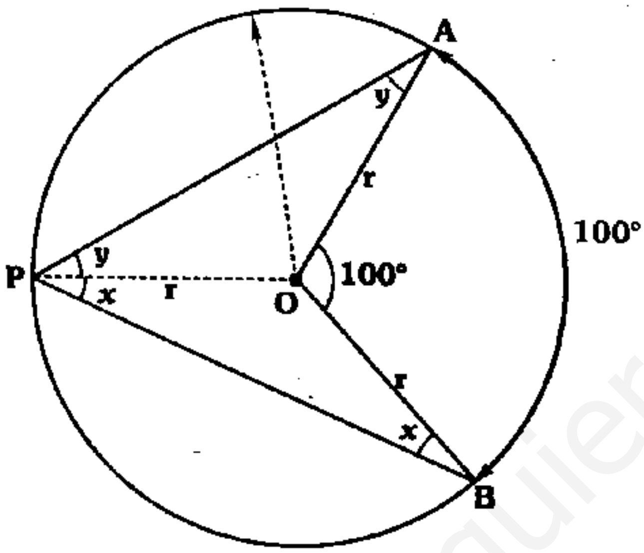



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap \overset{\frown}{AB} = \{M\}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ no es tangente al arco AB.

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 6**




Nos piden: $x+y$

- Por ángulo central:

$$m\sphericalangle AOB = 100°$$

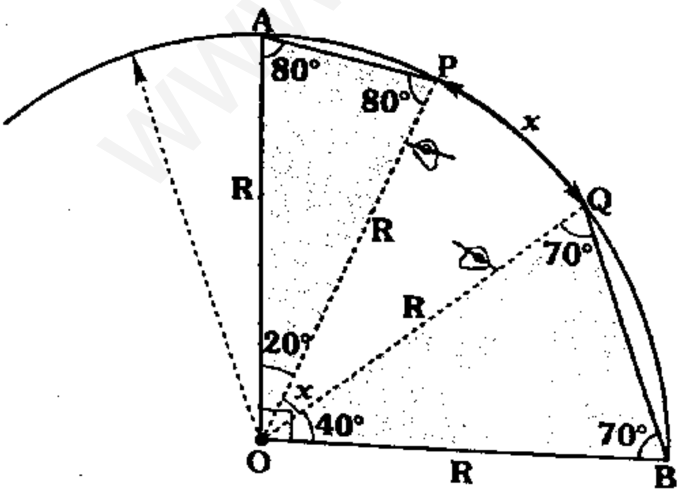
- En el $\measuredangle$AOB:

$$2x + 2y = 100°$$

$$\therefore\ \mathbf{x + y = 50°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 7**




Nos piden "$x$"

- Por ángulo central:

$$m\sphericalangle POQ = x$$

- $\Delta AOP$ y $\Delta QOB$ : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle AOP = 20° \quad y$$

$$m\sphericalangle QOP = 40°$$

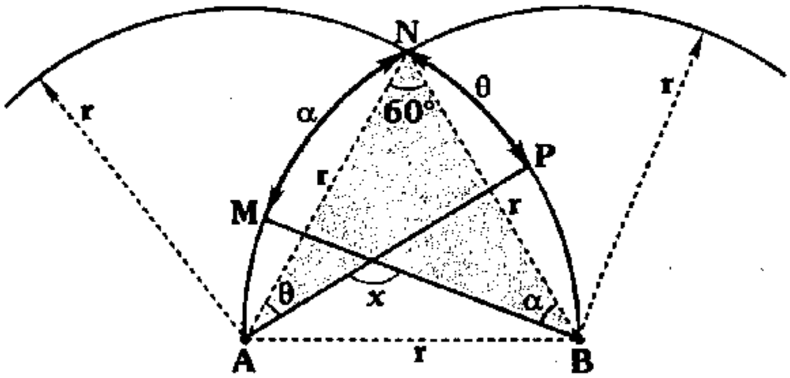
- Como:

$$x + 20° + 40° = 90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 8**




Nos piden "x"

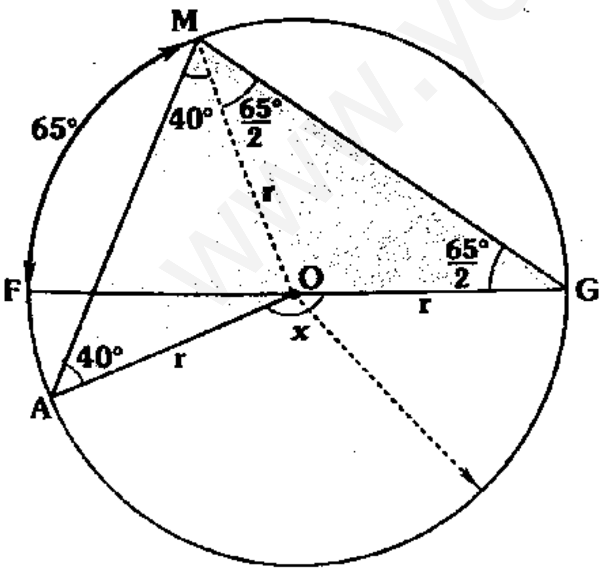
Dato: $\alpha+\theta=50^\circ$

- Por ángulo central: $m\sphericalangle NAP=\theta$ y $m\sphericalangle MBN=\alpha$
- $\Delta ANB$: equilátero
- En el cuadrilátero cóncavo: $x=60^\circ+\underbrace{\alpha+\theta}_{50^\circ}$

$$\therefore\ \mathbf{x=110^\circ}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 9**




Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle FGM=\frac{65^\circ}{2}$$

- Como AO=MO=OG

$\Rightarrow \Delta AOM$ y $\Delta MOG$: isósceles

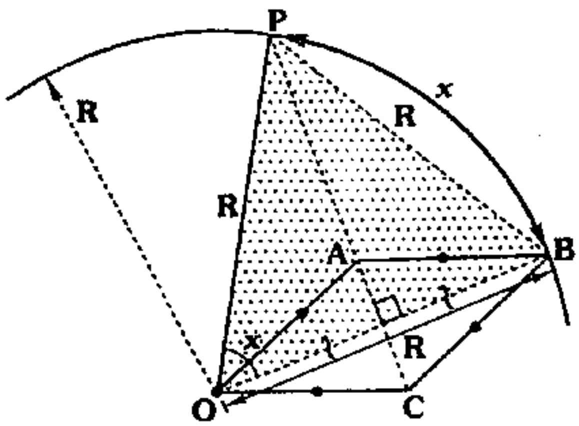
- En $\measuredangle$AOGM:

$$x=40^\circ+40^\circ+\frac{65^\circ}{2}+\frac{65^\circ}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=145^\circ}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 10



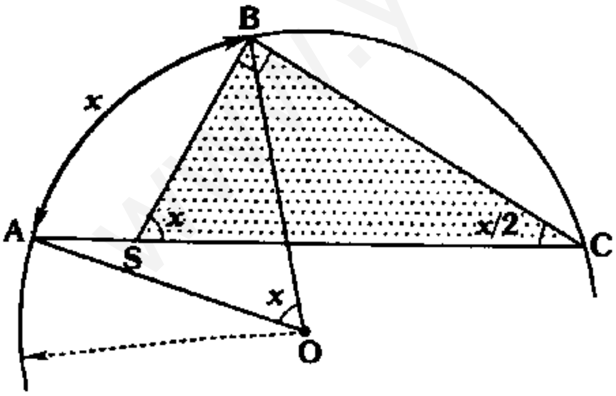

Piden "x".

- Por ángulo central $m\sphericalangle POB = x$
- Como OABC es un rombo entonces $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ entonces $\overleftrightarrow{PC}$ es mediatriz de $\overline{OB}$ entonces PB=PO=R.
- $\Delta OPB$: equilátero

$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 11



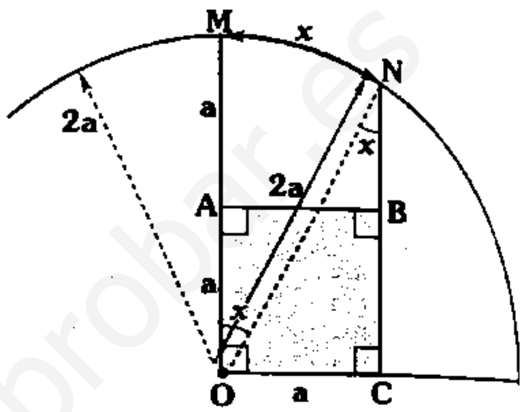

Piden "x".

- Por ángulo central: $m\widehat{AB} = x$
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle ACB = \dfrac{x}{2}$
- En ⊿SBC: $x + \dfrac{x}{2} = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 12




Piden "x".

- Dato: OA=AM
- Sea OA=OC=a $\Rightarrow$ ON=2a
- Por ángulo central:

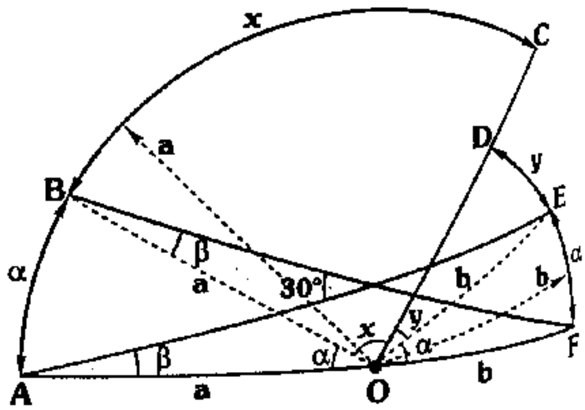
$$m\sphericalangle MON = x$$

- En ⊿OCN: notable

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 13



Piden $x+y$

- Dato: $m\widehat{AB}=m\widehat{EF}$
- Por ángulo central:

$$m\measuredangle AOB=m\measuredangle FOE=\alpha$$

- $\Delta AOE\cong\Delta BOF$ (LAL)

$$\Rightarrow\ m\measuredangle DAE=m\measuredangle OBF=\beta$$

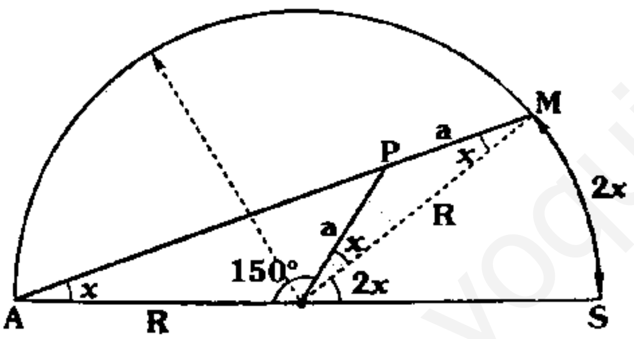
- En $\rtimes$: $\alpha+\beta=30°+\beta\ \Rightarrow\ \alpha=30°$
- En "O":

$$x+y+2\alpha=180°$$

$$\therefore\quad \mathbf{x+y=120°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 14**




Nos piden: $m\widehat{MS}$

- Sea :

$$m\measuredangle SAM=x\ \Rightarrow\ m\measuredangle OMA=x$$

- $\Delta OPM$: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MOP=x$
- En O: $150°+3x=180°$

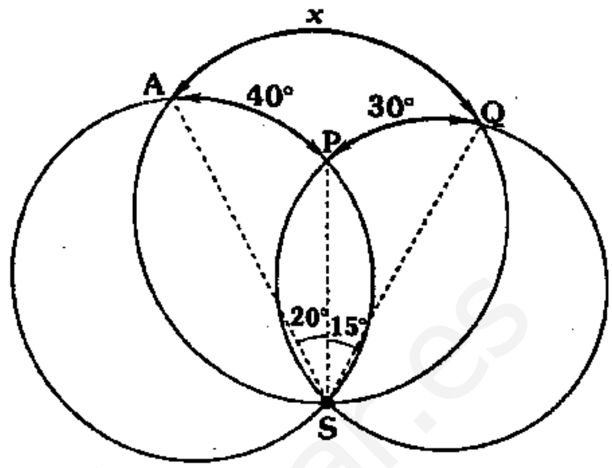
$$\Rightarrow\quad x=10°$$

- Como: $m\widehat{MS}=2x$

$$\therefore\quad \mathbf{m\widehat{MS}=20°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 15**




Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ASP=20°\quad y$$

$$m\measuredangle PSQ=15°$$

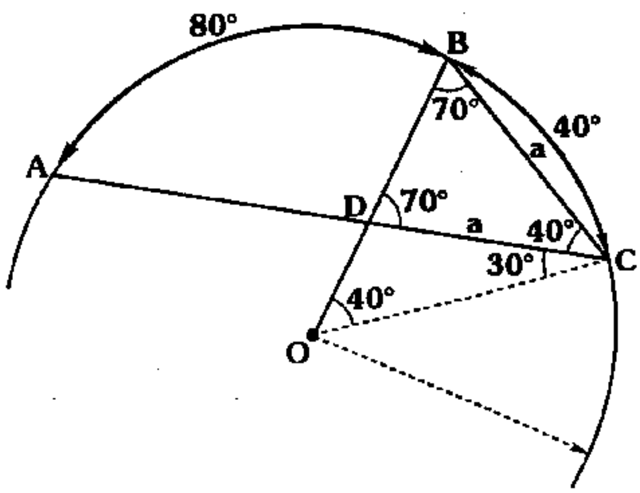
$$\Rightarrow\ m\measuredangle ASQ=35°$$

- Finalmente, por ángulo inscrito en $\mathscr{C}$ :

$$\mathbf{x=2(35°)=70°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 16**



Piden: $m\widehat{ABC}$

- $\Delta BCD$ y $\Delta OBC$ : isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle DBC = m\measuredangle BDC = 70° \Rightarrow m\measuredangle DCO = 30°$ y $m\measuredangle BOC = 40°$

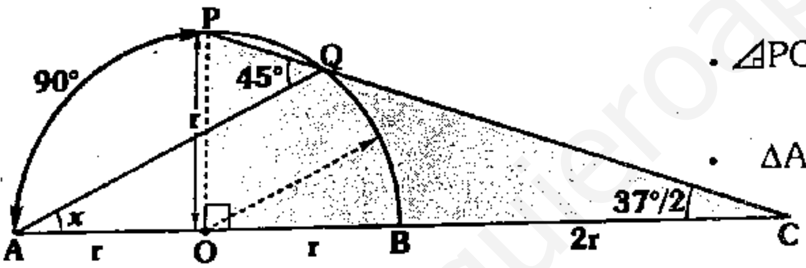
- Por ángulo central: $m\widehat{BC} = 40°$
- Por ángulo inscrito: $m\widehat{AB} = 80°$

$\Rightarrow m\widehat{ABC} = 80° + 40°$

$\therefore$ $\mathbf{m\widehat{ABC} = 120°}$

Clave B

**RESOLUCIÓN Nº 17**



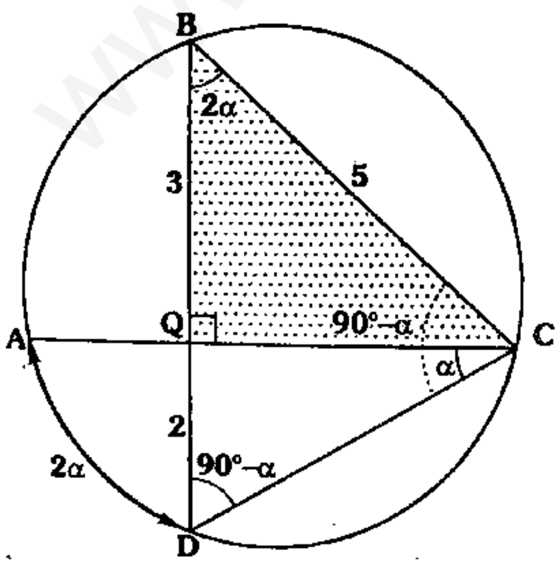

Piden "$x$".

- Dato: $m\widehat{AP} = m\widehat{PQB} \Rightarrow \overline{PO} \perp \overline{AB}$
- $⊿POC$: notable $\Rightarrow m\measuredangle PCO = \dfrac{37°}{2}$
- $\Delta AQC$ : $x + \dfrac{37°}{2} = 45°$

$\therefore$ $\mathbf{x = \dfrac{53°}{2} = 26°30'}$

Clave D

**RESOLUCIÓN Nº 18**




Nos piden $m\widehat{AD}$

- Sea $m\widehat{AD} = 2\alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle ACD = \alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle BDC = 90° - \alpha$

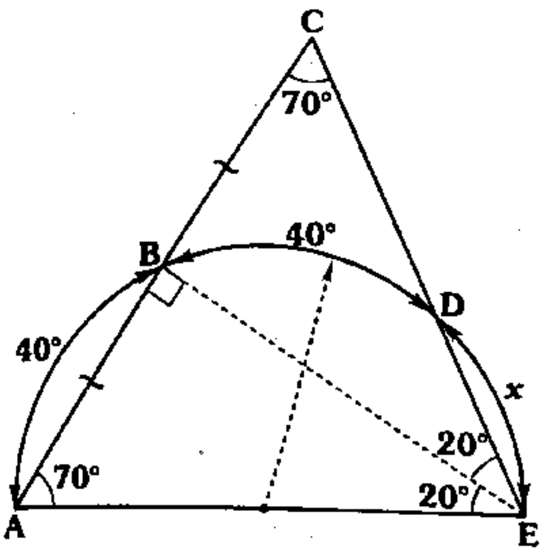
- $\Delta DBC$ : isósceles, entonces $DB = BC = 5$
- $⊿BQC$: notable

$2\alpha = 53°$

$\therefore$ $\mathbf{m\widehat{AD} = 53°}$

Clave B

**RESOLUCIÓN Nº 19**




Piden "x".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle ABE = 90°$$

- Como $AB=BC$ entonces:

$$\Delta AEC \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow \overline{EB} \text{ también es bisectriz}$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BD} = 40°$$

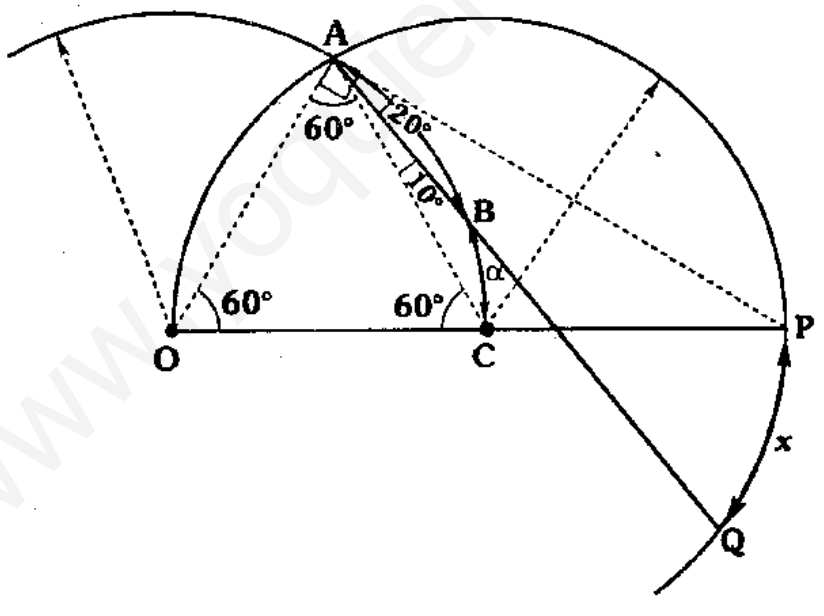
- Finalmente:

$$x + 40° + 40° = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 100°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 20**




Piden "x".

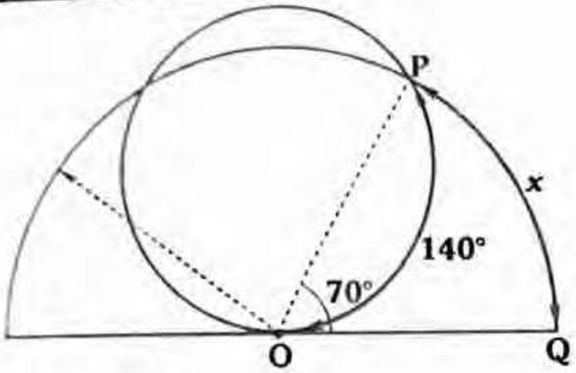
- Dato: $m\widehat{AB} = 2m\widehat{BC} = 2\alpha$
- Notemos que el $\Delta OAC$ es equilátero entonces: $\alpha + 2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 20°$
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle CAB = 10°$

$$m\sphericalangle BAP = 20°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 40°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 21**




Nos piden "x".

- Como $m\overset{\frown}{OP}=140°$ entonces por ángulo semiinscrito:

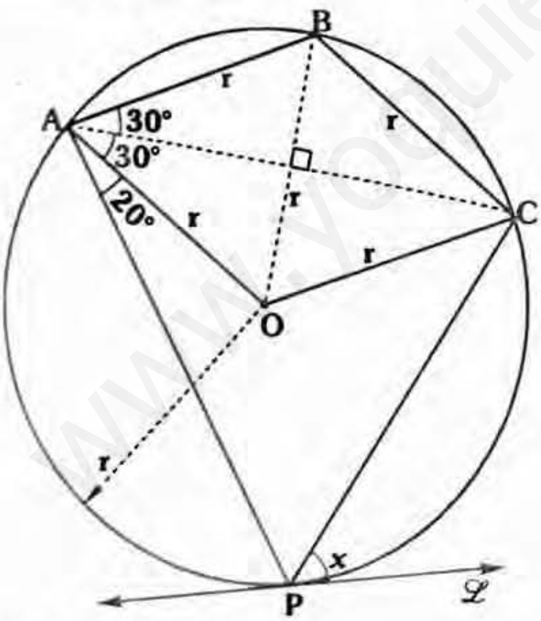
$$m\sphericalangle POQ=70°$$

- Por ángulo central:

$$\boldsymbol{x=70°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 22**




Piden "x".

- Como ABCO es un paralelogramo entonces AB=r y BC=r, es decir los triángulos AOB y OBS son equiláteros (ABCO *sería un rombo*).

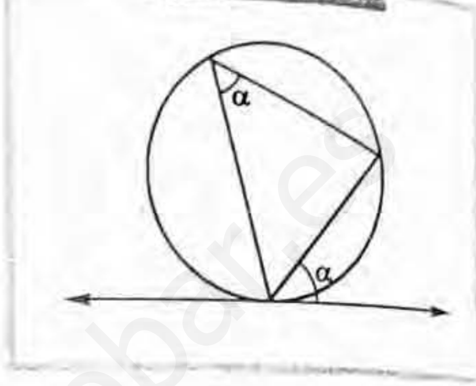
$$\Rightarrow\ m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle AOC=30°$$

- De la observación:

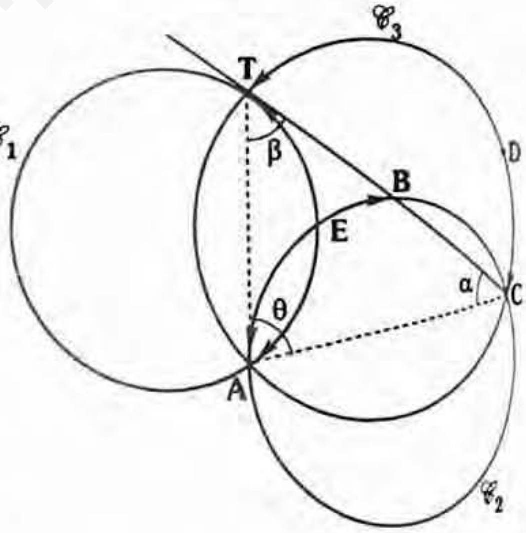
$$\boldsymbol{x=50°}$$

**Clave D**

*Observación*




**RESOLUCIÓN Nº 23**




Nos piden: $m\overset{\frown}{TDC}+m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{AET}$

- En $\mathscr{C}_1$, por ángulo semiinscrito:

$$m\overset{\frown}{AET}=2\beta$$

- En $\mathscr{C}_2$, por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{AB}=2\alpha$$

- En $\mathscr{C}_3$, por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{TDC}=2\theta$$

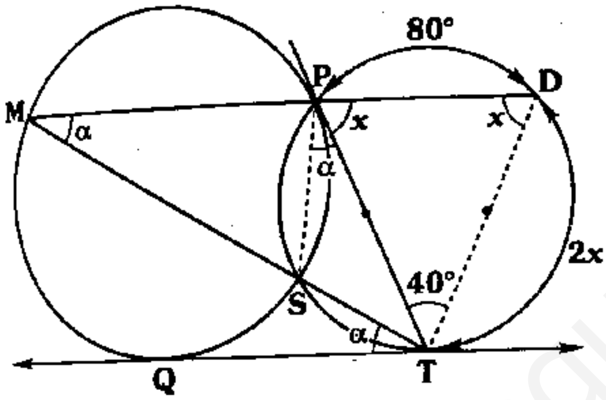
- En el $\Delta ATC$: $\alpha+\beta+\theta=180°$

$$\Rightarrow m\widehat{TDC}+m\widehat{AB}+m\widehat{AET}=\underbrace{2\theta+2\alpha+2\beta}_{2(\alpha+\theta+\beta)}$$

$$\therefore\ m\widehat{TDC}+m\widehat{AB}+m\widehat{AET}=360°$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 24




Piden: $m\widehat{TD}$

- Sea:

$$m\sphericalangle STQ=\alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle SPT=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle PMS=\alpha$$

$$\Rightarrow \overline{MP}//\overline{QT} \Rightarrow TP=TD$$

- $\Delta PTD$: isósceles

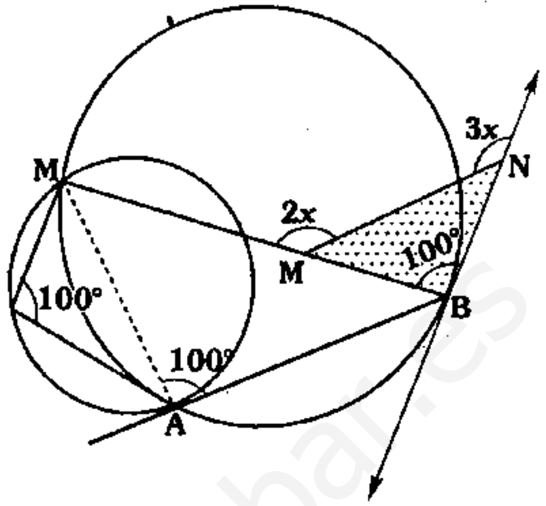
$$\Rightarrow x=70°$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{TD}=2x=140°$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 25




Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle MAB=100°$$

$$m\sphericalangle MBN=100°$$

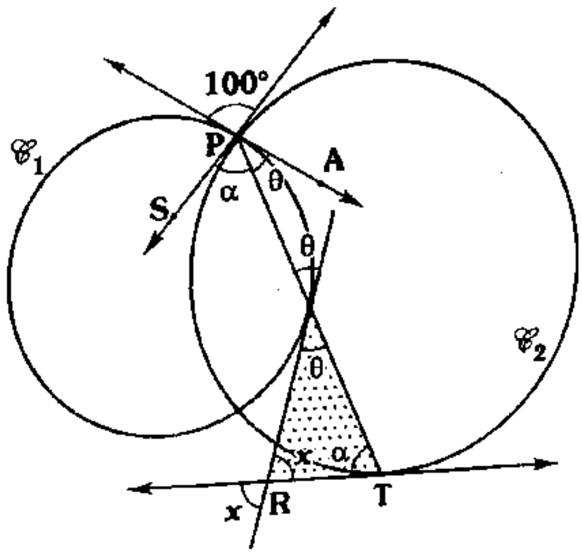
- En el $\Delta MBN$, por propiedad:

$$2x+3x=180°+100°$$

$$\therefore\ x=56°$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 26



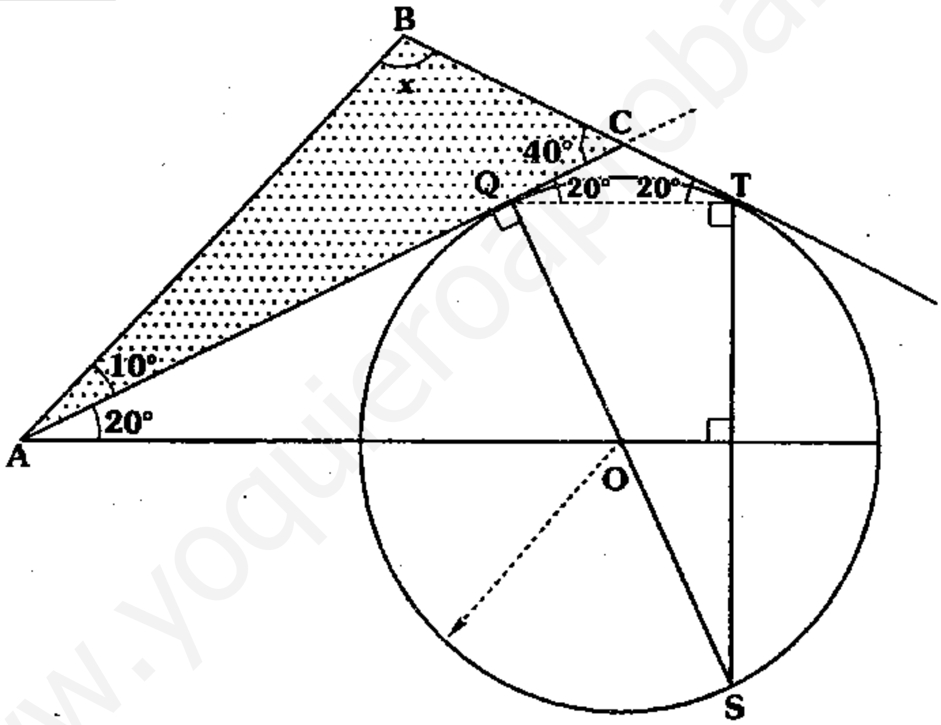
Piden "x".

- En $\mathscr{C}_1$ : $m\sphericalangle APQ = m\sphericalangle BQP = \theta$
- En $\mathscr{C}_2$ : $m\sphericalangle SPT = m\sphericalangle PTR = \alpha$
- Como $\alpha+\theta=100°$ $\Rightarrow$ en $\Delta RQT$: $x+\underbrace{\alpha+\theta}_{100°}=180°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=80°}$$

Clave D

**RESOLUCIÓN Nº 27**




Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle OQA=90° \ \text{ y } \ m\sphericalangle QTS=90° \ \text{ entonces } \ \overleftrightarrow{QT} \parallel \overrightarrow{AO}$$

Luego:

$$m\sphericalangle CQT = m\sphericalangle QTC = 20°$$

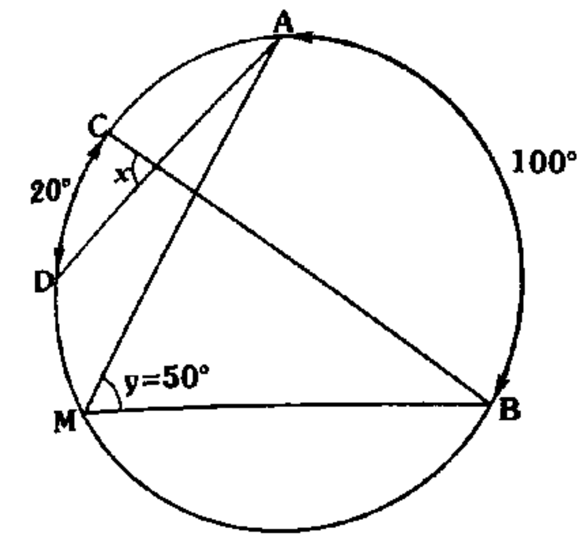
- En $\Delta ABC$:

$$x+10°+40°=180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=130°}$$

Clave C

**RESOLUCIÓN Nº 28**




Nos piden $x+y$

- Por ángulo inscrito:

$$y=50°$$

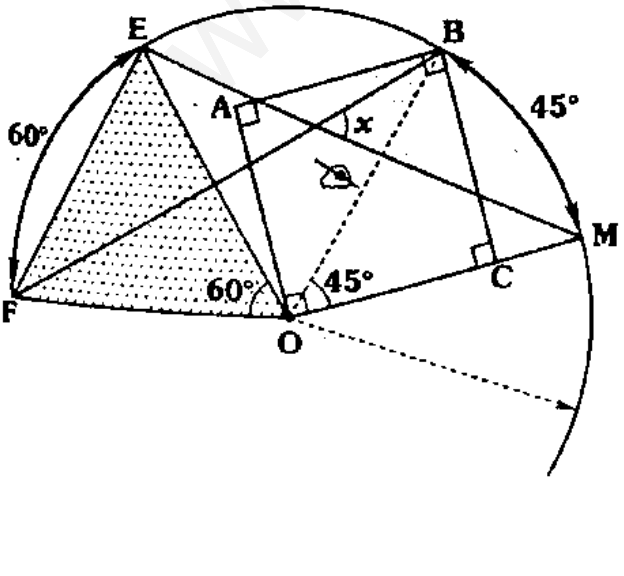
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{100°+20°}{2}=60°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+y=110°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 29**




Piden "$x$".

- Como el $\Delta EOF$ es equilátero

$$\Rightarrow\ m\overset{\frown}{EF}=60°$$

- Como OABC es un cuadrado

$$\Rightarrow\ m\overset{\frown}{BM}=45°$$

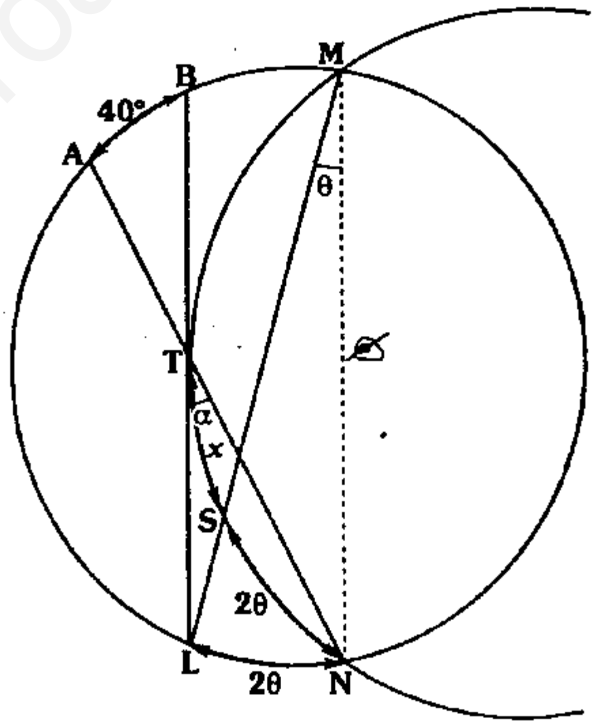
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{60°+45°}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=52{,}5°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 30**




Nos piden $m\overset{\frown}{TS}$

- Sea $m\overset{\frown}{TS}=x$
- Sea: $m\measuredangle LMN=\theta$

$$\Rightarrow m\overset{\frown}{SN}=2\theta \quad y \quad m\overset{\frown}{LN}=2\theta$$

- Por ángulo interior: $\alpha=\dfrac{40^\circ+2\theta}{2}$

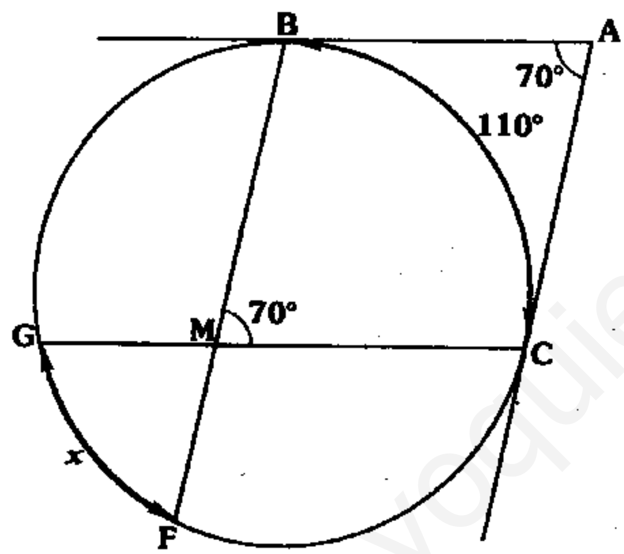
- Por ángulo semiinscrito: $\alpha=\dfrac{x+2\theta}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+2\theta}{2}=\frac{40^\circ+2\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=40^\circ}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 31**




Nos piden "x".

- Como $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes entonces: $m\overset{\frown}{BC}=110^\circ$
- MBAC: paralelogramo entonces:

$$m\measuredangle BMC=70^\circ$$

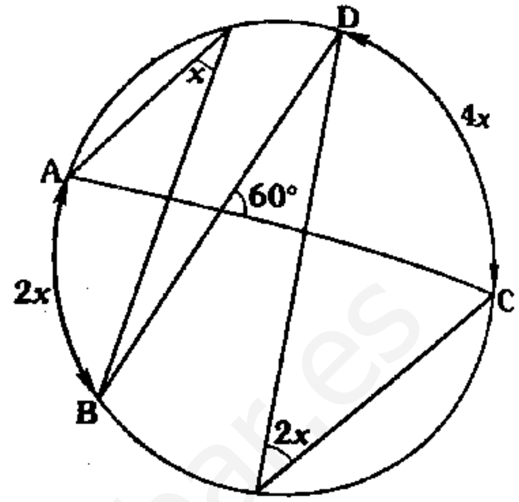
- Por ángulo interior:

$$70^\circ=\frac{x+110^\circ}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=30^\circ}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 32**




Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{AB}=2x \qquad y$$

$$m\overset{\frown}{CD}=4x$$

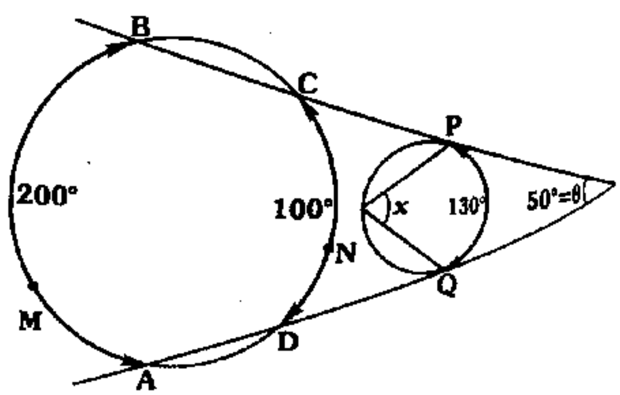
- Por ángulo interior:

$$60^\circ=\frac{2x+4x}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=20^\circ}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 33**



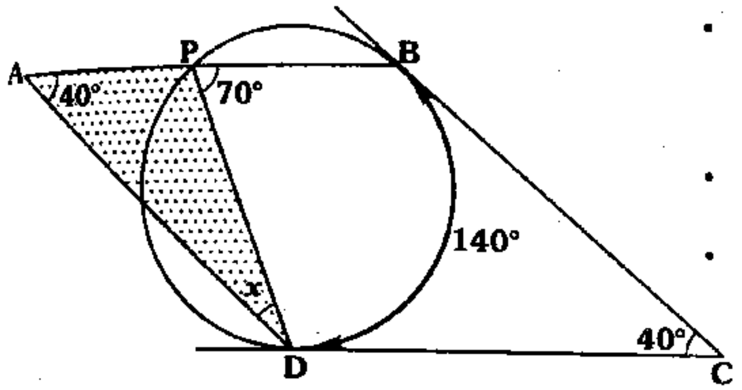

Piden "x".

- Por ángulo exterior: $\theta = \dfrac{200^\circ - 100^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow m\widehat{PQ} = 130^\circ$

- Por ángulo inscrito: $x = \dfrac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 34**




Nos piden "x".

- Como ABCD es un paralelogramo:

$$m\sphericalangle DAB = m\sphericalangle BCD = 40^\circ$$

- $m\widehat{BD} = 140^\circ \Rightarrow m\sphericalangle DPB = 70^\circ$

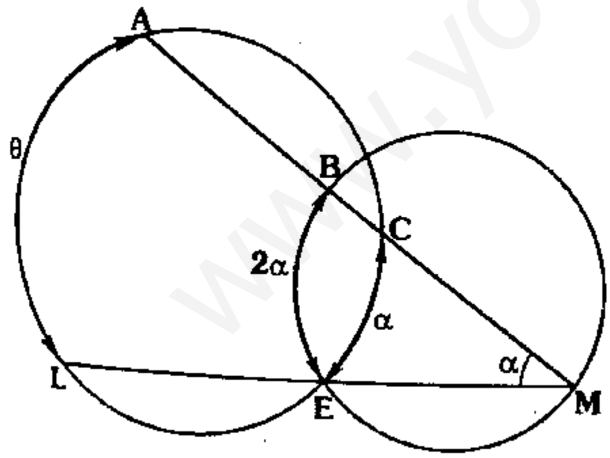
- En $\Delta APD$:

$$x + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30^\circ}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 35**




Nos piden $m\widehat{BE}$

- Dato: $m\widehat{BE} = 2\left(m\widehat{EC}\right)$ y

$$m\widehat{AL} + m\widehat{BE} + m\widehat{EC} = 240^\circ$$

- Sea $m\sphericalangle EMB = \alpha \Rightarrow m\widehat{BE} = 2\alpha$

  del dato: $m\widehat{EC} = \alpha$

- Por ángulo exterior:

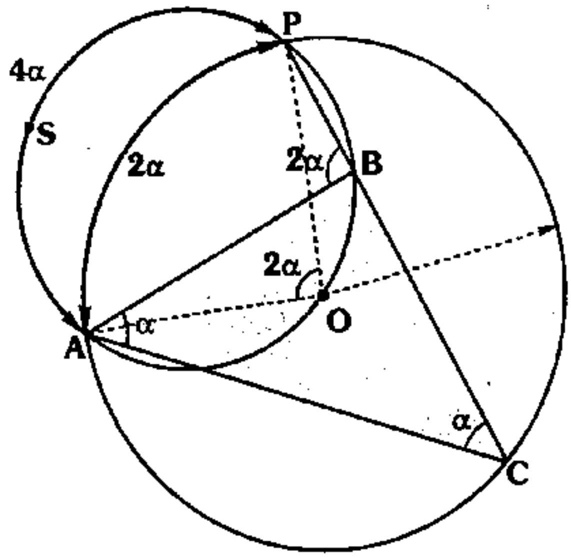
$$\frac{\theta - \alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \theta = 3\alpha$$

- Del segundo dato: $3\alpha + 2\alpha + \alpha = 240^\circ \rightarrow \alpha = 40^\circ$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{BE} = 80^\circ}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 36**




Nos piden analizar que tipo de triángulo e ABC.

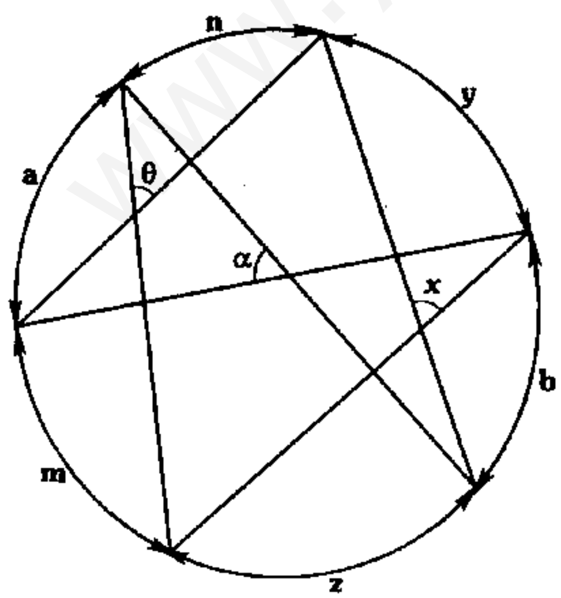
- Sea $m\measuredangle ACB=\alpha \Rightarrow m\measuredangle AOP=2\alpha$

  y $m\measuredangle ABP=2\alpha \Rightarrow m\measuredangle BAC=\alpha$

Es decir ABC es un triángulo isósceles.

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 37**




Nos piden "x".

- Dato: $\alpha+\theta=100°$
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{y+z}{2} \Rightarrow 2x=y+z$$

$$\alpha=\frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\alpha=a+b$$

$$\theta=\frac{m+n}{2} \Rightarrow 2\theta=m+n$$

- Como:

$$\underbrace{y+z+a+b+m+n}_{2x+2\alpha+2\theta}=360°$$

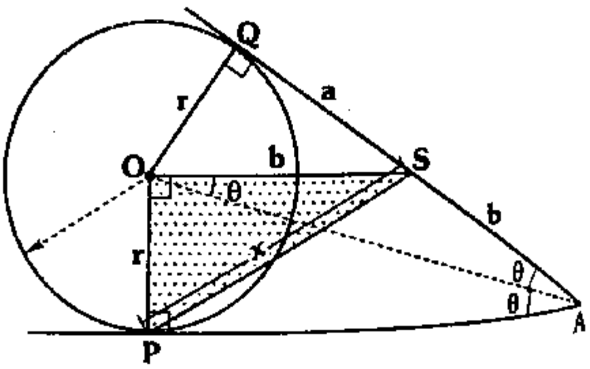
$$2x+2\alpha+2\theta=360°$$

$$\Rightarrow x+\underbrace{\alpha+\theta}_{100}=180°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x=80°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 38**




Piden "x" en función de a y b.

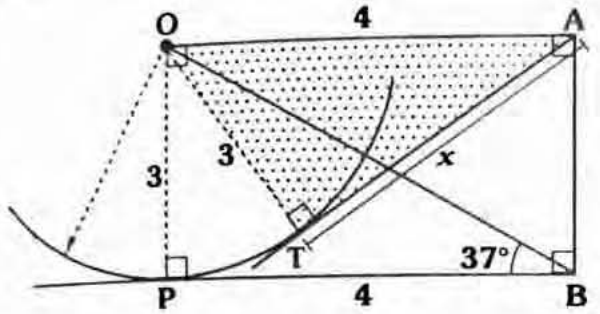
- Por propiedad $\overline{AO}$ es bisectriz del $\measuredangle PAQ$
- $\triangle AOS$: isósceles entonces $OS=SA=b$
- En ⊿SOP: $x^2=r^2+b^2$
- En ⊿OQS: $r^2+a^2=b^2$

$$\Rightarrow \quad x^2+\cancel{y^2}+a^2=\cancel{y^2}+2b^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\sqrt{2b^2-a^2}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 39**




Nos piden "x".

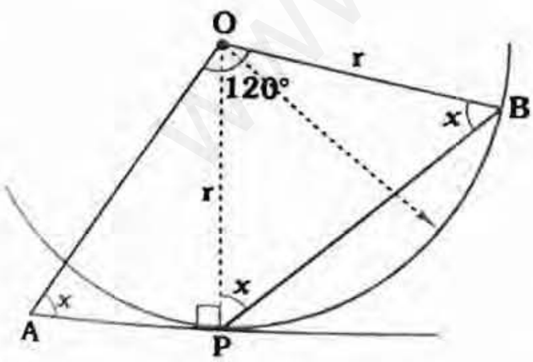
- Por propiedad $\overline{OP} \perp \overline{PD}$
- OPBA: rectángulo
- ⊿OTA: triángulo rectángulo

$$\Rightarrow \quad x^2+3^2=4^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\sqrt{7}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 40**




- Nos piden "x".
- Por propiedad: $m\measuredangle APO=90°$
- En el $\Delta$OPB : isósceles tendremos:

$$m\measuredangle OPB=m\measuredangle PBO=x$$

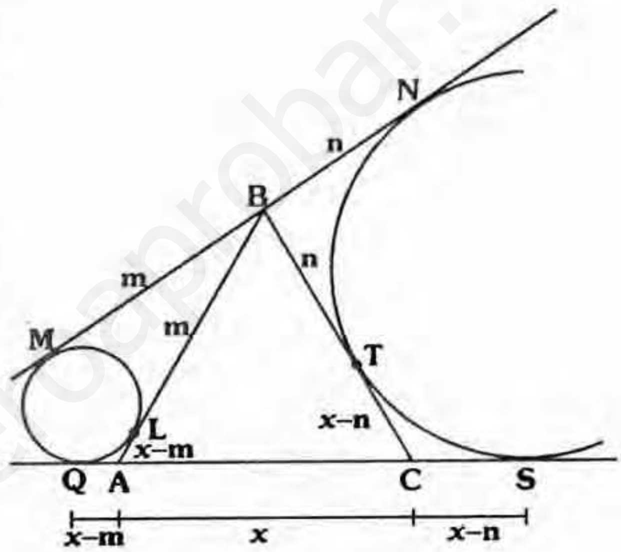
- En el ⌂AOBP:

$$3x+90°+120°=360°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=50°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 41**




Nos piden: $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{m+n}{x}$

- Sea :

$$MB=m \text{ y } BN=n \Rightarrow MN=m+n$$

- AB=$x$ entonces:

$$AL=x-m=QA \qquad \text{y}$$

$$CT=x-n=CS$$

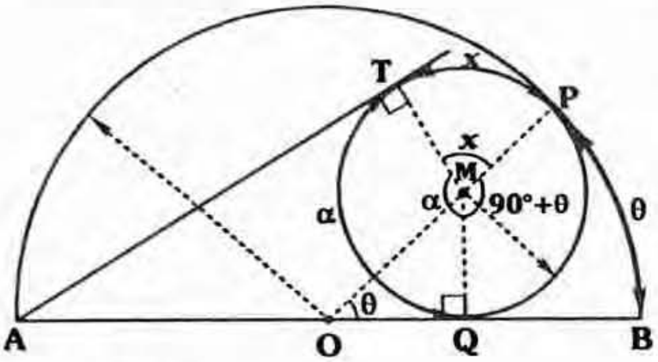
- Como QS=MN

$$\Rightarrow \quad 3x-m-n=m+n \Rightarrow 3x=2(m+n)$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{m+n}{x}=\frac{3}{2}=1{,}5}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 42**



Nos piden "x".

- Dato: $\alpha+\theta=200^\circ$
- Por ángulo central:

$$m\measuredangle POB=\theta \qquad y$$
$$m\measuredangle TMQ=\alpha$$

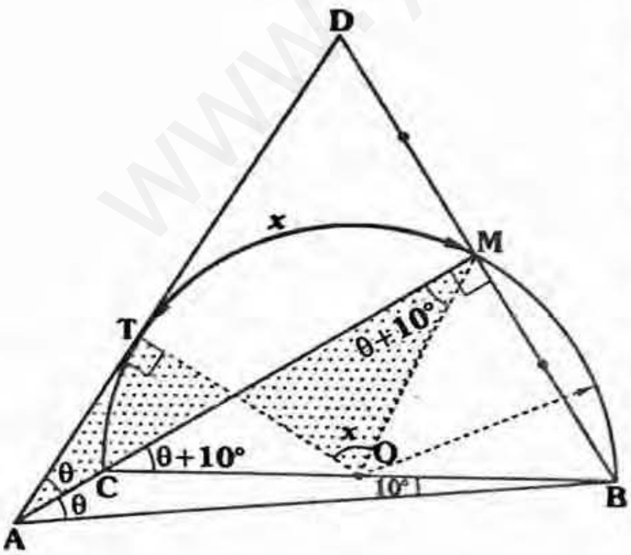
- En M:

$$x+\underbrace{\alpha+\theta}_{200}+90^\circ=360^\circ$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=70^\circ}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 43**



Piden "x".

- Por ángulo central $m\measuredangle MOT=x$
- Como BM=MD y $m\measuredangle CMB=90^\circ$

$$\Rightarrow\ \text{ABD: isósceles}$$

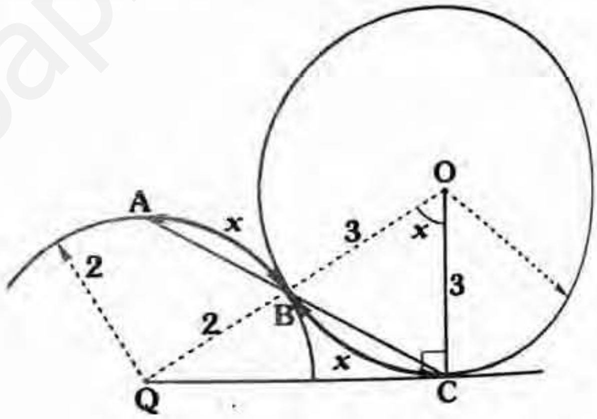
- $\Delta$COM: isósceles
- En la región sombreada:

$$x+\theta+10^\circ=90^\circ+\theta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=80^\circ}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 44**



Piden "x".

- Por propiedad:

$$m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}$$

- Por ángulo central:

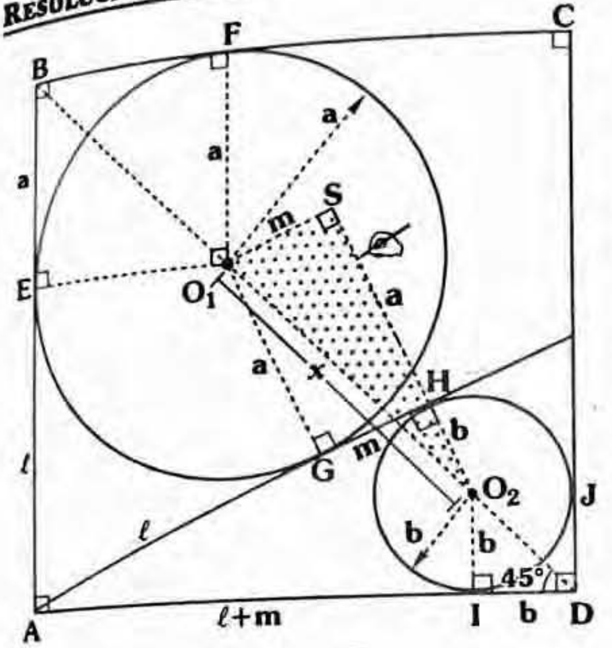
$$m\measuredangle BOC=x$$

- Q, B y O: colineales
- $\measuredangle$QCO: notable

$$\therefore\ \boldsymbol{x=53^\circ}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 45**



Piden "x".

- Dato: $a^2+b^2=100$
- Sea: $AE=\ell \Rightarrow AB=\ell+a$
- Se forma el triángulo rectángulo $O_1SO_2$ sus catetos miden: "m" y "a+b".
- Por propiedad AH=AI entonces $AI=\ell+m$
- Como AB=AD

$$\Rightarrow \cancel{\ell}+a=\cancel{\ell}+m+b$$

$$\Rightarrow m=a-b$$

- En $⊿ O_1SO_2$:

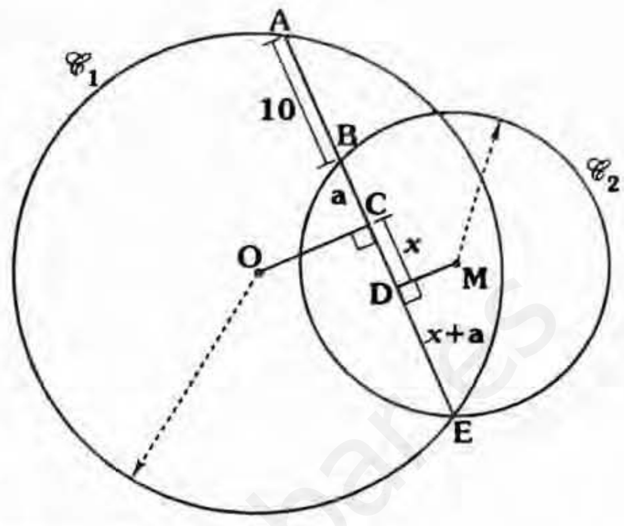
$$x^2=\underbrace{(a+b)^2+(a-b)^2}$$

$$x^2=2(a^2+b^2)=200$$

$\therefore$ $\mathbf{x=10\sqrt{2}}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 46**



Piden: "x".

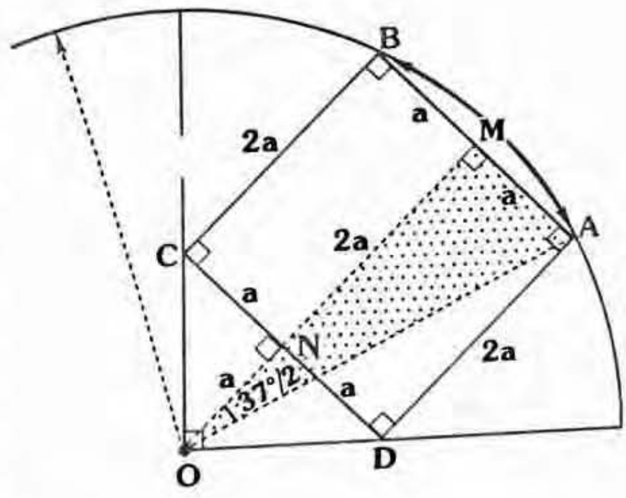
- En $\mathscr{C}_2$: BD=DE
- Sea BC=a $\Rightarrow$ DE=a+x
- En $\mathscr{C}_1$: AC=CE

$$\Rightarrow 10+\cancel{a}=2x+\cancel{a}$$

$\therefore$ $\mathbf{x=5}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 47**



Nos piden: "x".

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ (M en AB)

$\Rightarrow$ AM=MB=a $\Rightarrow$ CN=ND=a

- ⊿En ⊿DOC: como CN=ND=a

$\Rightarrow$ ON=a

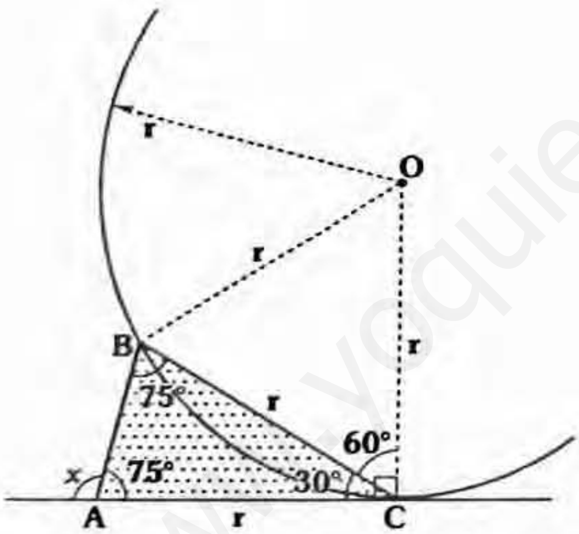
- ⊿OMA: notable:

$$\Rightarrow m\measuredangle MOA=\frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{AB}=37^\circ}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 48




Nos piden "x".

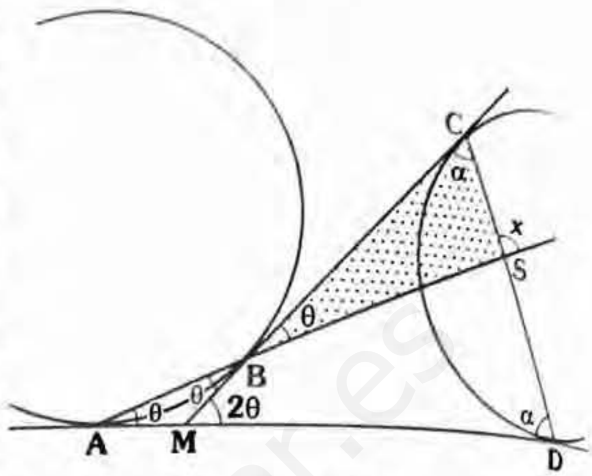
- $\overline{OC} \perp \overline{AC}$
- $\Delta$OBC: equilátero
- $\Delta$ABC: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle BAC=75^\circ$

$$\therefore\ \mathbf{x=105^\circ}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 49




- Por demostrar: $x=90^\circ$
- Sea $m\measuredangle MCD=\alpha$ y $m\measuredangle CBS=\theta$

$\Rightarrow x=\alpha+\theta$; $m\measuredangle MDC=\alpha$ y

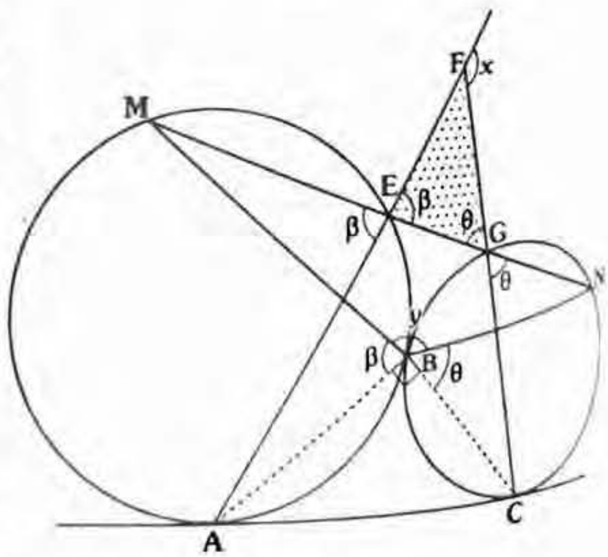
$m\measuredangle BAM=m\measuredangle ABM=\theta$

- En $\Delta$AMB: $m\measuredangle BMD=2\theta$
- En $\Delta$MCD: $2\alpha+2\theta=180^\circ$

$\Rightarrow \alpha+\theta=90^\circ$

$$\therefore\ \mathbf{x=90^\circ}$$

## RESOLUCIÓN Nº 50



Nos piden la relación entre "x" e "y".

- Por propiedad:

$$m\measuredangle ABC=90^\circ$$

- Sea $m\measuredangle ABM=\beta$ y $m\measuredangle CBN=\theta$

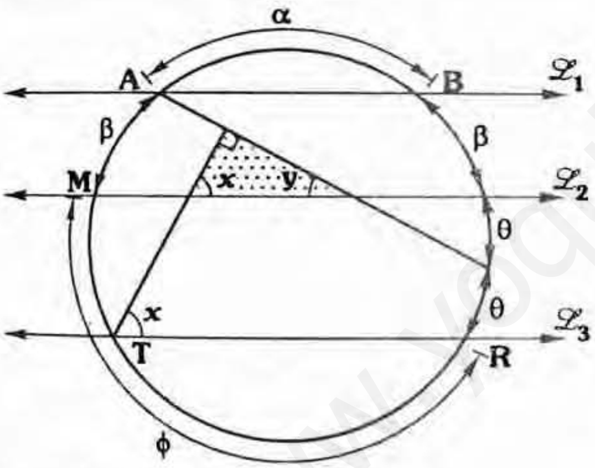
$$\Rightarrow m\measuredangle AEM=\beta \text{ y } m\measuredangle CBN=\theta$$

- En $\Delta EFG$: $x+\theta+\beta$
- En B: $y+90^\circ+\underbrace{\beta+\theta}_{x}=360^\circ$

$$\therefore\ \mathbf{x+y=270^\circ}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 51**




Nos piden "x".

Dato: $\alpha+\phi=160^\circ$

- Observamos que:

$$x+y=90^\circ$$

- Como:

$$\alpha+\phi=160^\circ \Rightarrow 2\beta+2\theta=200^\circ$$

$$\Rightarrow \beta+\theta=100^\circ$$

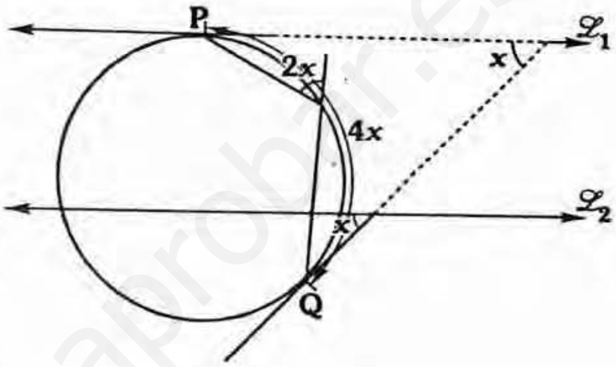
- Por ángulo interior:

$$y=\frac{\beta+\theta}{2} \Rightarrow y=50^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=40^\circ}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 52**




Nos piden "x".

- De la observación:

$$m\overset{\frown}{PQ}=4x$$

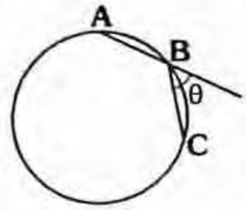
- Por propiedad:

$$x+4x=180^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=36^\circ}$$

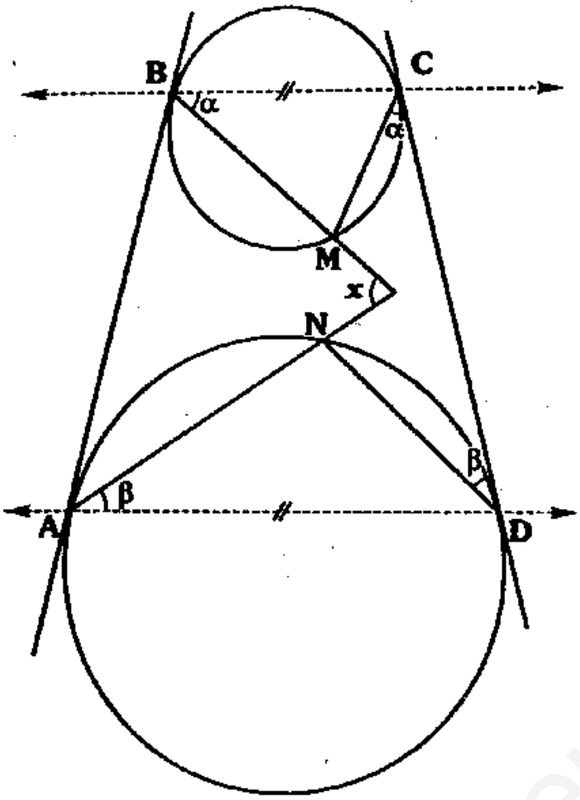
**Clave C**

**Observación**




*Se cumple:* $m\overset{\frown}{ABC}=2\theta$

**RESOLUCIÓN Nº 53**




Nos piden "x".

Dato: $\alpha+\beta=86°$

- Por propiedad:

$$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BC}$$

- También:

$m\sphericalangle CBM = m\sphericalangle MCD = \alpha$ y

$m\sphericalangle NAD = m\sphericalangle NDC = \beta$

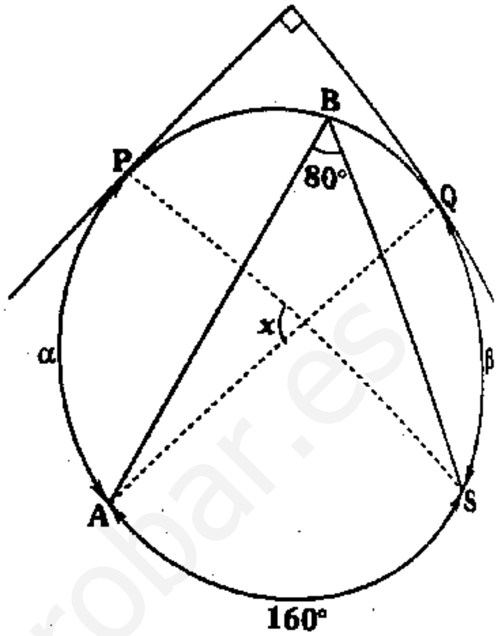
- Luego:

$$x=\alpha+\beta$$

$$\therefore \quad x=86°$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 54**




Nos piden "x".

- Como:

$m\widehat{PQ}=90°$ y

$m\widehat{AB}=160° \Rightarrow \alpha+\beta=110°$

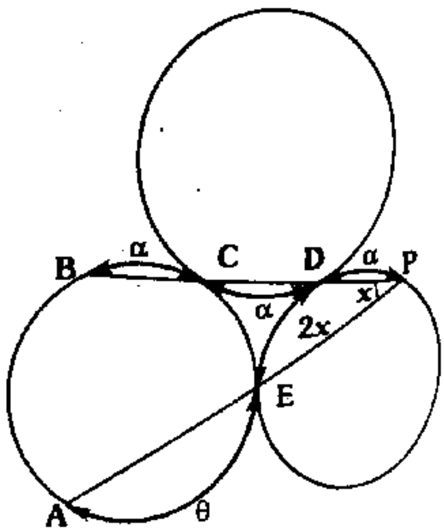
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore \quad x=55°$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 55**



Nos piden "x".

Dato: $\theta-\alpha=40°$

- Por propiedad: $m\overset{\frown}{BC}=m\overset{\frown}{CD}=m\overset{\frown}{DP}=\alpha$

  $m\overset{\frown}{AE}=m\overset{\frown}{EDP}=\theta$

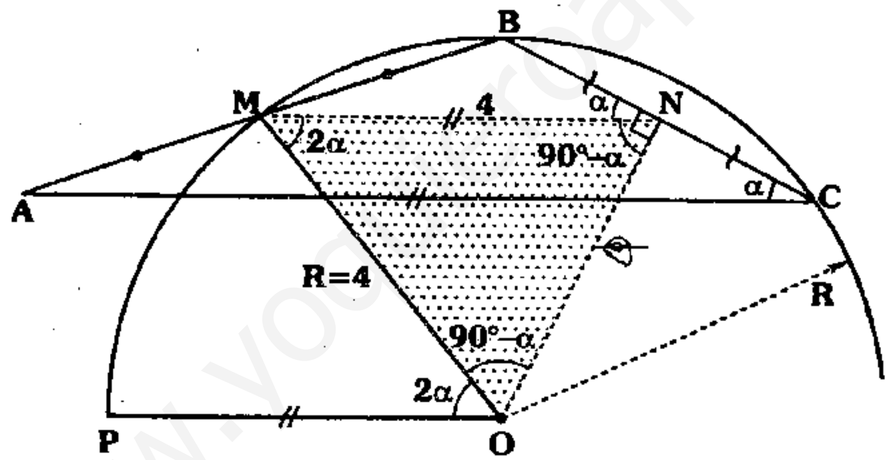
- Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{ED}=2x$

- Como $m\overset{\frown}{AE}=m\overset{\frown}{EDP} \Rightarrow \theta = \alpha+2x \Rightarrow \underbrace{\theta-\alpha}_{40°}=2x$

$$\therefore\ \mathbf{x=20°}$$

**Clave B**

**Resolución Nº 56**




Nos piden: AC

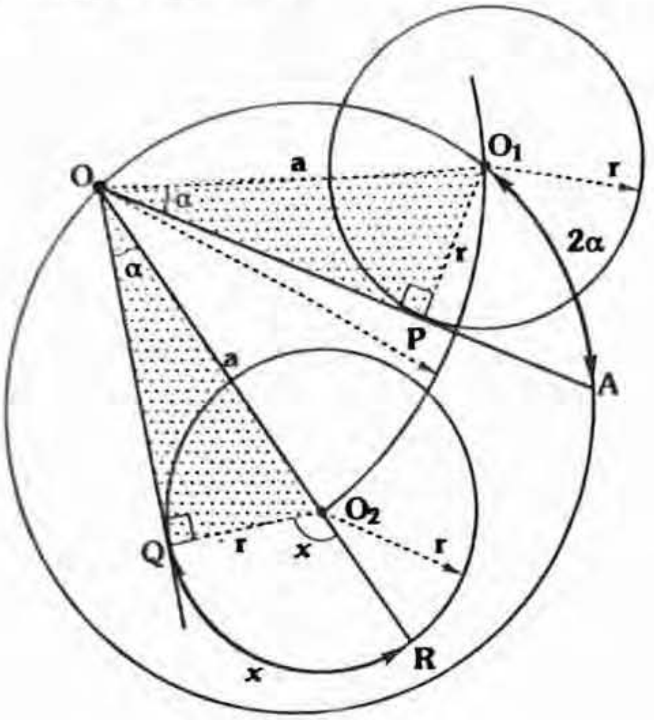
- Se traza $\overline{ON}\perp\overline{BC} \Rightarrow BN=NC$
- En el $\Delta ABC$, $\overline{MN}$ es base media entonces $AC=2(MN)$ y $\overline{MN}//\overline{AC}$, luego: $m\measuredangle MNB=\alpha$ y $m\measuredangle MNO=90-\alpha$ y $m\measuredangle OMN=2\alpha$.
- $\Delta OMN$: isósceles entonces:

$$OM=MN=4$$

$$\therefore\ \mathbf{AC=8}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 57**




Nos piden "$x$".

- Propiedad:

$$m\measuredangle OQQ_2 = m\measuredangle OPO_1 = 90°$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle O_1OA = \alpha$$

- Por ángulo central:

$$m\measuredangle QO_2R = x$$

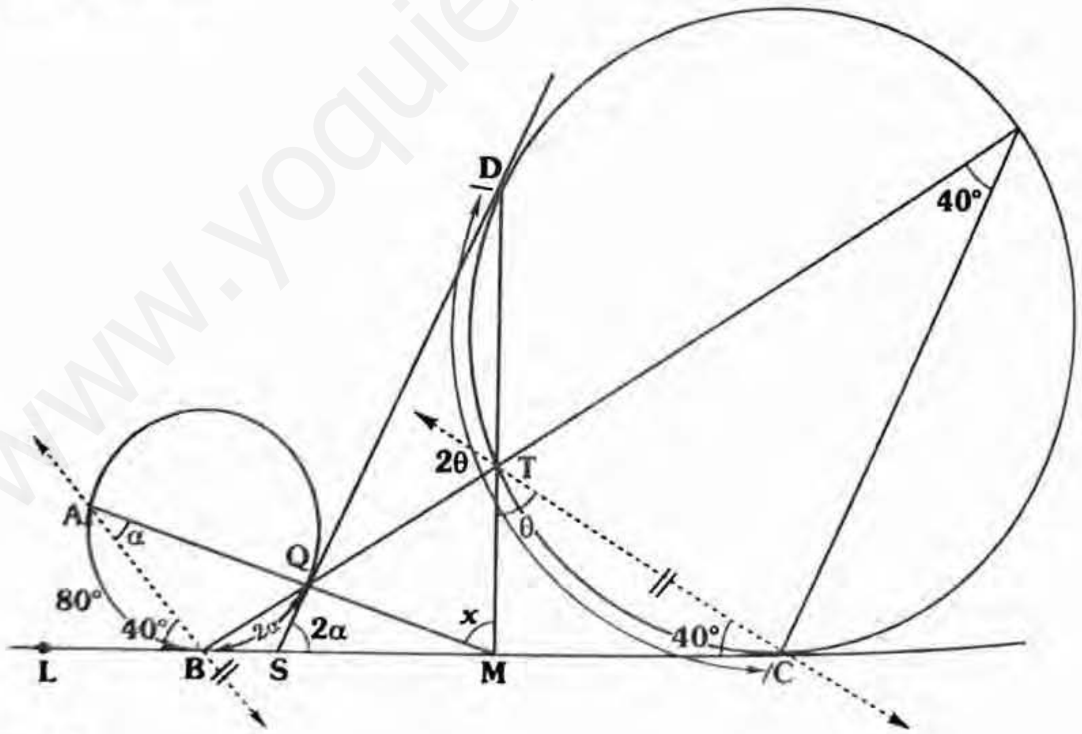
- $\triangle QOO_2 \cong \triangle POO_1$

$$\Rightarrow m\measuredangle QOO_2 = \alpha$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 90° + \alpha}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 58**




Nos piden "$x$".

- Como $m\widehat{AB} = 80°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle LBA = 40°$ $\rightarrow$ $\overleftrightarrow{AS} \parallel \overleftrightarrow{TC}$
- Luego: $x = \alpha + \theta$

- Como: $m\sphericalangle CTM=\theta \rightarrow m\widehat{DC}=2\theta$
- Por propiedad:

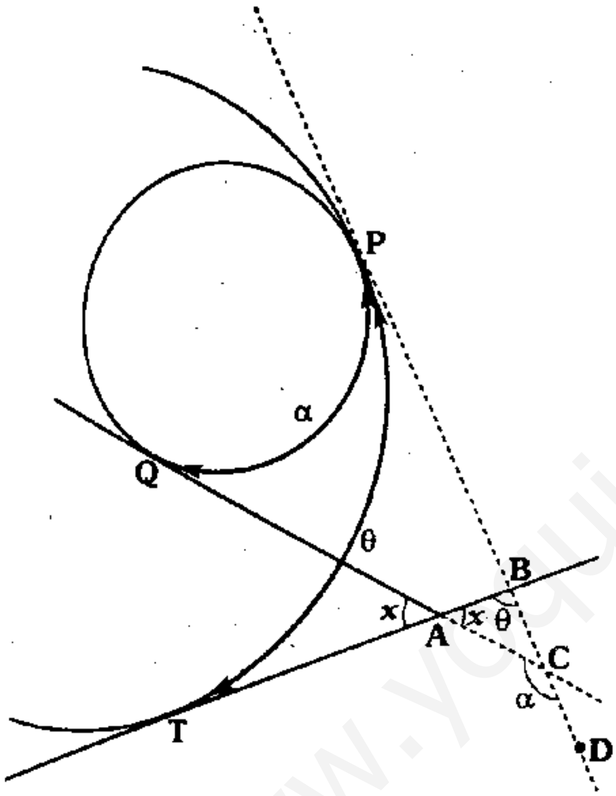
$$2\alpha+2\theta=180$$

$$\rightarrow \alpha+\theta=90°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=90°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 59**




Nos piden "$x$".

Dato: $\alpha-\theta=40°$

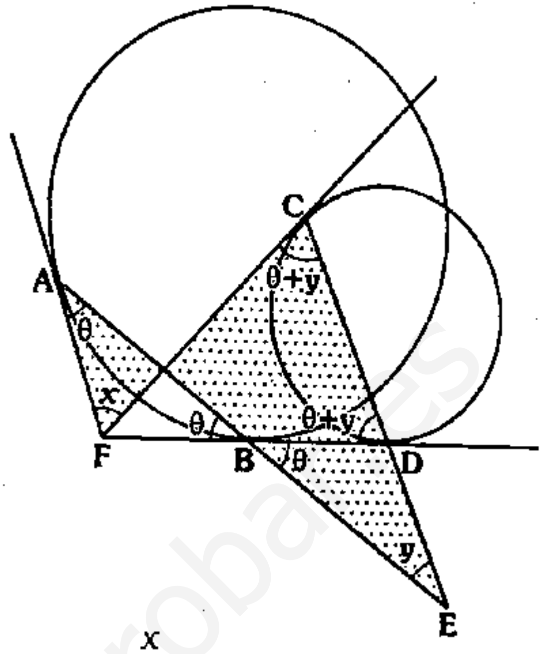
- Se traza la tangente en P.
- Por propiedad: $m\sphericalangle CBT=\theta$ y $m\sphericalangle ACD=\alpha$
- En $\Delta ABC$: $x+\theta=\alpha$

$$x=\alpha-\theta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=40°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 60**




Nos piden: $\dfrac{x}{y}$

- Sea: $m\sphericalangle FAB=\theta \rightarrow m\sphericalangle FBA=\theta$
- En $\Delta BDE$: $m\sphericalangle BDC=\theta+y$

$$\rightarrow m\sphericalangle FCD=\theta+y$$

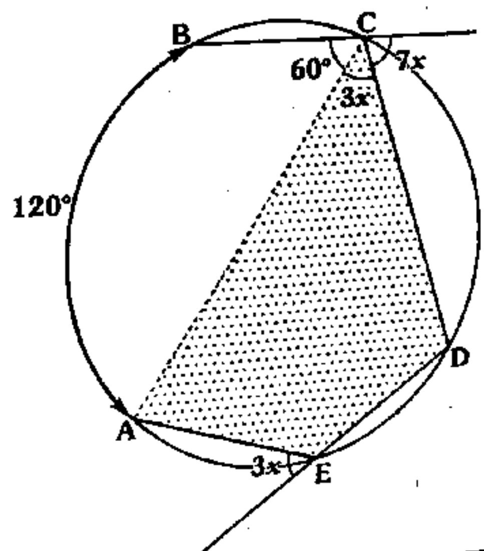
- En la región sombreada:

$$x+\cancel{\theta}=\cancel{\theta}+2y$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{x}{y}=2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 61**



Piden "x".

- Se traza $\overline{AC} \Rightarrow \square ACDE$ es $\square$inscrito entonces:

$$m\sphericalangle ACD = 3x$$

- Como:

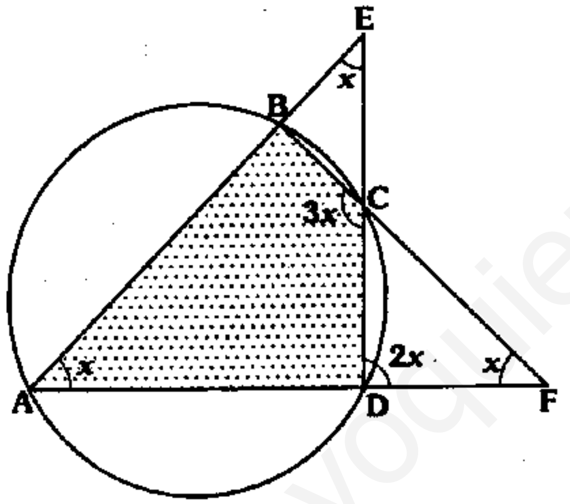
$$m\overset{\frown}{AB} = 120^\circ \quad \Rightarrow \quad m\sphericalangle BCA = 60^\circ$$

- Luego: $60^\circ + 3x + 7x = 180^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 12^\circ}$$

**Clave B**

## Resolución Nº 62




Nos piden "x".

- En $\Delta ADE$:

$$m\sphericalangle CDF = 2x$$

- En $\Delta CDF$:

$$m\sphericalangle DCB = 3x$$

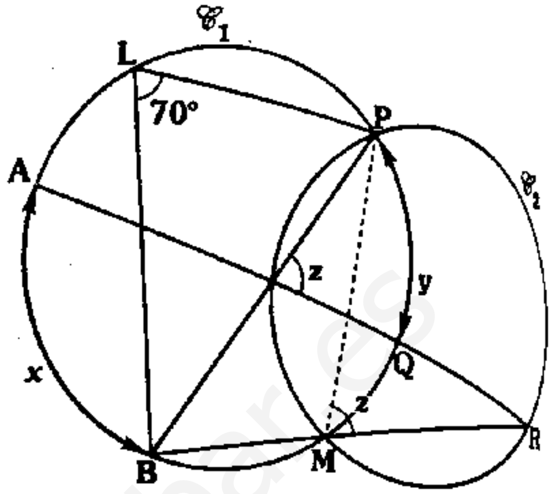
- En $\square ABCD$:

$$x + 3x = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 45^\circ}$$

**Clave B**

## Resolución Nº 63




Nos piden $x + y$

- Por ángulo interior:

$$z = \frac{x+y}{2}$$

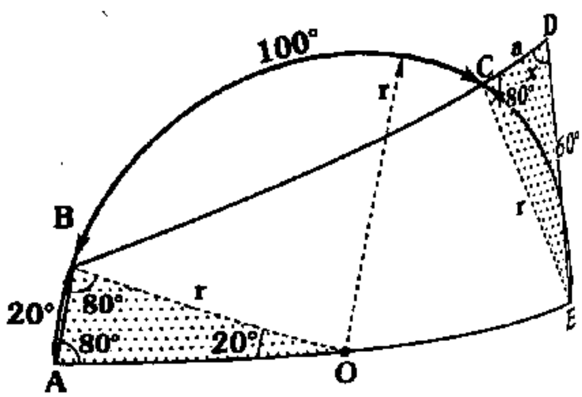
- En $\mathscr{C}_2$: Por ángulo inscrito $m\sphericalangle PMR$

- En $\square BLPM$: $\quad z = 70^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{x + y = 140^\circ}$$

**Clave A**

## Resolución Nº 64




Piden "x".

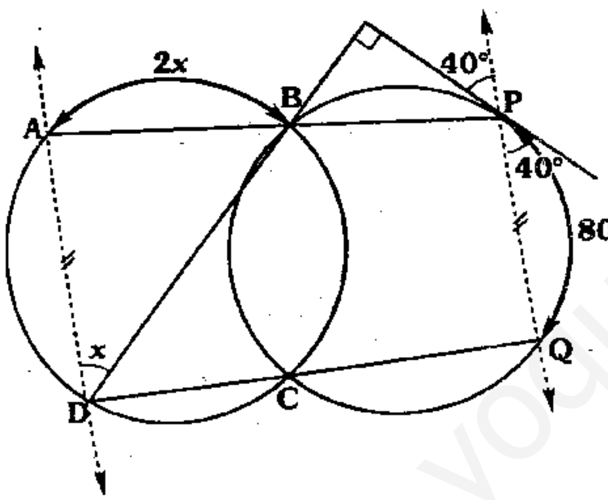
- Como $m\widehat{CE}=60°$ $\rightarrow$ $CE=r$
- $\Delta AOB$: isósceles

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle BAO=m\sphericalangle ABO=80°$
- $\triangle ABCE$: inscrito $\rightarrow$ $m\sphericalangle ECD=80°$
- $\Delta ABO\cong\Delta DCE$ (LAL)

$$\therefore\ \mathbf{x=80°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 65**




Nos piden $m\widehat{AB}$.

- Sea:

$$m\sphericalangle ADB=x\ \rightarrow\ m\widehat{AB}=2x$$

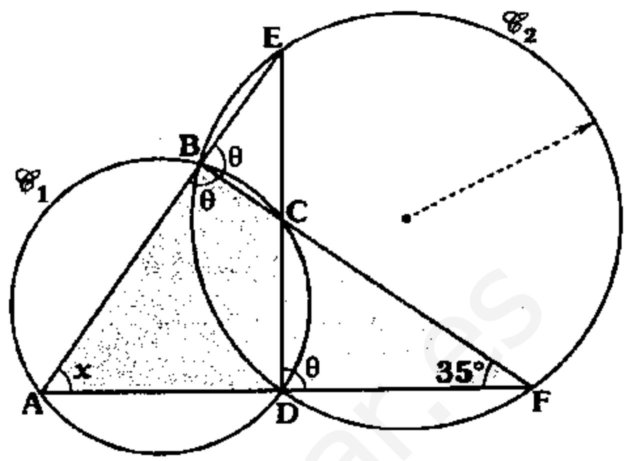
- Por propiedad: $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{PQ}$

$$\Rightarrow\quad x+40°=90°$$
$$\Rightarrow\quad x=50°$$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{AB}=100°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 66**




Piden "x".

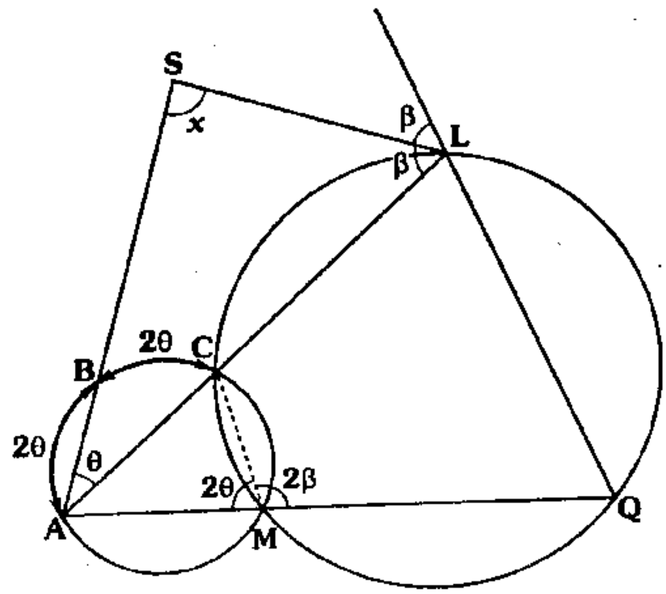
- Sea $m\sphericalangle EDF=\theta$, en $\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle EBF=\theta$
- En $\triangle ABCD$: $m\sphericalangle ABC=\theta$
- En B: $\theta+\theta=180°$

  $\rightarrow$ $\theta=90°$
- En $\Delta ABF$: $x+35°=90°$

$$\therefore\ \mathbf{x=55°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 67**



Nos piden "$x$".

- En $\Delta ALS$: $x+\theta+\beta=180°$
- Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}=2\theta$$

$$m\measuredangle AMC=2\theta$$

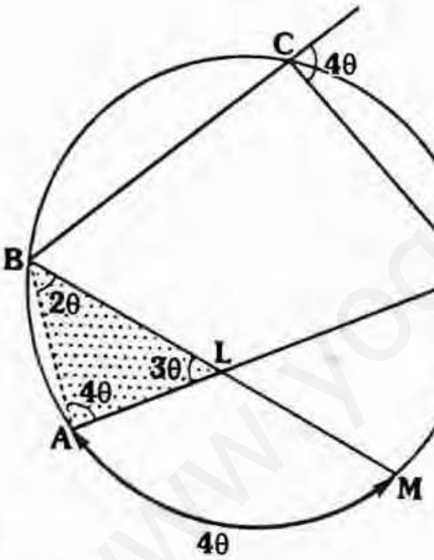
- En $\triangle MCLQ$: $m\measuredangle CMQ=2\beta$
- En M: $2\theta+2\beta=180°$

$$\rightarrow \quad \theta+\beta=90°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=90°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 68**




Nos piden "$\theta$".

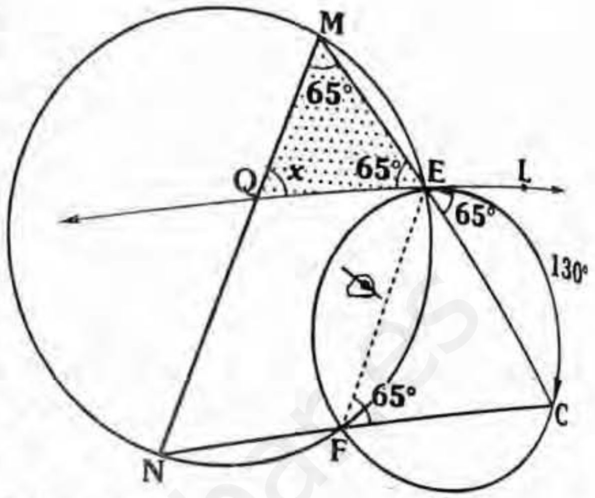
- Como $m\overset{\frown}{AM}=4\theta \rightarrow m\measuredangle ABM=2\theta$
- En $\triangle ABCD$: $m\measuredangle BAD=4\theta$
- En $\Delta ABL$:

$$2\theta+3\theta+4\theta=180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\theta=20°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 69**




Piden "$x$".

Dato: $m\overset{\frown}{EFC}=230° \rightarrow m\overset{\frown}{EC}=130°$

- Por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle LEC=65°$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle EFC=65°$
- En el $\triangle NMEF$: inscrito

$$\rightarrow \quad m\measuredangle NME=65°$$

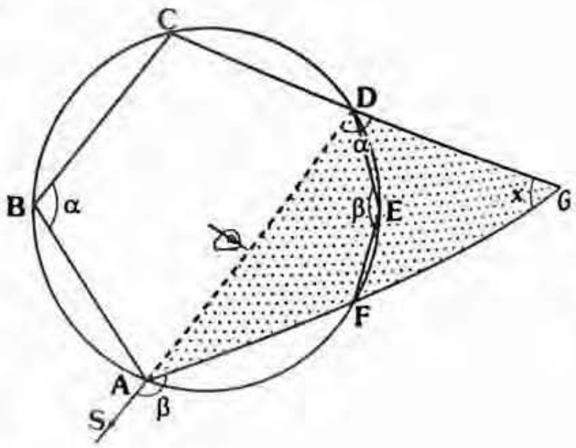
- En $\Delta QME$:

$$x+65°+65°=180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=50°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 70**




Piden "$x$".

Dato: $\beta-\alpha=40^\circ$

- $\triangle$ABCD y $\triangle$ADEF: inscritos

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle ADG=\alpha$ y $m\sphericalangle SAF=\beta$

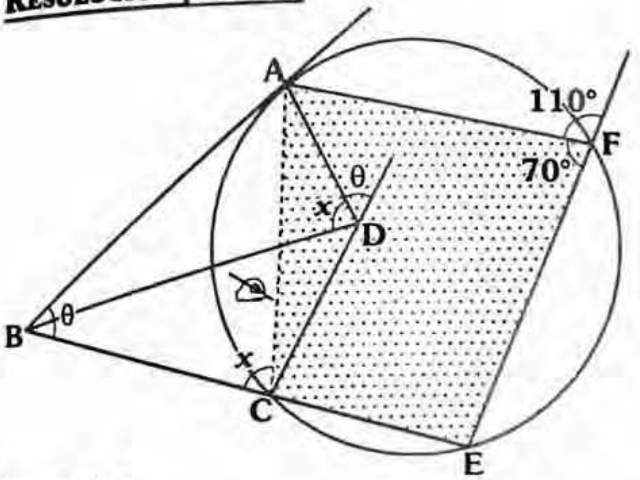
- En $\Delta ADG$: $x+\alpha=\beta$

  $x=\beta-\alpha$

$\therefore$ $\mathbf{x=40^\circ}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 71



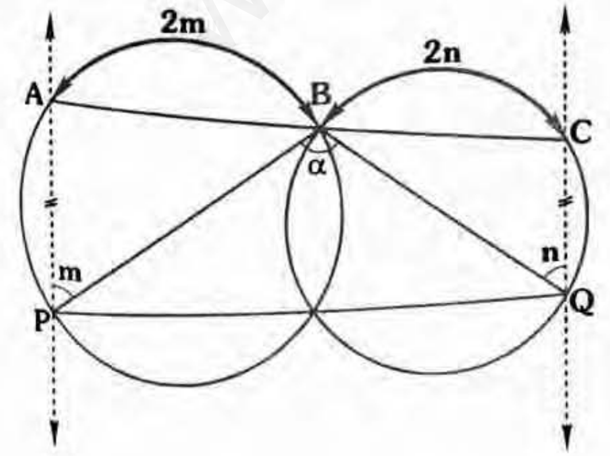

Piden "x".

- Notemos que el $\triangle$ABCD es inscriptible entonces $m\sphericalangle ACB=x$.
- $\triangle$AFEC: inscrito:

$\therefore$ $\mathbf{x=70^\circ}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 72




Piden "$\alpha$".

Dato: $m\widehat{AB}+m\widehat{BC}=210^\circ$

- Por propiedad: $\overleftrightarrow{AP}//\overleftrightarrow{CQ}$

  $\Rightarrow$ $\alpha=m+n$

- Del dato:

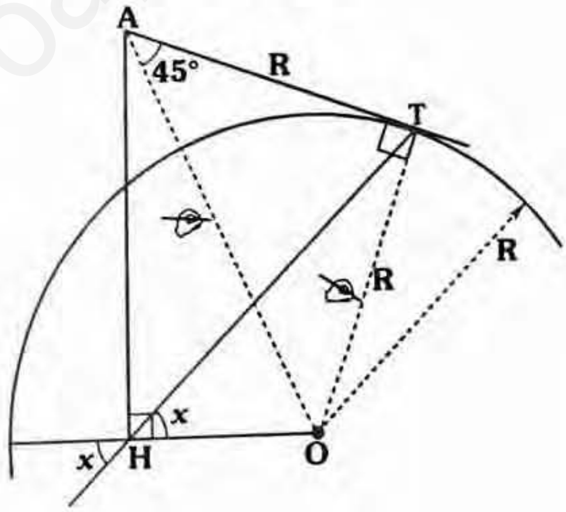
$$2m+2n=210^\circ$$

$$\Rightarrow\ m+n=105^\circ$$

$\therefore$ $\mathbf{\alpha=105^\circ}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 73




Nos piden "x".

- Como:

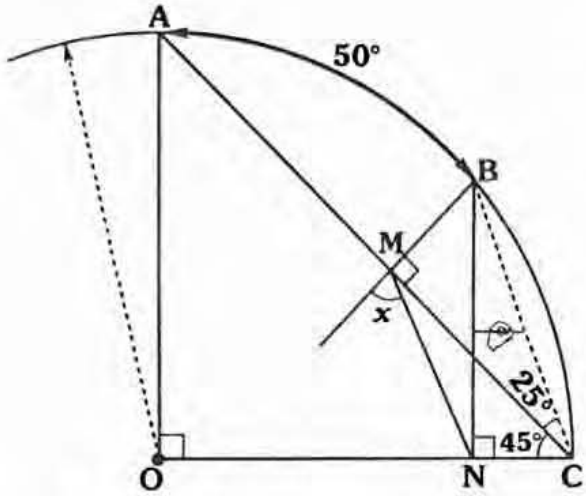
  $OT=TA$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle OAT=45^\circ$

- $\triangle$OHAT: inscriptible

$\therefore$ $\mathbf{x=45^\circ}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 74**




Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

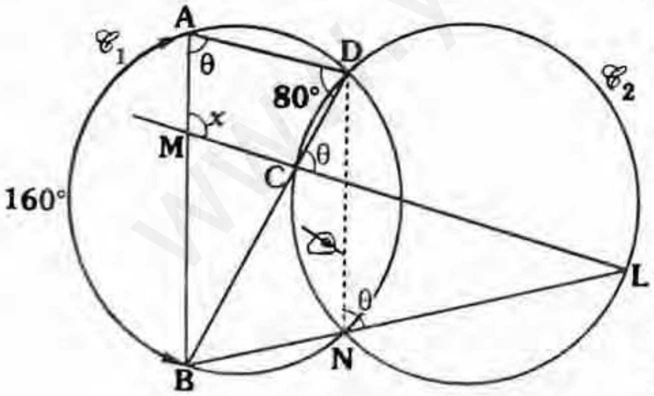
$$m\measuredangle ACB = 25°$$

- $\square$NMBC: inscriptible

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 70°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 75**




Nos piden "x".

- Sea $m\measuredangle DAM = \theta$ entonces en el $\square$ABCD: inscrito

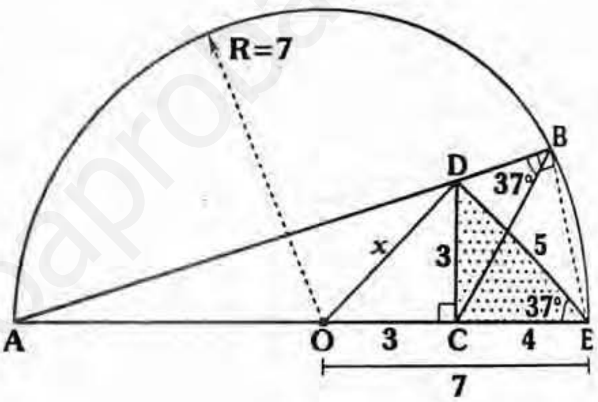
$$\Rightarrow\ m\measuredangle DCL = \theta$$

- En $\mathscr{C}_2$: $m\measuredangle DNL = \theta$
- En $\mathscr{C}_1$: $m\measuredangle ADN = 80°$
- $\square$MADN: inscriptible

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 100°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 76**




Nos piden "x".

- Por propiedad: $m\measuredangle ABE = 90°$ entonces $\square$CDBE es inscriptible

$$\Rightarrow\ m\measuredangle DEC = 37°$$

- $\triangle$CDE: notable

$$\Rightarrow\ EC = 4 \ \text{ y }$$
$$DC = 3$$

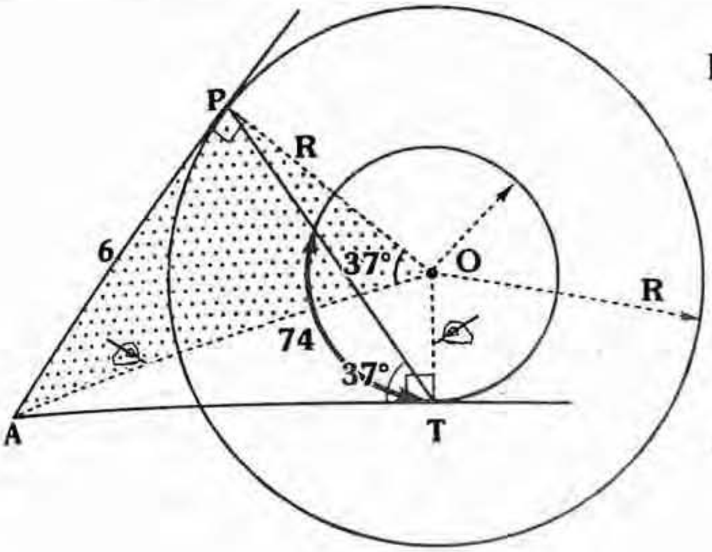
- En $\triangle$OCD:

$$OC = 3 \ \text{ y } \ CD = 3$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 3\sqrt{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 77**




Piden R.

- Notamos que el cuadrilátero OTAP es inscriptible

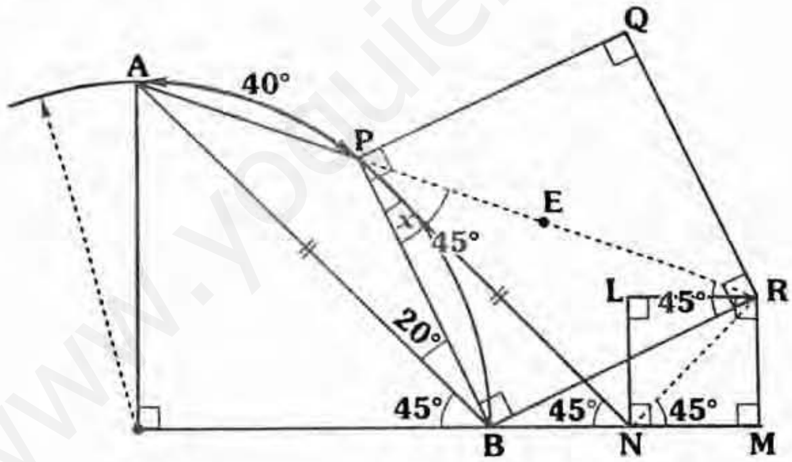
$\Rightarrow \quad m\sphericalangle AOP=37^\circ$

- ◿APO: notable

$$\mathbf{R=8}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 78**




Piden "$x$".

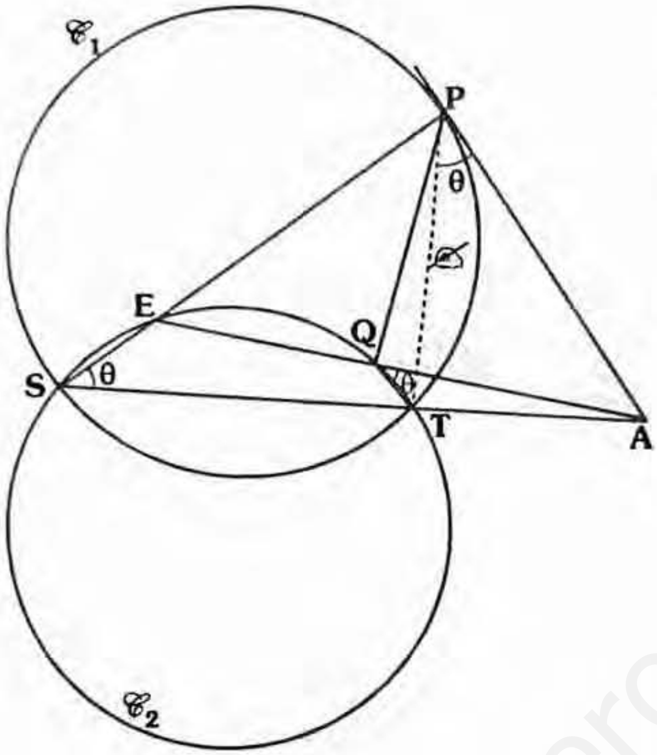
- Como $m\sphericalangle BPE=45^\circ$ entonces al prolongar $\overline{PE}$ llegará a "R", pues BPQR es cuadrado.
- ⏢BPRN: inscriptible $\Rightarrow \quad m\sphericalangle BNP=45^\circ$
- Luego: $\overline{AB}//\overline{PN}$

$$\therefore \quad x=20^\circ$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 79**

Por demostrar: ⏢TQPA es inscriptible




- Se traza $\overline{PT}$, sea $m\measuredangle EST=\theta$, en $\mathscr{C}_2$ el ⏢SEQT es inscrito.

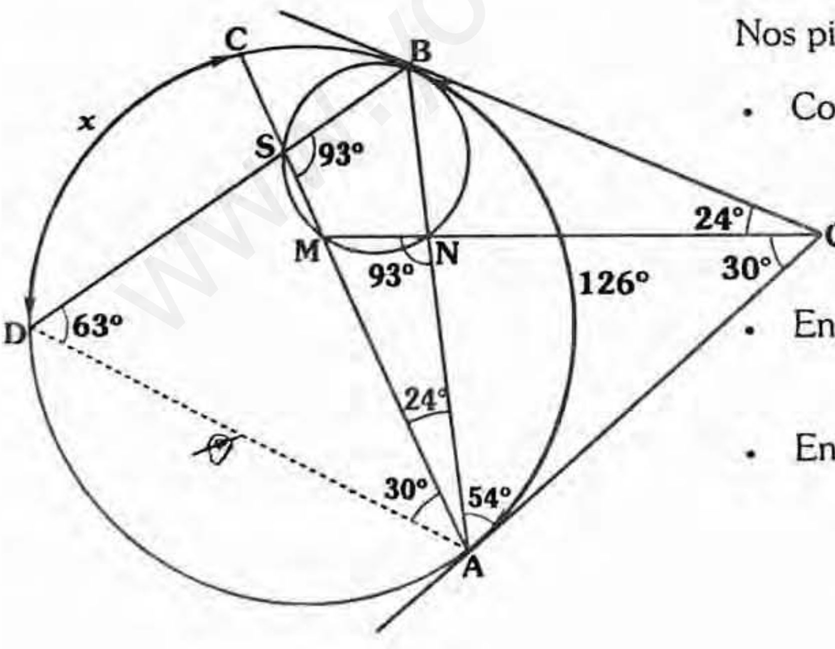
$$\Rightarrow\ m\measuredangle TQA=\theta$$

- En $\mathscr{C}_1$, por ángulo inscrito: $m\widehat{PT}=2\theta$ y por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle TPA=\theta$
- Como:

$$m\measuredangle TQA=m\measuredangle TPA=\theta$$

$\therefore$ **⏢TQPA es inscriptible**

**RESOLUCIÓN Nº 80**




Nos piden "x".

- Como $m\widehat{AB}+54°=180°$

$$\rightarrow\ m\widehat{AB}=126°$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle BDA=63°$$

- En $\Delta ANQ$:

$$m\measuredangle ANM=93°$$

- En ⏢NMSB:

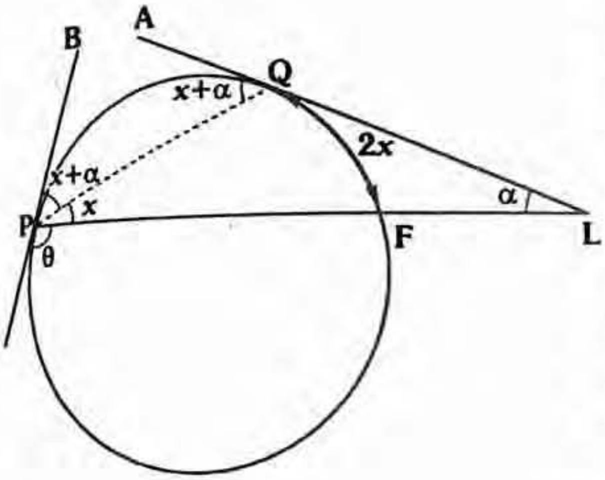
$$m\measuredangle MSB=93°$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle SAD=30°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=60°}$$

Clave C

## Resolución Nº 81




Nos piden $m\widehat{QF}$

Dato: $\alpha+\theta=150°$

- Sea $m\widehat{QF}=2x \Rightarrow m\measuredangle QPF=x$
- En $\Delta PQL$: $m\measuredangle AQP=x+\alpha$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle BPQ=x+\alpha$

- En P: $2x+\underbrace{\alpha+\theta}_{150°}=180°$

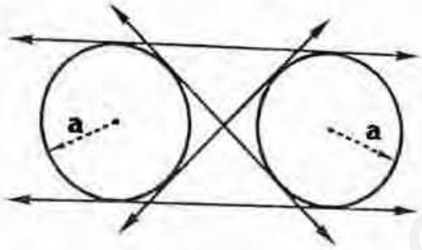
$\Rightarrow \quad \underbrace{2x}=30°$

$\therefore \quad \mathbf{m\widehat{QF}=30°}$

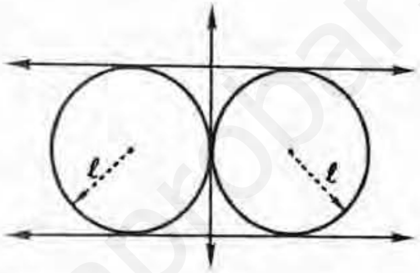
**Clave C**

## Resolución Nº 82

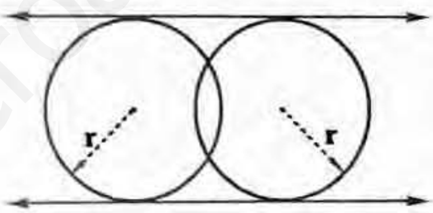
Veamos todas las posibilidades que tienen dos circunferencias congruentes en un plano, asi como las tangentes comunes que se pueden trazar:




Hay cuatro rectas tangentes comunes




Hay tres rectas tangentes comunes

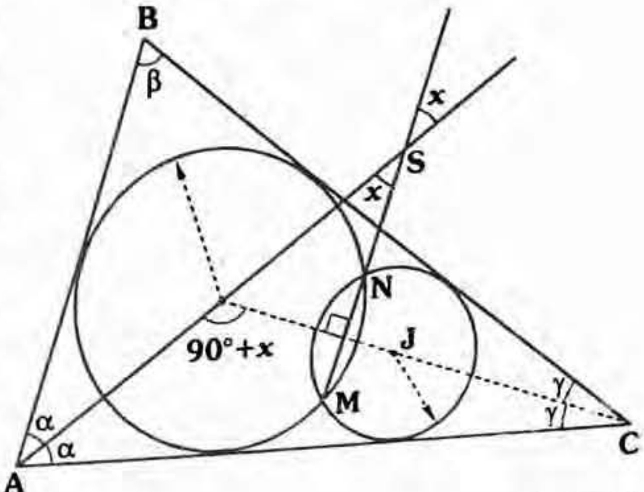



Hay dos rectas tangentes comunes

Se puede afirmar: no se puede trazar **una** tangente común.

**Clave A**

## Resolución Nº 83



Nos piden "x".

- Por propiedad: $\overline{MN}\perp\overline{IJ}$ y

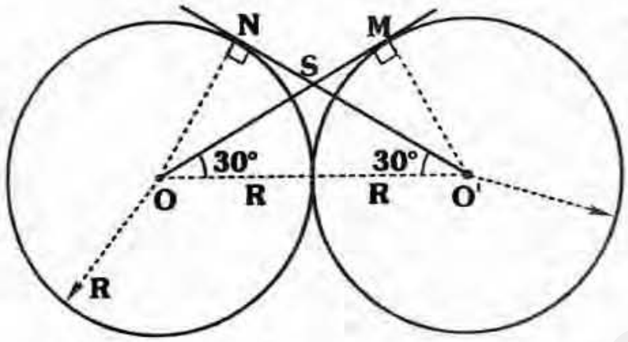
$$\underbrace{m\measuredangle AIC}=90^\circ+\frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$90^\circ+x=90^\circ+\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=\frac{\beta}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 84**




- $⊿OMO'$ y $⊿ONO'$: notables de 30°
- Por dato, el mayor ángulo entre las rectas tangentes es 5x.

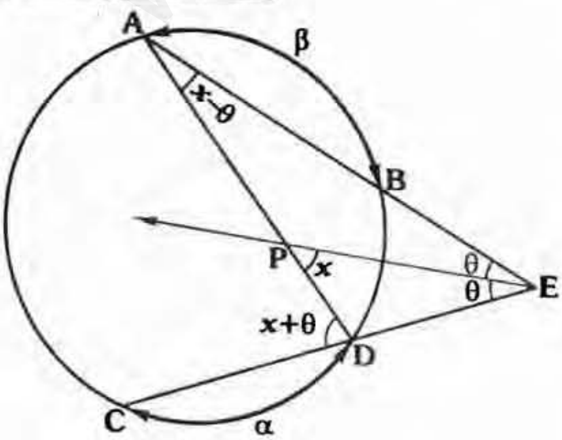
$$\Rightarrow\quad \underbrace{m\measuredangle OSO'}=5x$$

$$120^\circ=5x$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=24^\circ}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 85**




Nos piden "x".

- Por dato: $\alpha+\beta=120^\circ$
- En los triángulos AEP y PED:

$$m\measuredangle EAP=x-\theta \quad y \quad m\measuredangle ADC=x+\theta$$

$$\Rightarrow\ m\overset{\frown}{BD}=2x-2\theta \quad y \quad m\overset{\frown}{AC}=2x+2\theta$$

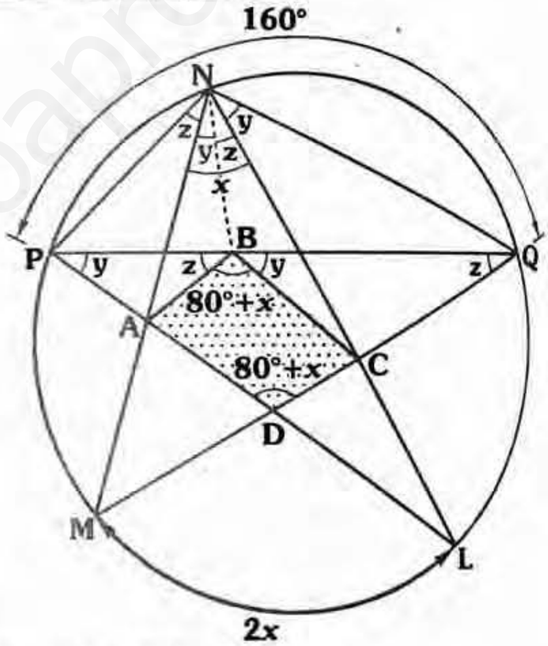
- En la circunferencia:

$$2x+\cancel{2\theta}+2x-\cancel{2\theta}+\underbrace{\alpha+\beta}_{120^\circ}=360^\circ$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=60^\circ}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 86**




Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{ML}=2x$
- Por ángulo interior: $m\measuredangle PDQ=80^\circ+x$
- Notemos que los cuadriláteros NPAB y NBCQ son inscriptibles entonces:

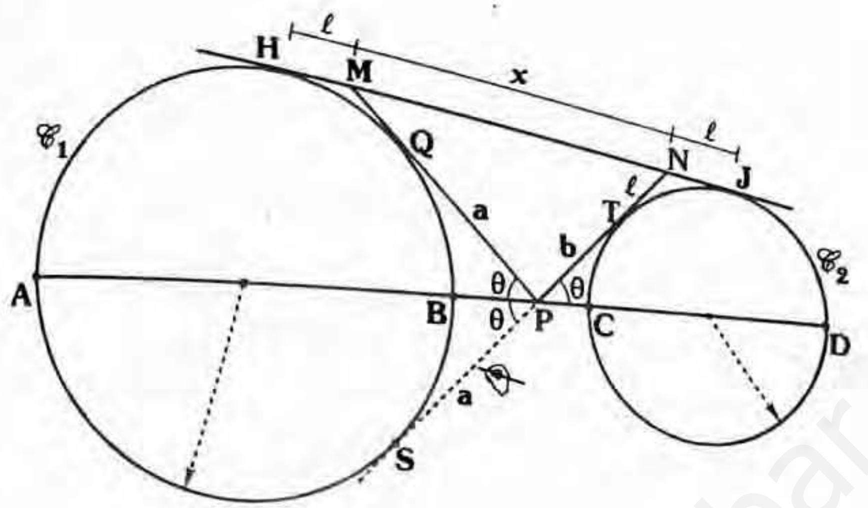
$$y+z=x$$

- En B: $80^\circ+x+\underbrace{y+z}_{x}=180^\circ$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=50^\circ}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 87**



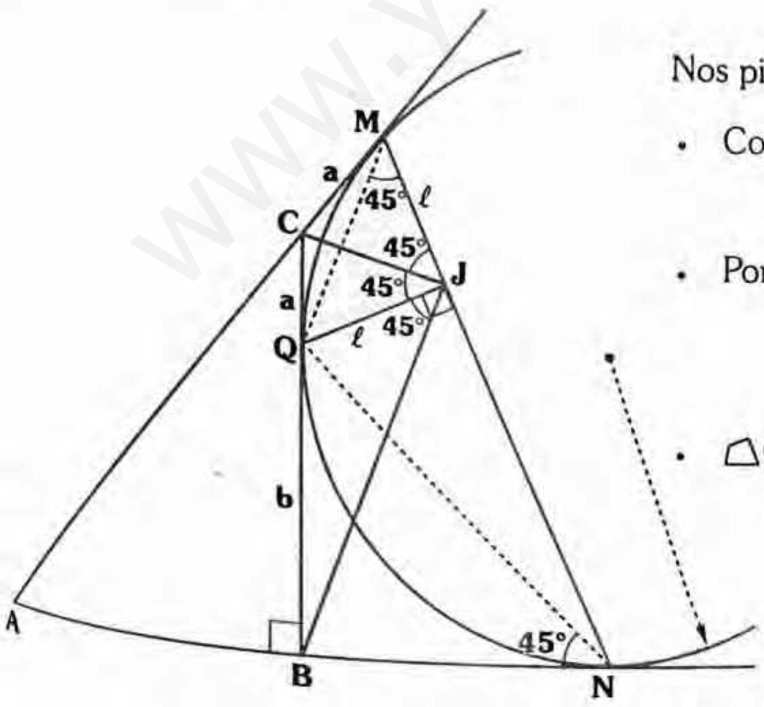

Piden "x" en función de "a" y "b".

- La prolongación de $\overline{TP}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ en S entonces PQ=PS=a.
- Como $NT=NJ=\ell$ y NH=NS $\Rightarrow$ $x+\ell=\ell+b+a$

$$\therefore\ \mathbf{x=a+b}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 88**




Nos piden m∢CJB

- Como ⌂BQJN es inscriptible entonces:

  m∢QJB = 45°

- Por ∢ inscrito:

  m∢QMN = 45°

  $\Rightarrow$ QJ=JM

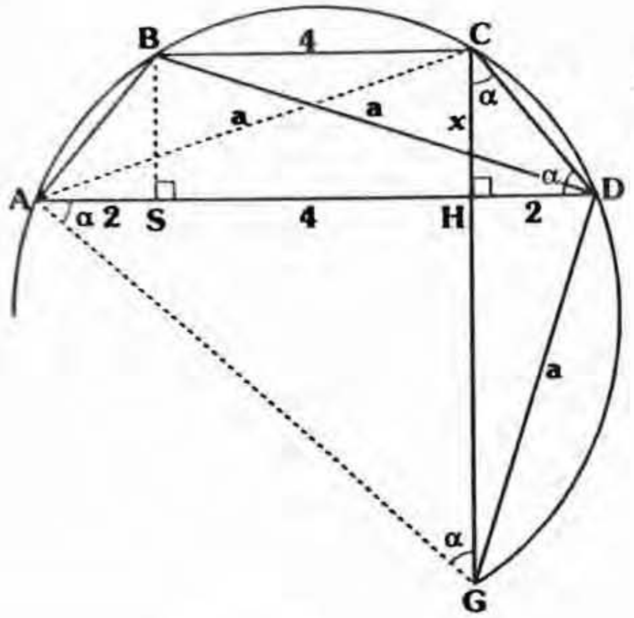
- ⌂QCMJ: Trapezoide simétrico

  $\Rightarrow$ m∢QJC = m∢CJM = 45°

  $\therefore$ **m∢CJB = 90°**

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 89**




Nos piden "x".

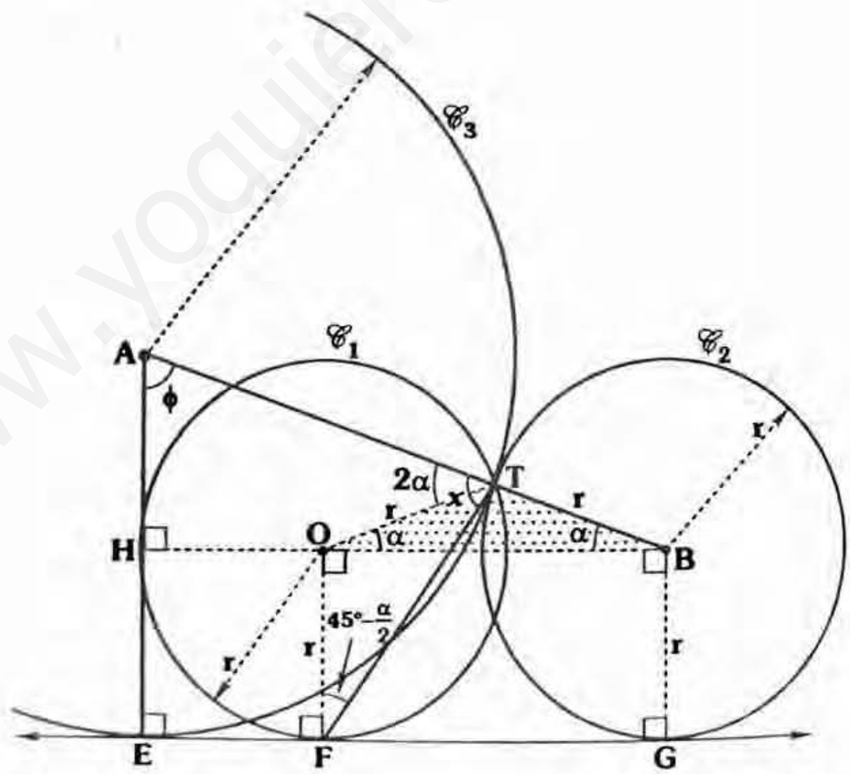
- Como el trapecio ABCD está inscrito entonces ABCD es un trapecio isósceles entonces AC=BD.
- Luego AC=DG ⇒ $\overline{AG}//\overline{CD}$ entonces ACDG es también trapecio isósceles

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle HCD = m\sphericalangle HDC$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 90**




Nos piden "x" en función de ϕ.

- Como dos circunferencias son congruentes y ϕ≠90° entonces $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$.

- $\Delta OTB$ y $\Delta FOT$ : isósceles
- FOBG: rectángulo entonces:

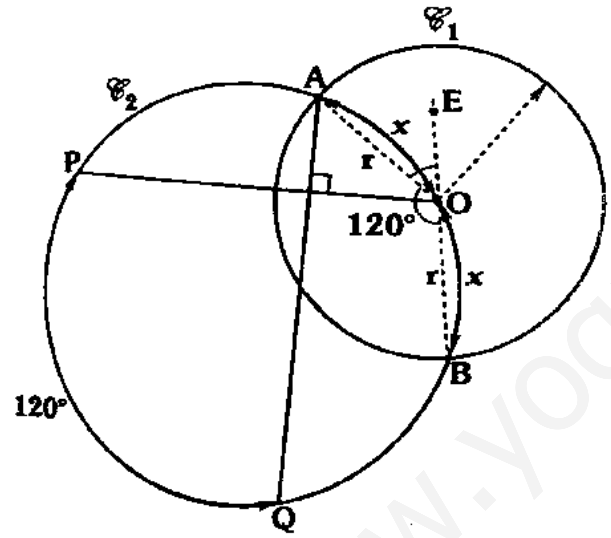
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle FOB = 90°$$

- En $\Delta FOT$ : $\quad m\measuredangle OTF = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$
- $x = 2\alpha + 45° - \dfrac{\alpha}{2} = 45° + \dfrac{3}{2}\alpha$
- Como $\alpha + \phi = 90° \;\Rightarrow\; \alpha = 90° - \phi$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 180° - \frac{3}{2}\phi}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 91**




Nos piden $m\widehat{AB}$

- Como $OB = OA \Rightarrow m\widehat{OB} = m\widehat{OA} = x$
- Por ángulo interior:

$$\frac{x + 120}{2} = 90°$$

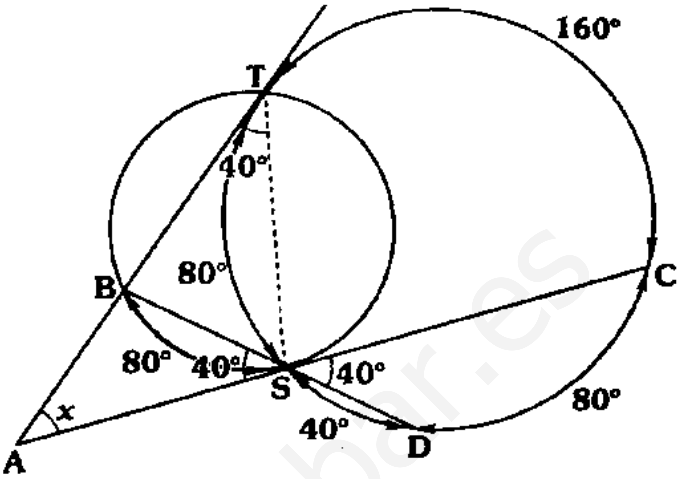
$$\Rightarrow \quad x = 60°$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AOE = 60°$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\widehat{AB} = 120°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 92**




Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle CSD = 40° \;\Rightarrow\; m\measuredangle BSA = 40°$$

$$m\widehat{BS} = 80° \Rightarrow m\widehat{TS} = 80° \Rightarrow m\widehat{TC} = 160°$$

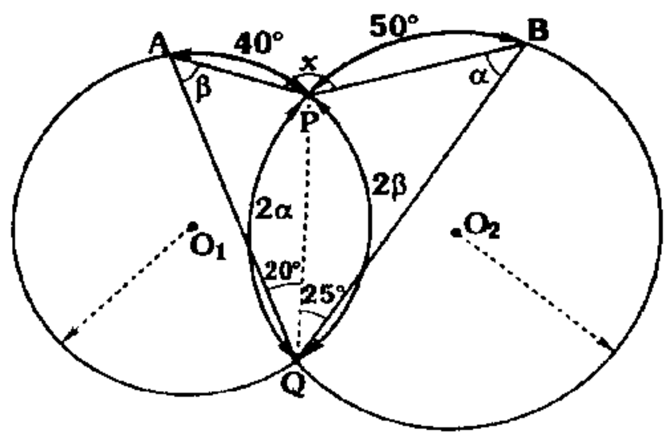
- Por ángulo exterior:

$$x = \frac{160° - 80°}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 93**



Nos piden "$x$"

Dato: $2\alpha+2\beta=110° \Rightarrow \alpha+\beta=55°$

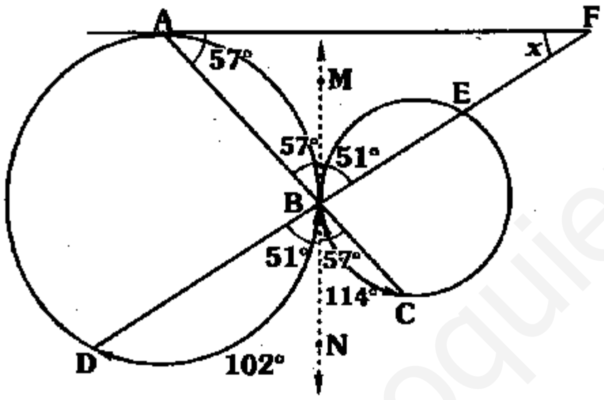
- En $\measuredangle$AQBP:

$$x=\underbrace{\alpha+\beta}_{55°}+20°+25°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=100°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 94




Nos piden "$x$".

- Se traza la tangente en B

$$\Rightarrow\ m\measuredangle MBA=m\measuredangle FAB=57° \quad y$$

$$m\measuredangle DBN=m\measuredangle MBE=51°$$

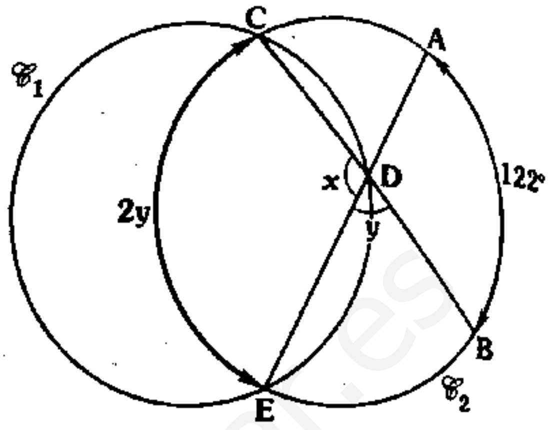
- En $\Delta$ABF:

$$x+57°+57°+51°=180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=15°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 95




Nos piden "$x$".

Dato: $\mathscr{C}_1\cong\mathscr{C}_2$

- Sea $m\measuredangle EDB=y \Rightarrow m\overset{\frown}{CDE}=2y$
- Como $\mathscr{C}_1\cong\mathscr{C}_2 \Rightarrow m\overset{\frown}{CDE}=m\overset{\frown}{CE}=2y$
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{2y+122°}{2} \quad\Rightarrow\quad x-y=61°$$

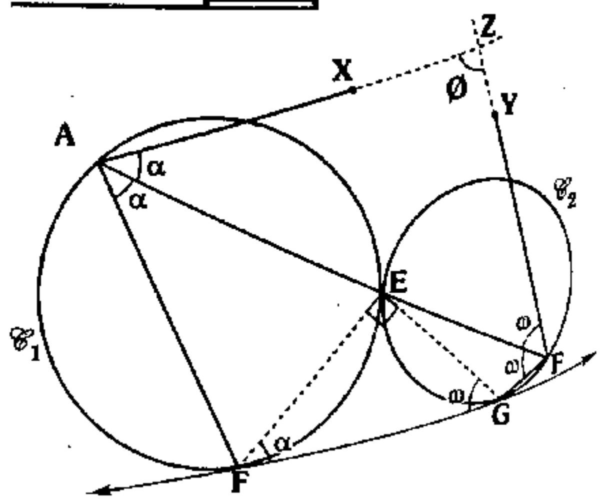
- Como:

$$x+y=180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=120{,}5°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 96



Nos piden "$\phi$":

- Por propiedad:

$$m\measuredangle FEG=90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\omega=90^\circ$$

- En $\Delta AZB$:

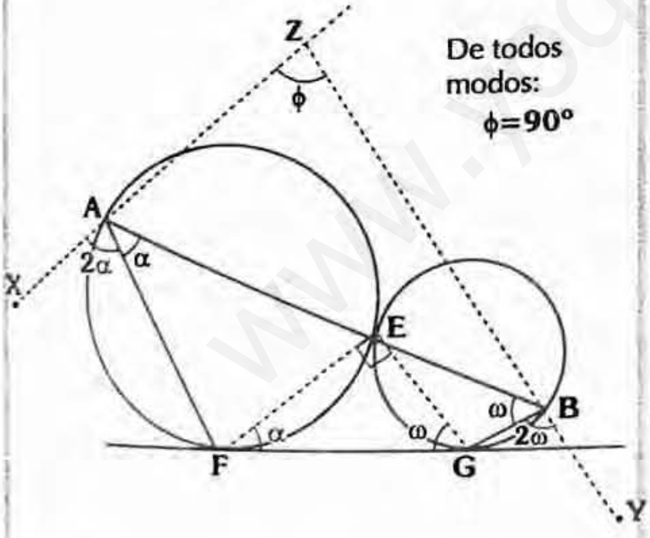
$$\alpha+\omega+\phi=80^\circ$$

$$\therefore \ \boldsymbol{\phi=90^\circ}$$

**Clave D**

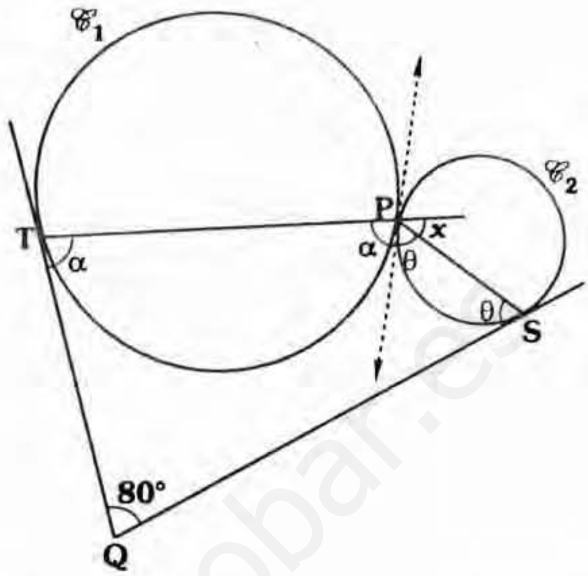
**Observación**

- *El gráfico, también puede ser así:*




- *Cuando $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$ están a uno y otro lado respecto de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces "$\phi$" no está definido.*

**RESOLUCIÓN Nº 97**




Nos piden "$x$".

- Se traza la tangente común en P

$$\Rightarrow \quad x+\theta+\alpha=180^\circ$$

- En el $\triangle$QTPS:

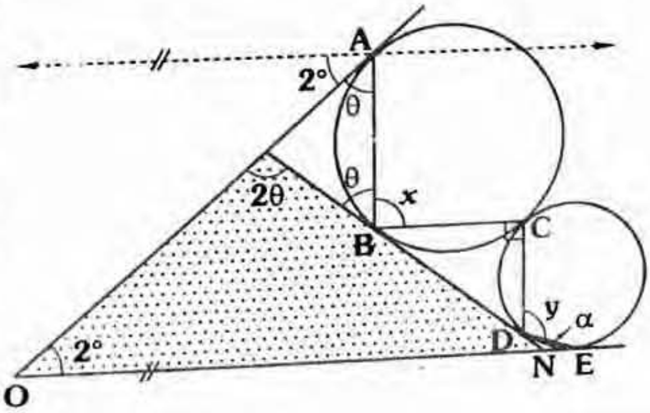
$$2\alpha+2\theta+80^\circ=360^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\theta=140^\circ$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x=40^\circ}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 98**



Nos piden $x+y$

- Por A se traza la paralela a $\overline{OE}$

$$\Rightarrow \quad x+y=2^\circ+\theta+90^\circ+\alpha$$

$$x+y=92^\circ+\theta+\alpha \quad \ldots \text{(I)}$$

- En $\Delta OMN$: $2\theta+2\alpha+2^\circ=180^\circ$

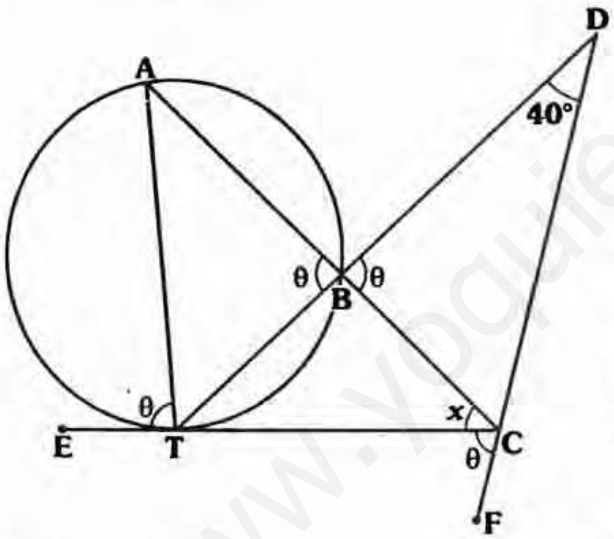
$$\theta+\alpha=89^\circ \quad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$x+y=181^\circ$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 99**



Nos piden "x".

- Como:

$$m\sphericalangle ATE=\theta \;\Rightarrow\; m\sphericalangle TBA=\theta$$

$$\Rightarrow\; m\sphericalangle CBD=\theta$$

- En $\Delta CBD$:

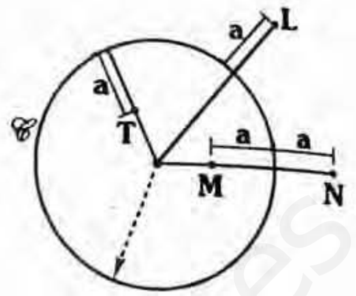
$$x+\cancel{\theta}=40^\circ+\cancel{\theta}$$

$$\therefore\; \mathbf{x=40^\circ}$$

**Clave B**

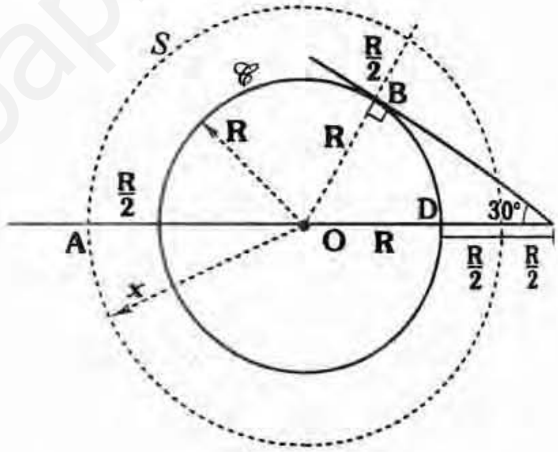
**RESOLUCIÓN Nº 100**

Considerando:



Los puntos: T, L, M y N equidistan de $\mathscr{C}$.

- En el problema:



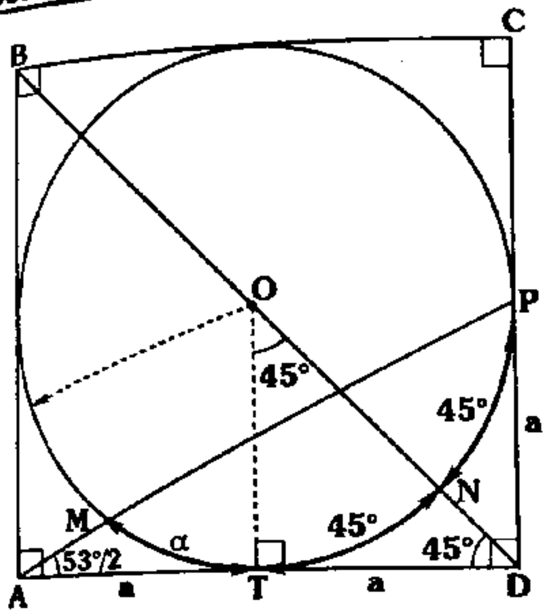
- La circunferencia S es la circunferencia pedida, pues equidista de A, B, C y D y su centro es O y radio:

$$x=R+\frac{R}{2}$$

$$\therefore\; \mathbf{x=\frac{3}{2}R}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 101**




Nos piden: $m\overset{\frown}{MN}$

- $\measuredangle$ADP: notable de 53°/2
- Como $m\overset{\frown}{NT} = m\overset{\frown}{NP} = 45°$ entonces por ángulo exterior:

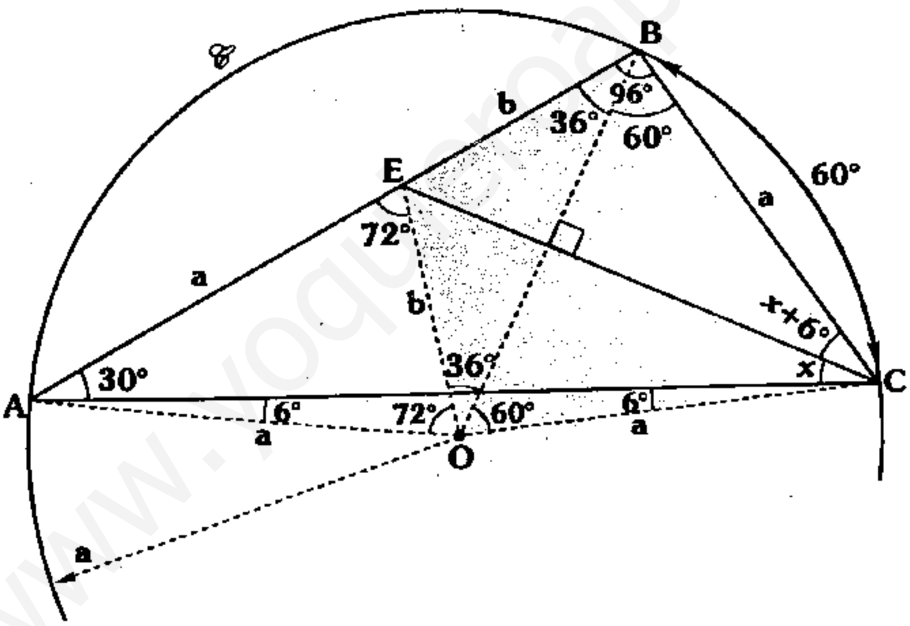
$$\frac{53°}{2} = \frac{90° - \alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 37°$$

- $m\overset{\frown}{MN} = \alpha + 45°$

$$\therefore \ m\overset{\frown}{MN} = 82°$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 102**




Nos piden "$x$".

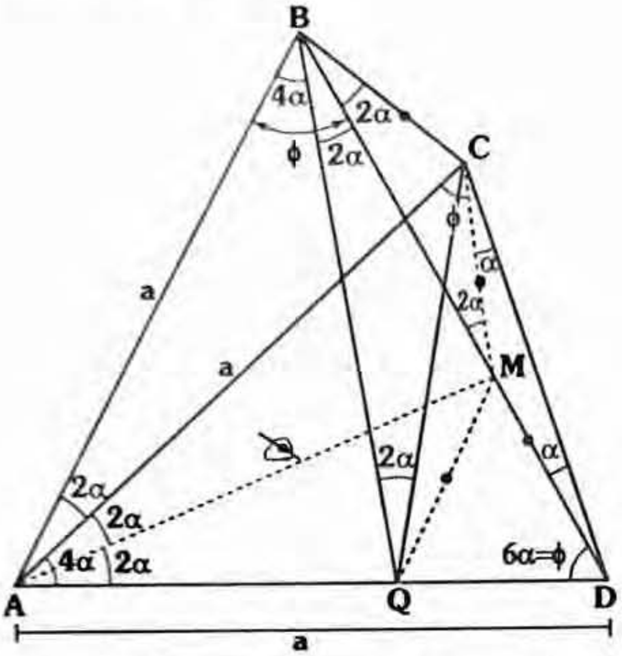
- Se traza la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$, cuyo centro es O, como $m\measuredangle BAC = 30°$ entonces: $m\overset{\frown}{BC} = 60° \Rightarrow \Delta BOC$ es equilátero
- $\Delta AEO$ : isósceles entonces: $m\measuredangle AEO = m\measuredangle AOE = 72° \Rightarrow \Delta OEB$ : isósceles $(OE = EB)$
- ⌂OEBC: trapezoide simétrico, entonces: $m\measuredangle OCE = m\measuredangle ECB = x + 6°$

$$2x + 12° = 60$$

$$\therefore \ x = 24°$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 103




Nos piden "α":

- Se traza $\overline{AM}$, bisectriz del ∢CAD (M en $\overline{BD}$) entonces ⌂ABCM: inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ACM = m\measuredangle ABM = \phi$$

- $\Delta ACM \cong \Delta ADM$ entonces $AC = AD$ y $CM = MD$ entonces ⌂BCMQ: inscriptible.
- Luego los puntos A, B, C, M y Q son concíclicos

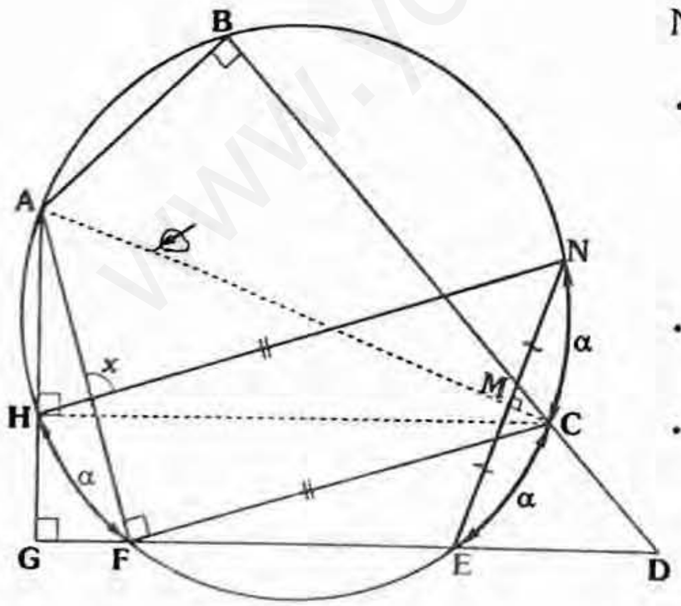
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle QBM = 2\alpha$$

- Luego: $\phi = 6\alpha$, en el $\Delta ABD$ : equilátero $\Rightarrow \quad 6\alpha = 60°$

$$\therefore \ \boldsymbol{\alpha = 10°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 104




Nos piden "x":

- Como $m\measuredangle ABC = 90°$ entonces $\overline{AC}$ es diámetro

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AFC = 90°$$

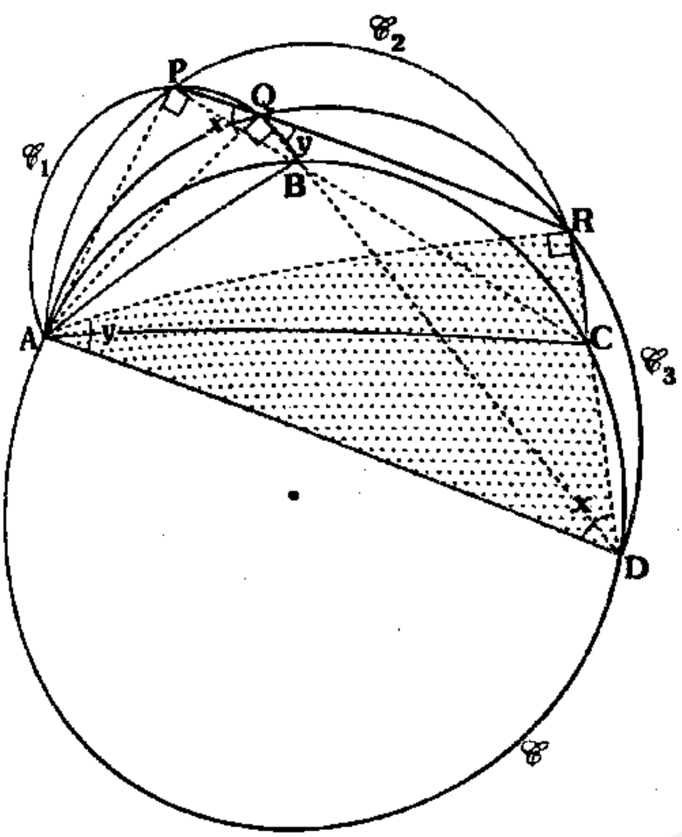
- También $m\overset{\frown}{NC} = m\overset{\frown}{CE}$ y $NM = ME$ entonces C, M y A son colineales.
- Como:

$$m\overset{\frown}{HF} = m\overset{\frown}{NC} \ \Rightarrow \overline{HN} \parallel \overline{FC}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 90°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 105




$\left.\begin{array}{l}\text{En } \mathscr{C}_1: m\sphericalangle APB=90° \\ \text{En } \mathscr{C}_2: m\sphericalangle APC=90°\end{array}\right\}$ P, B y C: colineales

$\left.\begin{array}{l}\text{En } \mathscr{C}_1: m\sphericalangle AQB=90° \\ \text{En } \mathscr{C}_3: m\sphericalangle AQD=90°\end{array}\right\}$ Q, B y D: colineales

$\left.\begin{array}{l}\text{En } \mathscr{C}_2: m\sphericalangle ARC=90° \\ \text{En } \mathscr{C}_3: m\sphericalangle ARD=90°\end{array}\right\}$ R, C y D: colineales

- Sea $m\sphericalangle AQP=x$ y $m\sphericalangle DQR=y$
- En ⌂AQRD:

$$m\sphericalangle ADR=x$$

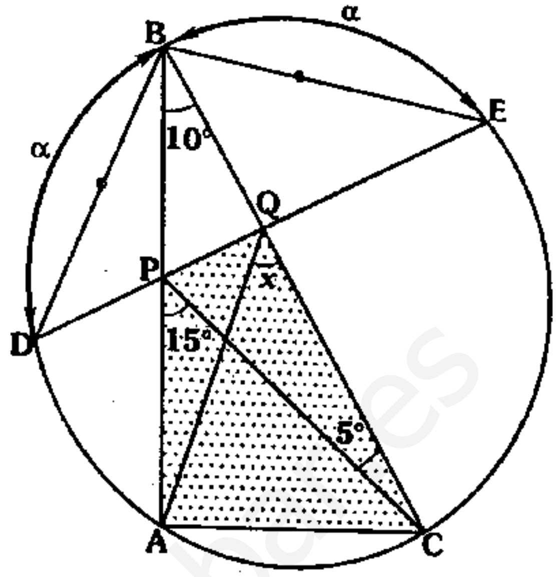
$$m\sphericalangle RAD=y$$

- En ⊿ARD: $x+y=90°$

$\therefore$ **P, Q y R : colineales**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 106




Nos piden "$x$".

- Como $BD=BE \Rightarrow m\widehat{BD}=m\widehat{BE}$

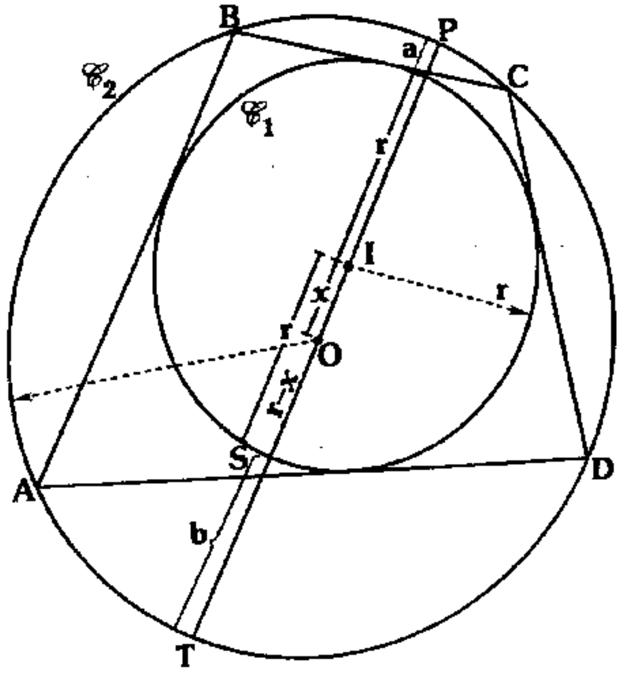
$\Rightarrow$ el ⌂APQC es inscriptible

- Luego: $m\sphericalangle APC=m\sphericalangle AQC$

$$\therefore\ x=15°$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 107



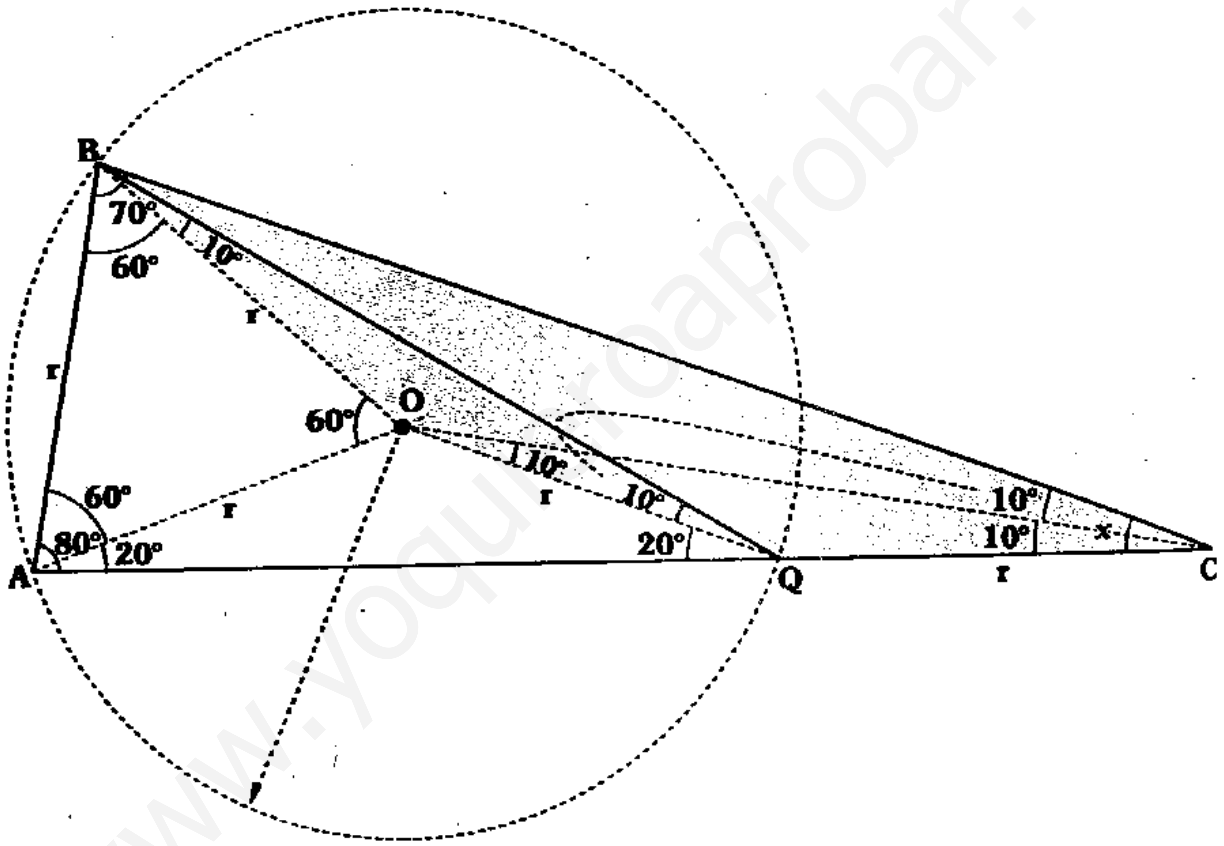
Nos piden "x" en función de a y b.

- Como: $OS=r-x$ y $OP=OT$ $\rightarrow$ $a+\cancel{r}+x=b+\cancel{r}-x$

$$\therefore\ x=\frac{b-a}{2}$$

**Clave A**

**Resolución Nº 108**




Nos piden "x".

- Como m∢AQB entonces se traza la circunferencia circunscrita del $\Delta ABQ$, cuyo centro es O entonces $\Delta AOB$ : equilátero y el $\Delta BOQ$ es isósceles.

- Notemos que $OQ=QC$ $\Rightarrow m\measuredangle OCQ=10°$

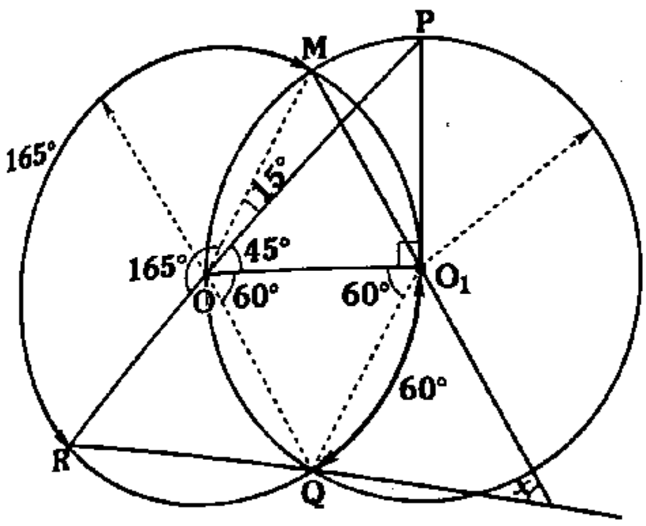
$\Rightarrow$ ⌂BOQC es inscriptible

$\Rightarrow$ $m\measuredangle OCQ=10°$

$$\therefore\ x=20°$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 109



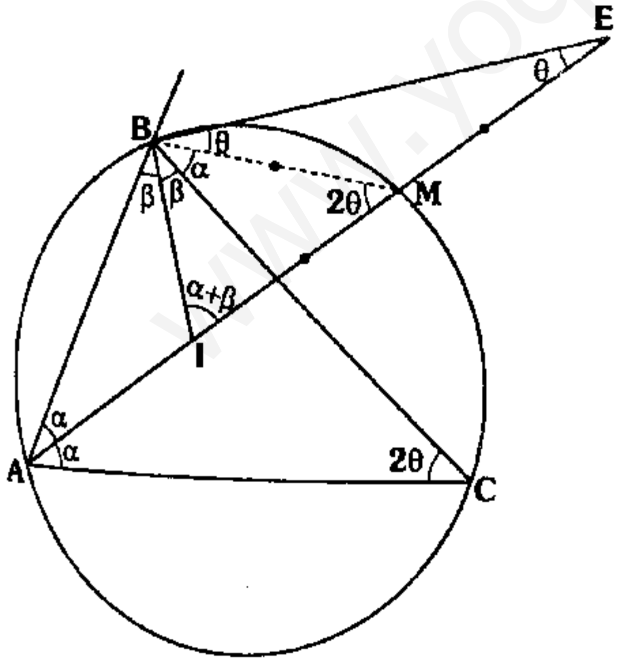

Nos piden "$x$".

- Notemos que los triángulos $OMO_1$ y $OQO_1$ son equiláteros.
- $\triangle OO_1P$: notable de 45°
- $m\sphericalangle MOP = 60° - 45° \rightarrow m\sphericalangle MOP = 165°$
- Por ángulo exterior:

$$x = \frac{165° - 60°}{2} = 52{,}5°$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 110




Por demostrar: $IM = ME$

- Donde I es incentro del $\triangle ABC$ y E es excentro relativo a $\overline{BC}$.
- Sea $m\sphericalangle ACB = 2\theta$ entonces por teorema:

$$m\sphericalangle AEB = \theta$$

- Como:

$$m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle ACB = 2\theta$$

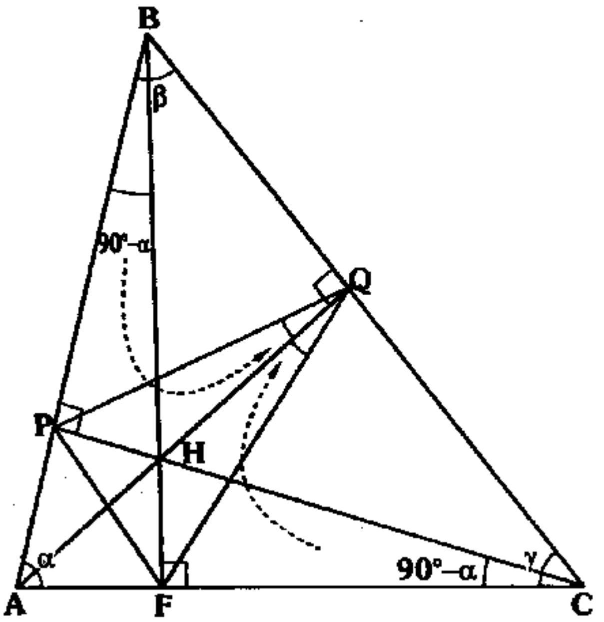
$$m\sphericalangle MBE = \theta \Rightarrow MB = ME \quad \text{... (I)}$$

- $\triangle IMB$: isósceles $\Rightarrow MB = MI \quad$ ... (II)

De (I) y (II):

$$\mathbf{ME = MI}$$

**RESOLUCIÓN Nº 111**




Por demostrar:

A) $m\sphericalangle PQF = 180° - 2\alpha$

B) $m\sphericalangle PFQ = 180° - 2\beta$

C) $m\sphericalangle QPF = 180° - 2\gamma$

- Los tres casos son similares, notemos que los cuadrilateros PBQH y FHQC son inscriptibles:

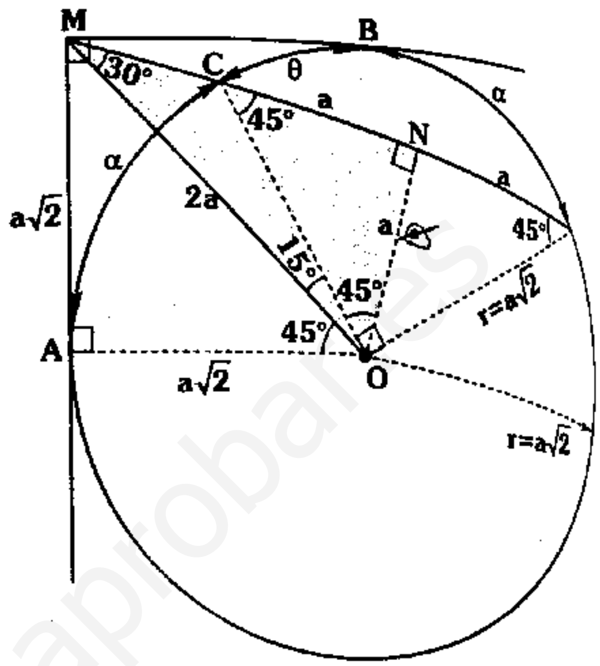
$\Rightarrow \quad m\sphericalangle PQH = m\sphericalangle PBH = 90° - \alpha$

$m\sphericalangle HQF = m\sphericalangle FCH = 90° - \alpha$

$\therefore \quad m\sphericalangle PQF = 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180° - 2\alpha$

- Los demás casos se prueban análogamente.

**RESOLUCIÓN Nº 112**




Nos piden: "$\alpha$"

- Como $m\widehat{AB} = 90° \Rightarrow \alpha + \theta = 90°$

  $\Rightarrow \quad m\sphericalangle COD = 90°$

- En $\triangle COD$: notable de 45°, se traza la altura ON entonces CN=NO=ND.

  $\Rightarrow \quad r = a\sqrt{2}$

- En $\triangle OAM$: OM=2a

- Se verifica que el $\triangle MNO$ es notable de 30°

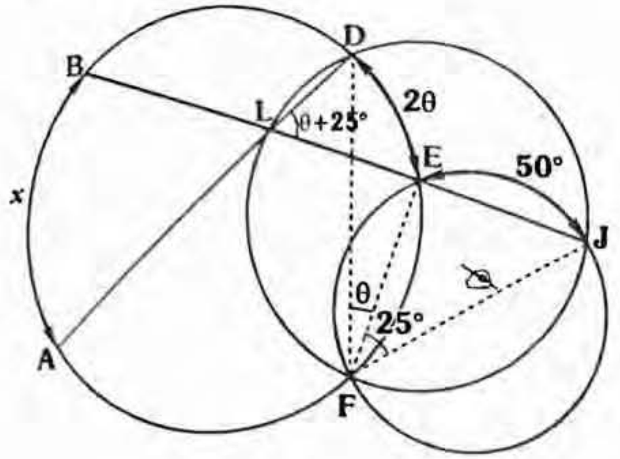
- Notamos que:

$$m\sphericalangle MOC = 15°$$

$$\therefore \quad \alpha = 60°$$

Clave D

## RESOLUCIÓN Nº 113




Nos piden "$x$".

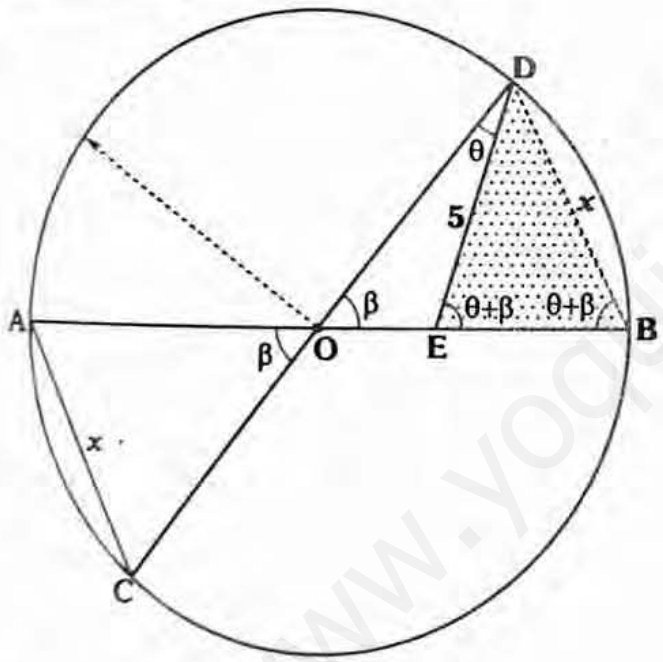
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle EFJ = 25°$
- Sea $m\measuredangle DFE = \theta \Rightarrow m\measuredangle DFJ = \theta + 25$
- Como $m\measuredangle DLJ = m\measuredangle DFJ = \theta + 25°$
- Por ángulo interior:

$$\frac{x+2\theta}{2} = \theta + 25°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 50°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 114




Nos piden "$x$".

Dato: $2\theta + 3\beta = 180°$

- $\Delta AOC \cong \Delta BOD \Rightarrow BD = x$
- En $\Delta DOB$, como $m\measuredangle DOB = \beta$

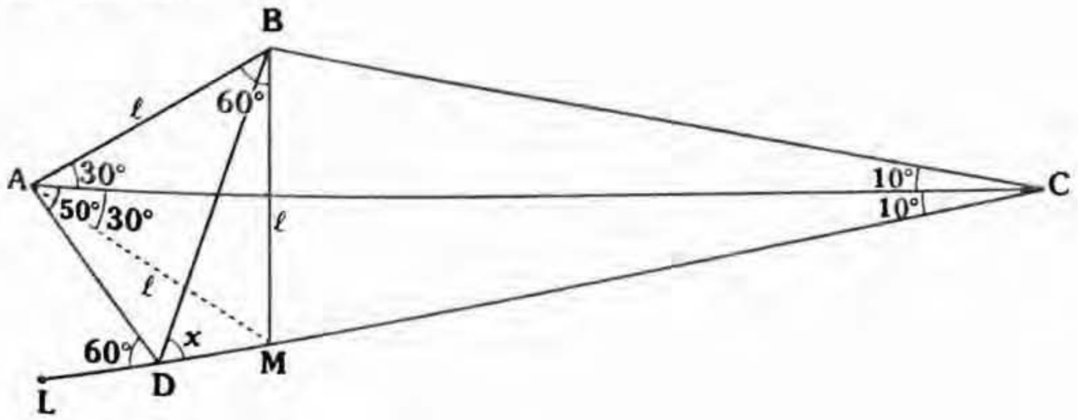
$$\Rightarrow m\measuredangle OBD = m\measuredangle ODB = \theta + \beta$$

- Luego notamos que el $\Delta EDB$ es isósceles:

$$\therefore \quad \mathbf{x = 5}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 115



Nos piden "x".

- Se ubica M en $\overline{CD}$ talque:

$$m\measuredangle CAM=30^{\circ} \Rightarrow \Delta MAC\cong\Delta BAC$$
$$\Rightarrow AB=AM$$

- Luego el $\Delta MAB$ es equilátero

$$\Rightarrow m\measuredangle ABM=60^{\circ}$$

- $\square DABM$ es inscriptible pues:

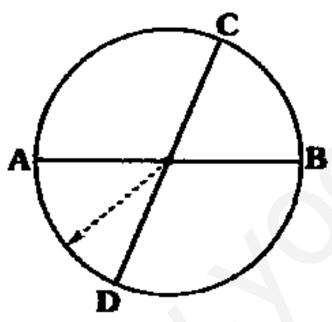
$$m\measuredangle ADL=m\measuredangle ABM$$
$$\therefore\ \mathbf{x=60^{\circ}}$$

**Clave D**

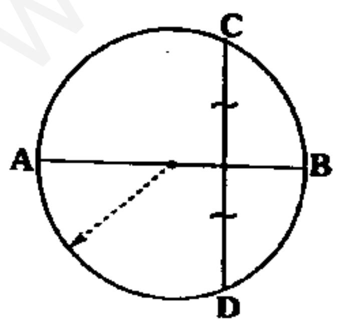
**RESOLUCIÓN Nº 116**

I) **FALSO**

Es que un diámetro también es cuerda

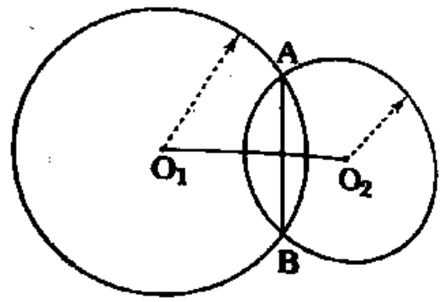



- $\overline{AB}$: biseca a $\overline{CD}$ diámetro y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son perpendiculares

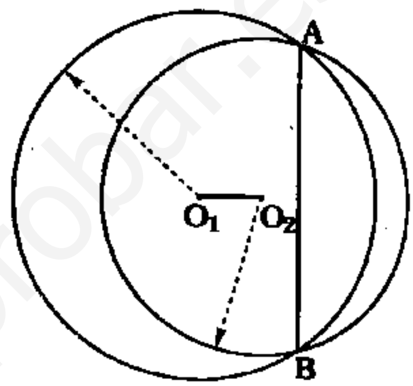



- Si $\overline{CD}$ no es diámetro y $\overline{AB}$ biseca a $\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}\perp\overline{CD}$

II) **FALSO**




$\overline{O_1O_2}$ y $\overline{AB}$ son secantes.




$\overline{O_1O_2}$ y $\overline{AB}$ no son secantes.

III) **VERDADERO**

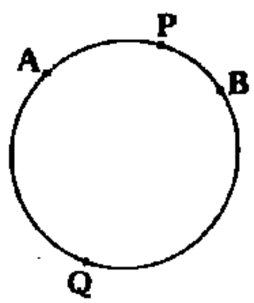
Como el centro equidista de los extremos del segmento entonces pertenece a la mediatriz de la cuerda.

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 117**

I) **FALSO**

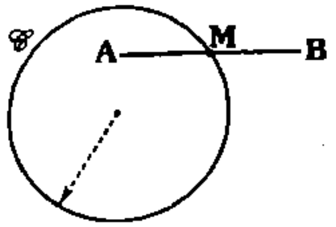
Dos puntos determinan dos arcos




Los arcos determinados son:

$$\overset{\frown}{APB} \text{ y } \overset{\frown}{AQB}$$

II) FALSO



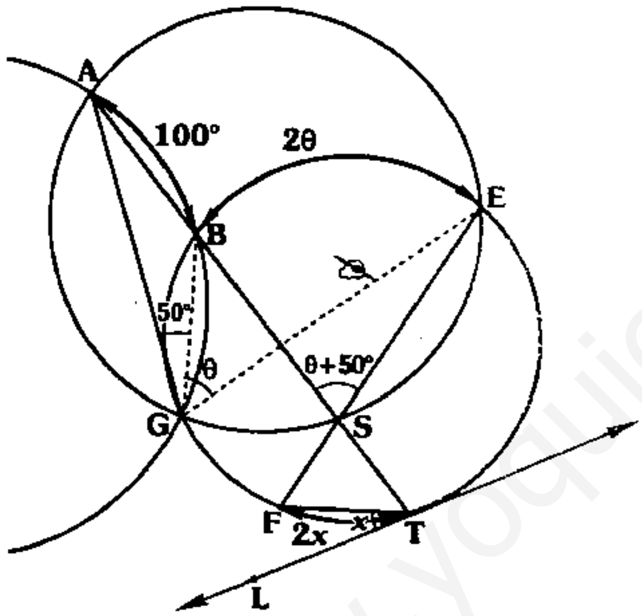

- $\mathscr{C} \cap \overline{AB} = \{M\}$

Notamos que la intersección es un solo punto.

III) FALSO
Las circunferencias pueden ser también interiores.

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 118




Piden: "x"

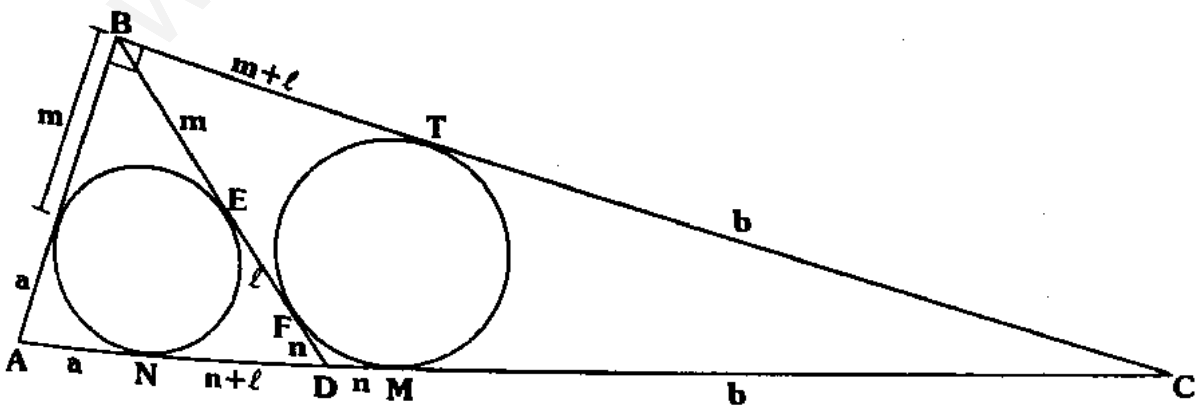
- Como $m\sphericalangle LTF = x \Rightarrow m\widehat{FT} = 2x$
- Sea $m\sphericalangle BGE = \theta \Rightarrow m\widehat{BE} = 2\theta$
- Como $m\sphericalangle AGE = m\sphericalangle ASE = \theta + 50°$
- Por ángulo interior:

$$\theta + 50° = \frac{2x + 2\theta}{2}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 50°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 119



Sea "$x$" el inradio del $\triangle$ABC

Dato: $m-n=8$

- Por teorema de Poncelet: $AB+BC=AC+2x$

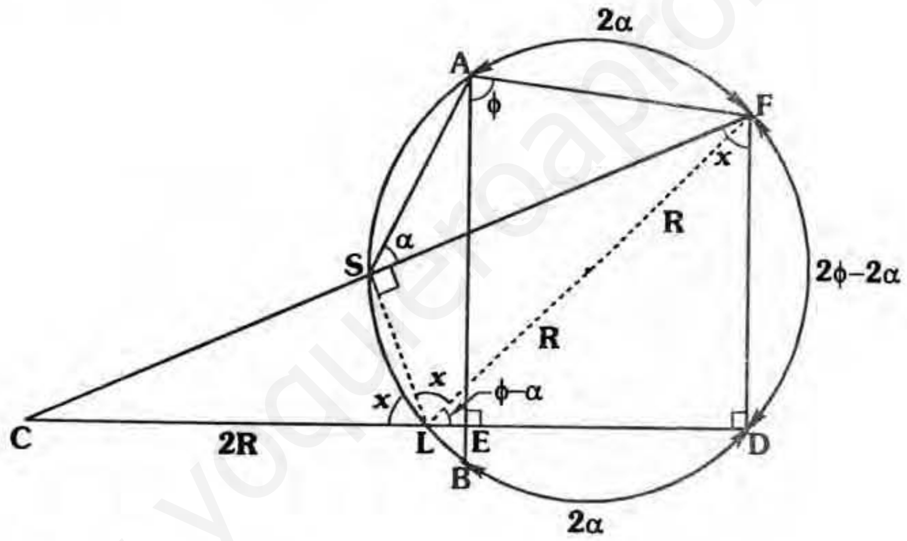
$$\Rightarrow \cancel{a}+m+m+\ell+b=\cancel{a}+2n+\cancel{\ell}+b+2x$$

$$\Rightarrow 2m=2n+2x \quad \Rightarrow \quad x=m-n$$

$$\therefore \mathbf{x=8}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 120**




Nos piden "$x$" en función de $\phi$ y $\alpha$

- Como $m\overset{\frown}{AF}=2\alpha \Rightarrow m\overset{\frown}{BD}=2\alpha$

$$\Rightarrow m\overset{\frown}{FD}=2\phi \Rightarrow m\measuredangle FLD=\phi-\alpha$$

- $\overline{LF}$: diámetro $\Rightarrow CL=LF$
- Luego:

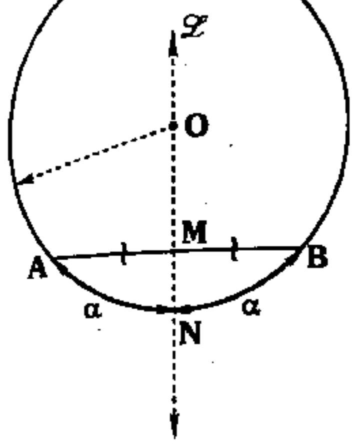
$$2x+\phi-\alpha=180°$$

$$\mathbf{x=90°+\frac{1}{2}(\alpha-\phi)}$$

**Clave C**

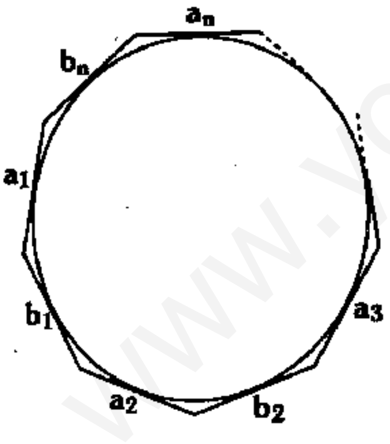
## RESOLUCIÓN Nº 121

I) VERDADERO




Se cumple: O, M y N son colineales

II) VERDADERO
En todo polígono circunscrito de número par de lados, se cumple:




Se cumple:

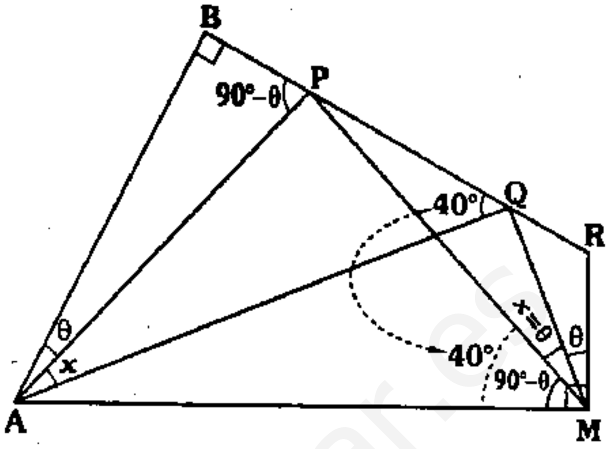
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

III) FALSO

Solamente son inscriptibles, el rectángulo y el cuadrado.

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 122




Piden "x".

- Como: $m\sphericalangle APB = m\sphericalangle AMQ = 90° - \theta$

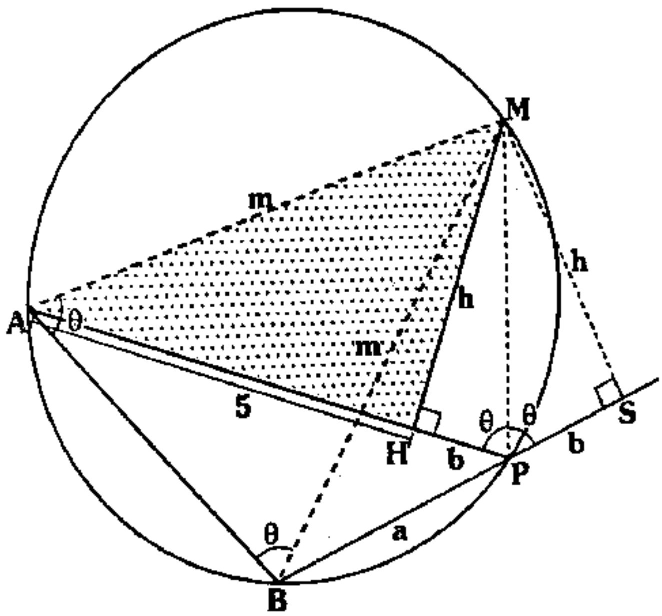
  $\Rightarrow$ ⌂APQM es inscriptible $\Rightarrow x = \theta$

- En M: $2x + 40° = 90°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 25°}$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 123




Piden: $a + b$

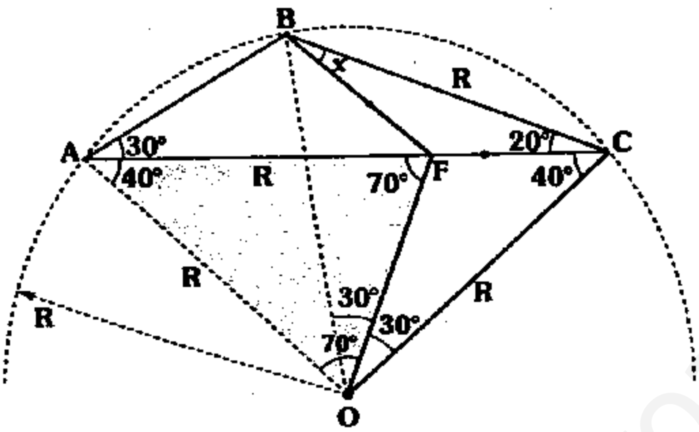
- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{BM} \Rightarrow AM = MB$

- También notemos que $\overline{PM}$ es bisectriz del $\sphericalangle APS$ entonces PH=PS.
- $\triangle AHM \cong \triangle BSM$

$$\Rightarrow \mathbf{a+b=5}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 124**




Nos piden "x".

- Se traza parte de la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$ de centro O.
- $\Delta BOC$ : equilátero y $\Delta AOF$ : isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle OFA=70° \Rightarrow m\sphericalangle FOC=30°$

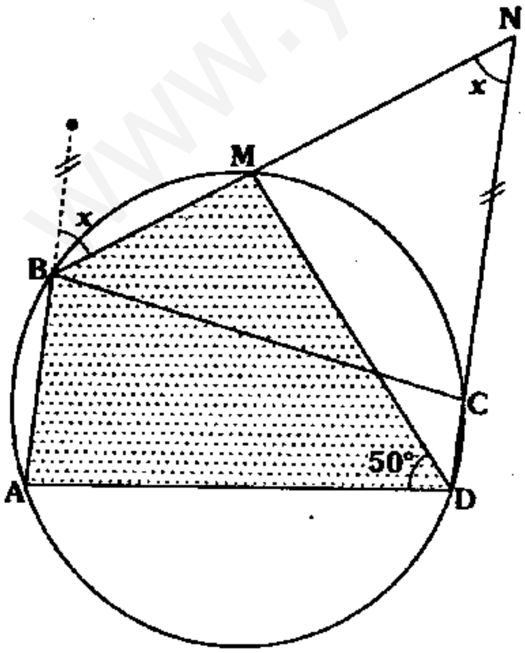
- En el $\Delta BOC$ :

como $m\sphericalangle BOF = m\sphericalangle FOC = 30°$, entonces: FB=FC

$$\therefore \ \mathbf{x=20°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 125**



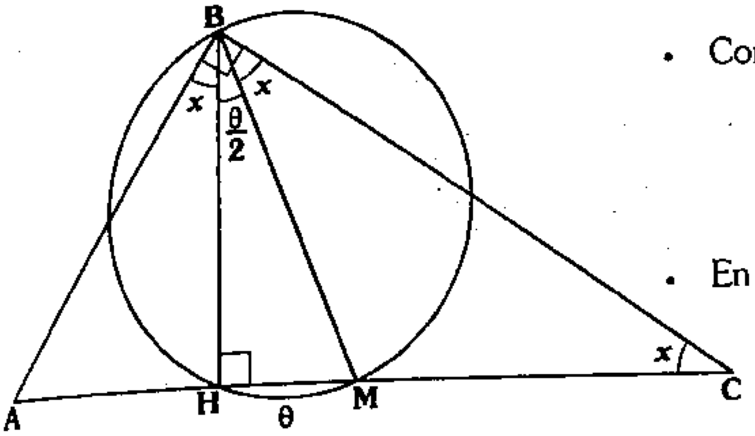

Nos piden $x$.

- Como $\overline{AB} // \overline{DN} \Rightarrow m\sphericalangle SBM = x$
- En el ⌂ABMD:

$$\mathbf{x=50°}$$

**Clave E**

## Resolución Nº 126




Nos piden $x$.

- Como M es punto medio de

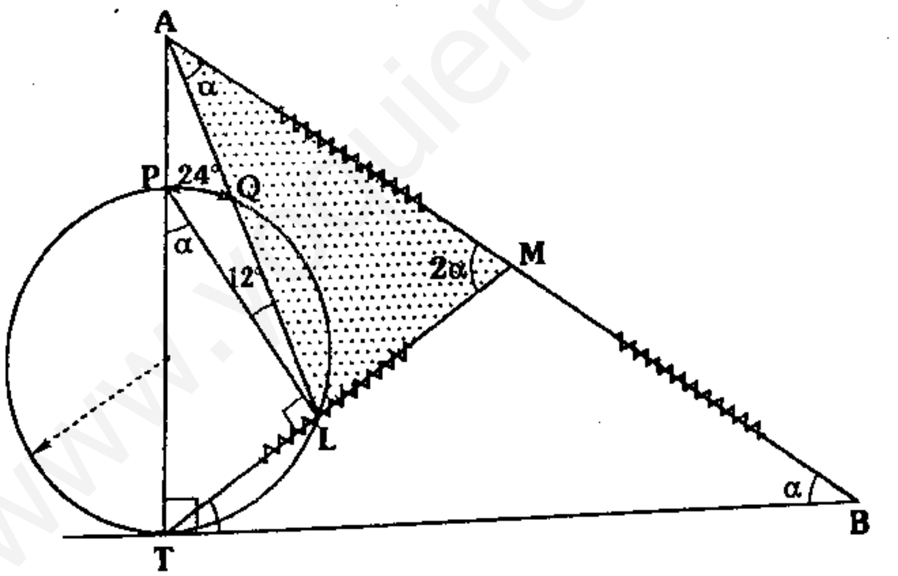
$$\overline{AC} \;\Rightarrow\; AM = MC = BM$$

- En B: $2x + \dfrac{\theta}{2} = 90°$

$$\therefore\; \mathbf{x = 45° - \frac{\theta}{4}}$$

**Clave E**

## Resolución Nº 127



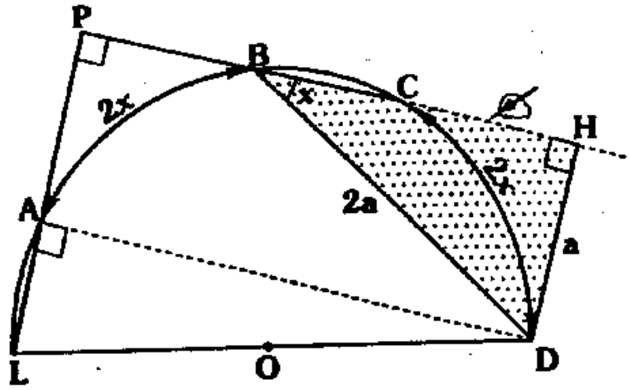

Nos piden $\alpha$.

- Como M es punto medio de $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ $AM = MC = TM$
- $\Delta$TMB: isósceles.
- En $\Delta$ALM: $\alpha + 2\alpha = 90° + 12$

$$\therefore\; \alpha = \mathbf{34°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 128**



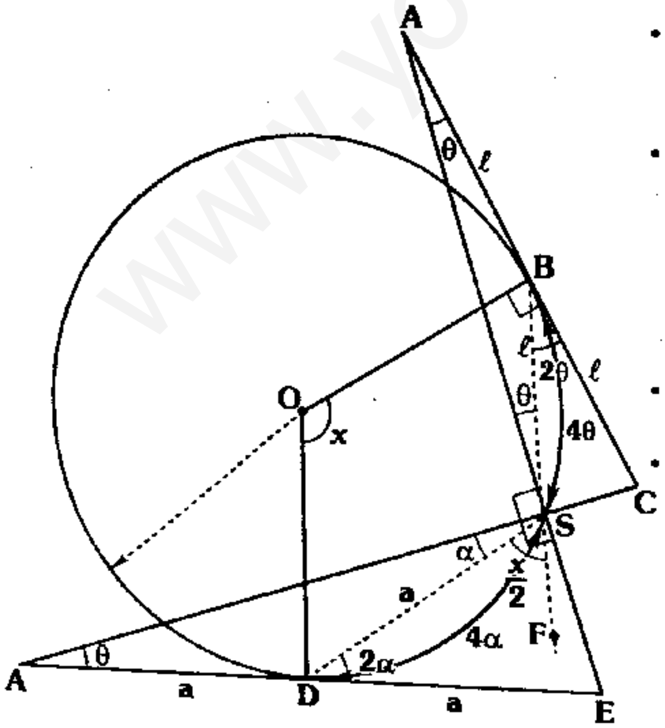

Nos piden: $m\widehat{AB}$

- Como $m\sphericalangle LAD=90° \Rightarrow \overline{AD}//\overline{PC} \Rightarrow m\widehat{CD}=m\widehat{AB}=2x$
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle DBC=x$
- En ⊿BHD: notemos que BD=2(DH) $\Rightarrow x=30°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{CD}=m\widehat{AD}=60°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 129**




Nos piden $x$.

- En los triángulos rectángulos ESC y CSA:

  CD=DS=DE y AB=BC=BS

- Como

  $\Rightarrow x=m\widehat{DS}+m\widehat{BS} \rightarrow x=4\alpha+4\theta$

  $\rightarrow x=4(\alpha+\theta)$

- Por propiedad: $m\sphericalangle FSD=\dfrac{x}{2}$
- En S:

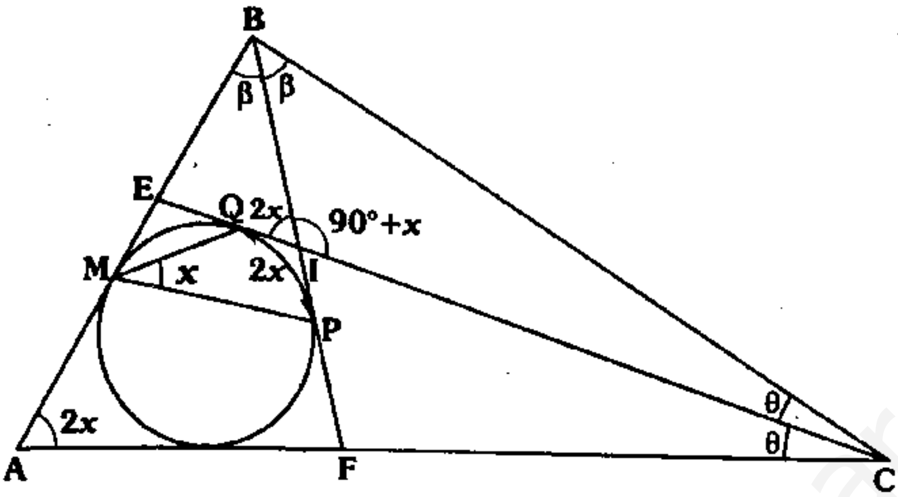
$$\underbrace{\alpha+\theta}+\frac{x}{2}=90°$$

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{2}=90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=120°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 130**



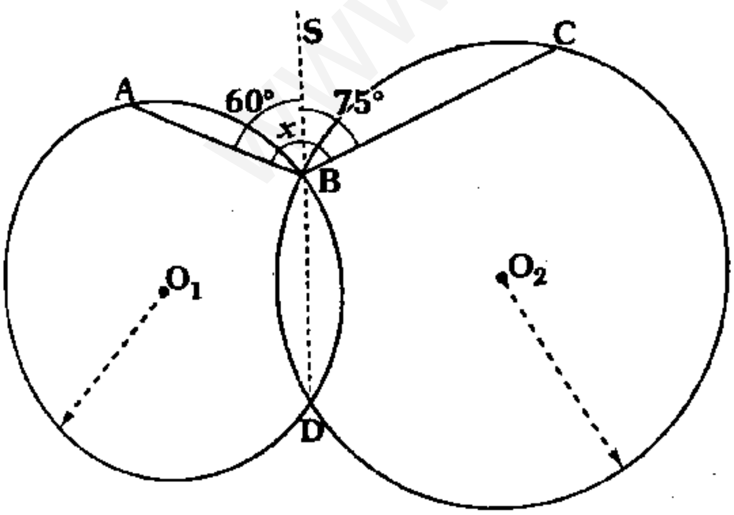

Nos piden m∢BIC

- Por propiedad en el ΔABC : m∢BIC = 90° + x
- Como $\quad$ m∢QMP = x → m$\widehat{QP}$ = 2x → m∢QIB = 2x
- En I: $\quad$ $2x + 90° + x = 180° \rightarrow x = 30°$

$$\therefore \quad \mathbf{m∢BIC = 120°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 131**




Nos piden x.

- Datos: $\quad$ m$\widehat{ABD}$ = 120° y

  m$\widehat{CBD}$ = 150°

- Por ángulo exinscrito:

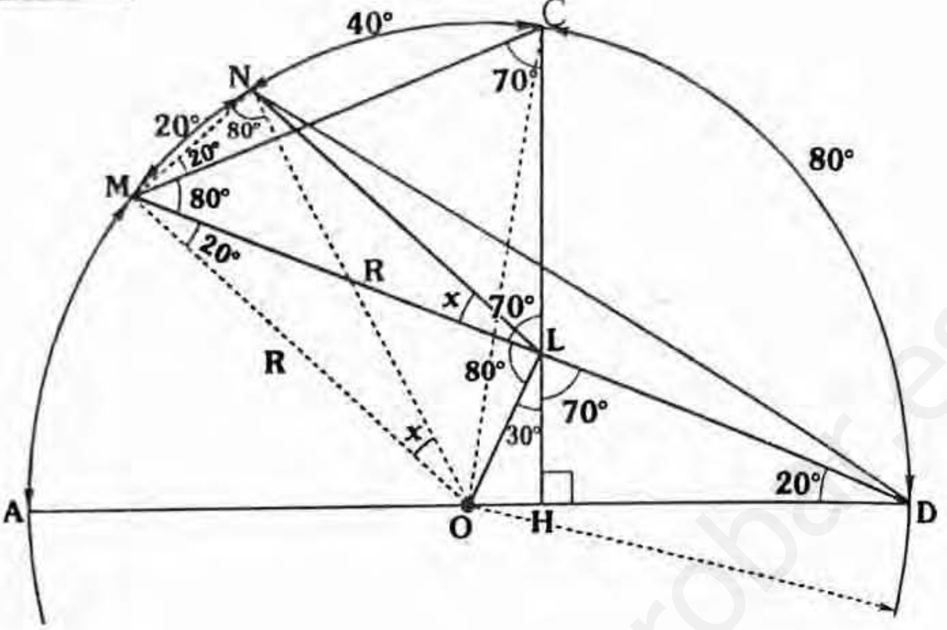
$$m∢ABS = \frac{120°}{2} = 60° \quad y$$

$$m∢SBC = \frac{150°}{2} = 75°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 135°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 132**



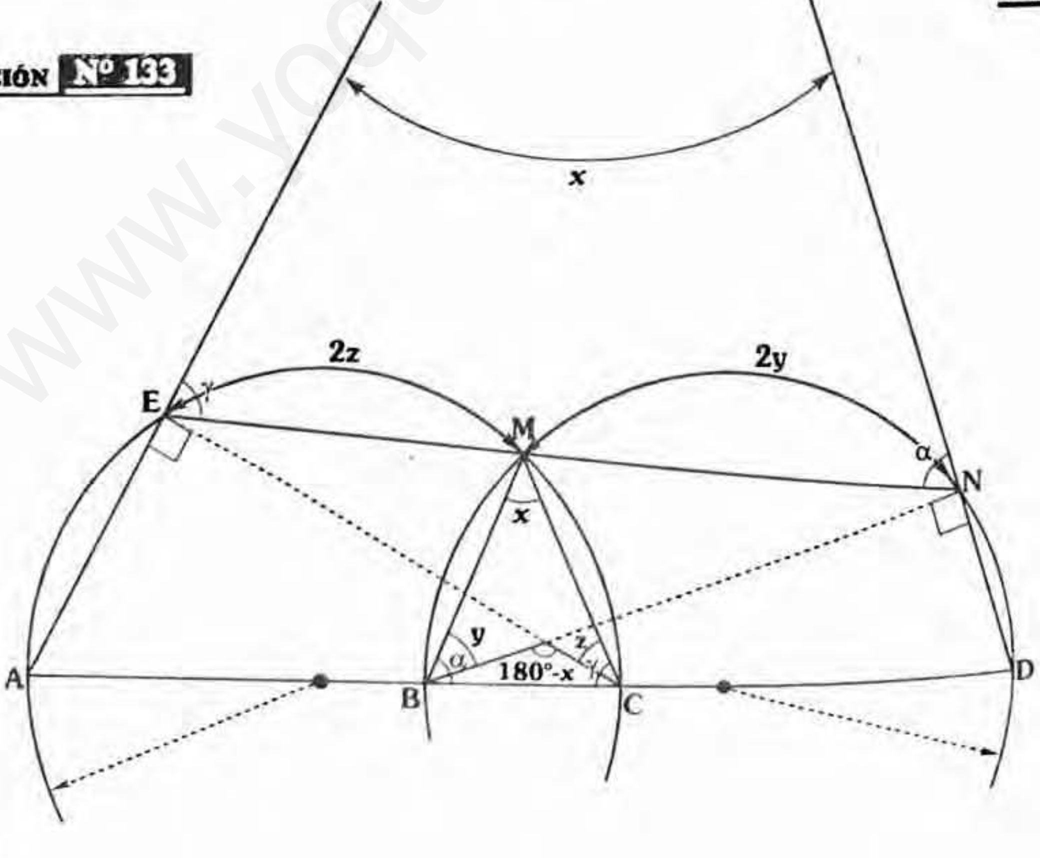

Nos piden $x$.

- $\Delta AOM$ : equilátero
- $\Delta LMC$ : isósceles $\Rightarrow CM = ML = R$
- $\Delta OML$ : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle NLM = m\measuredangle NOM = x$

$$\therefore\ x = 20°$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 133**



Nos pide $x$.

- Dato $2z + 2y = \theta \;\rightarrow\; z + y = \dfrac{\theta}{2}$
- Sea "S" la intersección de las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{DN}$
- Como los ⏢s AEMC y BMND son inscritos

$\rightarrow\; m\measuredangle ACM = m\measuredangle NES = \gamma$ y

$m\measuredangle MBD = m\measuredangle MNS = \alpha$

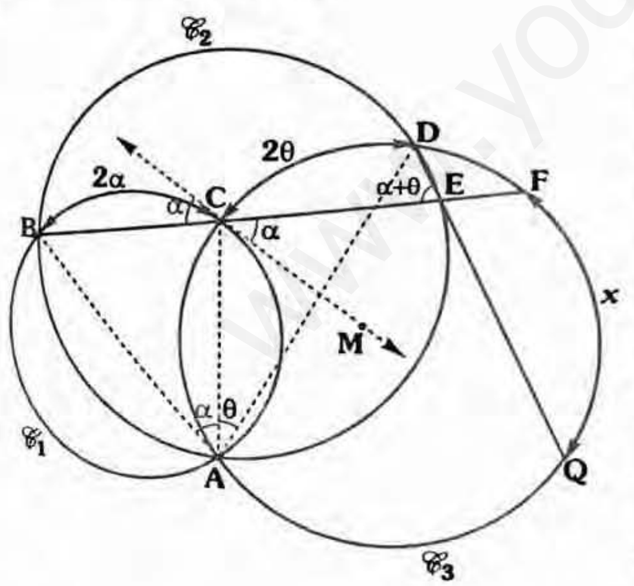
- En $\Delta$ESN: $m\measuredangle ESN = x$
- En la región sombreada:

$$180° - x = \underbrace{y + z}_{\frac{\theta}{2}} + x$$

$$\therefore\; \mathbf{x = 90° - \frac{\theta}{4}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 134**





- Demostraremos también que $\overleftrightarrow{CQ}$ es tangente a $\mathscr{C}_3$.
- Para $\overleftrightarrow{CQ}$ sea tangente a $\mathscr{C}_3$, vamos a proceder así: se traza la tangente a $\mathscr{C}_1$ en C, se ubica en dicha recta.
- Sea $m\widehat{BC} = 2\alpha \;\rightarrow\; m\measuredangle MCF = \alpha$
- Para que la recta pase por Q será suficiente probar que $m\widehat{FQ} = 2\alpha$.
- Por ángulo interior en $\mathscr{C}_3$:

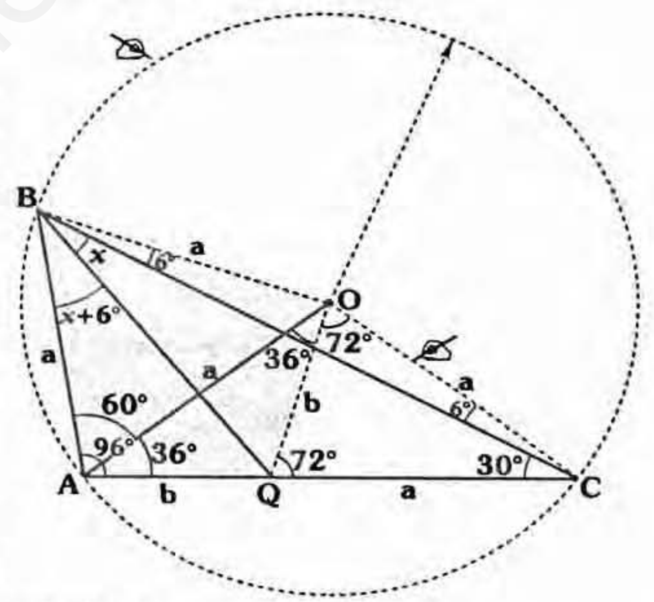
$$\alpha + \theta = \frac{x + 2\theta}{2}$$

$$\rightarrow\; \alpha = x$$

$$\therefore\; \mathbf{m\widehat{FQ} = 2\alpha}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 135**





Nos piden $x$.

- Se traza la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$ de centro O y radio a.
- $\Delta ABO$ es equilátero
- Notemos que ABOQ es un trapezoide

simétrico

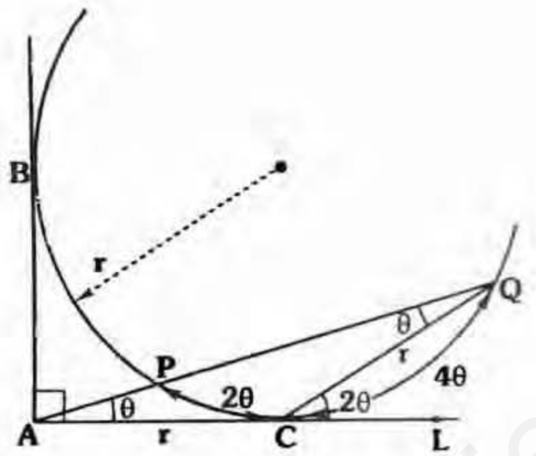
$\rightarrow$ m∢ABQ = m∢QBO = $x + 6$

$\rightarrow$ $2x + 12° = 60°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 24°}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 136**




Nos piden m∢PAC

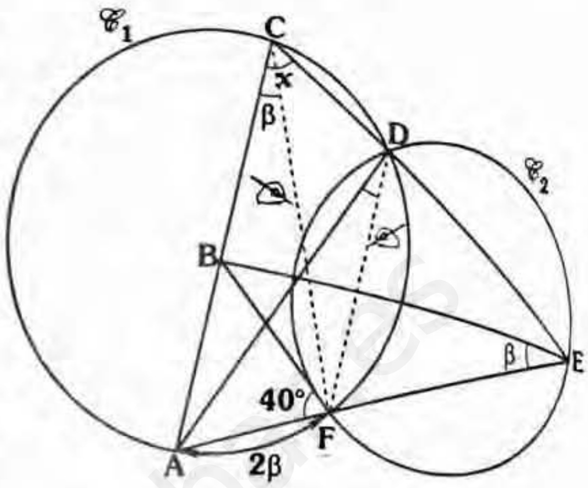
- Dato: $m\widehat{CQ} = 2(\underbrace{m\widehat{CP}}_{2\theta})$

  $\rightarrow m\widehat{CQ} = 4\theta$
- Por ángulo inscrito: m∢PQC = $\theta$
- Por ángulo seminscrito: m∢LCQ = $2\theta$
- En $\Delta$ACQ : m∢QAC = $\theta$
- $\Delta$ACQ : isósceles $\rightarrow$ AC = CQ = r
- Como CQ = r $\rightarrow$ $\underbrace{m\widehat{CQ}}_{4\theta} = 60°$

$\therefore$ $\mathbf{\theta = 15°}$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 137**




Nos piden $x$.

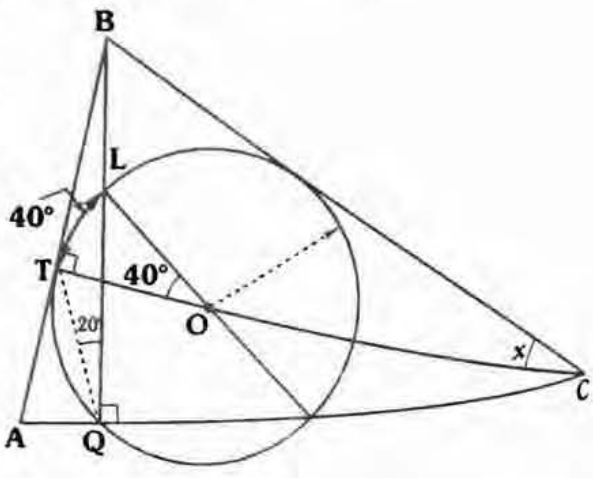
- Sea $m\widehat{AF} = 2\beta$

  $\rightarrow$ m∢ACF = $\beta$ = m∢ADF
- En $\mathscr{C}_2$ : m∢FEB = $\beta$
- Como m∢BCF = m∢BEF $\rightarrow$ ⏢BCEF es inscriptible

$\mathbf{x = 40°}$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 138**



Nos piden $x$.

- Por ángulo central:

$$m\widehat{TL} = 40°$$

- Por ángulo inscrito:

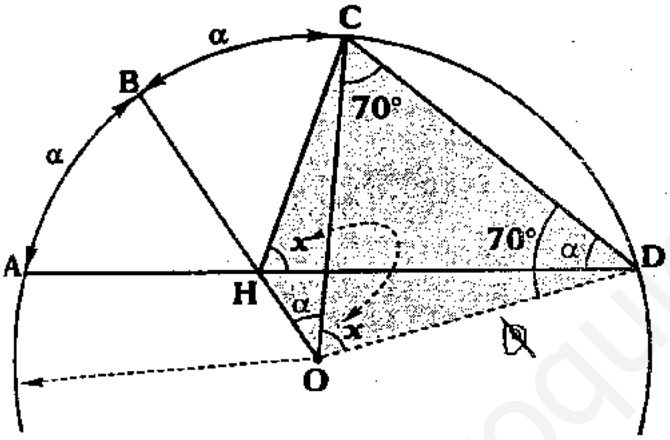
$$m\measuredangle TQB = 20°$$

- $\triangle$QTBC: inscriptible

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 20°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 139**




Piden $x$.

- Notemos por ángulo central:

$$m\measuredangle BOC = \alpha$$

y por ángulo inscrito: $m\measuredangle ADC = \alpha$

- $\triangle$OHCD: inscriptible

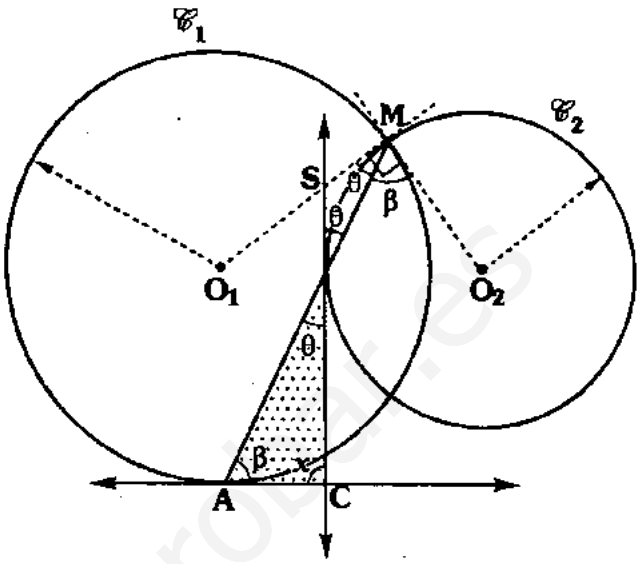
$$\rightarrow \ m\measuredangle CHD = m\measuredangle COD = x$$

- $\Delta$OCD : isósceles

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 40°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 140**




Nos piden $x$.

- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales

$$\rightarrow \ m\measuredangle O_1MO_2 = 90°$$

- $\overleftrightarrow{O_1M}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ y $\overleftrightarrow{O_2M}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$.

- $m\measuredangle SBM = m\measuredangle SMB = \theta$ y

$m\measuredangle O_2MA = m\measuredangle CAM = \beta$

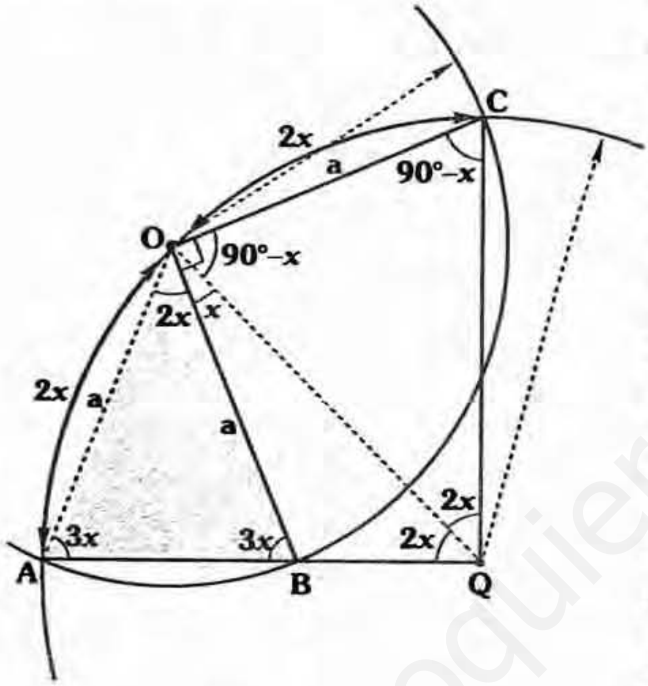
- Como :

$$\theta + \beta = 90°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 90°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 141**




Nos piden $m\widehat{AO}$

- Sea $m\widehat{AO} = 2x \rightarrow m\sphericalangle AQO = 2x$
- $\square$AOCQ: trapezoide simétrico

  $\rightarrow m\sphericalangle OQC = 2x$
- $\Delta QOC$ : isósceles

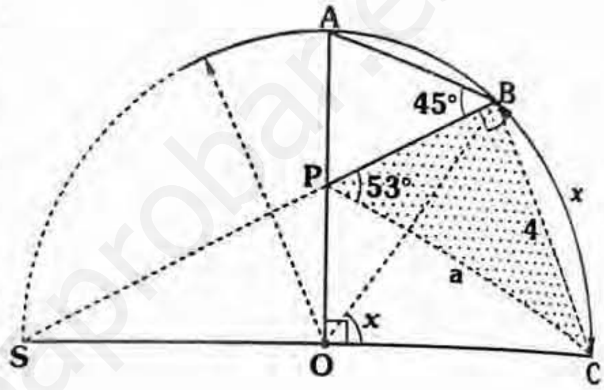
  $\rightarrow m\sphericalangle QOC = 90° - x$
- $\Delta AOB$ : isósceles

  $3x + 3x + 2x = 180°$

  $\therefore$ **$2x = 45°$**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 142**




Piden $x$.

- Dato: a $\rightarrow$ menor valor entero
- Como $m\sphericalangle ABP = 45° \rightarrow$ al prolongar $\overline{PB}$ y completar el arco, tendremos:

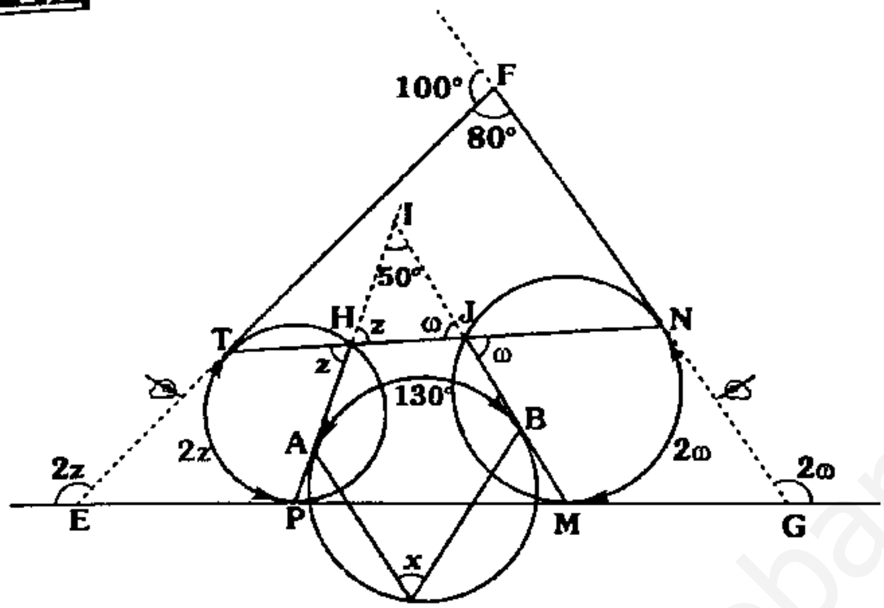
  $m\widehat{AS} = 90°$
- Luego $m\sphericalangle SBC = 90°$
- En ⊿PBC:

  $a > 4 \rightarrow a = 5$
- ⊿PBC: notable de 53°
- $\square$OPBC: inscriptible

  $\therefore$ **$x = 53°$**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 143



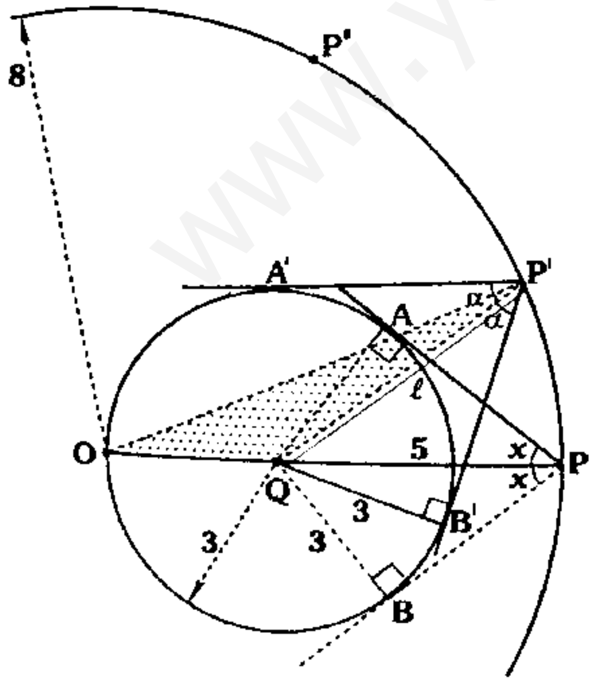

Nos piden $x$.

- Sea $m\measuredangle THP = z$ y $m\measuredangle MJN = \omega \rightarrow m\widehat{TP} = 2z$ y $m\measuredangle \widehat{MN} = 2\omega$
- En $\Delta EFG$: $2z + 2\omega + 100° = 360° \rightarrow z + \omega = 130°$
- En $\Delta HJI$: $m\measuredangle HIJ = 50° \rightarrow m\widehat{AB} = 130°$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 65°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 144



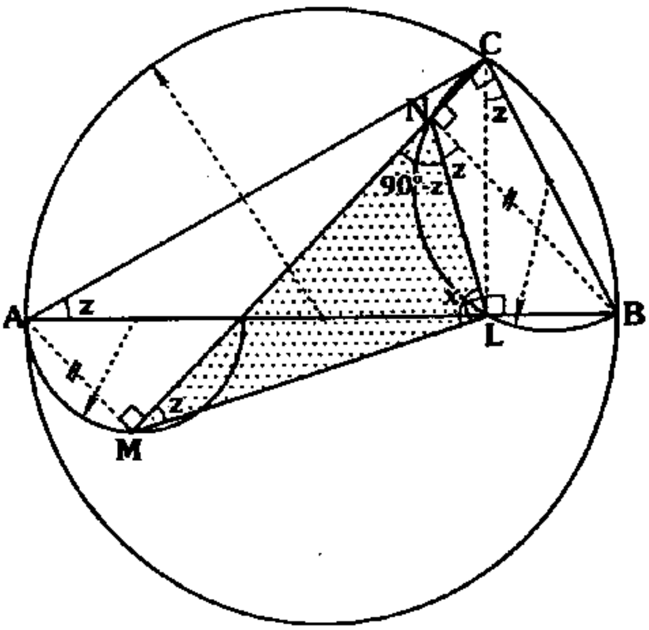

Si por un momento fijamos P, es claro que el mayor ángulo se dará cuando $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangente.

- Veamos los triángulos PBQ y P'B'Q', como $QP > \ell \rightarrow x > \alpha$
- $m\measuredangle APB$ máximo, será: $2x$

$$\therefore \quad \mathbf{m\measuredangle APB = 74°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 145




Nos piden $x$.

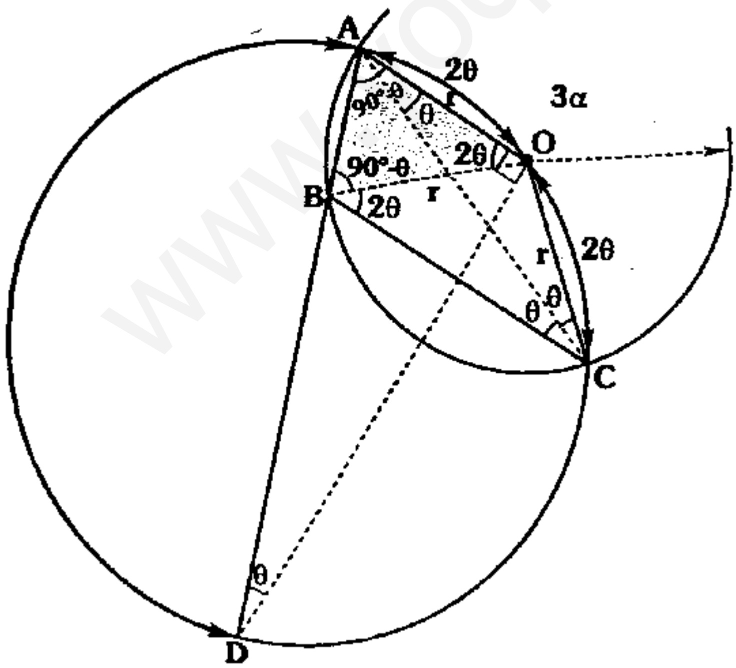
- Notemos que ⌂AMLC es inscriptible
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle CML = z$
- ⌂CNLB: inscrito
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle LCB = m\sphericalangle LNB = z$
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle LNM = 90° - z$
- En $\Delta MLN$ :

$$x + z + 90° - z = 180°$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 90°}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 146



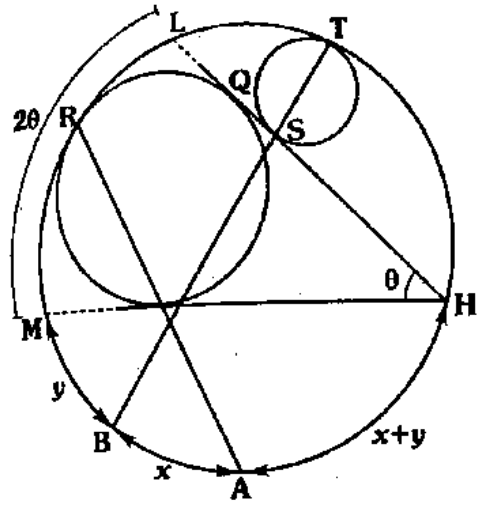

Nos piden $m\widehat{AD}$.

- Sea $m\widehat{AO} = m\widehat{OC} = 2\theta$
- $\Delta AOC$ : isósceles
- Como $\overline{AO} // \overline{BC}$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle ACB = \theta$
- $\Delta BOC$ : isósceles
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle OBC = m\sphericalangle OCB = 2\theta$
- $\Delta AOB$ : isósceles
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle OAB = 90° - \theta$
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle AOD = 90°$

$\therefore$ $\boldsymbol{m\widehat{AD} = 180°}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 147




Nos piden $x$ en función de $\theta$

- Sea $m\widehat{MB} = y$ por ángulo inscrito:

$$m\widehat{ML} = 2\theta$$

- Por propiedad:

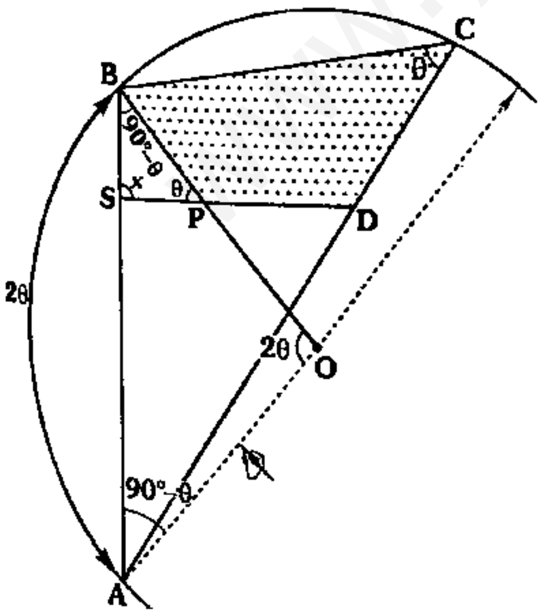
$$m\widehat{MA} = m\widehat{AH} = x + y$$

$$m\widehat{LMB} = m\widehat{BH} \rightarrow 2\theta + y = 2x + y$$

$$\therefore\ x = \theta$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 148




Por demostrar: $\overline{DP} \perp \overline{AB}$

- Sea $m\measuredangle ACB = \theta \rightarrow m\measuredangle AOB = 2\theta$
- En $\Delta AOB$: $m\measuredangle ABO = 90° - \theta$
- En ⌂DPBC que es inscriptible:

$$m\measuredangle BPS = m\measuredangle BCD = \theta$$

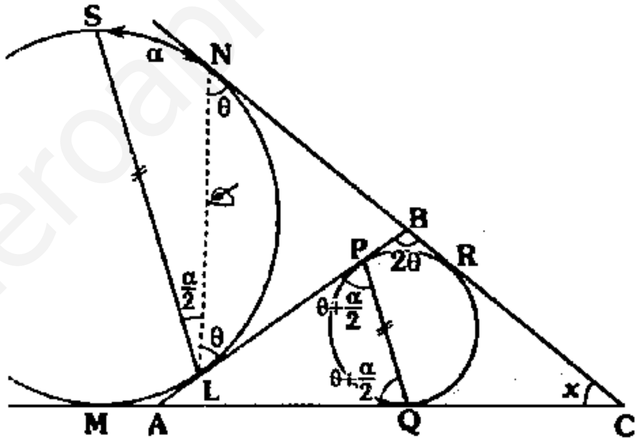
- En $\Delta BSP$: $x + 90° - \theta + \theta = 180°$

$$\Rightarrow x = 90°$$

$$\therefore\ \overline{AB} \perp \overline{PD}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 149




Nos piden $x$ en función de $\alpha$.

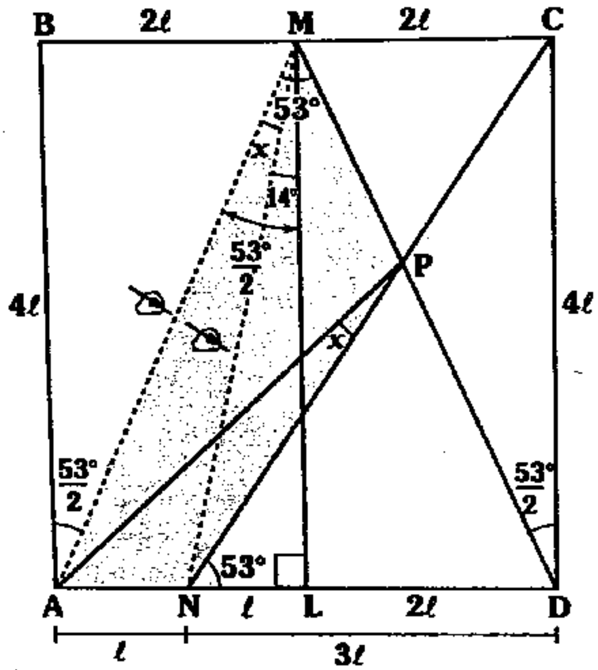
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle SLN = \dfrac{\alpha}{2}$
- Sea $m\measuredangle BLN = \theta \rightarrow m\measuredangle LBC = 2\theta$
- Como $\overline{LS} // \overline{QP} \rightarrow m\measuredangle LPQ = \theta + \dfrac{\alpha}{2}$
- En ⌂QPBC:

$$x + 2\theta = \theta + \frac{\alpha}{2} + \theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\ x = \alpha$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 150**




Nos piden x.

- Notemos que: $m\sphericalangle CND = m\sphericalangle AMD = 53°$

  $\rightarrow$ ⏢AMPN es inscriptible

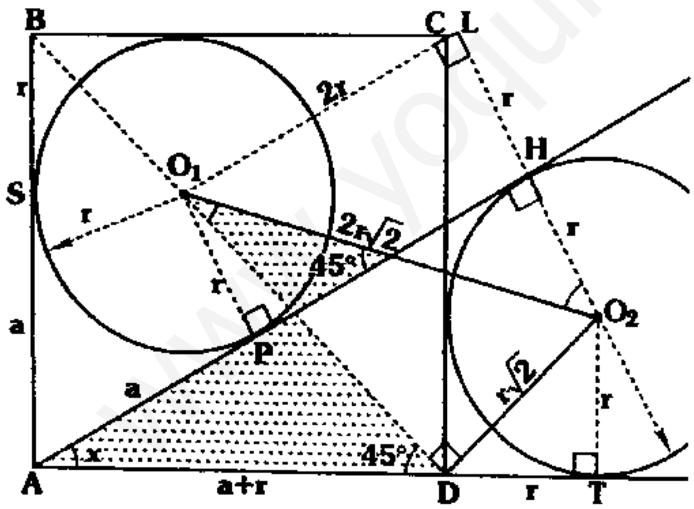
  $\rightarrow \quad m\sphericalangle AMN = x$

- Sea traza $\overline{ML} \perp \overline{AD}$ (L en $\overline{AD}$)
- ⊿NLM: notable de 14°
- Finalmente: $x + 14° = \dfrac{\overset{26°30'}{\overbrace{53°}}}{2}$

$\therefore \quad$ **$x = 12°30'$**

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 151**




Nos piden x.

- Sea **r** el radio de las circunferencias congruentes y AS=a $\rightarrow$ AD=a+r y DT=r
- Como AP=a $\rightarrow$ PH=2r
- B, $O_1$ y D: colineales
- ⊿ $O_1LO_2$: notable de 45°

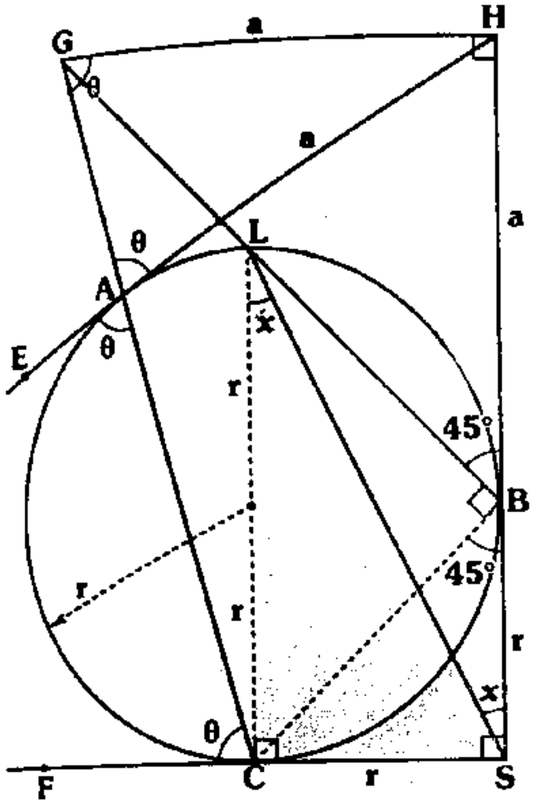
  $\rightarrow \quad O_1O_2 = 2r\sqrt{2}$

- ⊿ $O_1DO_2$: notable de 30°
- En la región sombreada: $\quad x + 45° = 30° + 45°$

$\therefore \quad$ **$x = 30°$**

**Clave C**

## Resolución N° 152




Nos piden $x$.

- Notemos que:

$$m\sphericalangle FCA = m\sphericalangle EAC = \theta$$

- Como $\overline{GH} // \overline{FS} \rightarrow m\sphericalangle HGA = \theta$

$\rightarrow$ HG=HA=HB

$\rightarrow m\sphericalangle GBH = 45°$

- CS=SB $\rightarrow m\sphericalangle CBS = 45°$

$\rightarrow m\sphericalangle CBL = 90°$

$\rightarrow$ $\overline{LC}$ es diámetro

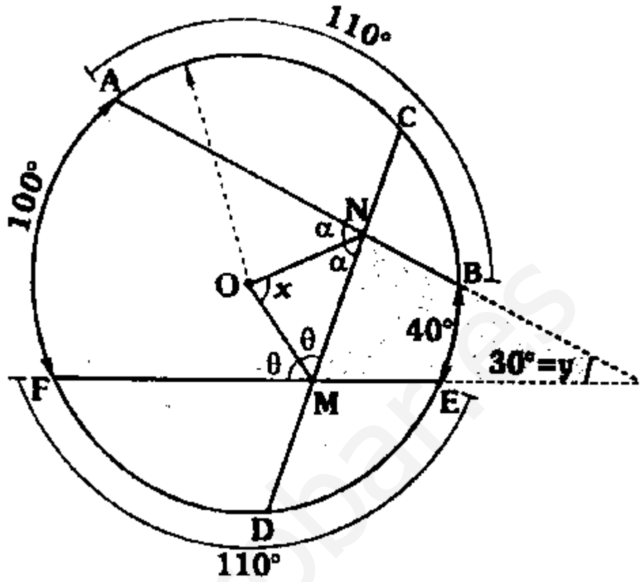
$\rightarrow \overline{CL} // \overline{SB} \rightarrow m\sphericalangle CLS = x$

- ⊿LCS: notable

$$\therefore \ \boldsymbol{x = \frac{53°}{2}}$$

**Clave D**

## Resolución N° 153




Piden $x$.

- Como AB=FE=CD

$\rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{FE} = m\widehat{CD} = 110°$

- Luego $m\widehat{AF} = 100°$

- Por ángulo exterior:

$$y = \frac{100° - 40°}{2} = 30°$$

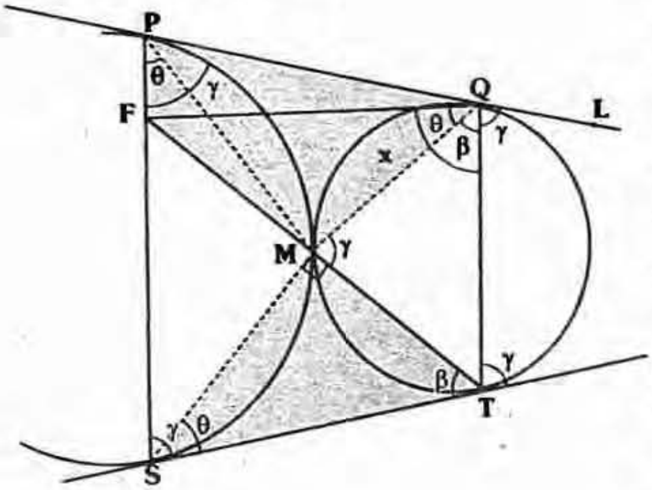
- En el ΔNML, por propiedad:

$$x = 90° - \frac{30°}{2}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 75°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 154**




Nos piden $x$.

- Propiedad:

  $-m\sphericalangle SMT = 90° \rightarrow \theta+\beta=90°$

$m\sphericalangle PST = m\sphericalangle SPQ = m\sphericalangle TQL = m\sphericalangle TMQ = \gamma$

- $\square$FPQM: inscriptible

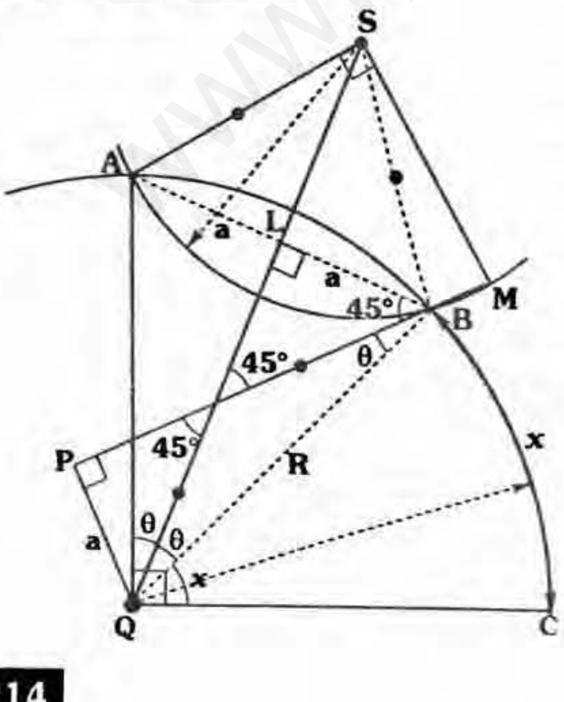
  $\rightarrow m\sphericalangle FPM = m\sphericalangle FQM = \theta$

- Notemos $x = \theta + \beta$

$$\therefore \; \mathbf{x = 90°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 155**




Nos piden $x$.

- ASBQ: trapezoide simétrico

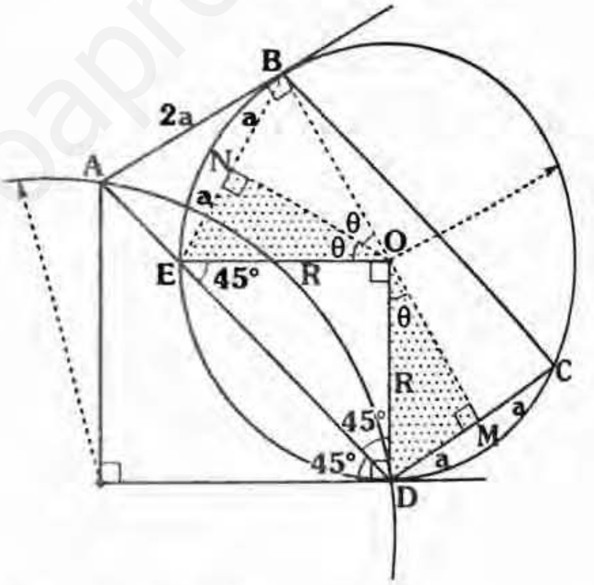
  $\rightarrow \overline{QS} \perp \overline{AB} \rightarrow AL=LB=PQ$

- $\triangle BPQ \cong \triangle BLQ \rightarrow m\sphericalangle PBQ = \theta$
- Luego en Q: $x + 2\theta = 90°$
- En $\triangle QLB$: $45° + 2\theta = 90°$

$$\therefore \; \mathbf{x = 45°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 156**




Nos piden $m\overset{\frown}{CD}$.

- Como $\overline{OB} \perp \overline{AB}$ $\rightarrow$ al prolongar $\overline{BO}$ se tendrá:

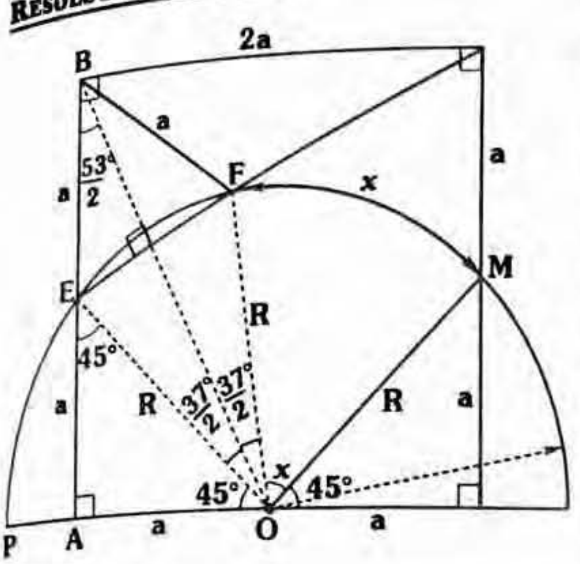
  $\overline{BM} \perp \overline{CD} \rightarrow CM=MD=a$

- $AB=BE=CD=2a$
- $\triangle ENO \cong \triangle DMO$.
- En "O": $3\theta + 90° = 180° \rightarrow \theta = 30°$

$$\therefore \; \mathbf{m\overset{\frown}{CD} = 60°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 157**



Nos piden $x$.

- Notemos que $\triangle$BAC: notable de $53°/2$
- BEGF: trapezoide simétrico

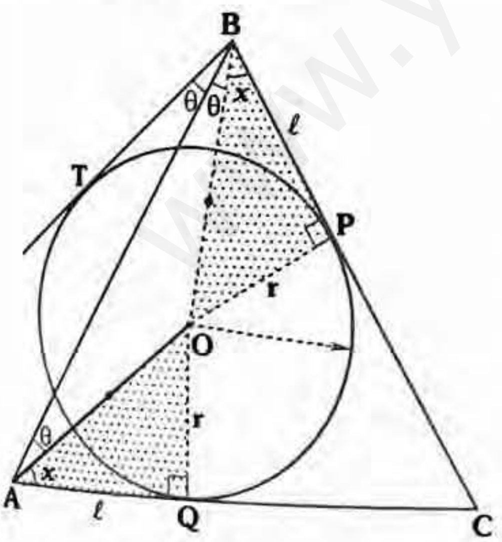
  $\rightarrow m\sphericalangle EOB = m\sphericalangle BOF = 37°/2$

- En "O": $45° + 37° + x + 45° = 180°$

$$\therefore\ x = 53°$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 158**



Nos piden $x$.

- Notemos que $CQ = CP \Rightarrow AQ = BP$

  $\rightarrow \triangle AQO \cong \triangle OPB \rightarrow AO = OB$

- Como

  $\overline{TB} // \overline{AO} \rightarrow m\sphericalangle TBA = m\sphericalangle OAB = \theta$

  $m\sphericalangle OBA$

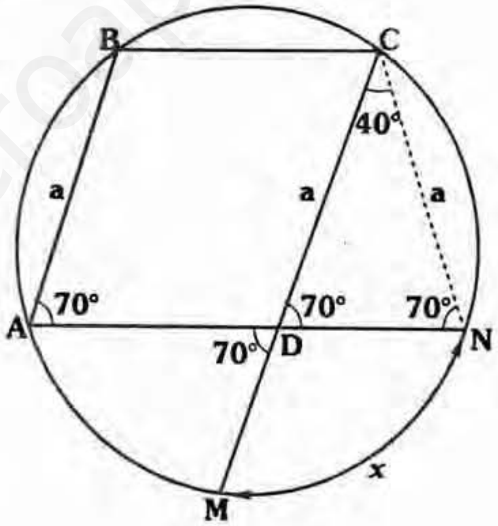
- Como $\overrightarrow{BO}$ bisectriz del ángulo TBP

  $\rightarrow x = 2\theta$ y $x + \theta = 90°$

$$\therefore\ x = 40°$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 159**



Nos piden $x$.

- ABCD: paralelogramo

  $\rightarrow \overline{BC} // \overline{AN}$

  $\rightarrow AB = CN$

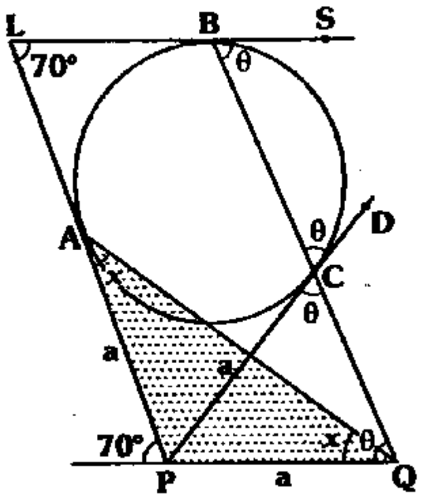
- $\triangle DCN$ : isósceles

  $\rightarrow m\sphericalangle DNC = 70°$ y $m\sphericalangle MCN = 40°$

$$\therefore\ x = 80°$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 160




Nos piden x.

- Como

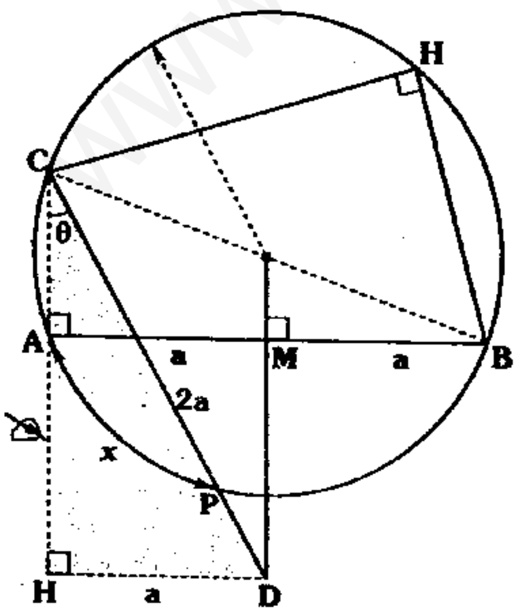
  $\overline{LB}//\overline{PQ} \rightarrow m\sphericalangle PQB = m\sphericalangle SBQ = \theta$

- $m\sphericalangle SBC = m\sphericalangle BCD = \theta$
- $\Delta PCQ$ : isósceles $\rightarrow$ PQ=a
- $\Delta PAQ$ : isósceles $\rightarrow x + x = 70°$

$$\therefore \; x = 35°$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 161




Nos piden x.

- Como $m\sphericalangle CHB = 90° \rightarrow \overline{CB}$ es diámetro $\rightarrow m\sphericalangle CAB = 90°$
- Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{DH} \perp \overline{CA}$ $\rightarrow$ AMDH rectángulo.

  $\rightarrow$ DH=MA=a y CD=2a

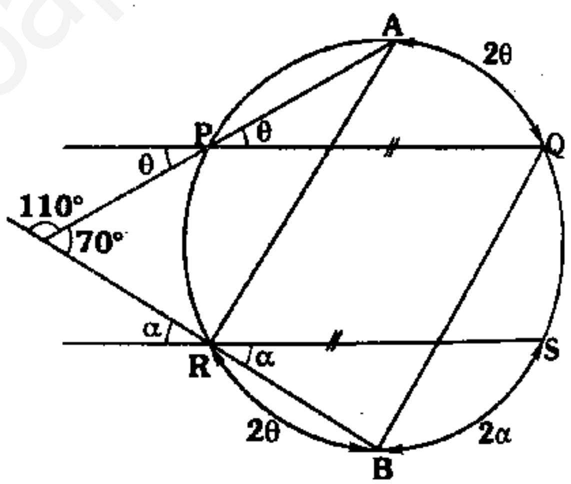
- $\triangle$DHC: notable, pues: CD=2(HD)

  $\rightarrow \theta = 30°$

$$\therefore \; x = 60°$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 162



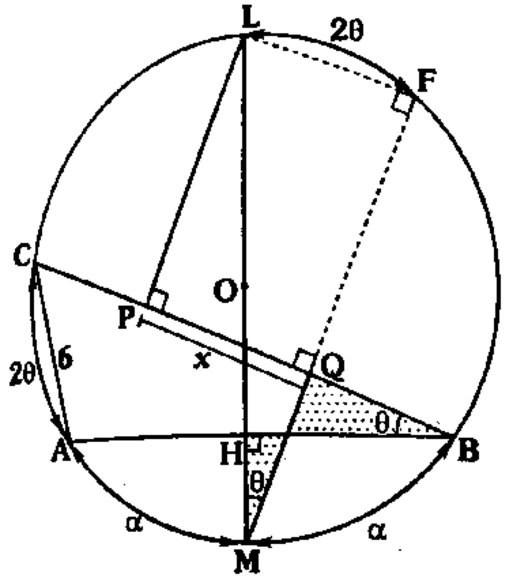

Nos piden $m\widehat{RBS}$

- Como $\overline{RA}//\overline{BQ} \rightarrow m\widehat{RB} = m\widehat{AQ} = 2\theta$
- Sea $m\widehat{BS} = 2\alpha$
- Como $\overline{PQ}//\overline{RS} \rightarrow \alpha + \theta = 70°$

$$\therefore \; m\widehat{RBS} = 2\alpha + 2\theta = 140°$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 163




Nos piden $x$.

- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{MB} \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$
- En la región sombreada.

$$m\sphericalangle HMQ = m\sphericalangle HBQ = \theta$$

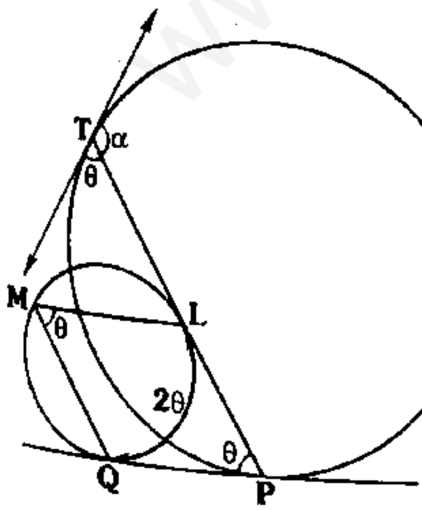
- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AC} = m\widehat{LF} \quad \rightarrow \quad AC = LF$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 6}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 164




Nos piden $\alpha$.

- Como MLQP es un paralelogramo

$$\rightarrow m\sphericalangle LMQ = m\sphericalangle LPQ = \theta$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{LQ} = 2\theta \qquad \rightarrow \theta + 2\theta = 180°$$

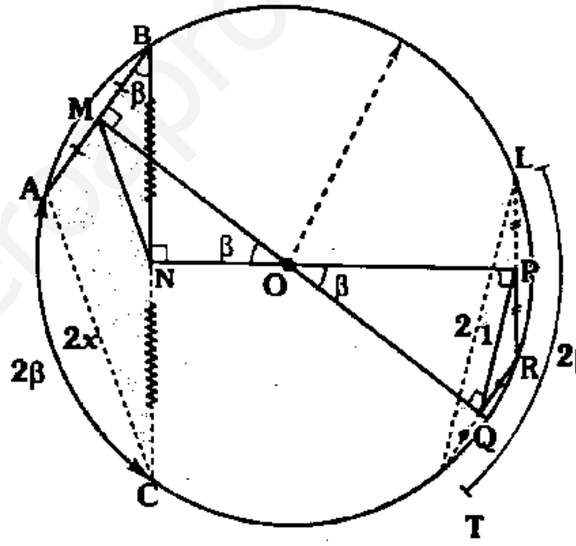
$$\rightarrow \qquad \theta = 60°$$

- En T: $\qquad \theta + \alpha = 180°$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha = 120°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 165




Nos piden $x$.

- Sea $\quad m\sphericalangle NOM = \beta \rightarrow m\sphericalangle NBM = \beta \quad$ y

$$m\widehat{LT} = 2\beta$$

- Por base media en:

* $\Delta ACB: \quad AC = 2x$

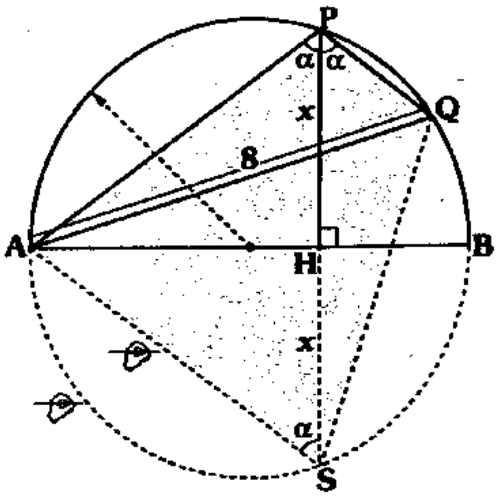
* $\Delta LRT: \quad CT = 2$

- Como $m\widehat{AC} = m\widehat{LT} \rightarrow 2x = 2$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 1}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 166**




Nos piden $x$.

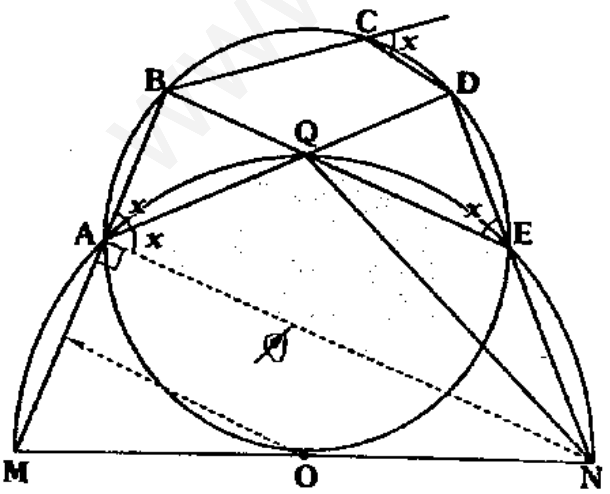
- Se completa la circunferencia y se prolonga $\overline{PH}$ hasta S $\rightarrow$ $m\measuredangle ASP = \alpha$
- APQS: trapecio isósceles

$$2x = 8$$

$$\therefore \ x = 4$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 167**



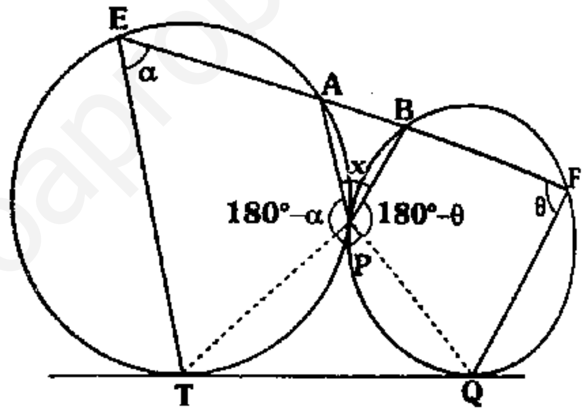

Nos piden $x$.

- $\square$ABCD inscrito $\rightarrow$ $m\measuredangle BAD = x$
- $\square$BCDE inscrito $\rightarrow$ $m\measuredangle BED = x$
- $\square$AQEN inscrito $\rightarrow$ $m\measuredangle MAN = x$
- Como $m\measuredangle NAM = 90° \rightarrow 2x = 90°$

$$\therefore \ x = 45°$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 168**




Nos piden $x$.

Dato: $\alpha + \theta = 140°$

- En los $\square$s inscritos TPAE y PBFQ:

$m\measuredangle TPA = 180° - \alpha$ y

$m\measuredangle QPB = 180° - \theta$

- En P:

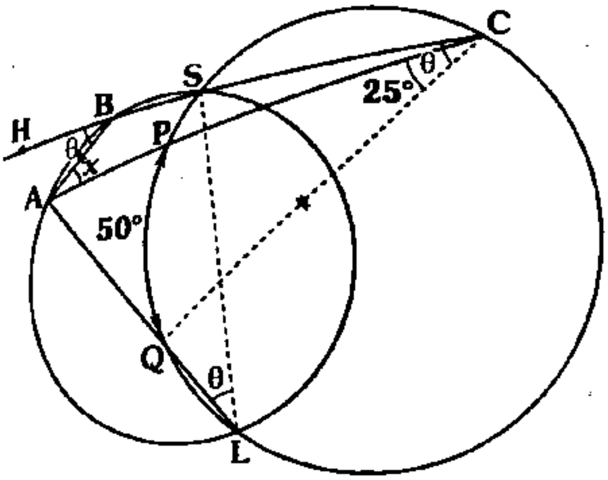
$$x + 180° - \alpha + 90° + 180° - \theta = 360°$$

$$\rightarrow x = \alpha + \theta - 90°$$

$$\therefore \ x = 50°$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 169**




Nos piden $x$.

- Sea $m\sphericalangle ALS=\theta$

  $\rightarrow m\sphericalangle HBA=\theta$ y $m\sphericalangle QCS=\theta$

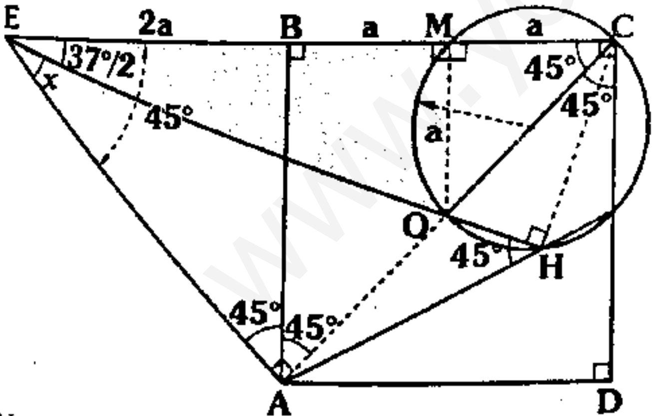
- Luego $\overline{AB}//\overline{QC}$

- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle QCP=25°$

$$\therefore\ x=25°$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 170**




Nos piden $x$.

- Como O es centro del cuadrado ABCD
  $\rightarrow$ A, O y C son colineales

- Notamos que $m\sphericalangle AHE=m\sphericalangle ACE$

- $\square$EAHC: inscriptible

  $\rightarrow m\sphericalangle CAE=90°$

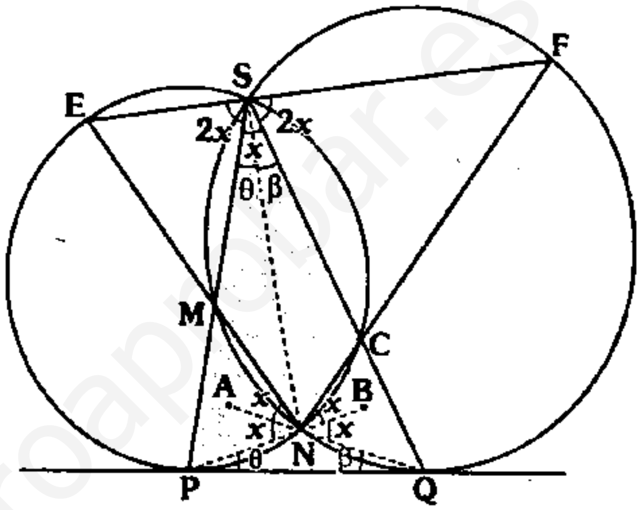
- En $\triangle$CAE: $CB=BE=2a$

- $\triangle$OMKE: notable de $37°/2$

$$\therefore\ x=53°/2$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 171**




Nos piden $x$.

- Sea $m\sphericalangle PSN=\theta$ y $m\sphericalangle NSQ=\beta$

  $\rightarrow x=\theta+\beta$

- En $\Delta PNQ$: $m\sphericalangle ANP=m\sphericalangle BNQ=x$

- En $\square$PNCS y $\square$QNMS: ambos inscritos, se cumple:

  $$m\sphericalangle ANE=m\sphericalangle BNC=x$$

- También:

  $$m\sphericalangle PNE=m\sphericalangle PSE=2x$$

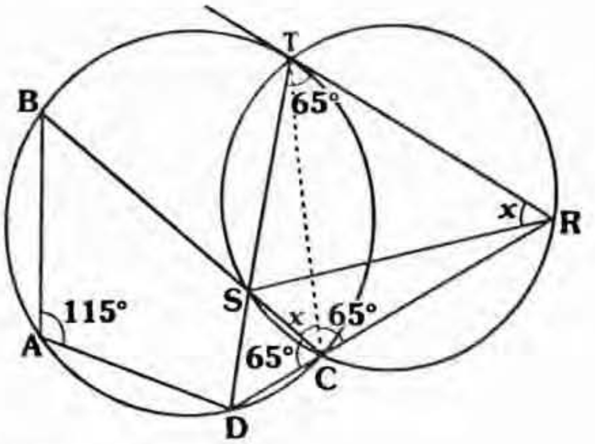
  $$m\sphericalangle QNF=m\sphericalangle QSF=2x$$

- En "S": $2x+x+2x=180°$

$$\therefore\ x=36°$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 172**




Nos piden $x$.

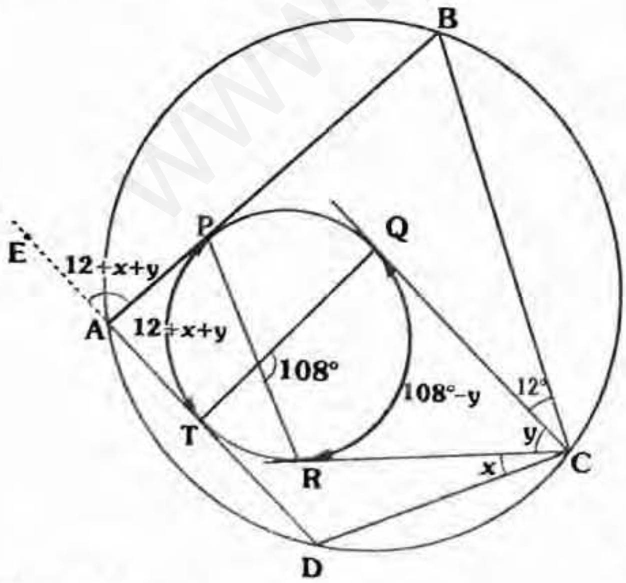
- En $\triangle$ABCD inscrito: $m\measuredangle DCB = 65°$
- En $\triangle$SCRT: $m\measuredangle STR = 65°$
- Como

  $m\widehat{TCD} = 130° \rightarrow m\measuredangle TCR = 65°$
- En "C": $65° + x + 65° = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 173**




Nos piden $x$.

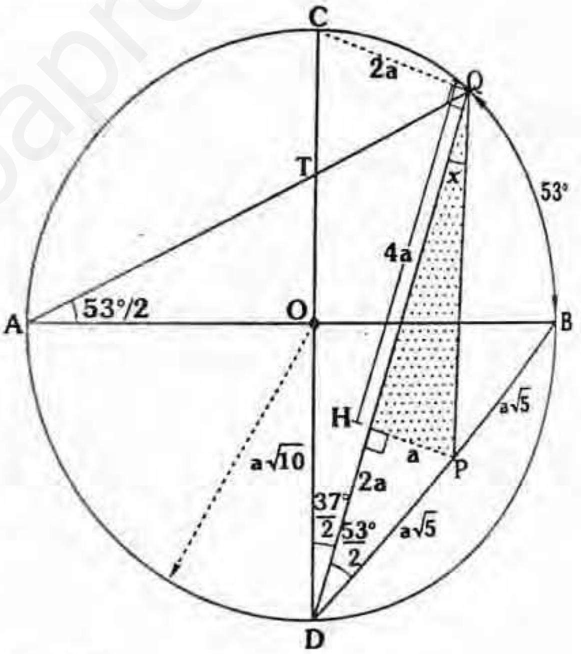
- Sea $m\measuredangle QCR = y \rightarrow m\widehat{QR} = 180° - y$
- En $\triangle$ABCD: $m\measuredangle EAB = 12 + x + y$
- Por propiedad: $m\widehat{PT} = 12 + x + y$
- Por ángulo interior:

$$108° = \frac{12° + x + \cancel{y} + 180° - \cancel{y}}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 24°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 174**




Piden $x$.

- Como OT=TC $\rightarrow$ AO=2(OT)

  $\rightarrow m\measuredangle OAT = \dfrac{53°}{2}$

- Luego $m\widehat{QB} = 53° \rightarrow m\measuredangle QDB = \dfrac{53°}{2}$

  y $m\measuredangle CDQ = \dfrac{37°}{2}$

- Se traza $\overline{PH} \perp \overline{DQ}$ (H en $\overline{DQ}$)

- En ⊿PHD:

  PH=a, HD=2a y $DP=a\sqrt{5}$

- En ⊿CQD:

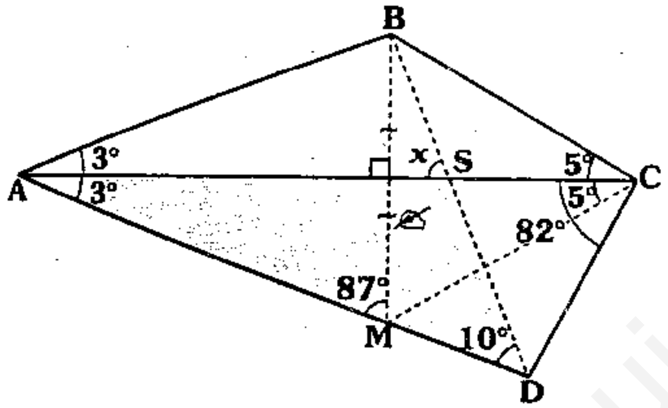
  $CD=2a\sqrt{10}$ → CQ=2a y QD=6a

  → QH = 4a

- En ⊿PHQ: $\boldsymbol{x=14°}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 175




Nos piden $x$.

- Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$
- $\Delta ABM$: isósceles → $m\measuredangle BMA = 87°$
- Como $m\measuredangle BMA = m\measuredangle BCD$

  → ⌂MBCD

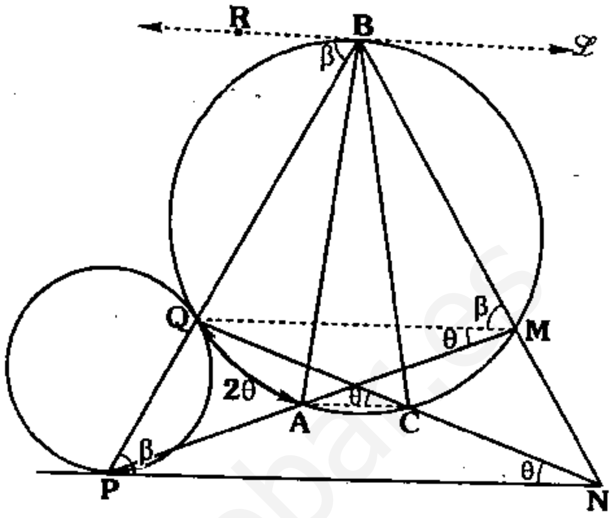
- Es incriptible → $m\measuredangle BDM = 10°$
- En $\Delta ASO$:

$$x = 3° + 10°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=13°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 176




Nos piden $\dfrac{AB}{AC}$.

- Como $m\widehat{PQ} = m\widehat{QB}$

  → $m\measuredangle QPN = m\measuredangle QNB = \beta$

- ⌂PQMN: inscriptible
- Luego $m\measuredangle PNQ = m\measuredangle PMQ = m\measuredangle ACQ$

  → $\overline{AC} // \overline{PN}$

- Cuando trazamos la tangente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en A
- Notaremos:

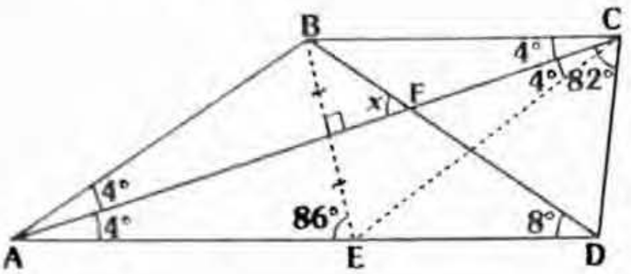
  $m\measuredangle PBR = \beta \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{PN} // \overline{AC}$

- Como $\overline{AC} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ → AB=BC

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{AB}{BC}=1}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 177**



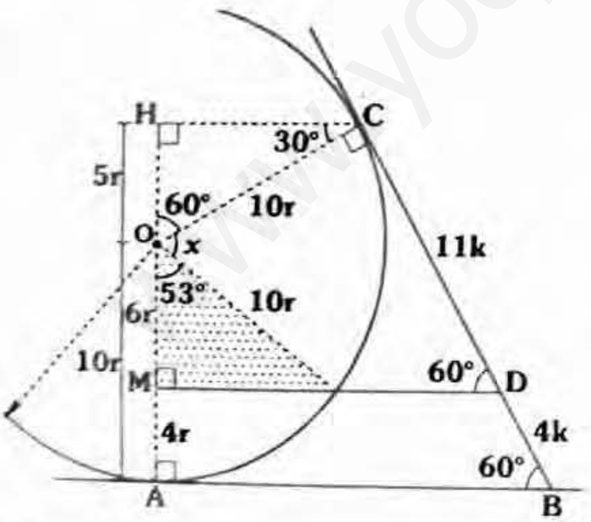

Nos piden $x$.

- Se traza $\overline{BE} \perp \overline{AD} \rightarrow \Delta BAE$ : isósceles
  $\rightarrow m\measuredangle BEA = 86°$
- Observemos que $m\measuredangle BEA = m\measuredangle BCD$
  $\rightarrow$ ⌂EBCD: incriptible
  $\rightarrow m\measuredangle EDF = 8°$
- En $\Delta AFD$: $\quad x = 4° + 8°$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 12°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 178**




Piden $x$.

- Se prolonga $\overline{AO}$ y se traza $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{AO}$
- ⊿OHC: notable de 30° $\rightarrow OC = 2(OH)$

Como $\dfrac{HM}{MA} = \dfrac{11}{4} \rightarrow$ sea $OC = 10r$

$\rightarrow OH = 5r \rightarrow AH = 15r \rightarrow AM = 4r$

$\rightarrow OM = 6r$

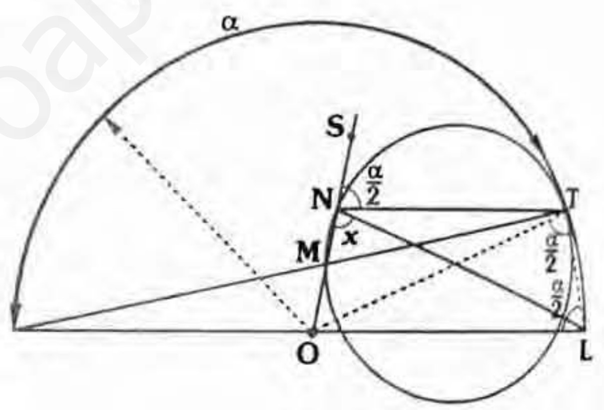
- ⊿OME: notable de 53°
- En "O":

$$x + 60° + 53° = 180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 67°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 179**




Piden $x$.

- Como $m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{MT} = \alpha$

  $\rightarrow m\measuredangle ALT = m\measuredangle SNT = \dfrac{\alpha}{2}$

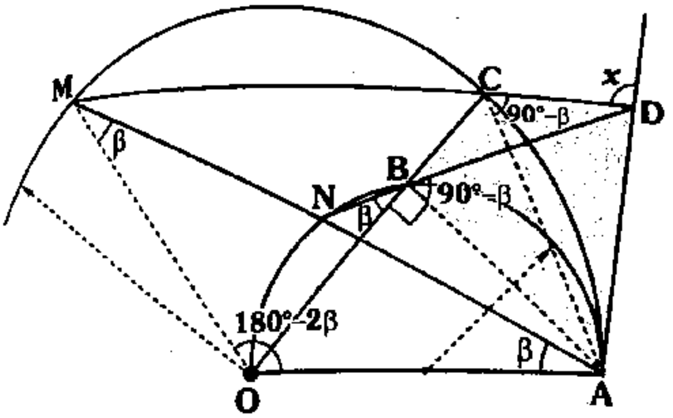
  $\rightarrow$ ⌂ONTL: inscriptible
- $\Delta OTL$ : isósceles

  $\rightarrow m\measuredangle OTL = m\measuredangle OLT = \dfrac{\alpha}{2}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{\alpha}{2}}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 180




Nos piden x.

- Como $m\sphericalangle OAM = \beta$

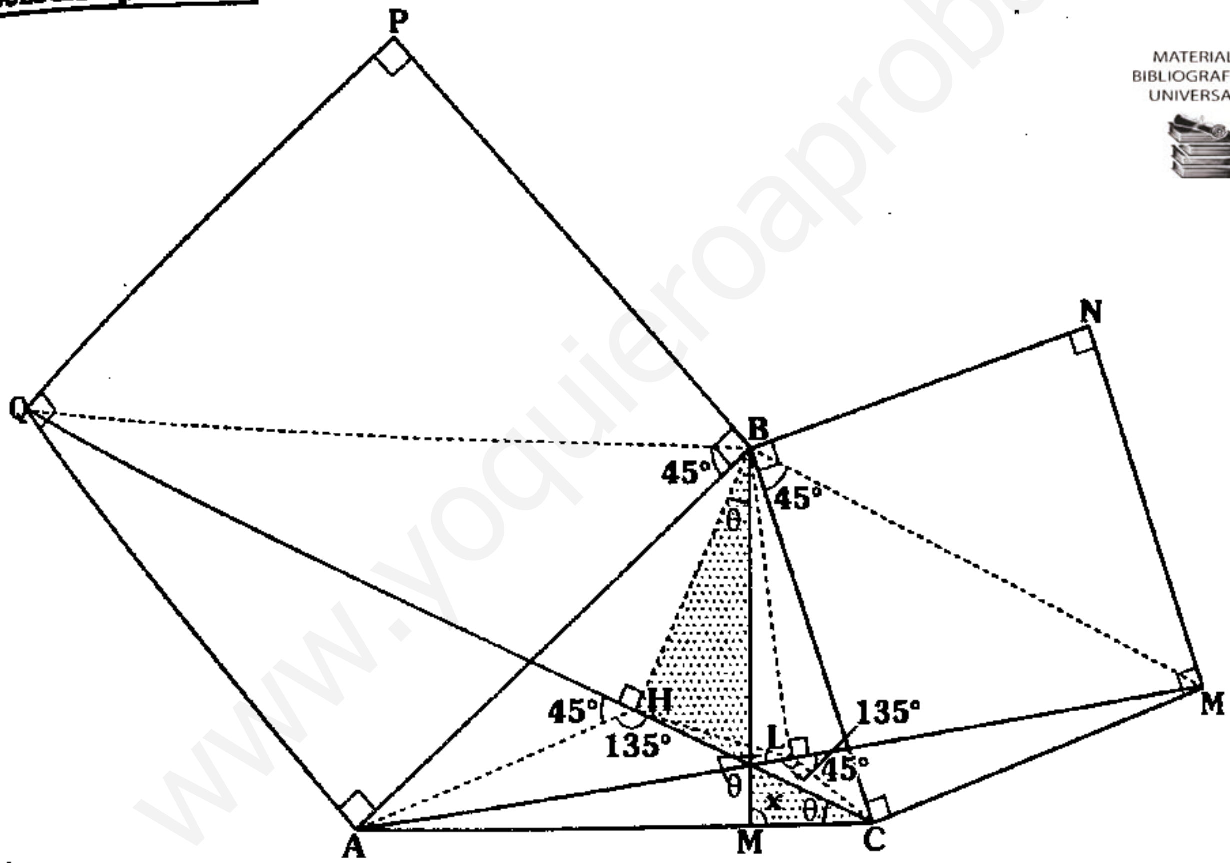
  $\rightarrow\ m\sphericalangle AOM = 180° - 2\beta$

- $m\sphericalangle NBO = \beta \rightarrow m\sphericalangle ABD = 90° - \beta$
- ⊿ABCD: inscriptible

$\therefore\ \ x = 90°$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 181






Por demostrar: $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

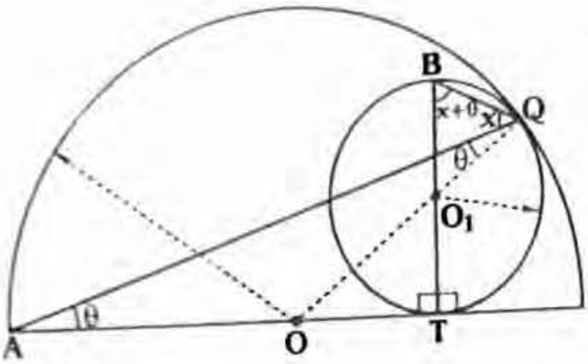
- Se traza $\overline{BH} \perp \overline{QC}$ y $\overline{BL} \perp \overline{AM}$ (H en $\overline{AC}$ y L en $\overline{AM}$)
- ⊿AHBQ y ⊿CLBM: inscriptible $m\sphericalangle AHQ = 45°$ y $m\sphericalangle CLM = 45°$

  ⊿AHLC: inscriptible $\rightarrow\ m\sphericalangle ACH = m\sphericalangle ALH = \theta$
- En la región sombreada: $x + \theta = 90° + \theta$

$\therefore\ \ x = 90°$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 182**




Nos piden $x$.

- $O$, $O_1$ y $Q$: colineales
- $\Delta AOQ$ : isósceles

  $\rightarrow$ $m\measuredangle OAQ = m\measuredangle OQA = \theta$

- $\Delta O_1BQ$ : isósceles

  $\rightarrow$ $m\measuredangle O_1QB = m\measuredangle O_1BQ = x + \theta$

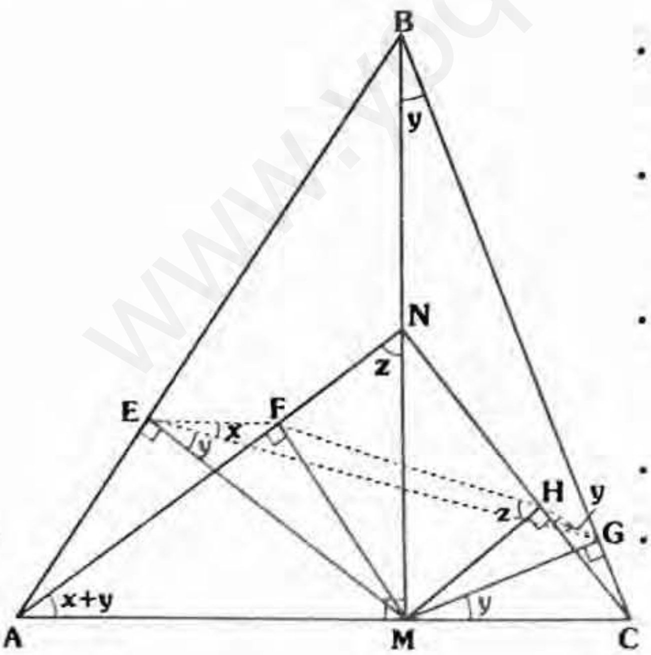
- En la región sombreada:

$$x + x + \cancel{\theta} = 90° + \cancel{\theta}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 45°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 183**




- Por demostrar que el $\triangle$EFHG es inscriptible
- Sea $m\measuredangle FEG = x$ ; $m\measuredangle FHM = z$ y $m\measuredangle CHG = y$
- Luego $\triangle$EFHG es inscriptible

$$\Leftrightarrow \quad x + y + z = 90°$$

- $\triangle$MHGC: inscriptible $\rightarrow$ $m\measuredangle GMC = y$

  $\rightarrow$ $m\measuredangle MBC = y$

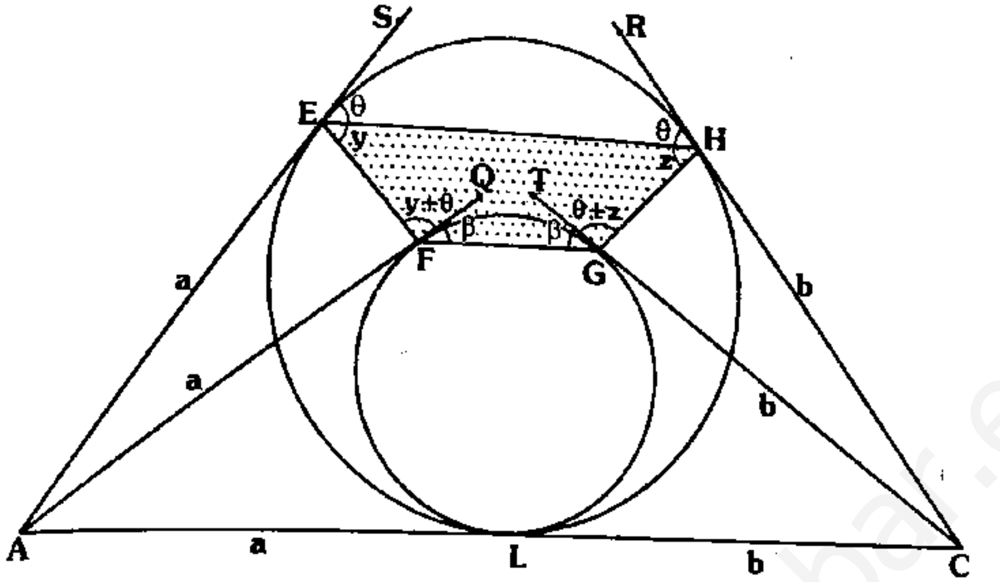
- $\triangle$MHGC: inscriptible $\rightarrow$ $m\measuredangle MEG = y$
- $\triangle$AEFM: inscriptible

  $\rightarrow$ $m\measuredangle MQF = x + y$

- $\triangle AMN$: $\quad x + y + z = 90°$

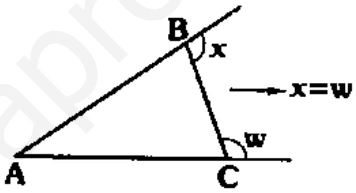
**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 184




- Por demostrar que ⏢FEHG es inscriptible.

- Usaremos la siguiente propiedad: Si AB=AC




- En los ángulos isósceles AEF y CGH: $m\measuredangle SEF = m\measuredangle QFE = y + \theta$

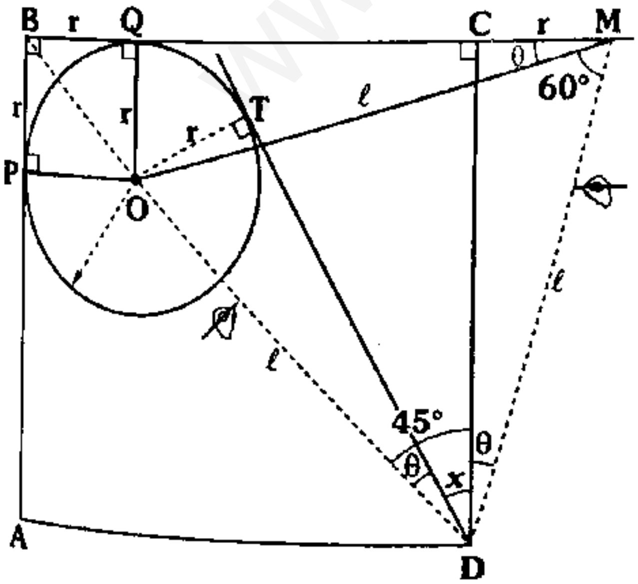
  $m\measuredangle TGH = m\measuredangle RHG = \theta + z$

- En ⏢EFGH: $2y + 2\theta + 2\beta + 2z = 360°$

  $y + \theta + \beta + z = 180°$

$\therefore$ ⏢EFGH: Inscriptible.

## RESOLUCIÓN Nº 185




Nos piden $x$.

- Prolongamos $\overline{BC}$ hasta M tal que CM=r
- Luego: $⊿OTD \cong ⊿OQM \cong ⊿MCD$

  $\rightarrow$ OD = OM = MD

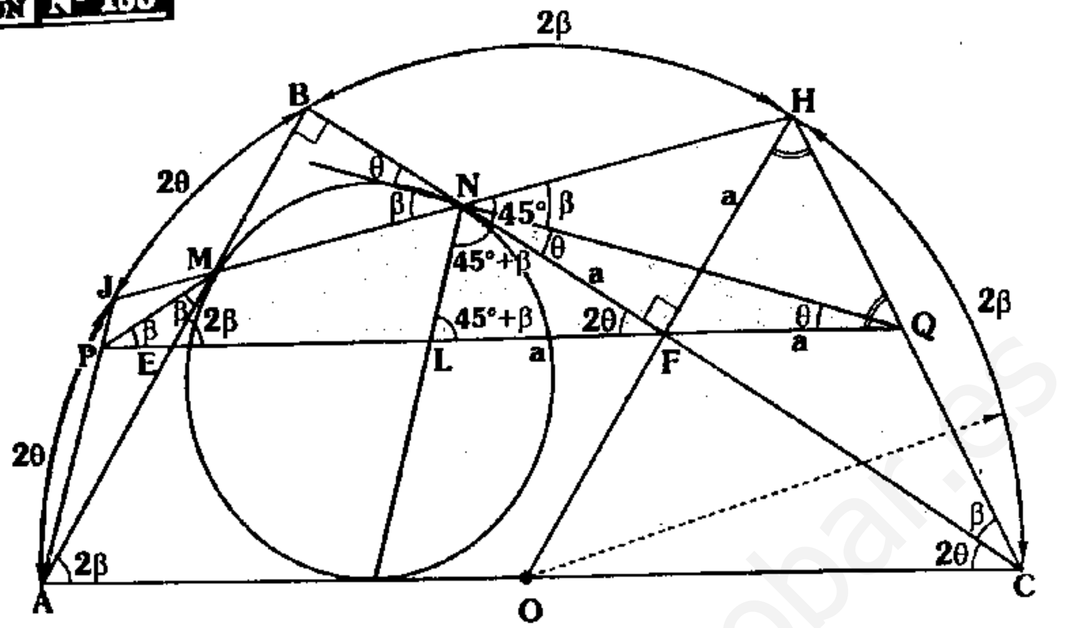
  $\rightarrow$ ΔOMD : equilátero

- $45° + \theta = 60° \rightarrow \theta = 15°$
- $x + 2\theta = 60°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 30°}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 186**



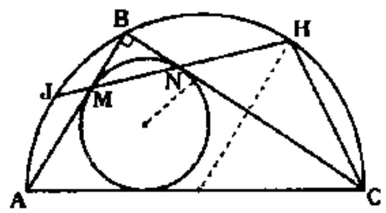

- Por demostrar: $\triangle$PMNQ es inscriptible
- Por propiedad $m\overset{\frown}{AJ} = m\overset{\frown}{JB} = 2\theta$ y $m\overset{\frown}{BH} = m\overset{\frown}{HC} = 2\beta$

  O, F y H: colineales
- $\Delta$LNF : isósceles $\rightarrow$ LF = FN = FQ

  $\Delta$NFQ : isósceles
- Análogamente: EP=PM
- Como $\theta + \beta = 45° \rightarrow m\sphericalangle QNH = \beta$

  $\therefore$ $\triangle$PMNQ: Inscriptible.

**Propiedad**

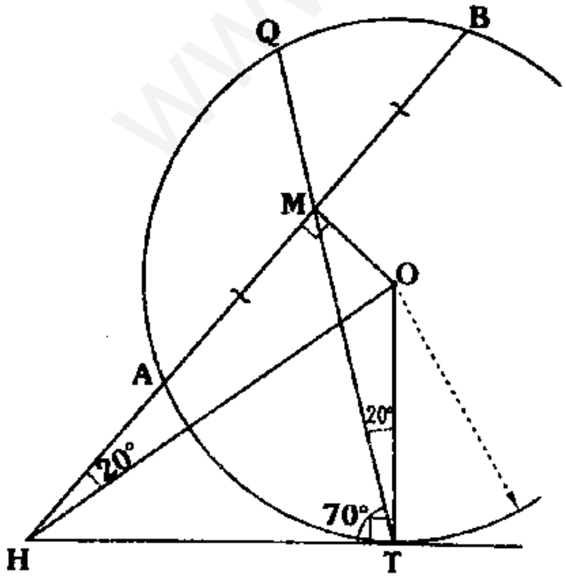



Se cumple:

* $m\overset{\frown}{JBH} = 90°$
* $m\overset{\frown}{AJ} = m\overset{\frown}{JB}$ y $m\overset{\frown}{BH} = m\overset{\frown}{HC}$



**RESOLUCIÓN Nº 187**




Nos piden $m\overset{\frown}{TAQ}$.

- Como AM=MB $\rightarrow$ $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
- $\triangle$HMOT: inscriptible

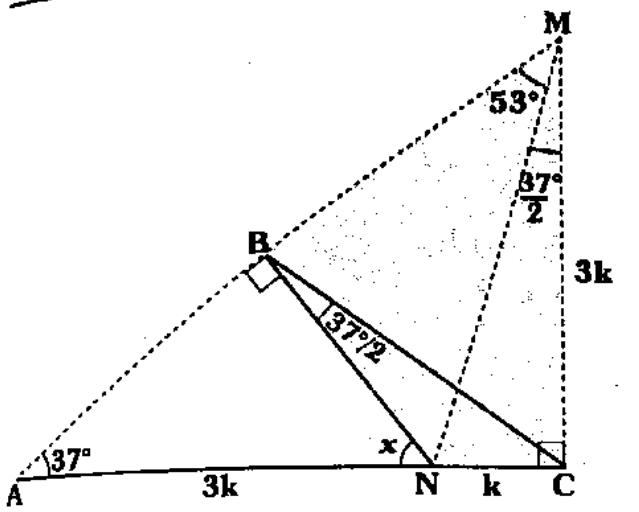
  $\rightarrow m\sphericalangle OTM = 20°$

  $\rightarrow m\sphericalangle HTQ = 70°$

  $\therefore$ $\mathbf{m\overset{\frown}{TAQ} = 140°}$

**Clave** **A**

**RESOLUCIÓN Nº 188**



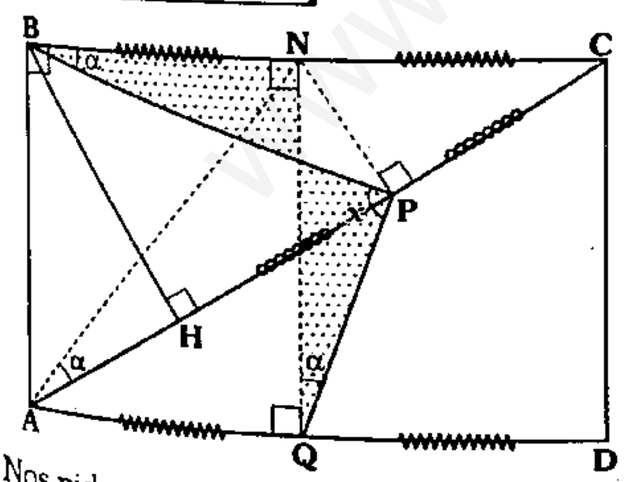

Nos piden $x$.

- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta M tal que $m\measuredangle ACM = 90°$
- ⊿ACM: notable de 37° → CM=3k
- ⊿NCM: notable de 37°/2
  → ⌂NBMC: inscriptible
  → $m\measuredangle NBA = 90°$

$\therefore\ \ \boldsymbol{x=53°}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 189**




Nos piden $x$.

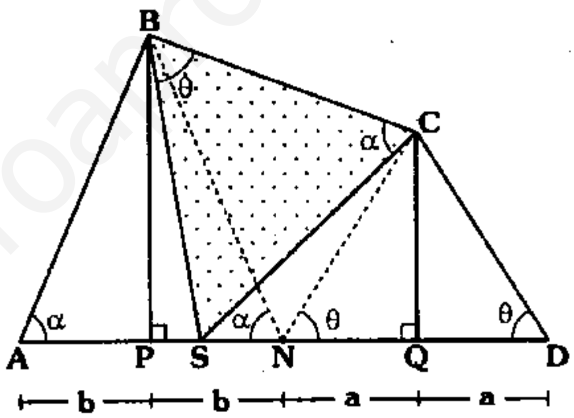
- Se traza $\overline{QN} \perp \overline{BC}$ → $BN = NC$
- En ⊿BHC: $\overline{NP}$ es base media → $\overline{NP} \perp \overline{AC}$
- Como ⌂ ABNP y ⌂ANPQ son inscriptibles
  → $m\measuredangle PBN = m\measuredangle NAP = m\measuredangle NQP = \alpha$
- En la región sombreada:

$$x + \alpha = 90° + \alpha$$

$\therefore\ \ \boldsymbol{x=90°}$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 190**




- Se ubica N en $\overline{PQ}$ tal que:

$$NQ = QD = a$$

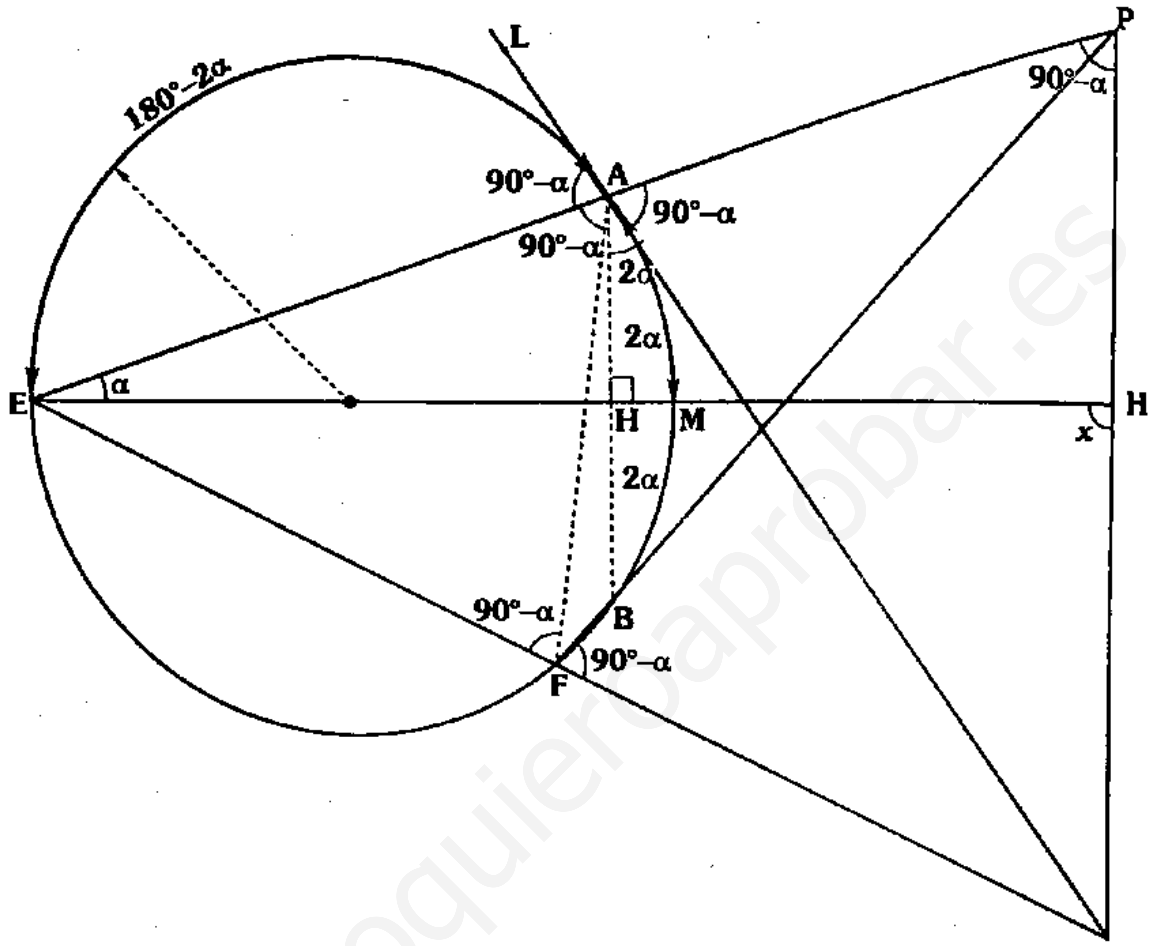
$$\rightarrow\ m\measuredangle DNC = \theta$$

- Luego el ⌂SBCN es inscriptible
  → $m\measuredangle BNA = \alpha$
  → ΔABN es isósceles
  → $\Delta P = PN = b$

$\therefore\ \ \mathbf{AD = 2(a+b) = 2(PQ)}$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 191**




Piden $x$.

- Como $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB} = 2\alpha \rightarrow \overline{EM} \perp \overline{AB}$
- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle AEM = \alpha \rightarrow m\sphericalangle EAH = 90° - \alpha$$

- ⌂ABFE: inscrito $\rightarrow m\sphericalangle LAE = 90° - \alpha$
- Por ángulo semiinscrito:

$$m\sphericalangle LAE = 90° - \alpha \rightarrow m\sphericalangle FAG = 90° - \alpha$$

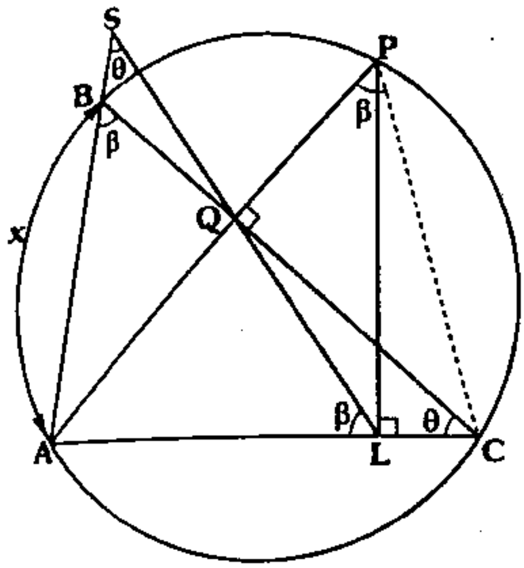
⌂FAPG: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle GPA = 90° - \alpha$

- En $\Delta EPH$: $x = 90° - \alpha + \alpha$

$$\therefore \; \boldsymbol{x = 90°}$$

Clave B

**RESOLUCIÓN Nº 192**



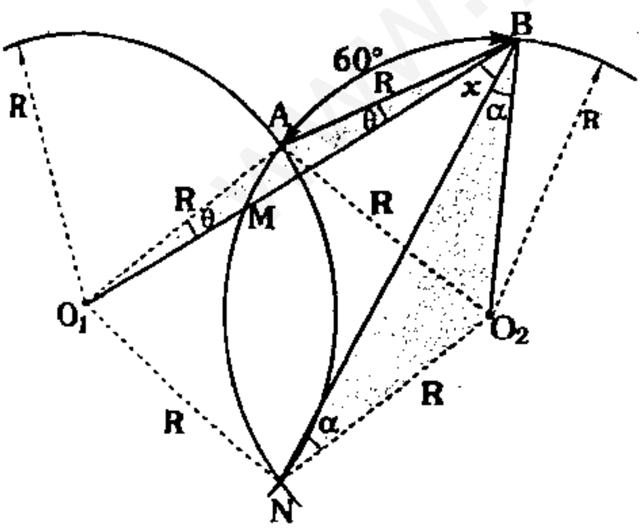

Nos piden $x$.

- Sea $m\sphericalangle ABC=\beta \rightarrow m\sphericalangle APC=\beta$
- $\triangle$QPCL: inscriptible
  $\rightarrow m\sphericalangle QLA=\beta$
- En la región sombreada: $m\sphericalangle QCL=\theta$

$$\therefore \quad x=2\theta$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 193**




Nos piden $m\overset{\frown}{MN}$.

- Como las circunferencias tienen igual radio $\rightarrow O_1AO_2N$ es un rombo
  $\rightarrow \overline{O_1A} // \overline{NO_2}$
- $\Delta O_1AO_B$ y $\Delta NO_2B$ son isósceles
- Notemos que $x=\theta+\alpha$, pues:

$$\overline{O_1A} // \overline{NO_2}$$

- $\Delta AO_2B$ : equilátero

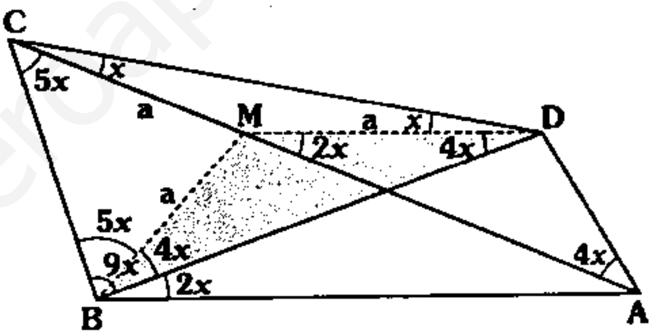
$$x+\theta+\alpha=60°$$

$$\rightarrow \quad x=30°$$

- Por ángulo inscrito; $m\overset{\frown}{MN}=60°$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 194**




Nos piden $x$.

- Se ubica M en $\overline{AC}$ tal que:

$$m\sphericalangle DBM=4x$$

$\rightarrow$ $\triangle$BMDA es inscriptible

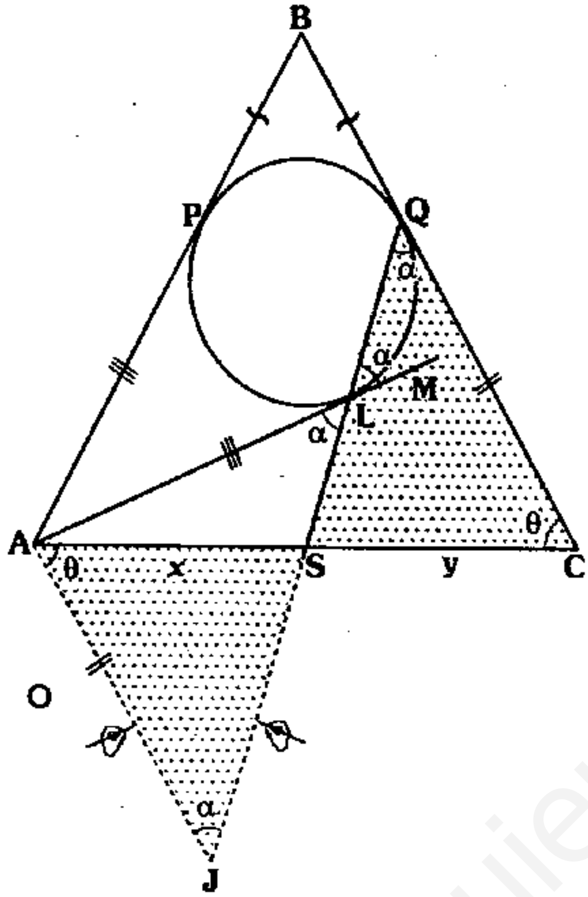
$\rightarrow m\sphericalangle AMD=2x$

- $\Delta CMD$ y $\Delta BMC$ : isósceles
  $\rightarrow BM=MC=MD$
- $\Delta BMD$ : isósceles $\rightarrow m\sphericalangle MDB=4x$
- $\Delta BCD$ : $9x+6x+5x=180°$

$$\therefore \quad x=9°$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 195




Sea $AS = x$ y $SC = y$

Por demostrar: $x = y$

- Como $m\sphericalangle CQM = m\sphericalangle QLM = \alpha$

  $\rightarrow m\sphericalangle ALS = \alpha$

- Se prolonga $\overline{QL}$ hasta J tal que:

  $m\sphericalangle QJA = \alpha$

  $\rightarrow \overline{AJ} /\!/ \overline{BC}$

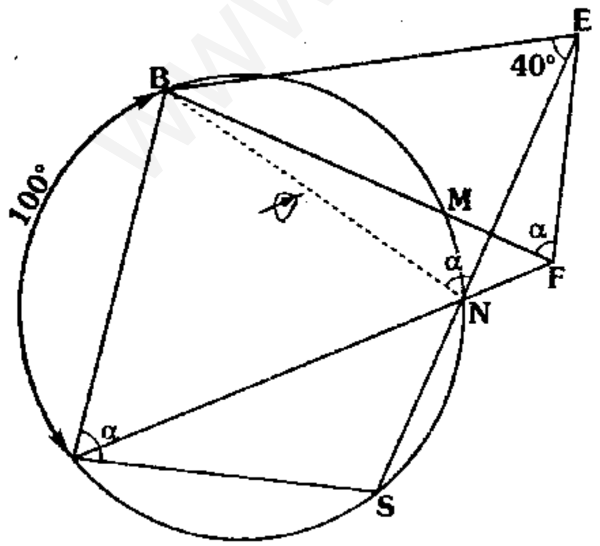
  $\rightarrow m\sphericalangle JAS = \theta$

- $\Delta JAS \cong \Delta QCS$ (ALA)

  $\therefore$ **$x = y$**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 196




Nos piden $m\overset{\frown}{MN}$.

- $\triangle$ABNS: inscriptible

  $\rightarrow m\sphericalangle BNE = \alpha$

- $\triangle$ABNS: inscriptible

  $\rightarrow m\sphericalangle BFN = 40°$

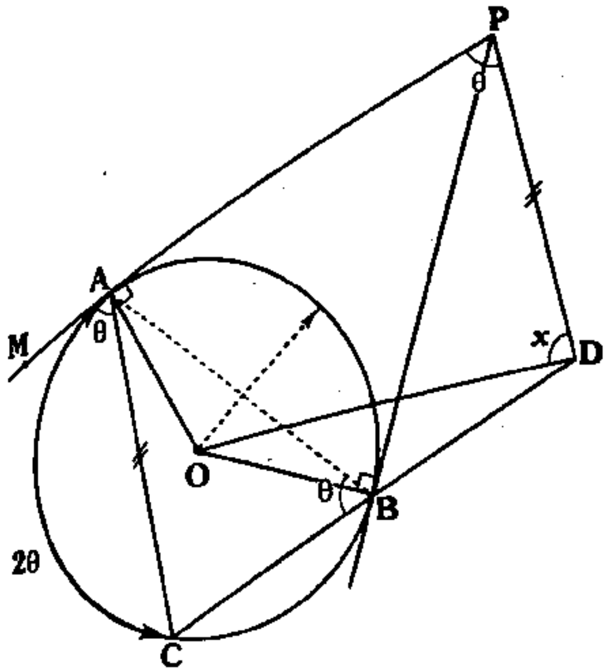
- Por ángulo exterior:

$$40° = \frac{100° - m\overset{\frown}{MN}}{2}$$

$\therefore$ **$m\overset{\frown}{MN} = 20°$**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 197




Piden x.

- Sea $m\overset{\frown}{AC} = 2\theta$

  $\rightarrow m\sphericalangle MAC = \theta = m\sphericalangle ABC$

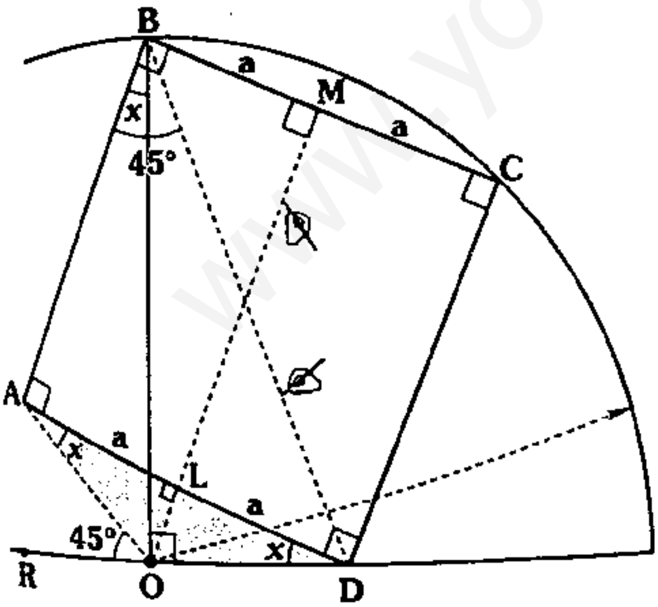
  $\rightarrow m\sphericalangle APD = \theta$

- ⌂APDB: inscriptible
- También ⌂OAPB: inscriptible
- Los puntos O, A, P, D y B son concíclicos de diámetro $\overline{OP}$

$\therefore\ \boldsymbol{x = 90°}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 198




Piden x.

- ⌂OABD: inscriptible

  $\rightarrow m\sphericalangle AOR = 45°$

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{BC}$

  $\rightarrow BM = MC \quad y \quad AL = LD$

  $\rightarrow AO = OD$

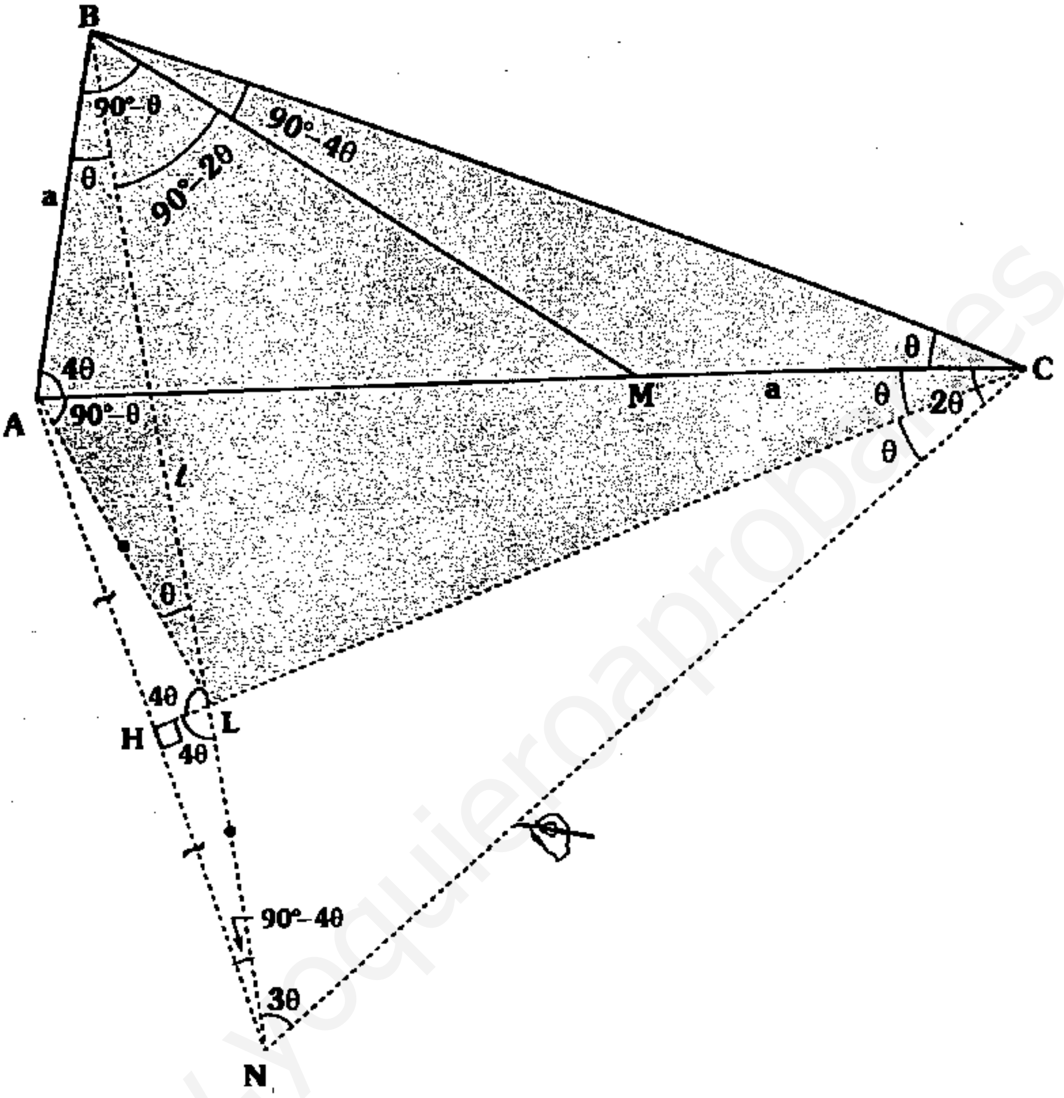
- $\Delta AOD$ : isósceles

$$x + x = 45°$$

$$\therefore\ x = \frac{45°}{2}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 199




Nos piden $\theta$.

- Se ubica M tal que $m\sphericalangle ABN = \theta$ y $BN=BC$

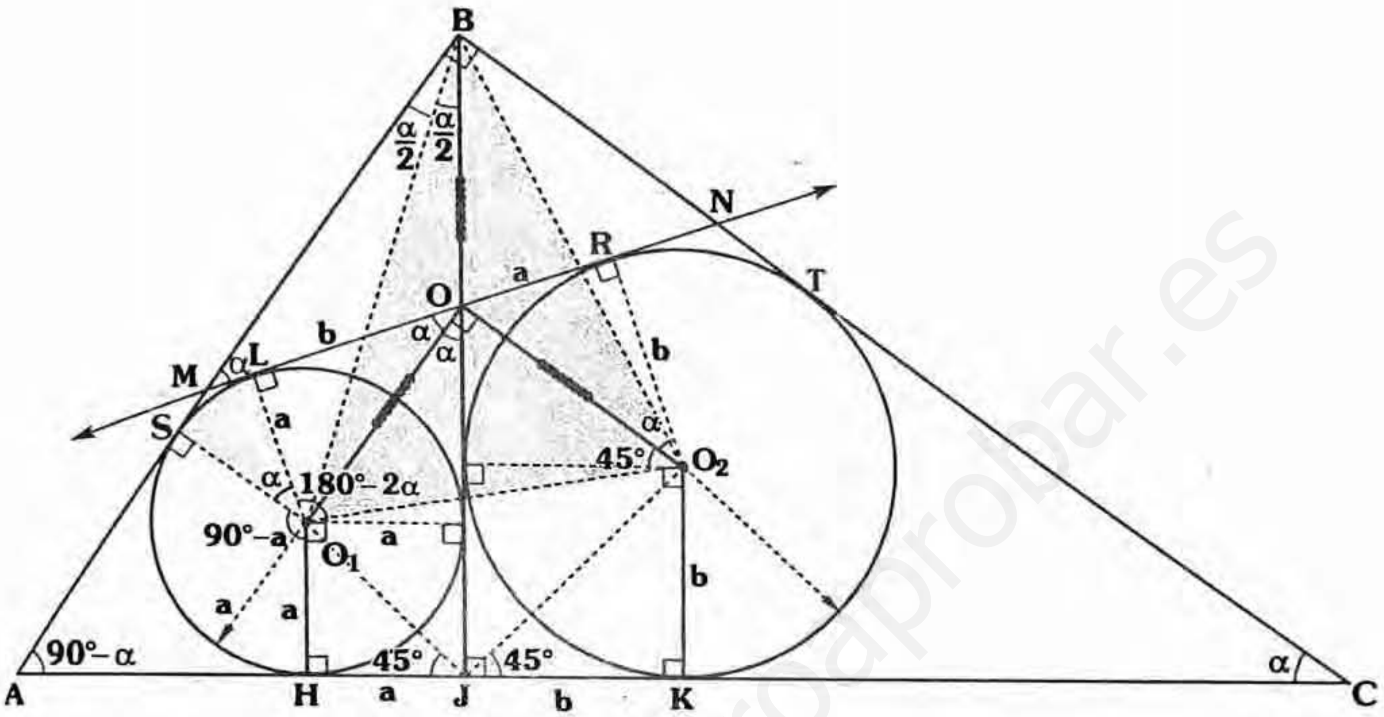
  $\rightarrow \triangle ABN \cong \triangle CBM \rightarrow m\sphericalangle ABN = 90° - 4\theta$

- $m\sphericalangle NBC = 180° - 6\theta \rightarrow m\sphericalangle BNC = 3\theta$ y $m\sphericalangle ACN = 2\theta$
- $\triangle ACN$: isósceles, se traza la altura CH $\rightarrow m\sphericalangle ALH = m\sphericalangle HLN = 4\theta$
- ⌂ABCL: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle ALB = \theta$
- En L: $4\theta + 4\theta + \theta = 180°$

  $\therefore\ \theta = \mathbf{20°}$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 200




Nos piden demostrar que el $\square$AMNC es inscriptible.

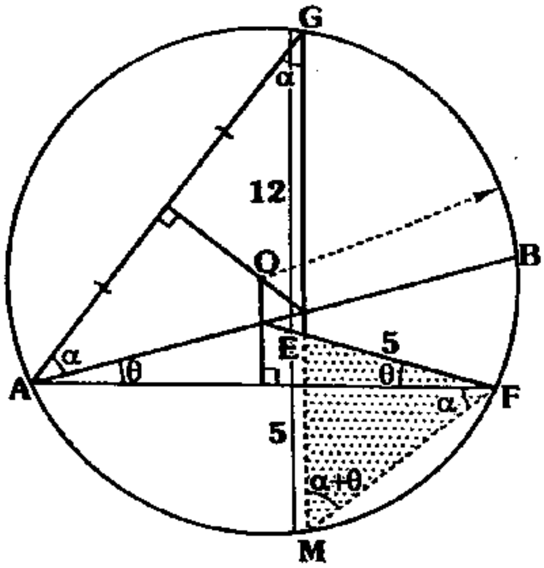
- Por propiedad: HJ=OR=a y JK=OL=b
- $\triangle O_1LO \cong \triangle O_2RO \rightarrow OO_1OO_2$ y $m\sphericalangle O_1OO_2 = 90°$
- Como $m\sphericalangle O_1BO_2 = 45°$, $m\sphericalangle O_1OO_2 = 90°$ y $O_1O = OO_2 \rightarrow O$ es circuncentro del

  $\Delta O_1OO_2 \rightarrow m\sphericalangle OBO_1 = \dfrac{\alpha}{2}$
- Luego $m\sphericalangle ABJ = \alpha = m\sphericalangle BCA$
- En $O_1$: $m\sphericalangle SO_1L = \alpha \rightarrow m\sphericalangle LMB = \alpha$

$\therefore$ $\square$AMNC: inscriptible

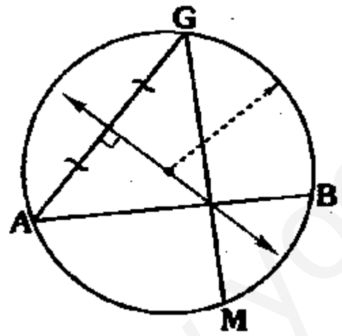
**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 201**




Nos piden AB.

- Usaremos la siguiente propiedad
  Se cumple: AB=GM




- Sea $m\sphericalangle BAG = \alpha$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle AGM = \alpha = m\sphericalangle AFM$
- Sea $m\sphericalangle BAF = \theta \rightarrow m\sphericalangle EFA = \theta$
- Por ángulo inscrito:

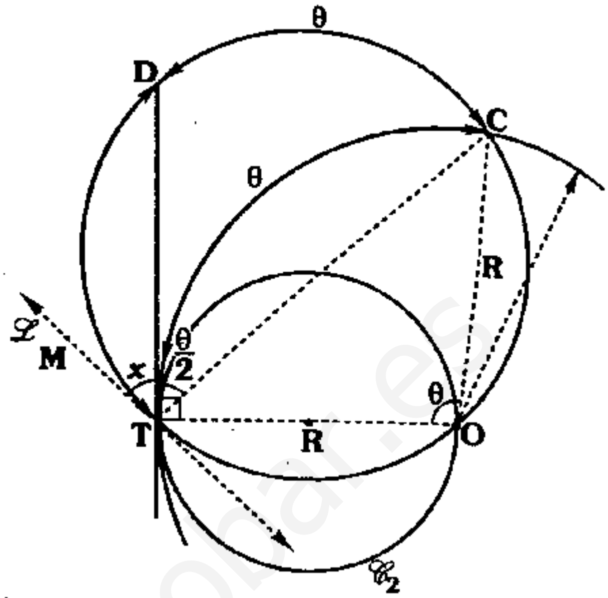
  $$m\sphericalangle GAF = m\sphericalangle EMF = \alpha + \theta$$
- $\Delta EMF$ : isósceles $\rightarrow$ EM=EF=5

  $\rightarrow\ GM = 12 + 5 = 17$

  $$\therefore\ \mathbf{AB = 17}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 202**




Sea "x" la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

- Se traza la tangente en T

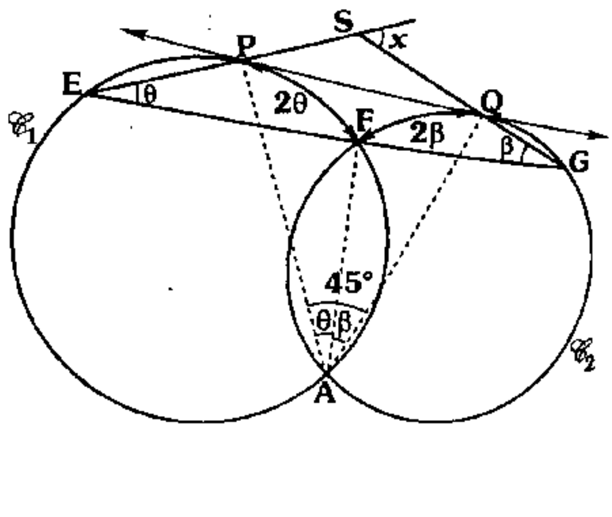
  $\rightarrow\ m\sphericalangle MTD = x$
- $m\sphericalangle DTC = \dfrac{\theta}{2} \rightarrow m\widehat{TC} = \theta \rightarrow$ por ángulo central: $m\sphericalangle TOC = \theta$
- Por ángulo inscrito:

  $$m\widehat{TDC} = 2\theta \rightarrow m\widehat{TD} = \theta$$

  $$\therefore\ x = \frac{\theta}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 203**



Nos piden x.

- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales por propiedad: $m\measuredangle PAQ = 45°$

- Sea:

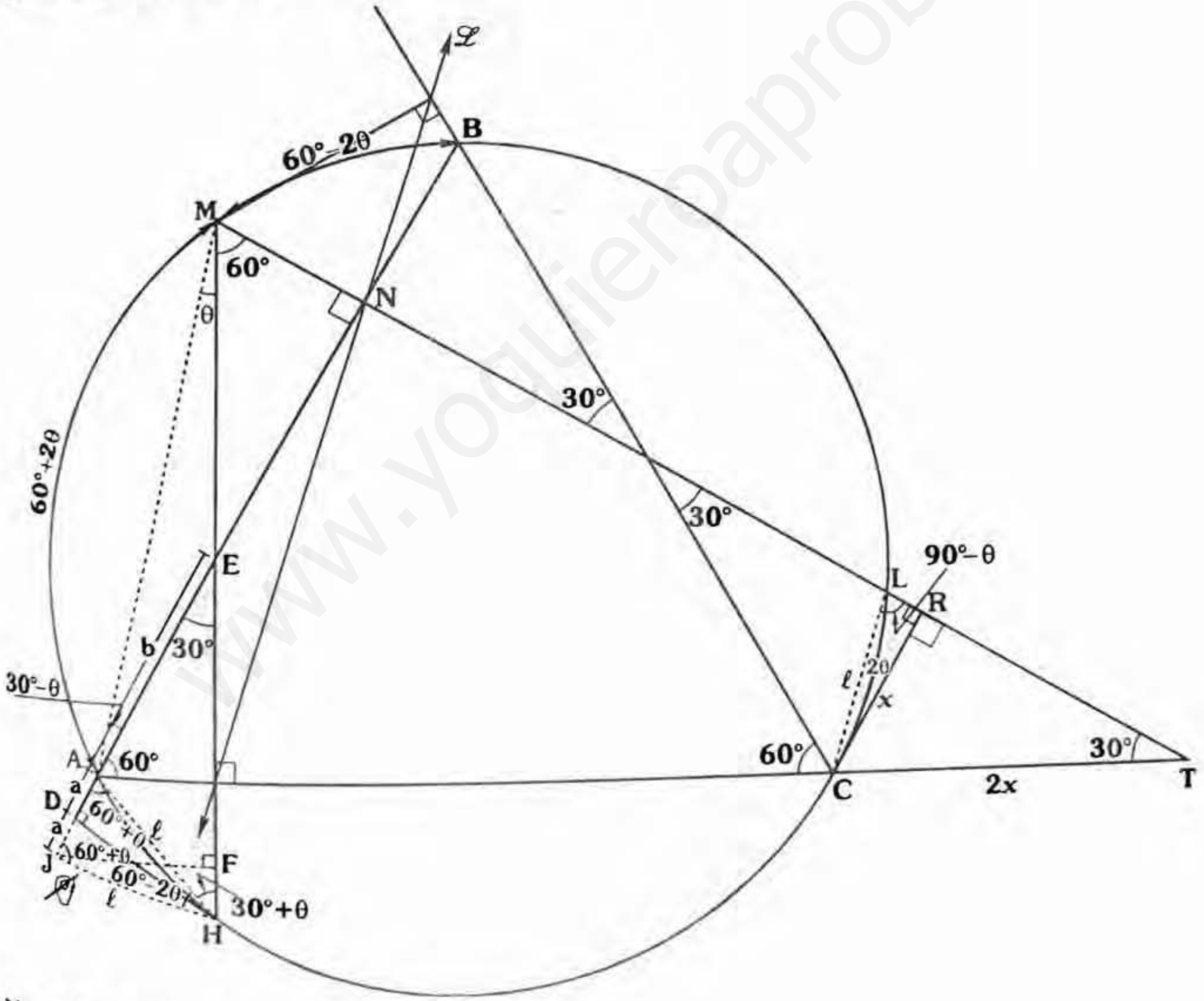
$$\left.\begin{matrix} m\measuredangle PEF = \theta \rightarrow m\measuredangle PAF = \theta \\ m\measuredangle QGF = \beta \rightarrow m\measuredangle QAF = \beta \end{matrix}\right\} \theta + \beta = 45°$$

- $\Delta ESG$: $x = \theta + \beta$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 45°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 204**




Nos piden CT.

- Se traza $\overline{CR} \perp \overline{LT}$ (R en $\overline{LT}$) CT=2x y CR=x.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es recta de Simson de M respec to del $\Delta ABC \rightarrow m\measuredangle MNA = 90°$ m
- Sea $m\widehat{AH} = 2\theta \rightarrow m\measuredangle AMH = \theta$
- Completando ángulos:

$$m\measuredangle MAN = 30° - \theta$$

$$\rightarrow m\measuredangle CLT = 90° - \theta$$

- Por ángulo exterior:

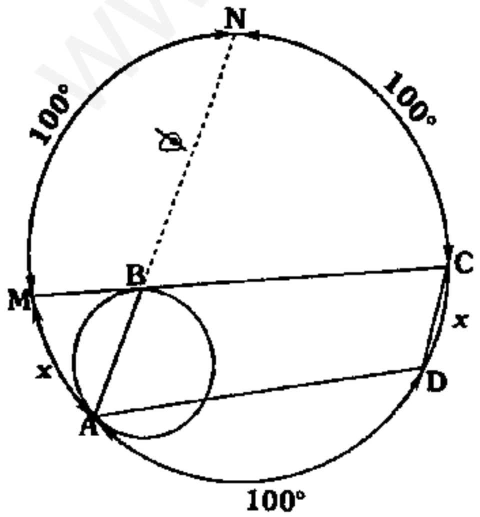
$$30° = \frac{m\widehat{AH} - m\widehat{CL}}{2} \rightarrow m\widehat{CL} = 2\theta$$

- Es decir $m\widehat{AH} = m\widehat{CL} \rightarrow AH=CL$
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta J tal que AD=DJ=a → AH=JH
- ⊿JFE: notable de 30° $\rightarrow JF = \dfrac{b+2a}{2}$
- ⊿HFJ ≅ ⊿LRC: $\rightarrow x = \dfrac{b+2a}{2}$

$$\therefore \ \mathbf{CT = b + 2a}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 205**




Nos piden x.

- Como ABCD es paralelogramo $\rightarrow \overline{AN} // \overline{CD} \rightarrow m\widehat{AD} = m\widehat{NC} = 100°$ y $\overline{MC} // \overline{AD} \rightarrow m\widehat{MA} = x$
- Por propiedad:

$$m\widehat{MN} = m\widehat{NC} = 100°$$

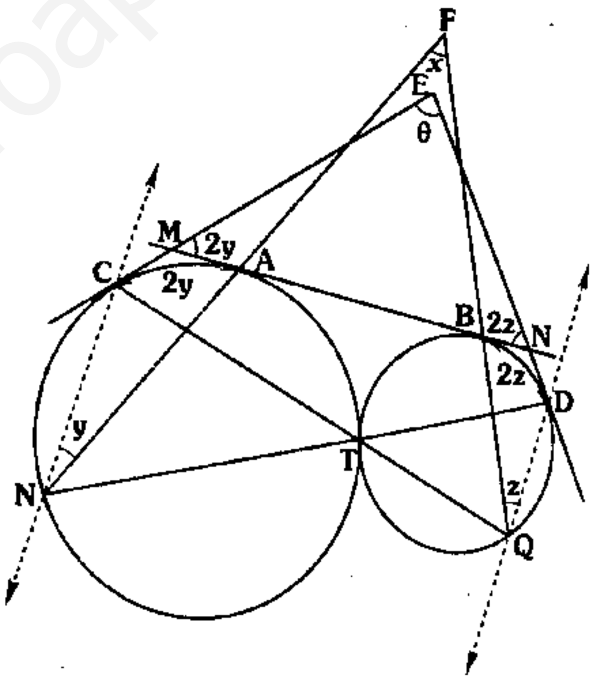
- Finalmente:

$$2x + 100 + 100 + 100 = 360°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 30°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 206**




Nos piden x.

- Por propiedad:

$$\overline{NC} // \overline{QD} \rightarrow x = y + z$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AC} = 2y \ \ \text{y} \ \ m\widehat{BD} = 2z$$

$$\rightarrow m\measuredangle AME = 2y \ \ \text{y} \ \ m\measuredangle BNE = 2z$$

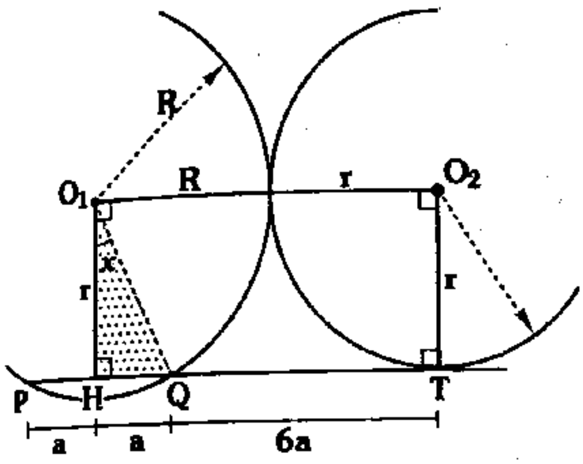
- En $\Delta AME: 2y+2z+\theta=180°$

$$y+z=90°-\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=90°-\frac{\theta}{2}}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 207




Nos piden $m\widehat{PQ}$.

- Notemos que $HO_1O_2T$ es rectángulo
- Luego: $R+r=6a$ ...(1)
- En $⊿HO_1Q: R^2=r^2+a^2$

$$\rightarrow R^2-r^2=a^2$$

$$\rightarrow (R+r)(R-r)=a^2$$

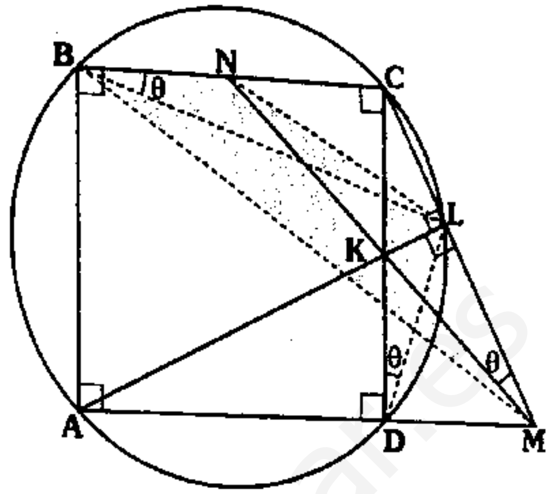
$$\rightarrow R-r=\frac{a}{6} \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2): $R=\dfrac{25a}{7}$
- $⊿O_1HQ$ : notable $x=16°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{PQ}=32°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 208




- Lo que nos piden demostrar en realidad es que el ⌂BNLM es inscriptible
- Notamos que el ⌂DKLM es inscriptible

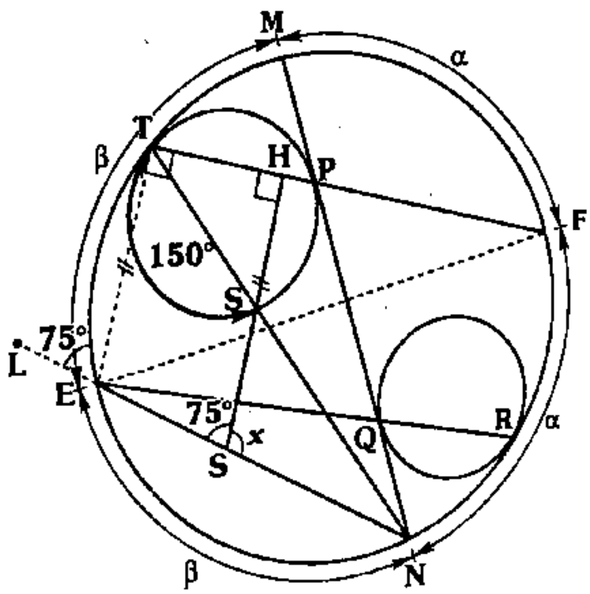
$\rightarrow m\measuredangle CDL=m\measuredangle KML=\theta$

$\rightarrow m\widehat{CL}=2\theta$

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle CBL=\theta$
- Como $m\measuredangle NBL=m\measuredangle NML$

$\therefore$ ⌂BNLM es inscriptible

## RESOLUCIÓN Nº 209



Piden x.

- Por propiedad: $m\widehat{MF} = m\widehat{FN} = \alpha$

  $m\widehat{NE} = m\widehat{EM} = \beta$

  $\rightarrow \alpha + \beta = 180°$

- Es decir $\overline{EF}$ es diámetro

  $\rightarrow\ m\sphericalangle ETF = 90° \ \rightarrow\ \overline{ET} // \overline{SH}$

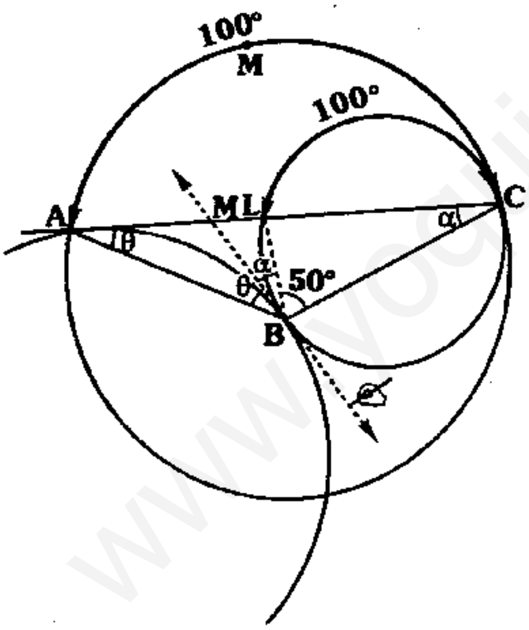
- Como: $m\widehat{TS} = m\widehat{TN} = 150°$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle LET = 75°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 105°}$

**Clave A**

## Resolución Nº 210




Nos piden $m\sphericalangle ABC$.

- Por propiedad:

  $m\widehat{AC} = m\widehat{LC} = 100°$

- Se traza la tangente en B

  $\rightarrow\ m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle MBA = \theta$ y

  $m\sphericalangle MBL = m\sphericalangle BCL = \alpha$

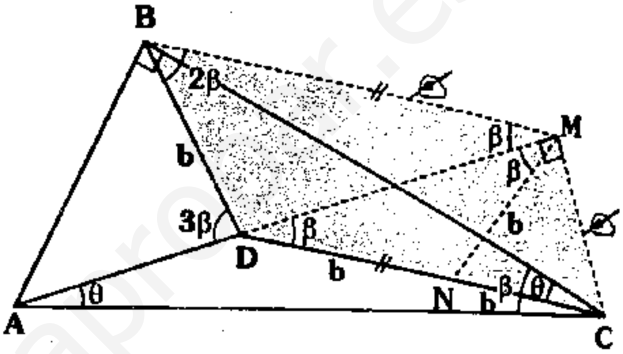
- En $\Delta ABC$: $2x + 2\theta + 50° = 180°$

  $\rightarrow \alpha + \theta = 65°$

  $\therefore\ \mathbf{m\sphericalangle ABC = 115°}$

**Clave A**

## Resolución Nº 211




Nos piden $\dfrac{CD}{BD}$.

- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta M tal que $m\sphericalangle AMC = 90°$

  $\rightarrow$ ⌂ABMC: inscriptible

- Notemos que:

  $m\sphericalangle AMB = \beta$ y $m\sphericalangle CDM = \beta$

  $\rightarrow\ \overline{DN} // \overline{BM}$

- En ⊿DMC: se traza la mediana MN

  $\rightarrow$ DN=NC=NM=b

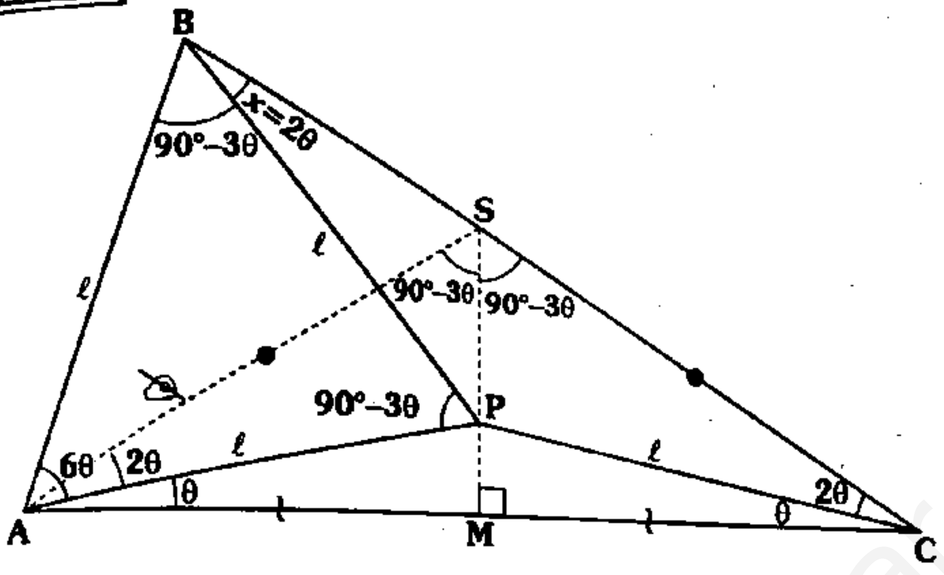
- ⌂DBMN: trapecio isósceles

  BD=MN $\rightarrow$ CD=2b y BD=b

  $\therefore\ \mathbf{\dfrac{CD}{BD} = 2}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 212**




Nos piden $x$.

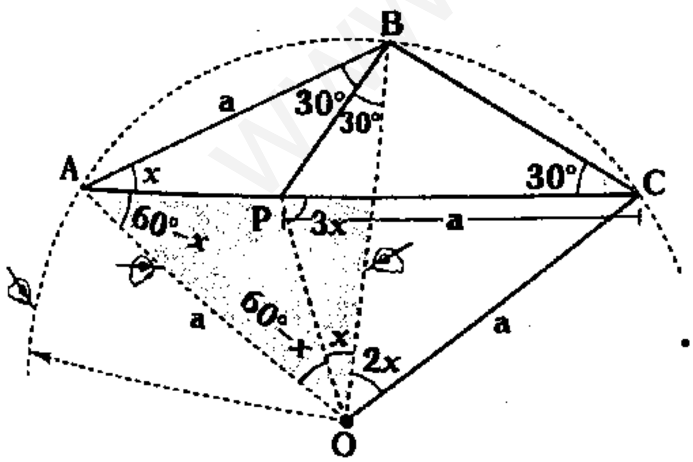
- Se traza la recta $\overline{PM}$ $\rightarrow$ AM=MC $\rightarrow$ AS=SC

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle ASM = m\sphericalangle MSC = 90° - 3\theta$
- $\triangle$ABSP: inscriptible $\rightarrow$ $x = 2\theta \rightarrow PB = PC$
- $\Delta ABP$: equilátero $\rightarrow$ $6\theta = 60° \rightarrow \theta = 10°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 213**




Nos piden $x$.

- Se traza la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$ cuyo centro es O.

  $\rightarrow$ $\Delta AOB$: equilátero

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle PBO = 30°$

  $\rightarrow$ AP=PO

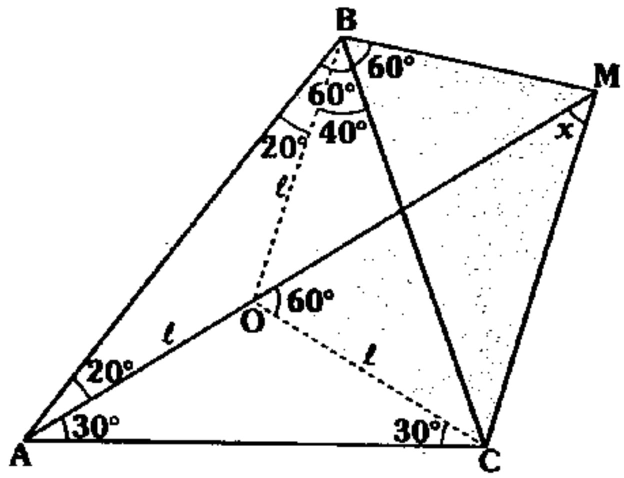
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle PAO = m\sphericalangle AOP = 60° - x$
- $\Delta OPC$: isósceles

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle OPC = m\sphericalangle POC = 3x$
- En $\Delta AOP$: $3x = 60° - x + 60° - x$

$$\therefore\ \mathbf{x = 24°}$$

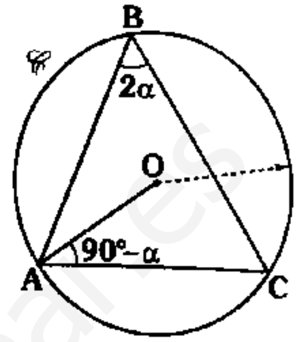
**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 214**




Piden x.

- Usaremos:

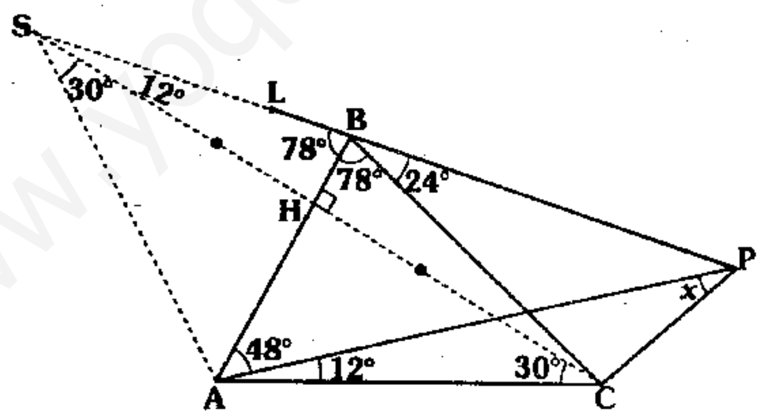



"O" es el centro de 𝒞

- Se ubica el circuncentro O del △ABC, el cual se encuentra en $\overline{AM}$.
- Como AO=OC → m∢COM = 60°
- ⌂COBM: inscriptible ∴ **x=40°**

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 215**




Nos piden x.

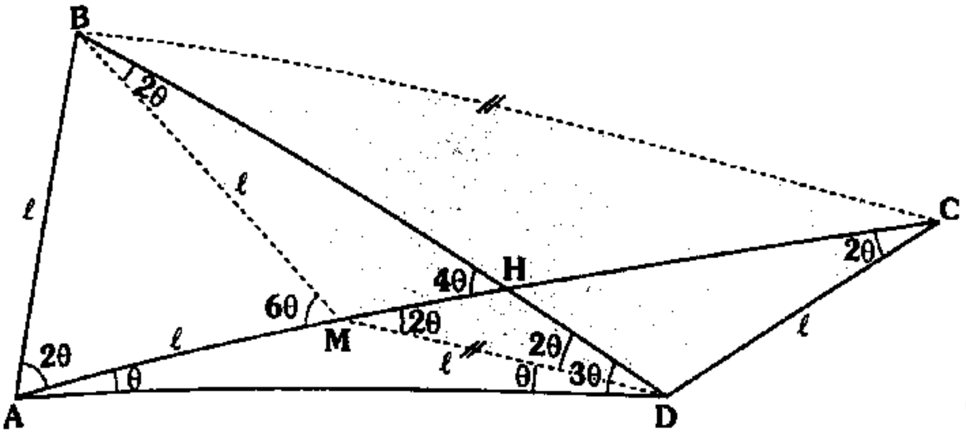
- Al prolongar $\overline{PB}$ hasta L, notamos: m∢LBA = 78°
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ cuya prolongación corta a $\overleftrightarrow{PB}$ en S.

→ m∢CSB = 12° y m∢ASC = 30°

- ⌂ASPC: inscriptible ∴ **x=30°**

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 216**

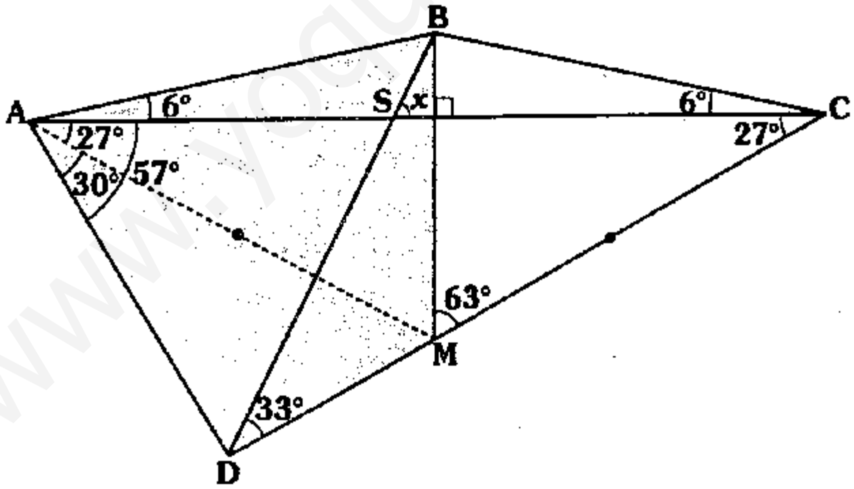



Nos piden θ.

- Se traza $\overline{BM}$, M en $\overline{AC}$ tal que m∢AMB = 6θ → AM=BM también: m∢MBD = 2θ
- ⌂MBCD: inscriptible como BM= $\overline{CD}$ dicho cuadrilátero es un trapecio isósceles → m∢HMD = m∢HDM = 2θ
- Notemos que ΔAMD: isósceles, lo mismo que el ΔBMD → AM=MD=MB
- ΔABM: equilátero → 6θ = 60° ∴ **θ=10°**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 217**



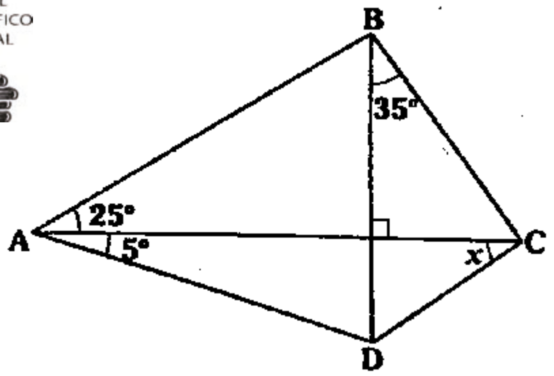

Nos piden x.

- Se ubica M en $\overline{CD}$ tal que $\overline{BM} \perp \overline{AC}$. Luego: MA=MC → m∢MAC = 27°
- Notemos que m∢DAB = m∢BMC = 63° → ⌂DABM: inscriptible
  → m∢MDB = m∢MAB = 33°
- Luego, en el ΔDSC: x = 33° + 27° ∴ **x=60°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 218





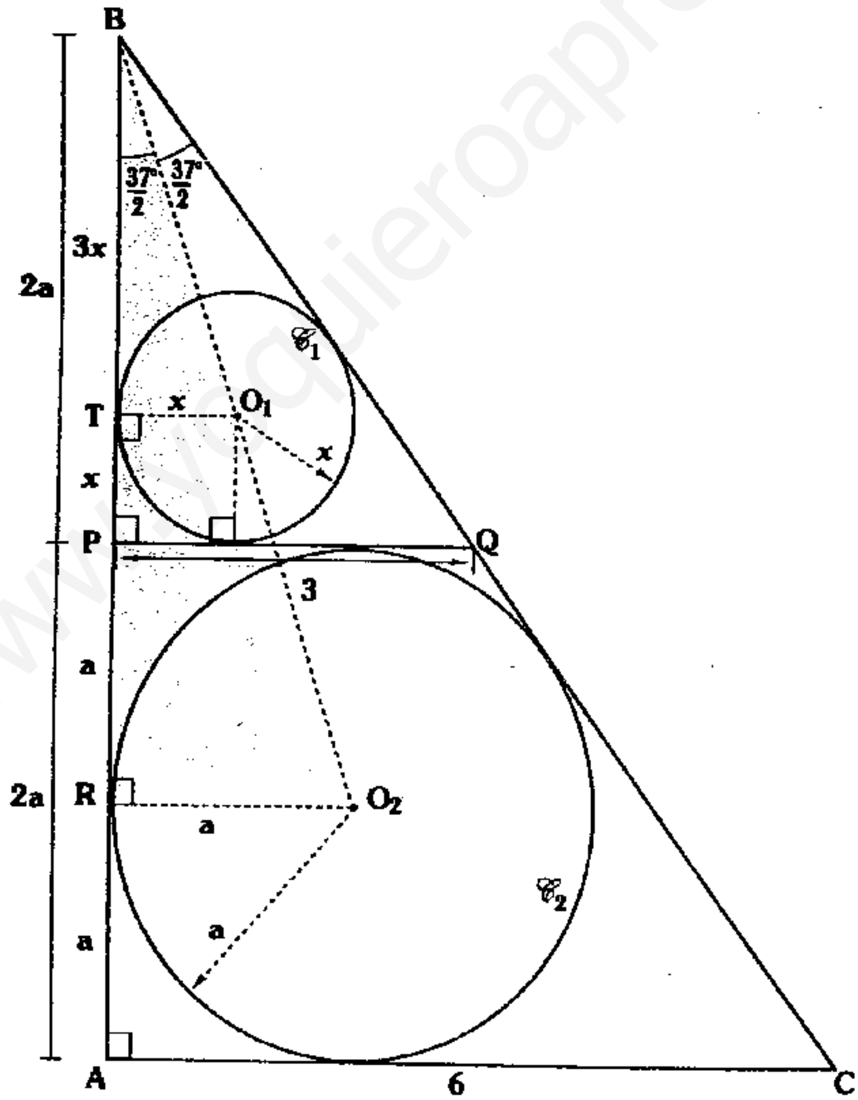

Nos piden $x$.

- Es una aplicación de la propiedad (pag. 77)
- Para $\theta = 5° \rightarrow x = 3\theta$

$\therefore$ $x = 15°$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 219



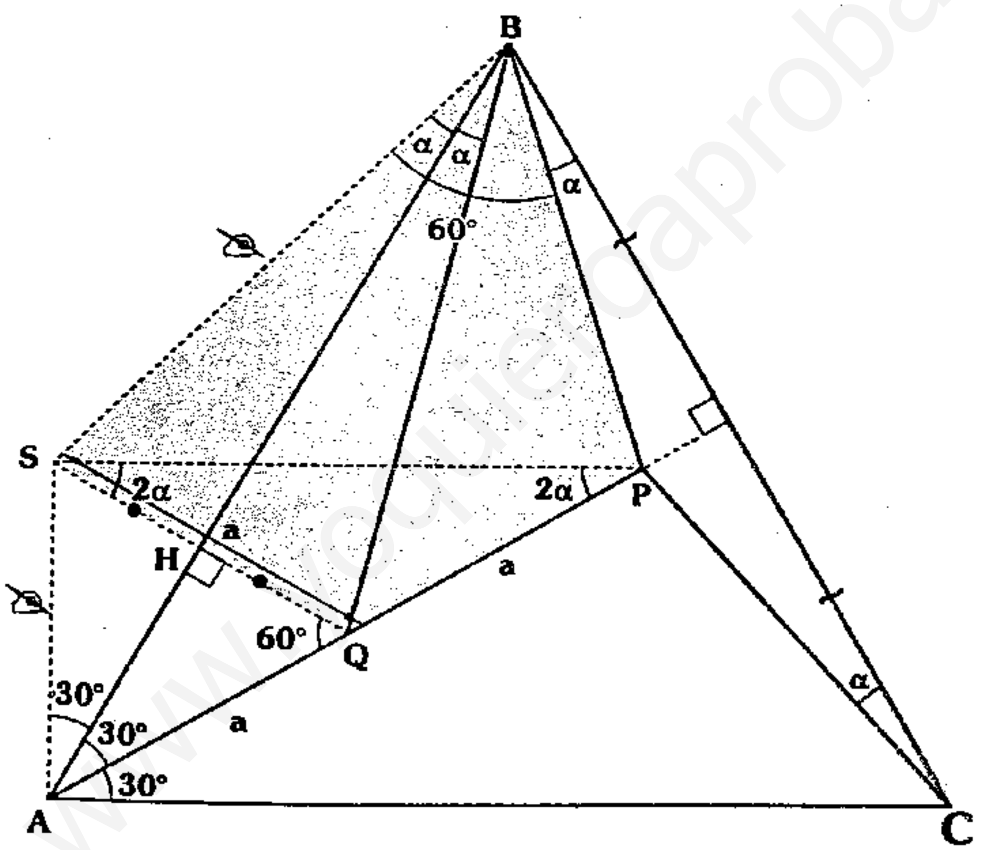
Nos piden $x$.

- Como AC=2(PQ) y $\overline{AC} // \overline{PQ}$ $\rightarrow$ PQ es base media $\rightarrow$ BP=PA.
- Sea "a" el radio de $\mathscr{C}_2$ $\rightarrow$ PA=23a=PB
- $\triangle BRO_2$: notable de $\dfrac{37°}{2}$ $\rightarrow$ $m\angle PBQ = 37°$ $\rightarrow$ PB=4
- $\triangle BTO_1$: $TB = 3x \rightarrow 3x + x = 4$

$$\therefore\ x = 1$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 220**



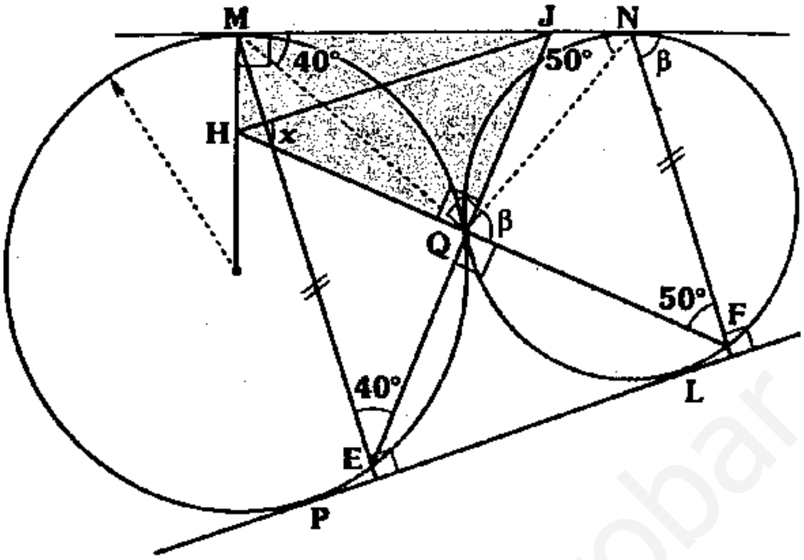

Nos Piden $\alpha$.

- Se ubica S en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ tal que $\overline{QS} \perp \overline{AB}$ y QS=QA
- $\Delta AQS$: equilátero $\rightarrow$ QH=HS $\rightarrow$ SB=BQ
- $\square SBPQ$: inscriptible $\rightarrow$ $m\angle QPS = m\angle QSP = 2\alpha$
- $\Delta SQP$: $2\alpha + 2\alpha = 60°$

$$\therefore\ \alpha = 15°$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 221**



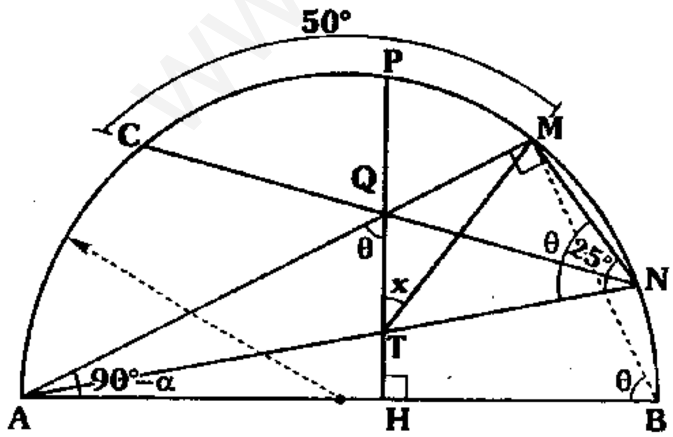

Nos Piden *x*.

- Por propiedad: $m\measuredangle MQN = 90°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle QMN = 40°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle MEQ = 40°$
- Como $\overline{ME} \,//\, \overline{NF}$ $\rightarrow$ $m\measuredangle EQF = 90°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle HQJ = 90°$
- ⌂HMJQ: inscriptible

$\therefore\ \mathbf{x = 40°}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 222**



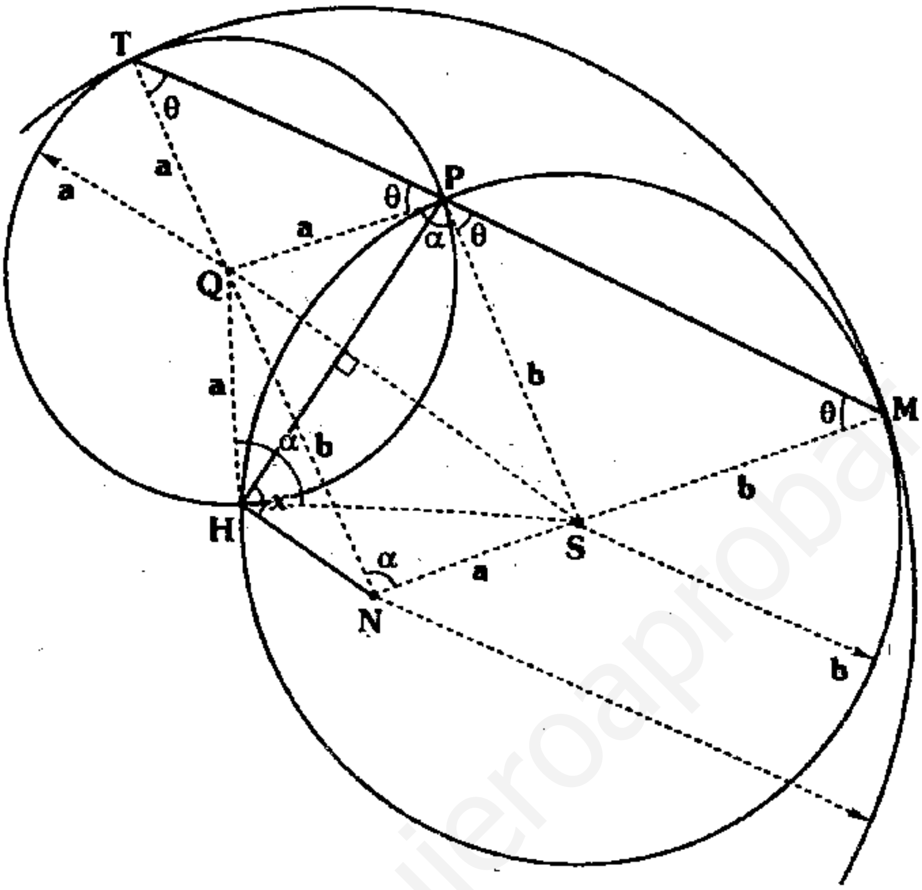

Nos Piden x.

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle CNM = 25°$
- Sea $m\measuredangle ABM = \theta \rightarrow m\measuredangle ANM = \theta$ y $m\measuredangle HQA = \theta$
- ⌂TQMN: inscriptible

$\therefore\ \mathbf{x = 25°}$

**Clave B**

RESOLUCIÓN Nº 223




Nos Piden $x$.

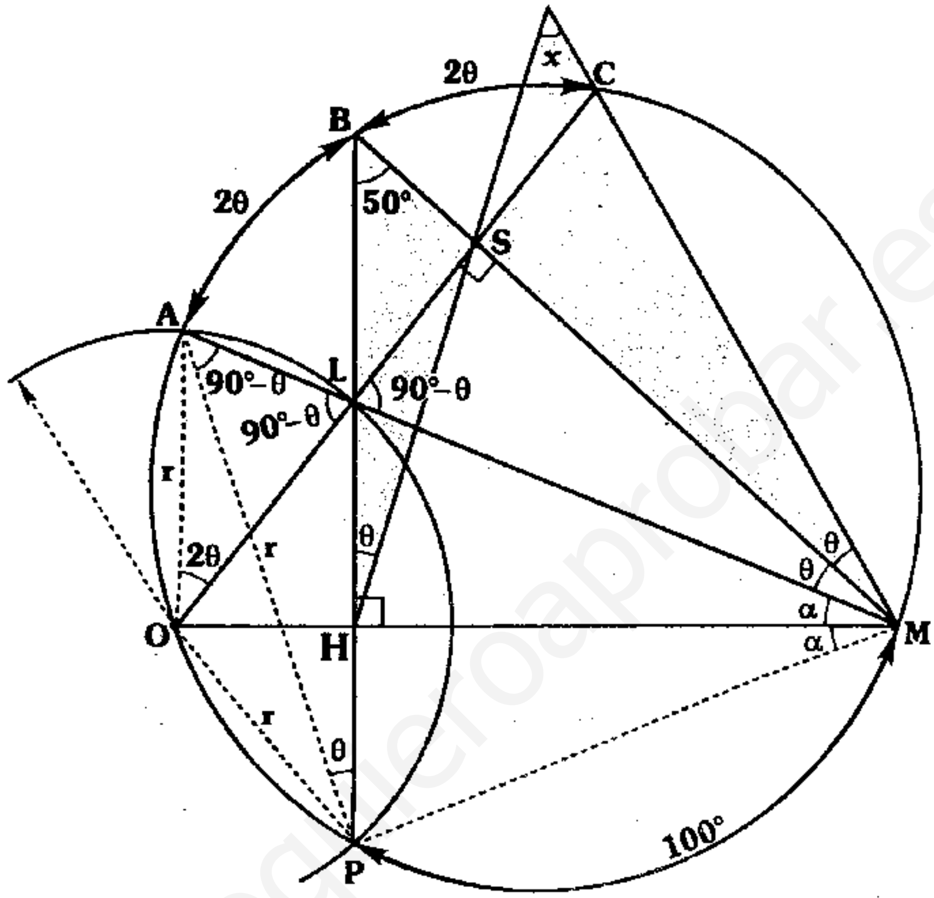
- Son colineales: – N, Q y T
  – N, S y M
- Notemos que: – HQPS: trapezoide simétrico $\overline{HP} \perp \overline{QS}$
  – NQPS: paralelogramo
- Luego $m\measuredangle QHS = m\measuredangle QNS$

  $\triangle$QHNS es inscriptible y como QH=NS $\rightarrow$ $\overline{HN} // \overline{QS}$

$$\therefore\ x = 90°$$

Clave C

**RESOLUCIÓN N° 224**




Nos Piden $x$.

- Sea $m\sphericalangle APL = \theta$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle AOL = 2\theta$ y $m\sphericalangle ALO = 90° - \theta$

- También $m\sphericalangle AMQ = \theta$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle OSM = 90°$
- $\triangle$PMLO: trapezoide simétrico

$\rightarrow$ $\overline{OM} \perp \overline{LP}$

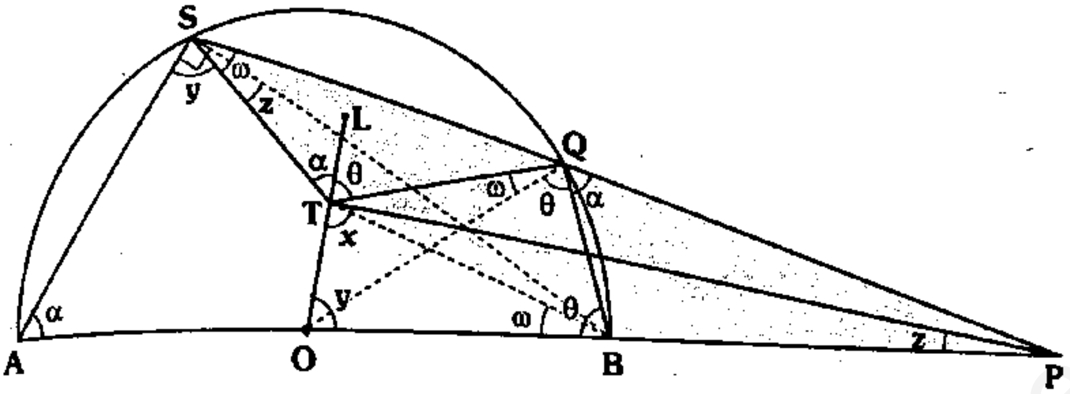
- $\triangle$HLSM: inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle LHS = \theta$
- En la región sombreada:

$$x + \theta = 50° + \theta$$

$$\therefore\ x = 50°$$

Clave A

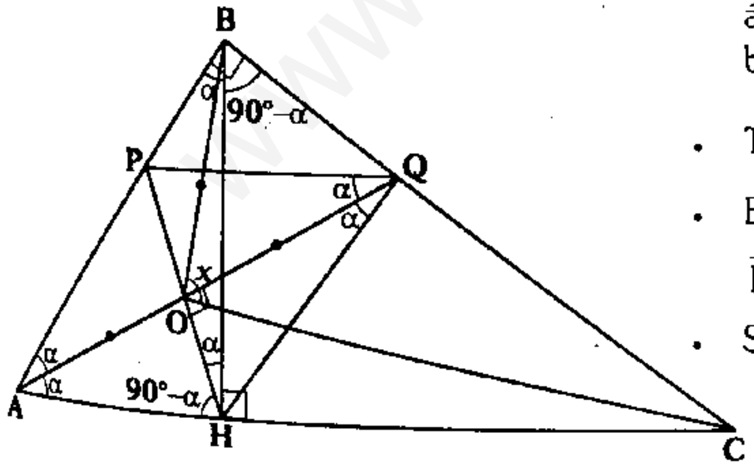
**RESOLUCIÓN Nº 225**




- Sea m∢OTP = $x$ , pode demostrar: $x = 90°$
- Sea m∢SAB = α, m∢OBQ = θ y m∢TSQ = ω
- ⌂AOTS: m∢LTS = α
- ⌂OTQB: m∢LTQ = θ
- En ΔTSQ : m∢TQO = ω → m∢OBT = ω
- Como m∢TSP = m∢OBT → ⌂TSPB es inscriptible → m∢TPB = z
- En S: y + z = 90° → en ⊿OTP:

$$x = 90°$$

**RESOLUCIÓN Nº 226**




Nos piden "x".

- Como ABQH es un rombo entonces los ángulos opuestos son "iguales" y son bisecados por la diagonal.
- También $\overline{AQ} \perp \overline{PH}$ ⇒ m∢BHP=α
- En ⊿ABQ, como AO=OQ entonces $\overline{BO}$ es mediana.
- Se observa que:

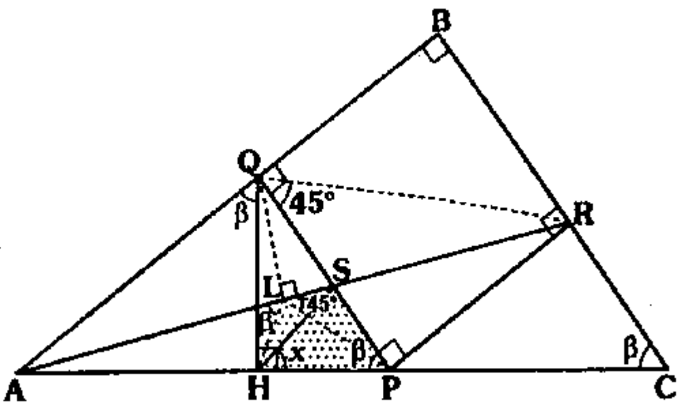
  m∢OBC + m∢OHC = 180°

  ⇒ ⌂HOBC es inscriptible

  $\therefore\ x = 90°$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 227



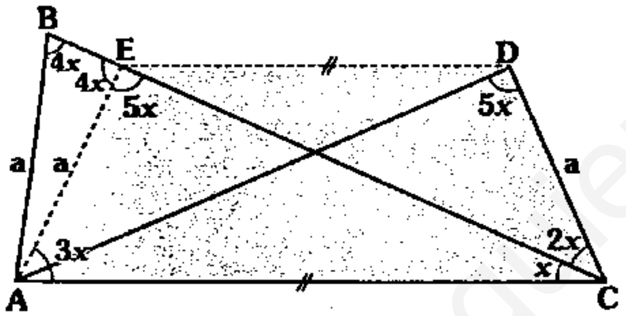

Nos piden "$x$".

- Se traza $\overline{QL} \perp \overline{AR}$ entonces ⌂QRPL es inscriptible $\Rightarrow$ m∢PLR=45°
- Sea m∢APQ=β $\Rightarrow$ m∢AQH=β
- ⌂HLSP: inscriptible

$$x = 45°$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 228




Nos piden "$x$".

- Se ubica E en $\overline{BC}$ tal que:

$$m∢AEB = 4x \Rightarrow AB = AE$$

$$\Rightarrow m∢EAC = 3x \Rightarrow AEDC$$

es un trapecio isósceles, el cual también es inscriptible.

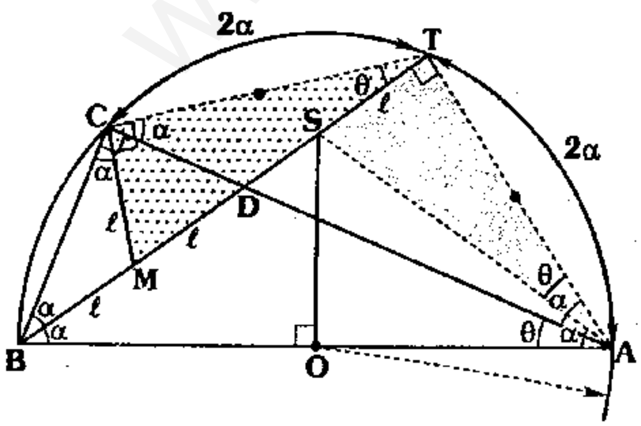
$$\Rightarrow m∢AEC = m∢ADC = 5x$$

- En E: $4x + 5x = 180°$

$$\therefore \ x = 20°$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 229

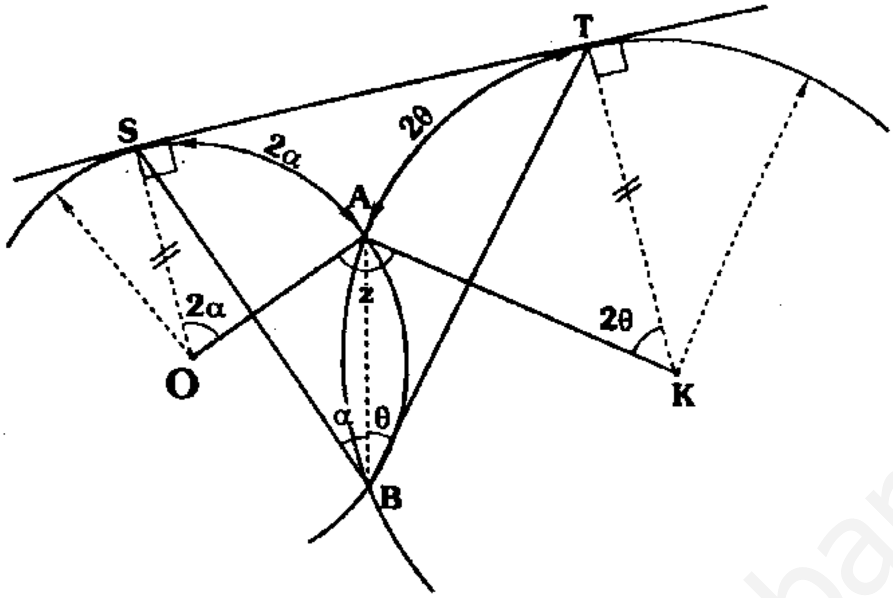



- Sea m∢OAD = θ → m∢SAT = θ
- Como m$\overset{\frown}{CT}$ = m$\overset{\frown}{TA}$ = 2α → CT=TA
- En el ⊿BCD, se traza la mediana $\overline{CM}$ → BM=MD=CM
- Notemos que ⊿CMT ≅ ⊿STA
  → MC=ST

$$\therefore \ \frac{BD}{ST} = \frac{2\ell}{\ell} = 2$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 230**



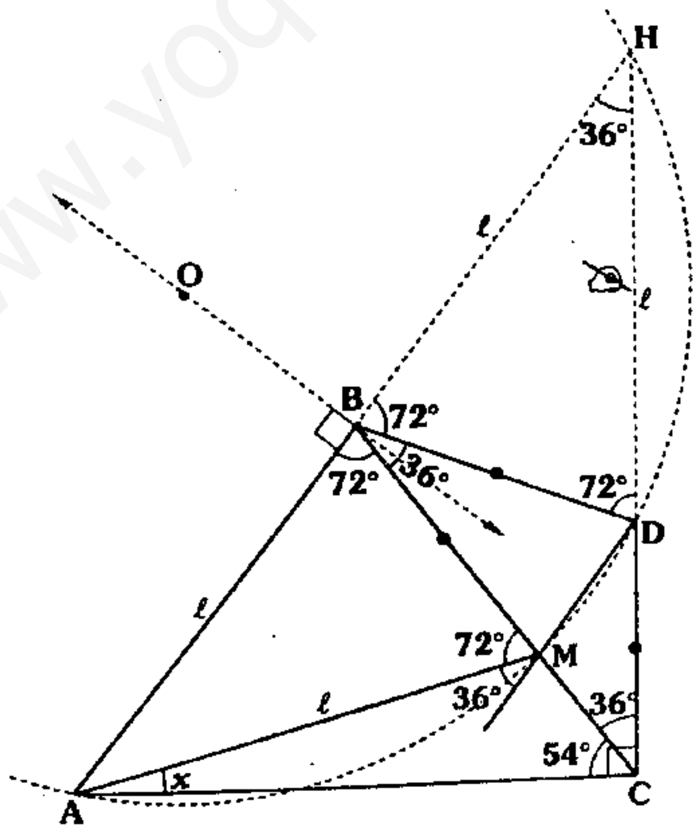

Piden: $\dfrac{m\measuredangle SBT}{m\measuredangle OAK}$

- Sea $m\measuredangle ABS = \alpha$ y $m\measuredangle ABT = \theta$ $\rightarrow$ $m\measuredangle SBT = \alpha + \theta$
- Como $\overline{OS} // \overline{KT}$ $\rightarrow$ $m\measuredangle OAL = 2\alpha + 2\theta$

$$\therefore \ \frac{\mathbf{m\measuredangle SBT}}{\mathbf{m\measuredangle OAK}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 231**



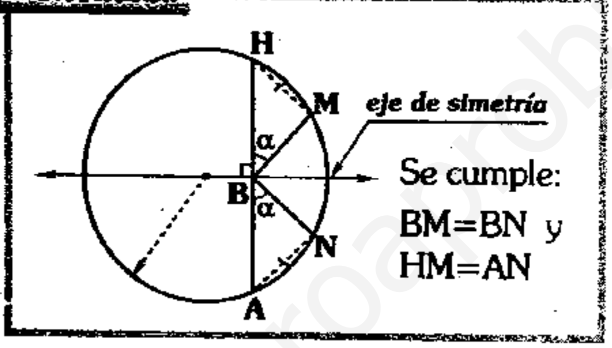
Nos piden $x$.

- Las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en H $\rightarrow$ AB=BC=BH
- ⏢AMDH: inscriptible, sea O el centro de la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero.
- Como AB=BH $\rightarrow$ $\overline{OB} \perp \overline{AH}$
- De la observación: BD=BM y AM= $\ell$ $\rightarrow$ $m\measuredangle AMB = 72°$
- En $\Delta$ACM : $x + 54° = 72°$

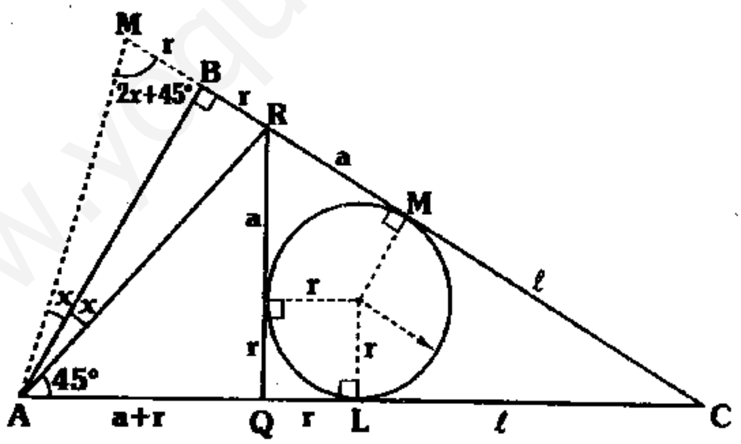
$$\therefore\ x = 18°$$

Clave B

**Observación**




**Resolución N° 232**



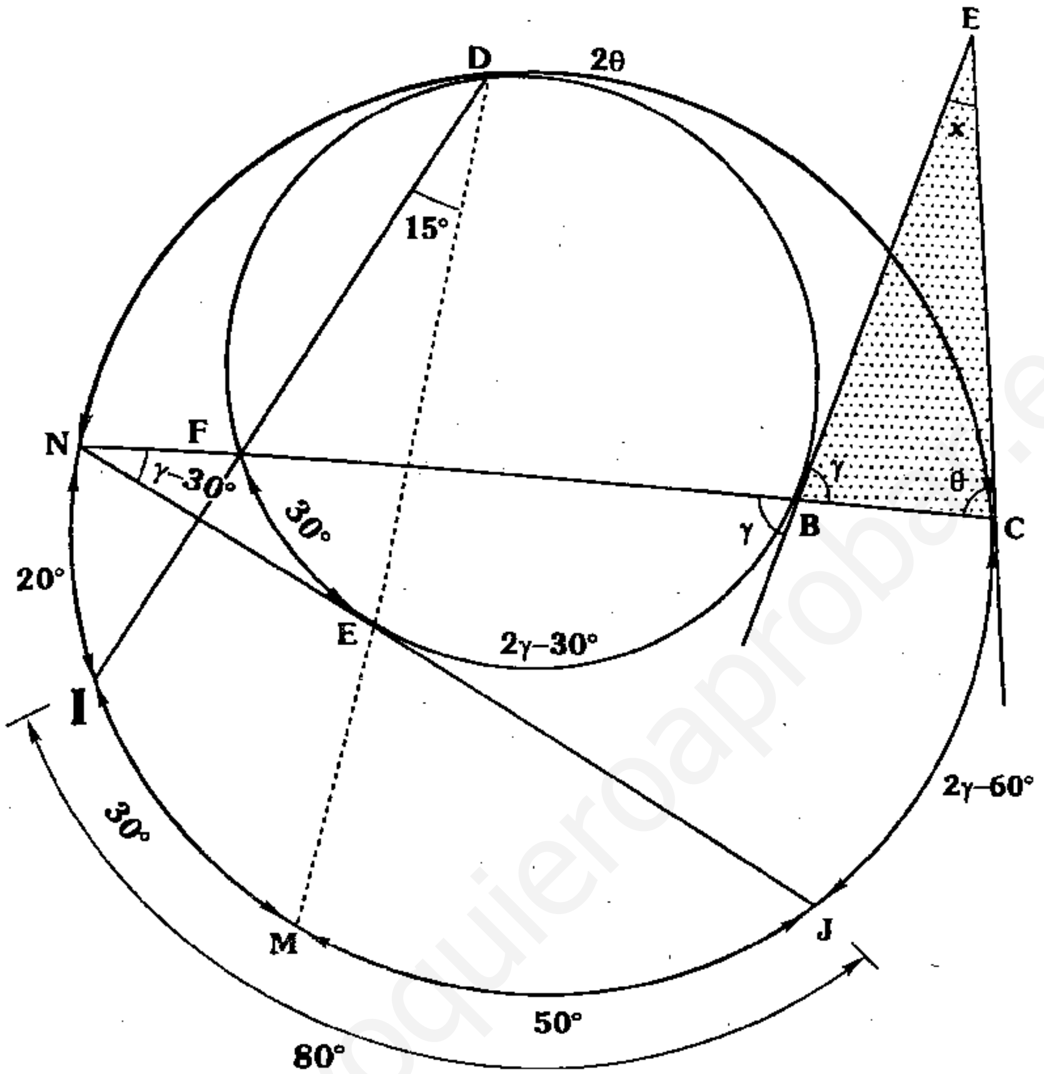

Nos piden $x$.

- Prolongamos $\overline{CB}$ hasta M tal que BM=r $\rightarrow$ AR=AM y $m\measuredangle BAM = x$
- Notemos que AC=CM $\rightarrow$ $\Delta$AMC : isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle MAC = m\measuredangle AMC = 45° + 2x$
- En ⊿ABM: $x + 2x + 45° = 90°$

$$\therefore\ x = 15°$$

Clave A

**RESOLUCIÓN Nº 233**




Piden $x$.

- En $\Delta BEC$ : $x+\theta+\gamma=180°$ ...(1)
- Al prolongar $\overline{DM}$ hasta que corte a la circunferencia mayor en M, notamos:

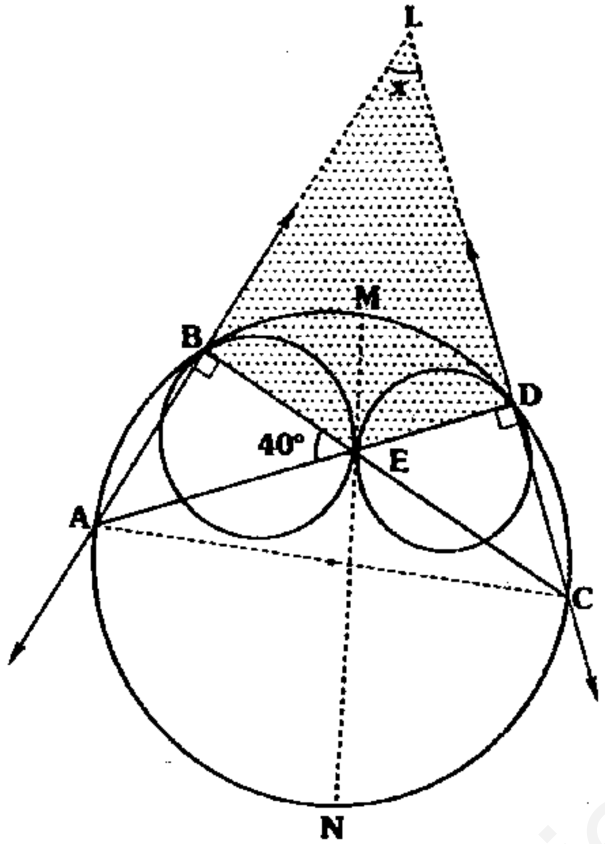
$$m\widehat{NM}=m\widehat{MJ}=50°$$

- $m\widehat{FEB}=2\gamma \rightarrow m\widehat{EB}=2\gamma-30° \rightarrow m\sphericalangle JNC=\gamma-30° \rightarrow m\widehat{CJ}=2\gamma-60°$
- Finalmente: $$2\theta+2\gamma-60°+80°+20°=360°$$ $$\rightarrow \theta+\gamma=160°$$
- En (1):

$$\mathbf{x=20°}$$

**Clave B**

**Resolución N° 234**




Nos piden $x$.

- Tracemos la tangente común a las dos pequeñas circunferencias.
- Por propiedad:

$$m\widehat{MDC} = m\widehat{CN} \quad \text{y} \quad m\widehat{MBA} = m\widehat{AN}$$

$$\rightarrow \quad \overline{AC}: \text{ diámetro}$$

- Luego:

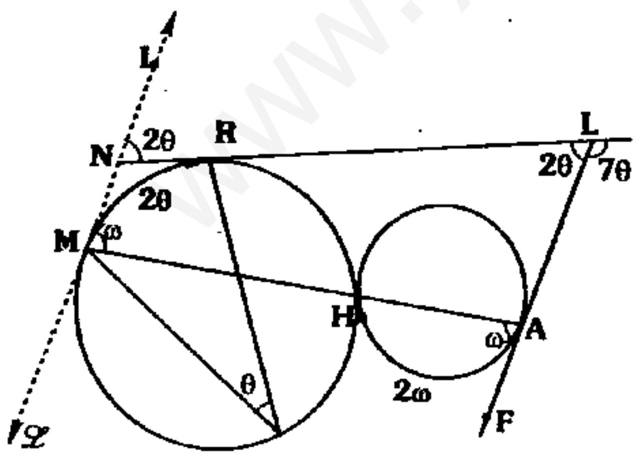
$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle ADC = 90°$$

- $\triangle$BLDE: inscriptible

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 40°}$$

**Clave D**

**Resolución N° 235**




Piden $\theta$.

- Se traza la tangente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, en en M
- Como $m\widehat{MRH} = m\widehat{HA}$

$$\rightarrow m\measuredangle FAH = m\measuredangle NMH$$

$$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \,//\, \overline{AL}$$

- Como $m\widehat{MR} = 2\theta \ \rightarrow \ m\measuredangle INR = 2\theta$

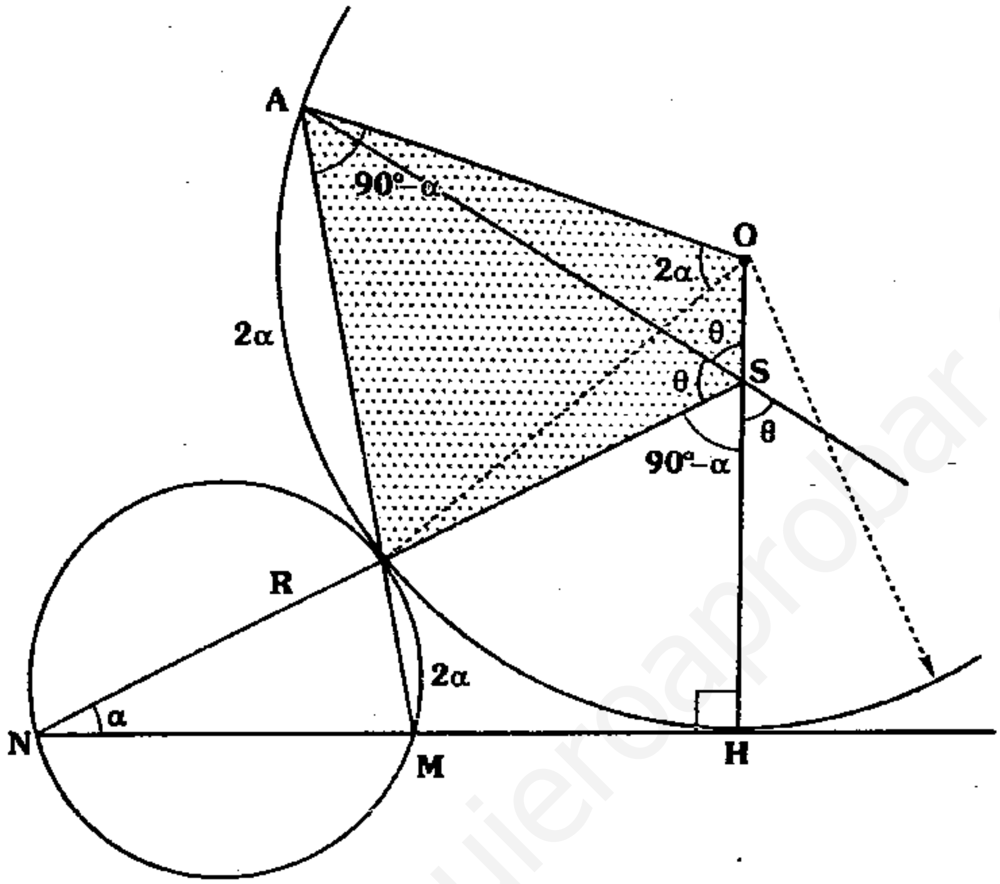
$$\rightarrow m\measuredangle ALN = 2\theta$$

- En L: $\quad 2\theta + 7\theta = 180°$

$$\therefore \ \boldsymbol{\theta = 20°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 236**




Piden θ .

- Por propiedad: $m\widehat{MR} = m\widehat{RA} = 2\alpha$
- Como el $\Delta ROA$ : es isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle RAO = 90° - \alpha$
- En ⊿NHS: $m\measuredangle NSH = 90° - \alpha$
- ⌂RSOA: inscriptible $\rightarrow$ $\theta = 2\alpha$ ... (1)
- En ⊿HSN:

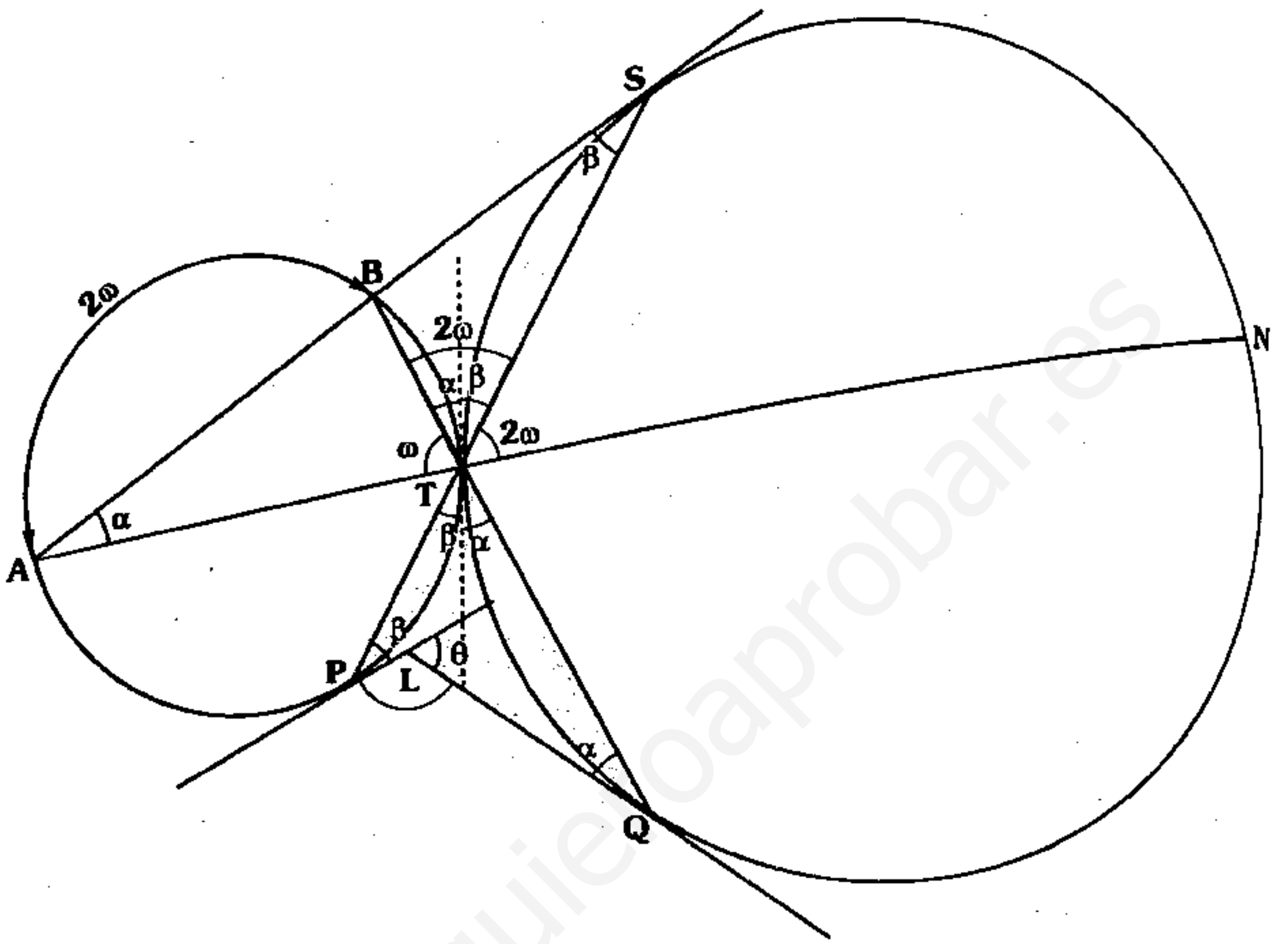
$$2\theta = 90° + \alpha \quad ... (2)$$

- De (1) y (2):

$$\theta = 60°$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 237**




Nos piden $\theta$.

- Como: $m\widehat{AB} = m\sphericalangle STN = 2\omega \quad \rightarrow \quad m\sphericalangle ATB = \omega$

- Notamos: $\underbrace{m\sphericalangle BTS}_{\alpha+\beta} = m\sphericalangle STN = 2\omega$

- En T: $2\omega + 2\omega + \omega = 180° \rightarrow \omega = 36°$

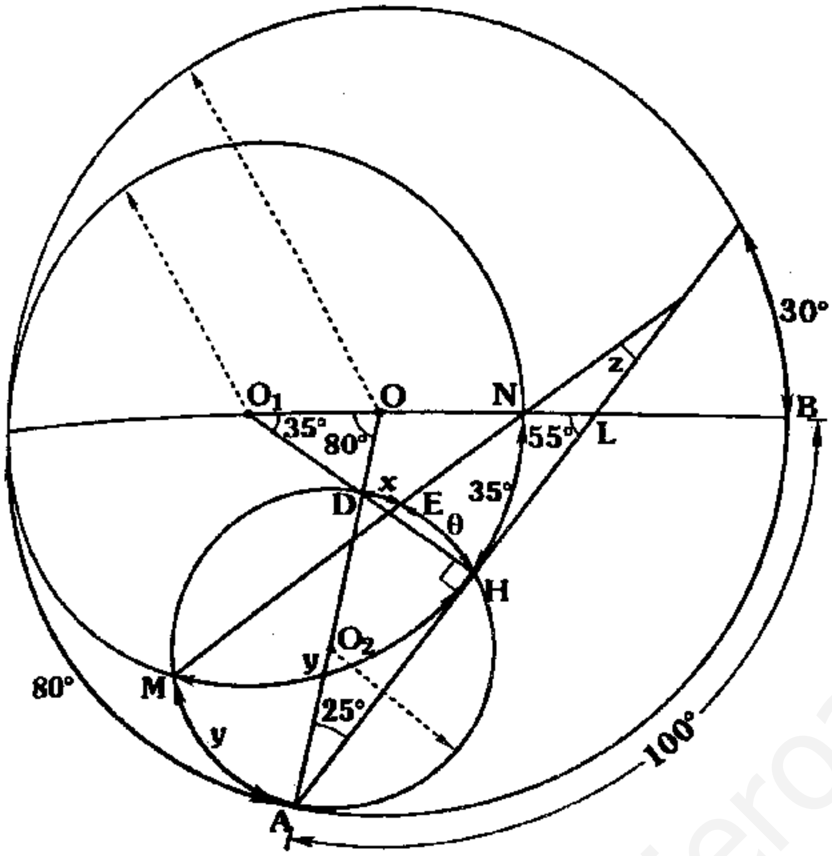
- En la región sombreada:

$$m\sphericalangle PLQ = 144°$$

$$\therefore \ \theta = \mathbf{36°}$$

Clave C

**RESOLUCIÓN Nº 238**




Piden x.

- O, $O_2$ y A: colineales , lo mismo que $O_1$, D y H
- Se sabe que $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MH}$
- Por ángulo exterior:

$$z = \frac{y-\theta}{2} = \frac{y-35}{2}$$

$$\rightarrow \quad \theta = 35°$$

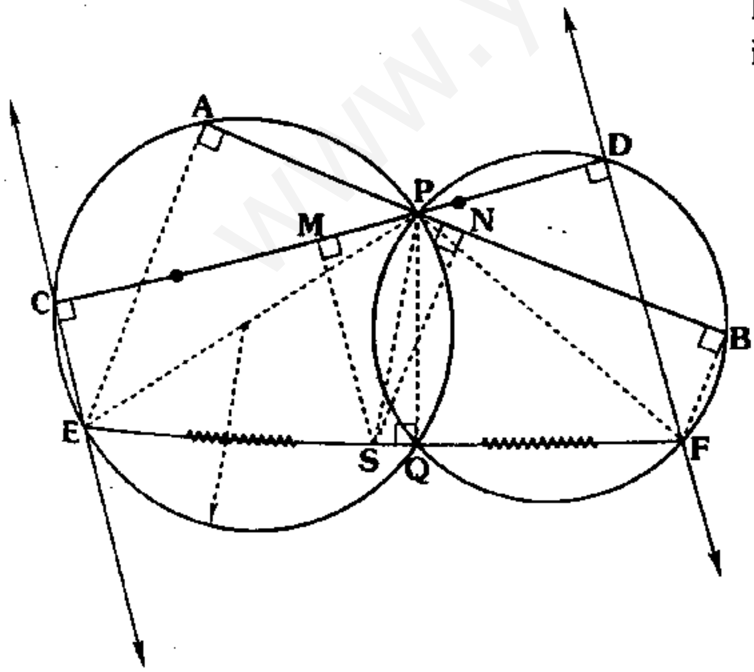
- Por ángulo inscrito:

$$\underbrace{m\overset{\frown}{DH}}_{50°} = x + \theta$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 15°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 239**



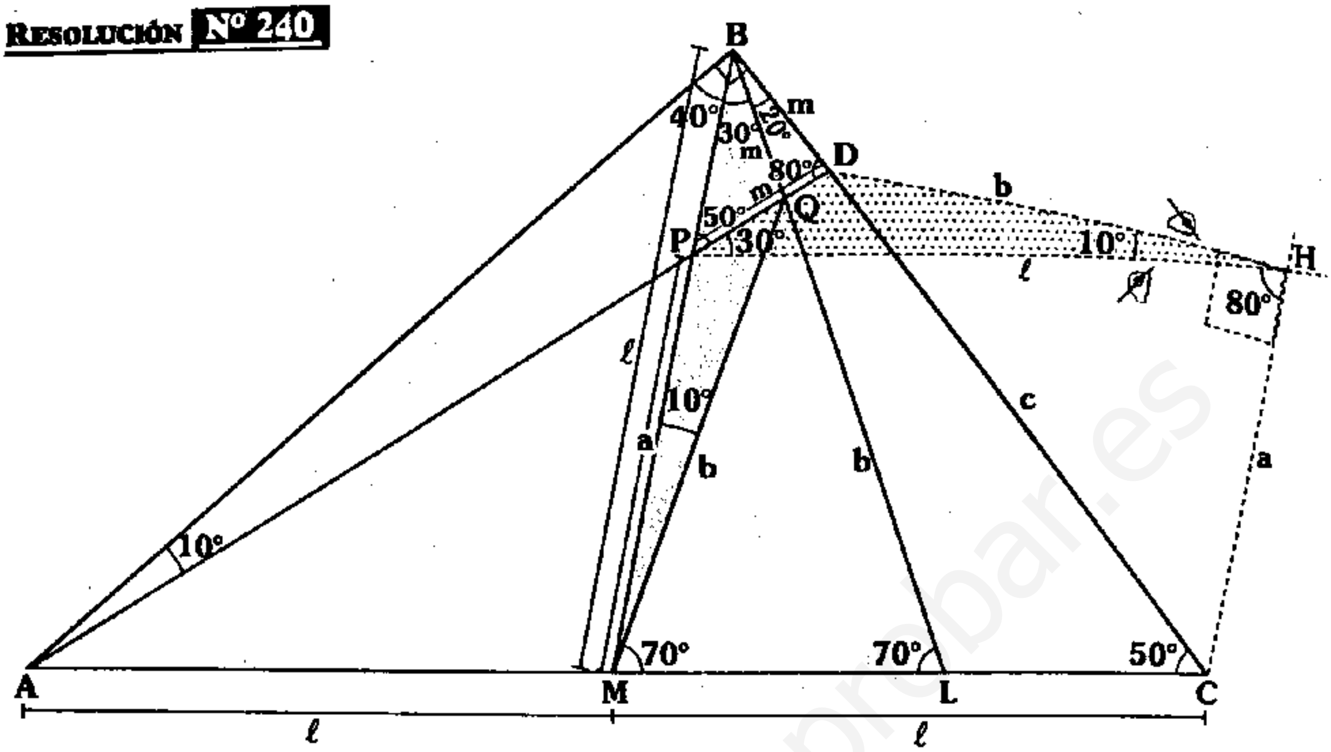

Por demostrar que el $\triangle$QNPM es inscriptible

- Trazamos los diámetros $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ entonces E, QA y F son colineales
- Por propiedad: $\overline{CE} // \overline{DF}$

  entonces ECDF es un trapecio y $\overline{SM}$ es su base media $\rightarrow$ $\overline{SM} \perp \overline{CD}$
- Análogamente: $\overline{SN} \perp \overline{AB}$
- Notamos que S, M, P, N y Q son concíclicos.

$\therefore$ **$\triangle$QNPM: inscriptible**

## Resolución N° 240

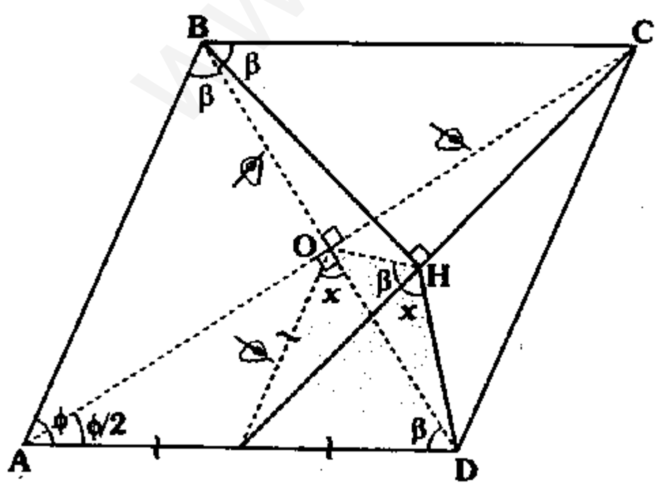



- Piden la relación entre a, b y c.
- $\triangle$ABQN: inscriptible
- Se traza el paralelogramo MPHC → MP=HC=a
- Como: PD=DB=BQ → $\Delta$MBQ ≅ $\Delta$HPD → DH=b y m∢PHC = 10°

  → m∢DHC = 90°
- Finalmente en el ⊿DHC: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

**Clave C**

## Resolución N° 241




Piden $x$.

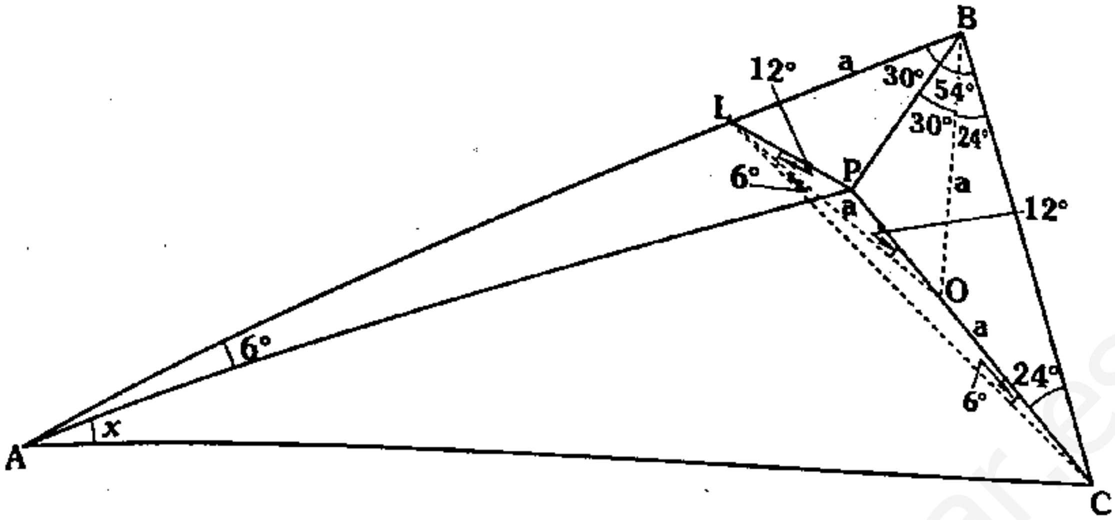
- Trazamos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ secantes en O → $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- $\triangle$OBCH: inscriptible → m∢OHM = β
- $\triangle$OHDM: inscriptible, pues m∢OHM=m∢MDO=β → m∢MOD=$x$
- En ⊿DHC: $\overline{OM}$ es mediana

  → m∢AOM = ϕ/2

  $$\therefore\ \mathbf{x = 90° - \frac{\phi}{2}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 242**

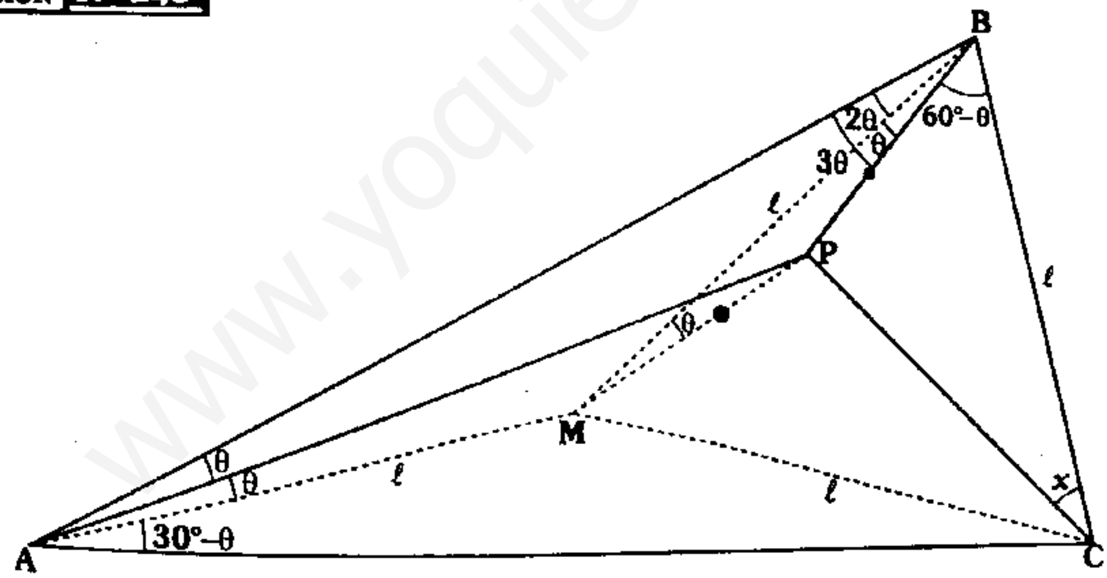



Piden $x$.

- Se ubica L en $\overline{AB}$ tal que $m\sphericalangle PCL = 6°$ $\rightarrow$ ⌂ALPC es inscriptible y $m\sphericalangle LCB = 30°$
- Se ubica O en $\overline{PC}$ tal que $m\sphericalangle CBO = 24°$ $\rightarrow$ $OB=OC$ y $m\sphericalangle LBO = 60°$
- Se concluye que O es circuncentro del $\Delta LBC$ $\rightarrow$ $OL=OB=OC$
- Como ⌂ALPC: inscriptible $\qquad$ $\boldsymbol{x=18°}$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 243**



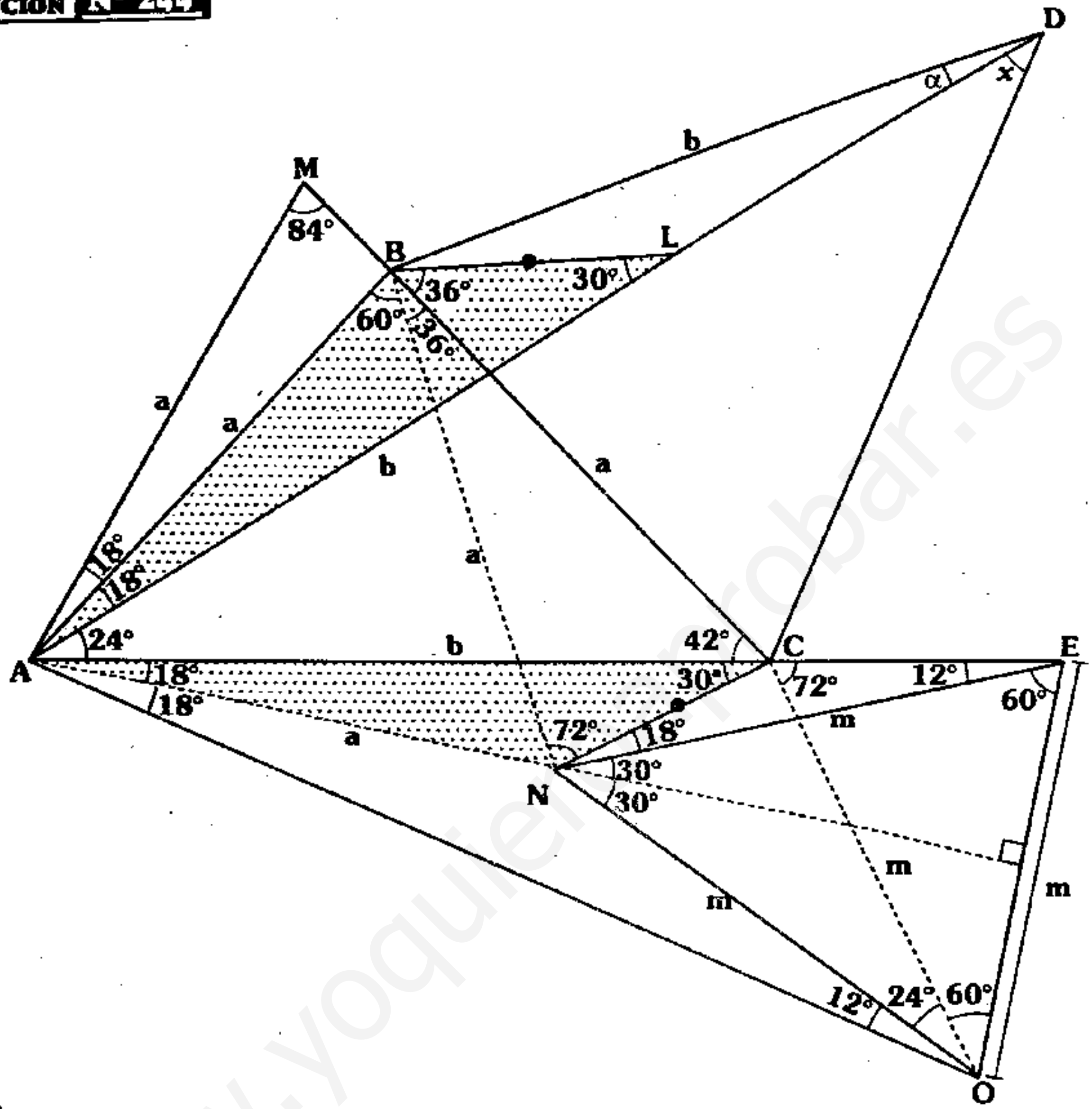

Piden $x$.

- Se ubica el circuncentro M del triángulo ABC $\rightarrow$ $MA=MB=MC$

  $\rightarrow$ $\Delta MBC$ : equilátero, $m\sphericalangle MBP = \theta$ y $m\sphericalangle MBA = m\sphericalangle MAB = 2\theta$
- ⌂ABPM: inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle PMB = \theta$ $\rightarrow MP=PB$
- En el $\Delta MBC$ : $\qquad$ $\boldsymbol{x=30°}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 244**



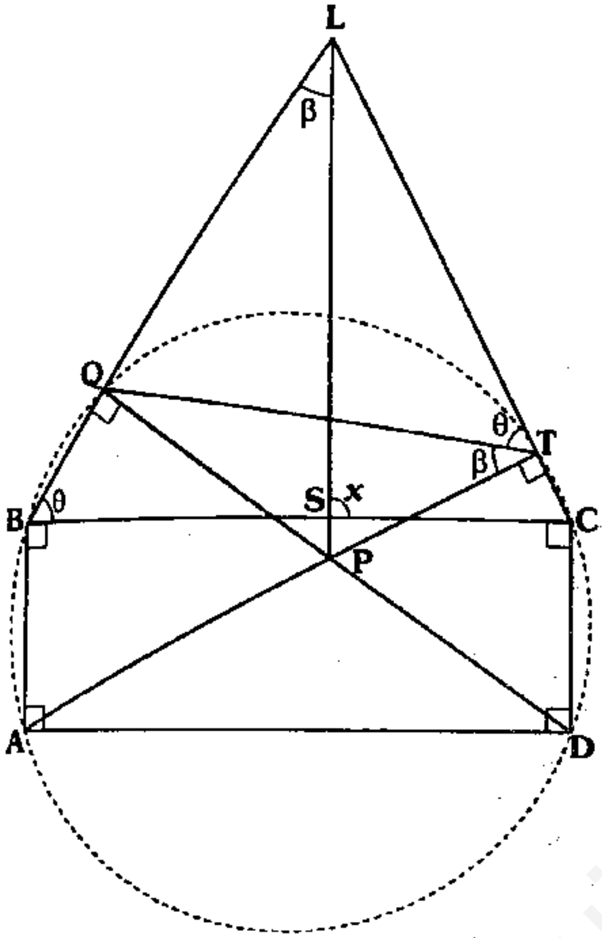

Piden $\theta$.

- Se traza el $\Delta ANC$ tal que: $m\sphericalangle NAC = 18^\circ$ y $AN = AB \rightarrow \Delta ABN$ : equilátero.
- Se ubica L en $\overline{AD}$ tal que $m\sphericalangle ALB = 30^\circ \rightarrow \Delta ABL \cong \Delta ACN$
- Sea E en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $m\sphericalangle AEN = 12^\circ$
- Sea O circuncentro del $\Delta NCE$
- En $\Delta ACO$ : se verifica $b = m$
- $\Delta BLD \cong \Delta NCE \rightarrow \alpha = 12^\circ \rightarrow m\sphericalangle LBD = 18^\circ$
- $\Delta AMC \cong \Delta CBD$

$$\therefore\ x = 30^\circ$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 245**




- Por demostrar que $x = 90°$
- Como $m\measuredangle BQD = m\measuredangle ATC = 90°$ los puntos Q y T estarán en la circunferencia circunscrita al rectángulo ABCD.
- En $\Delta BSL$ : $x = \theta + \beta$
- En $\triangle BQTC$:

$$m\measuredangle QBC = m\measuredangle QTL = \theta$$

- En el $\triangle PQLT$ que es inscriptible:

$$m\measuredangle QLP = m\measuredangle QTP = \beta$$

- En T: $\theta + \beta = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90°}$$

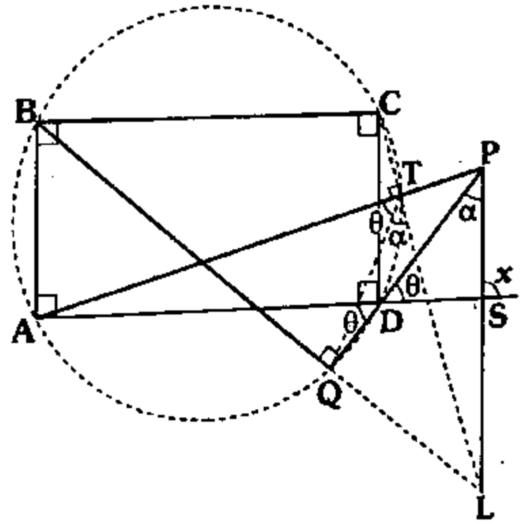
**Observación**

*En punto P no necesariamente es interior también puede ser externo o estar en algún lado del rectángulo (la prueba es similar)*

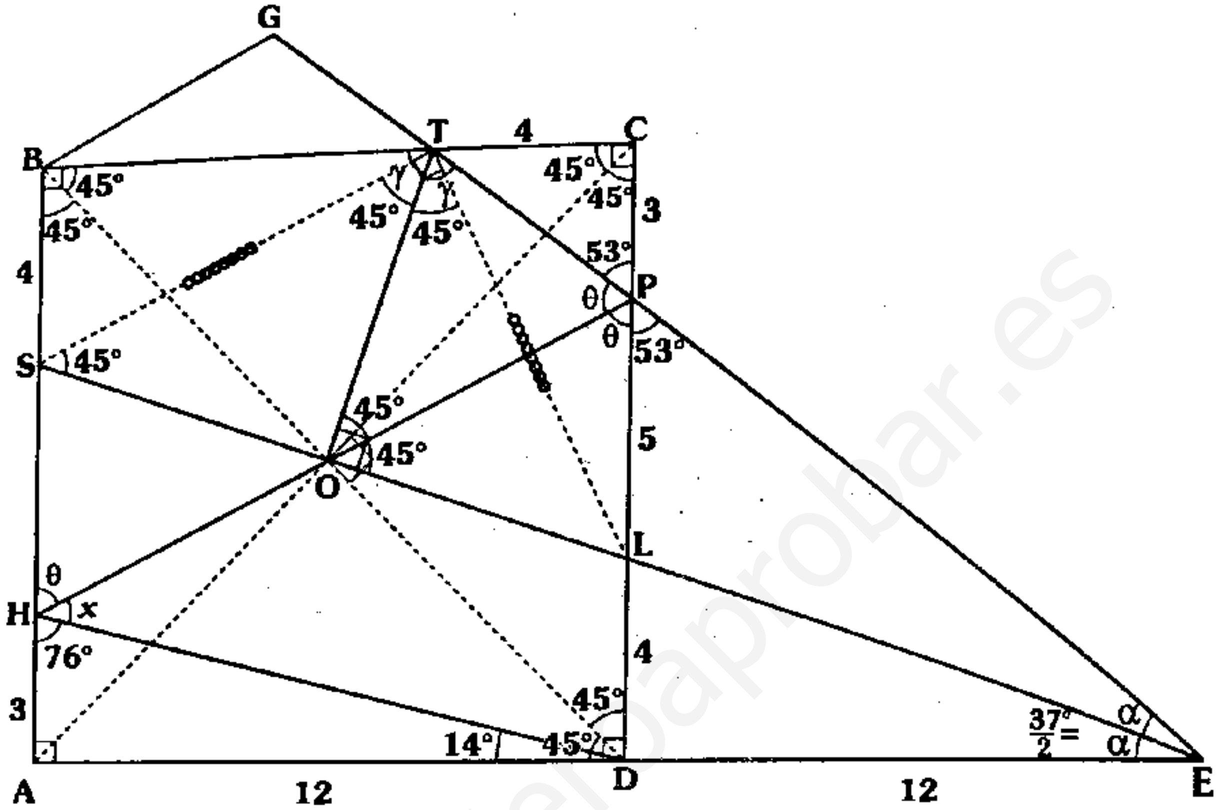
*Por ejemplo*

$$x = \underbrace{\alpha + \theta}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90°}$$



RESOLUCIÓN Nº 246




Nos piden *x*.

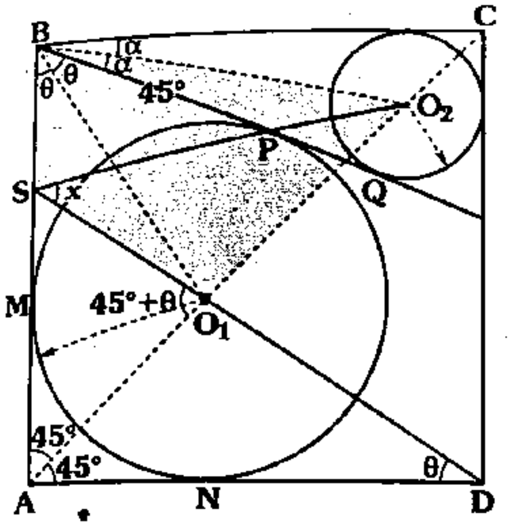
- Como BHGP es trapecio isósceles $\rightarrow$ m∢BHP = m∢HPT = m∢HPD $\rightarrow$ O es excentro de ⊿TCP y ⊿PDE $\rightarrow$ m∢POL = 45° y m∢EOT = 90°
- ⌂OTBS y ⌂OTCL: inscriptibles m∢STL = 90° y ST = TL
- ⊿SBT ≅ ⊿TCL $\rightarrow$ TC=4 $\rightarrow$ m∢TPC = 53° y $\alpha = \dfrac{37°}{2}$ $\rightarrow$ DE=12 y PL=5
- Como AH=4 y AD=12 $\rightarrow$ ⊿HAD: notable de 14° $\rightarrow$ m∢AHD = 76°
- Como $\theta = \dfrac{127°}{2}$ $\rightarrow$ en H:

$$x + \theta + 76° = 180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{81°}{2}}$$

Clave C

**RESOLUCIÓN N° 247**




Piden $x$.

- Como: $\Delta AO_1D \cong \Delta AO_1B$

  $\rightarrow\ m\measuredangle ABO_1 = \theta$

- Notemos que $m\measuredangle O_1BO_2 = 45°$

- $\triangle SBO_2O_1$ : inscriptible, pues:

  $$m\measuredangle SBO_2 = m\measuredangle SO_1A$$

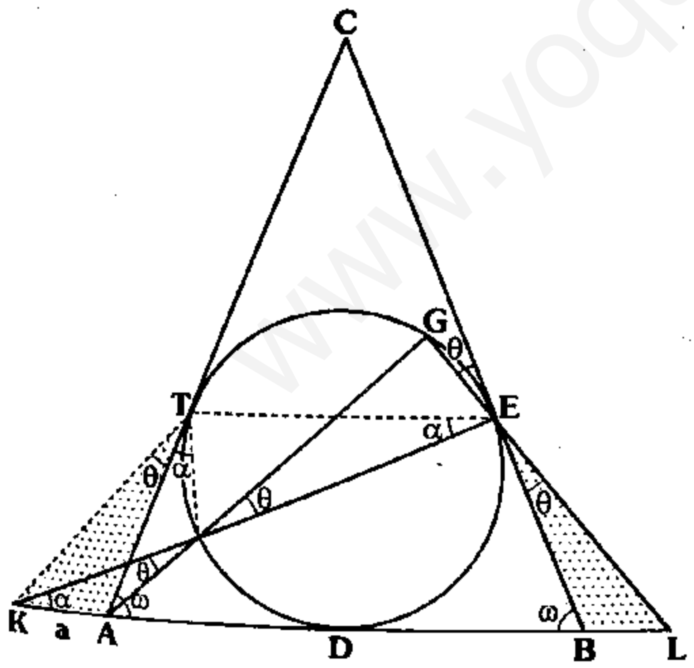
  $$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$$

**Clave D**

*Nota*

*El dato que $\theta = 33°$, no era necesario.*

**RESOLUCIÓN N° 248**




Nos piden $\dfrac{a}{b}$.

- Por dato AB=BC

  $\rightarrow\ m\measuredangle TAB = m\measuredangle ABE = \omega$

  $\rightarrow\ \overline{TE} \parallel \overline{AB}$

- Sea $m\measuredangle AKE = \alpha$

  $\rightarrow\ m\measuredangle FET = \alpha = m\measuredangle FTA = \alpha$

  $\rightarrow\ \triangle KAFT$: inscriptible

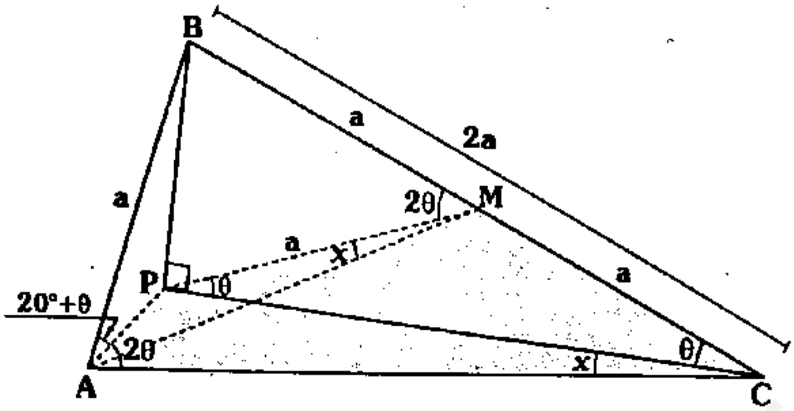
  $\rightarrow\ m\measuredangle ATK = \theta$

- $\Delta KAT \cong \Delta LBE\ \rightarrow\ a=b$

  $$\therefore\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 249**



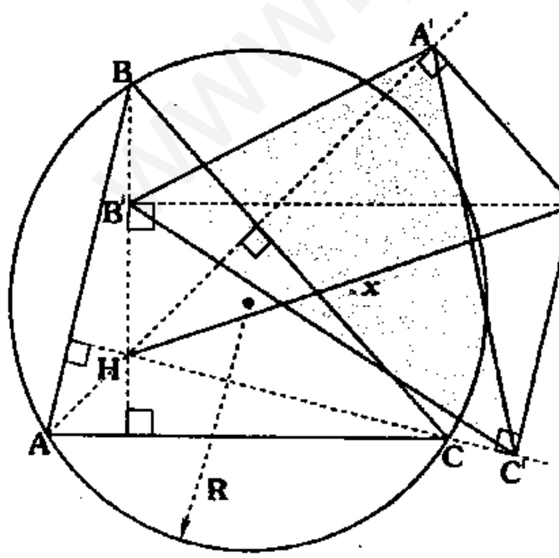

Nos piden "x".

- En ⊿BPC: se traza la mediana $\overline{PM}$ → BM=MC=PM
- Luego m∢PMB = 2θ → ⌂APMC es inscriptible
  → m∢PMA = x y m∢PAM = θ
- ΔABM : isósceles → $x + 2\theta = 20° + 2\theta$

$\therefore$ **x=20°**

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 250**



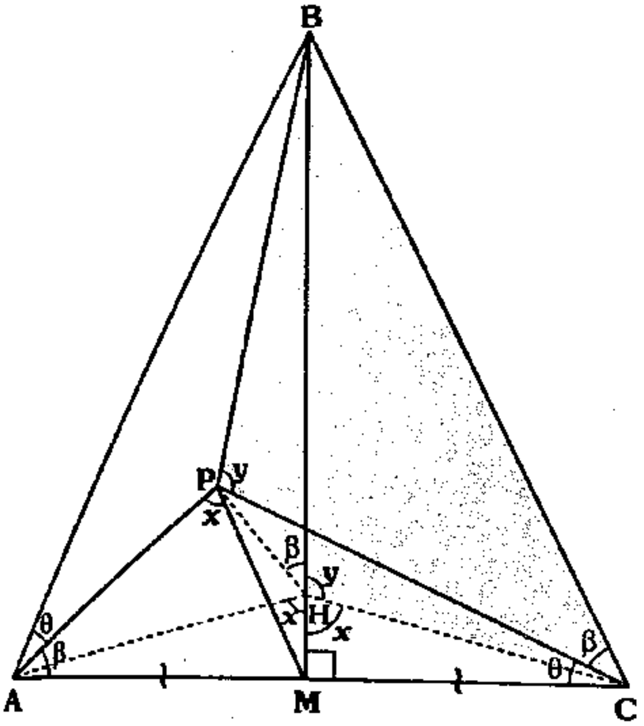

Nos piden HP.

- Notemos que H, B', A', P y C' son concíclicos, cuyo diámetro es $\overline{HP}$
- Como ΔABC ≅ ΔA'B'C entonces sus circunradios son iguales

$\therefore$ **HP=2R**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 251**




Sea: m∢APM = x  y  m∢BPC = y

Por demostrar: $x + y = 150°$

- Se ubica H en $\overline{BM}$ tal que el ⌂APHM: inscriptible

  → m∢PAM = m∢PHB = β y

  m∢AHM = x

- Como $\overleftrightarrow{BM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$

  → m∢MHC = x

- Como m∢PHB = m∢PCB = β

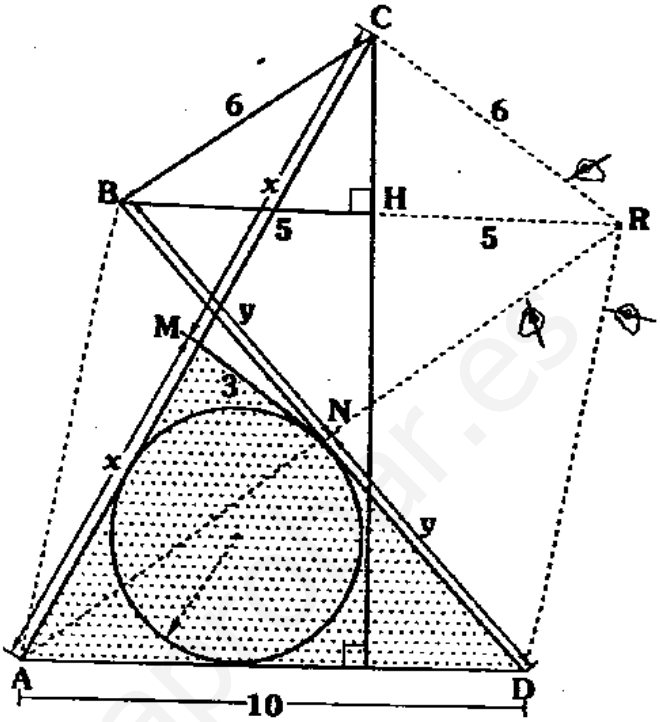
  → ⌂HPBC es inscriptible

  → m∢BHC = y

$\therefore\ \mathbf{x+y=180°}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 252**




Nos piden: AC+BD

- Sea AC = 2x  y  BD = 2y

- Se prolonga $\overline{BH}$ hasta R tal que HR=5 → CR=6

- Como BR=AD y $\overline{BR} // \overline{AD}$ → ABRD es paralelogramo

- Como BN=ND → N es centro del paralelogramo, entonces A, N y R son colineales

- ΔACR : $\overline{MN}$ es base media ⇒ MN=3

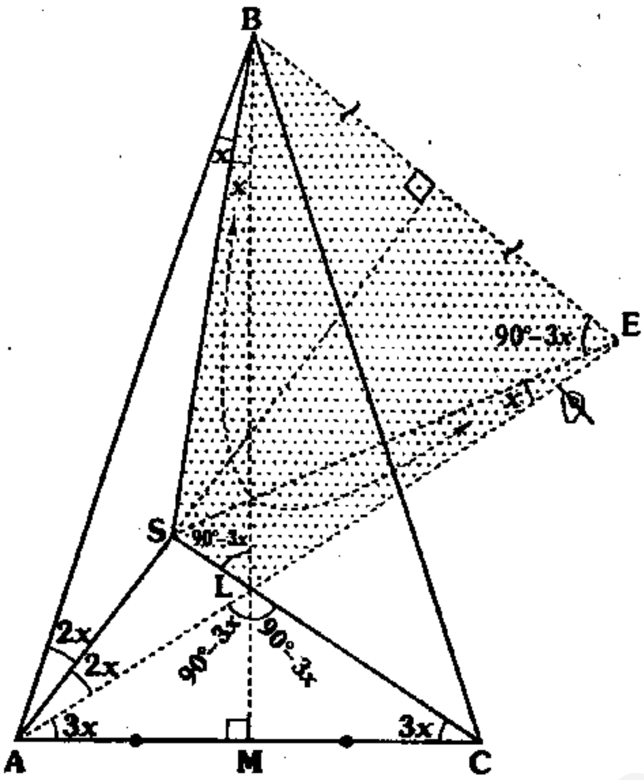
- En ⌂AMND: $x + y = 3 + 10$

  $x + y = 13$

$\therefore\ \mathbf{AC+BD=2x+2y=26}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 253**




- Se traza la altura $\overline{BM}$ del $\Delta ABC$ entonces $AM=MC$, $\overline{BM}\cap\overline{SC}=\{L\}$.
- Por teorema de la mediatriz $LA=LC$

  $\Rightarrow\ m\sphericalangle LAC=3x$ y $m\sphericalangle SAL=2x$
- Se traza $\overline{BE}\perp\overleftrightarrow{AL}$ ($E\in\overleftrightarrow{AL}$)

  $\Rightarrow\ \Delta ABE$: isósceles
- Como:

  $m\sphericalangle ABS=m\sphericalangle SEA=x$

  $\Rightarrow\ m\sphericalangle SEB=90-3x$

  $\Rightarrow$ ⌂LSBE es inscriptible

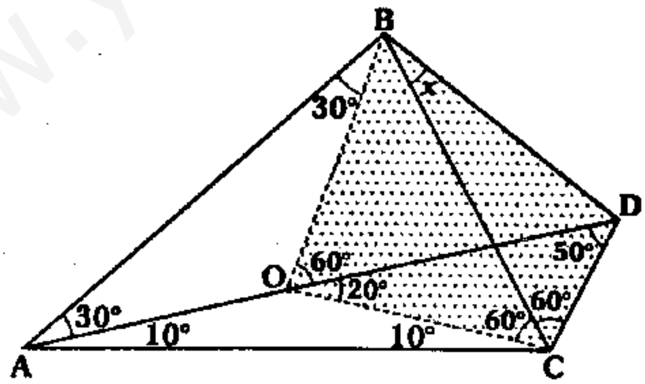
  $\Rightarrow\ m\sphericalangle SBM=x$
- En ⊿AMB: $7x+2x=90°$

  $\therefore\ \boldsymbol{x=10°}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 254**

Nos piden "x".

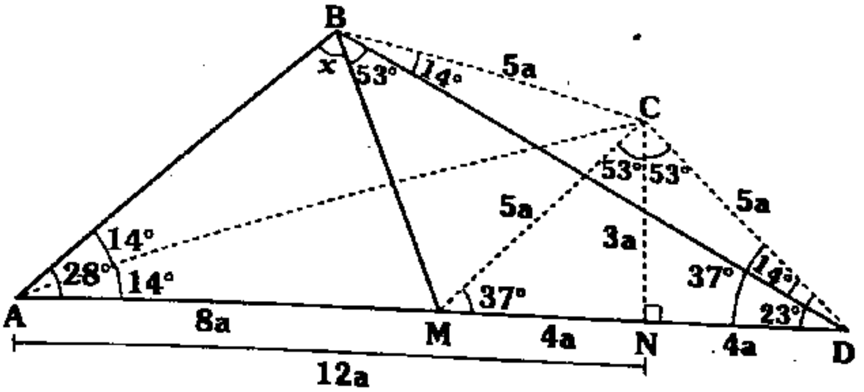



- Ubicamos el centro de la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$, la cual se encuentra en la línea BD entonces $AO=OB=OC$

  $\Rightarrow\ m\sphericalangle COD=20°$ y $m\sphericalangle BOD=60°$
- Notamos que el ⌂BDCD es inscripitble $\boldsymbol{x=20°}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 255**




Piden "x"

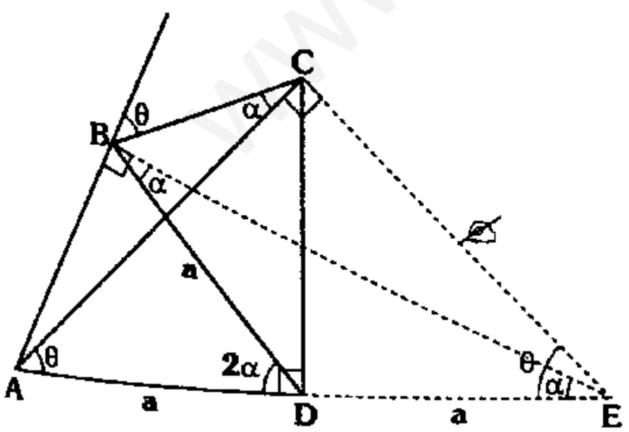
- Se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{CD}$ tal que $m\measuredangle BAC = m\measuredangle CAD = 14°$ y $m\measuredangle BDC = 14°$ entonces ⌂ABCD es inscriptible.
- $\Delta BCD$ : isósceles con $BC = CD$
- En el $\Delta ACD$, se traza la altura CN entonces ⊿CND: $CN = 3a$, $ND = 4a$ y $CD = 5a$ y en el ⊿ANC: $AN = 12a$.
- Del dato $AM = MD$ entonces $MN = 4a$ $\Rightarrow$ $CM = 5a$
- Como $CB = CM = CD$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle MBD = 53°$
- En $\Delta ABD$ :

$$x + 53° + 23° + 28° = 180$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 76°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 256**




Nos piden "θ".

- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta E talque

$$BD = DE \ \Rightarrow \ m\measuredangle AEB = \alpha$$

- Notemos que el ⌂ABCE es inscriptible

$\Rightarrow$ $m\measuredangle AEC = \theta$ $\Rightarrow$ $AD = DE$

- Como $AD = DB = DE$

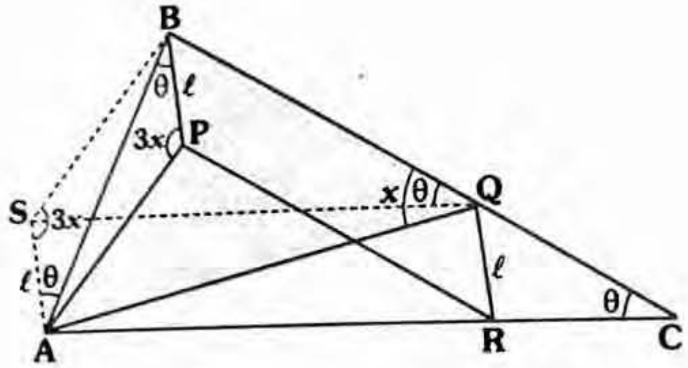
$\Rightarrow$ $m\measuredangle ABE = 90°$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle AC = 90°$

- En el ⊿ACE:

$$\mathbf{\theta = 45°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 257**




Nos piden "x".

- Se traza el paralelogramo APBS
  $\rightarrow$ m∢ASB = 3x y AS = BP = ℓ y
  $\overline{AS} // \overline{PB}$
- Como $\overline{AS} // \overline{RQ}$ y AS = RQ = ℓ entonces ASQR es paralelogramo
  $\rightarrow$ m∢SQB = θ
- ⌂ASBQ es inscriptible pues:

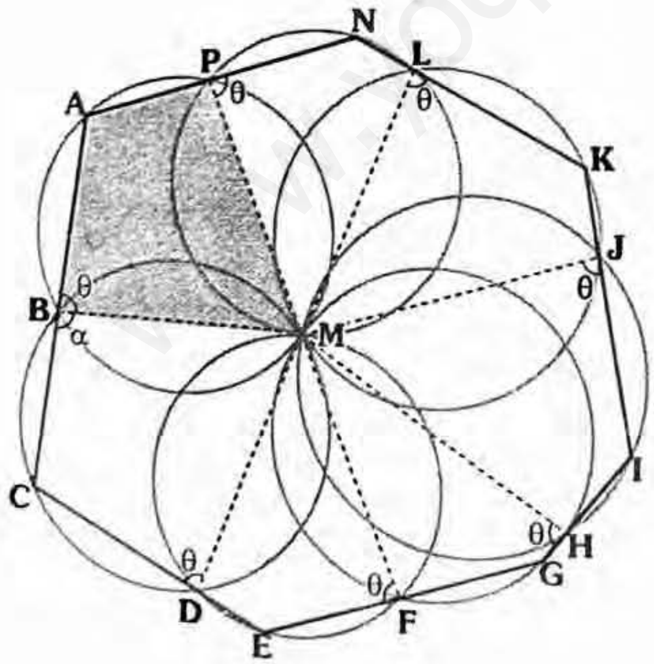
$$m\sphericalangle SQB = m\sphericalangle SAB$$

$$\rightarrow x + 3x = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 258**



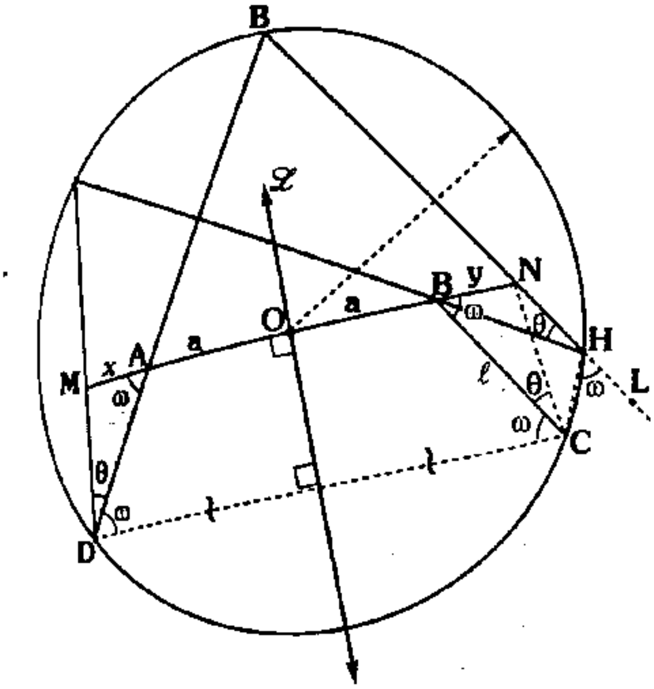

- Por demostrar que A, B y C son colineales
- Comenzamos en el ⌂MBAP que es inscrito:
  Sea m∢MBA = θ $\rightarrow$ m∢MPN = θ
- Luego en cada cuadrilátero inscrito en las circunferencias notaremos que "θ" se repite, hasta llegar al ⌂BMDC donde:

$$\alpha + \theta = 180°$$

$$\therefore \ \textbf{A, B y C: colineales}$$

**RESOLUCIÓN Nº 259**

(Caso particular del teorema de Papilon)




Por demostrar que $x=y$.

- Se traza la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AB}$ en O entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: eje de simetría
- Se traza $\overline{DC} \perp \mathscr{L} \rightarrow BC=AD$
- Sea $m\measuredangle ADC = \omega$

$\rightarrow m\measuredangle DCB = m\measuredangle CBN = \omega$

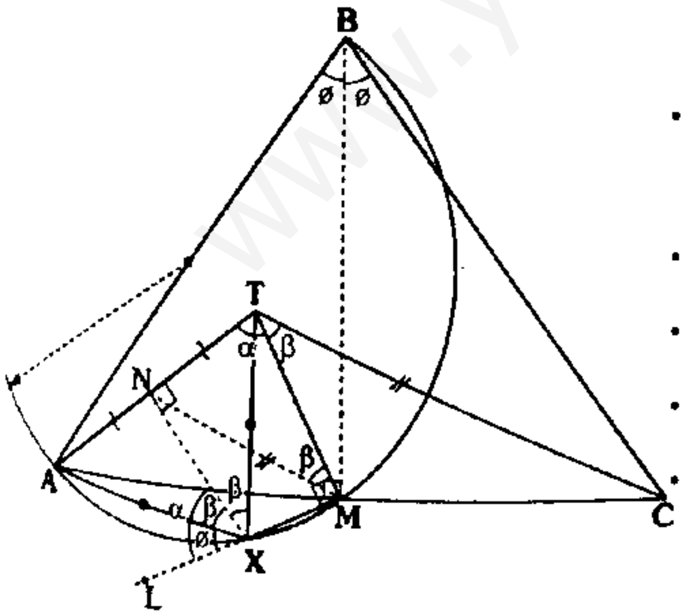
- En ◻DRHC: $m\measuredangle CHL = \omega$
- ◻CBNH: inscriptible

$\rightarrow m\measuredangle BCN = \theta$

- $\Delta ADM \cong \Delta BCN$ (ALA)

$\therefore\ x=y$

**RESOLUCIÓN Nº 260**




Nos piden $\alpha-\beta$ en función de $\varnothing$.

- En $\Delta AXT$ se traza la altura $\overline{XN}$ $\rightarrow AN=NT$
- $\Delta ATC$: $\overline{MN}$ es base media $\rightarrow \overline{MN} // \overline{TC}$

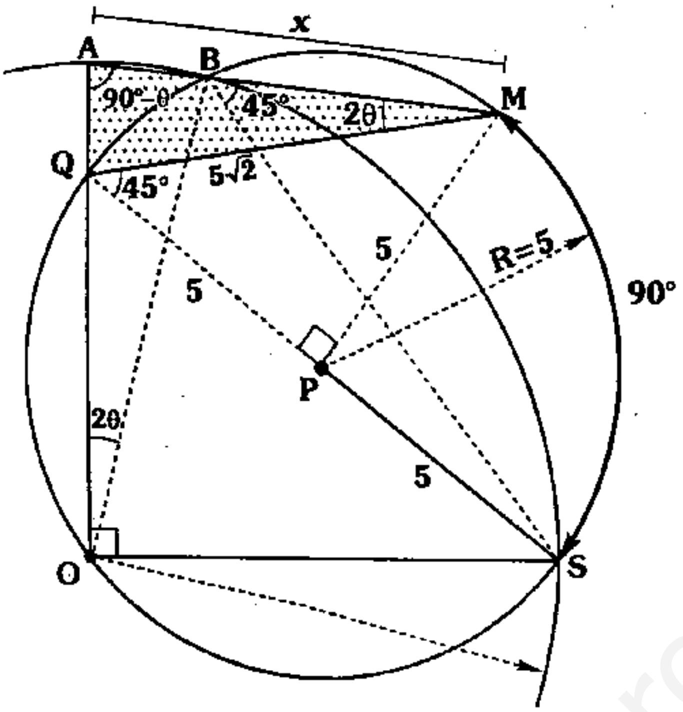
$\rightarrow m\measuredangle NMT = \beta$

- ◻XNTM: inscritible $\rightarrow m\measuredangle NXT = \beta$
- $\Delta AXT$: isósceles $\rightarrow m\measuredangle AXN = \beta$
- ◻AXMB: inscritible $\rightarrow m\measuredangle AXL = \varnothing$
- ◻XNTM: $\underbrace{m\measuredangle NXL}_{\beta+\varnothing} = \alpha$

$\therefore\ \varnothing=\alpha-\beta$

**Clave A**

**Resolución N° 261**




Piden "x".

- Como $m\sphericalangle QOS = 90° \Rightarrow \overline{QS}$ es diámetro.
- En el cuadrante: $m\sphericalangle MBS = 45°$

$$\Rightarrow \ m\overset{\frown}{MS} = 90°$$

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle MPS = 90°$$

- En $⊿QPM$: $QM = 5\sqrt{2}$
- Sea: $m\sphericalangle QOB = 2\theta$

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle QMB = 2\theta$$

- $\Delta OAB$: isósceles entonces:

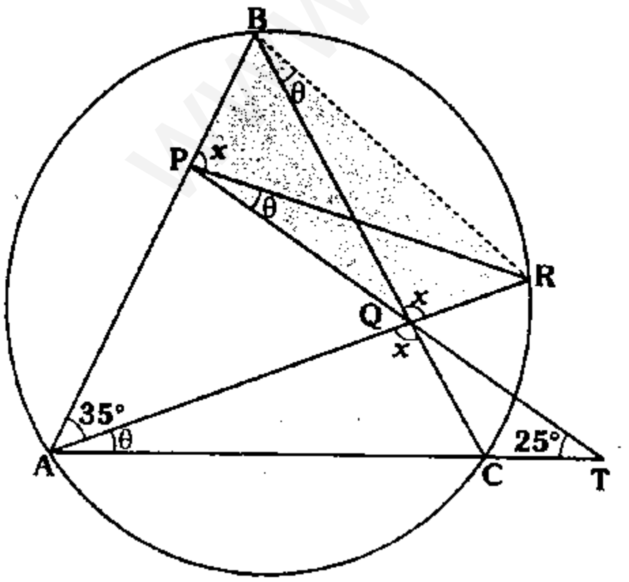
$$m\sphericalangle OAB = 90° - \theta$$

- $\Delta AQM$: isósceles

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 5\sqrt{2}}$$

**Clave B**

**Resolución N° 262**




- Nos piden "x".
- Notemos que el cuadrilátero PBRQ es inscriptible entonces:

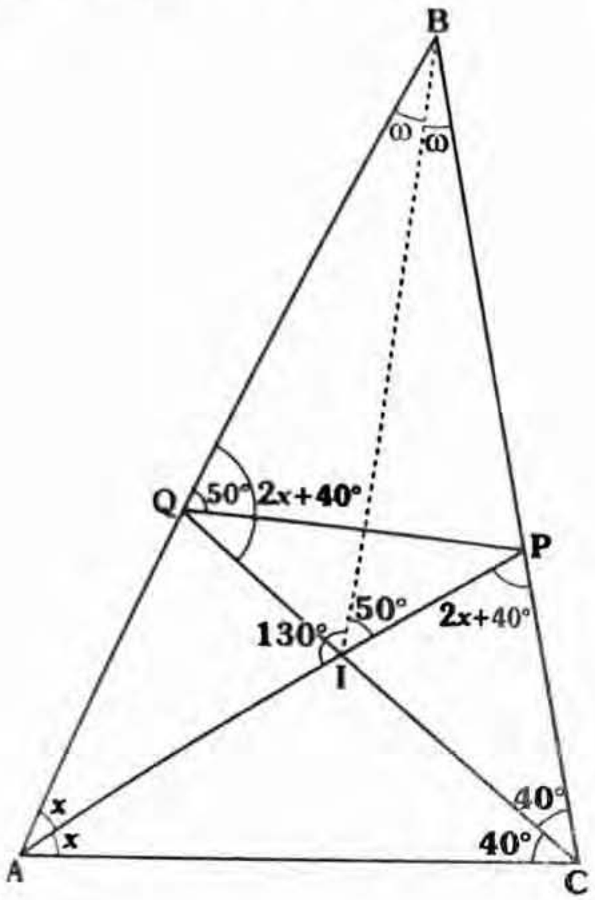
$$m\sphericalangle QPR = m\sphericalangle QBR = \theta$$

- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle RAC = \theta$
- En el $\Delta APT$: $x + \theta = 35° + \theta + 25°$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 60°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 263**




Piden "$x$".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle AIC = 90° + \frac{80°}{2} = 130°$$

$$\rightarrow m\sphericalangle BIP = 50°$$

- ⌂IQBP: inscriptible

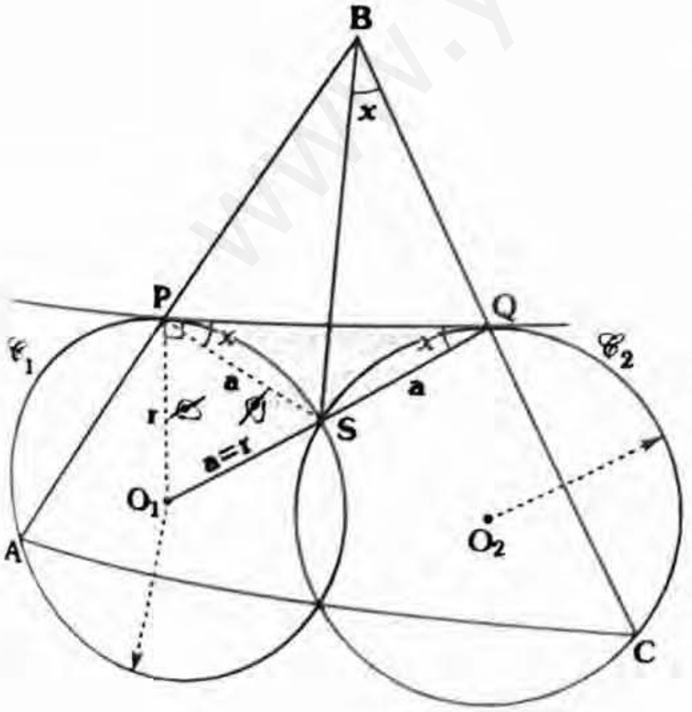
$$\rightarrow m\sphericalangle IQB = m\sphericalangle IPC = 2x + 40°$$

- $\triangle APC: \; 3x + 120° = 180°$

$$\therefore \; \mathbf{x = 20°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 264**




- ⌂PBQS: inscriptible

$$\rightarrow m\sphericalangle PQS = x$$

- Como $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2 \;\; \rightarrow \;\; m\overset{\frown}{PS} = m\overset{\frown}{SQ}$

$$\rightarrow m\sphericalangle PQS = x$$

- En ⊿ $O_1PQ$: $\overline{PS}$ es mediana

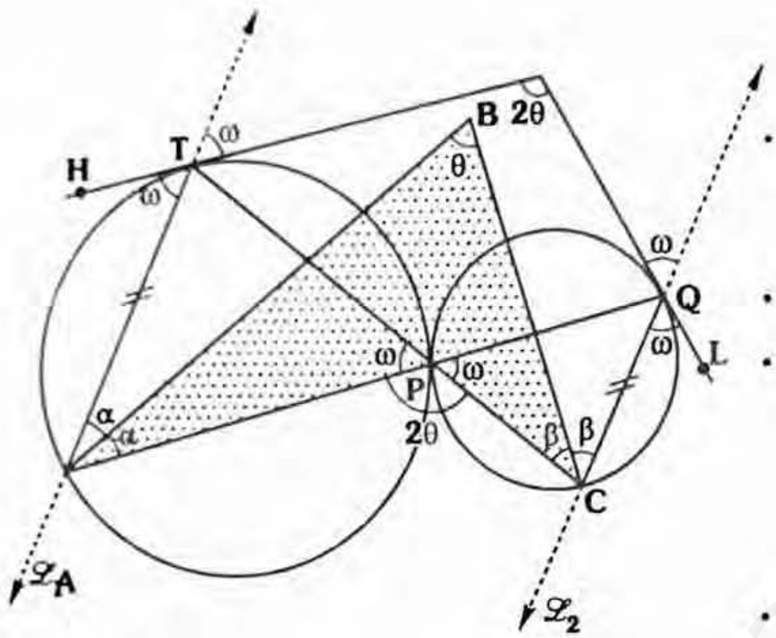
$$\rightarrow QS = SO_1 = a = r$$

- ⊿ $O_1PQ$: notable de 30°

$$\therefore \; \mathbf{x = 30°}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 265**



Piden $\theta$.

- Sea $m\sphericalangle CPQ = \omega$

  $\rightarrow m\sphericalangle LQC = m\sphericalangle ATH = \omega$

- Se sabe que: $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 \rightarrow \omega + \omega = 2\theta$

  $\rightarrow \omega = \theta$

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \theta = \alpha + \beta$
- En ABCP:

$$m\sphericalangle APC = \theta + \underbrace{\alpha + \beta}_{\theta}$$

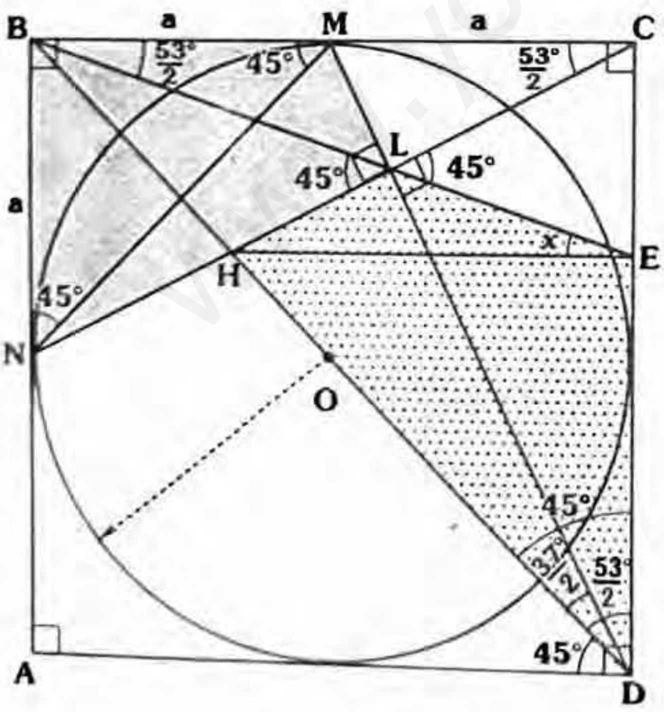
$$\rightarrow m\sphericalangle APC = 2\theta$$

- En P: $2\theta + \theta = 180°$

$$\therefore \ \theta = \mathbf{60°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 266**



Nos piden "x".

- Notemos que AN=NB=BM=MC

  $\Rightarrow m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle MDC = \dfrac{53°}{2}$

  $\Rightarrow \overline{NC} \perp \overline{MD}$

- $\triangle$NBML es incriptible

  $\Rightarrow m\sphericalangle NLB = 45°$

- Como $m\sphericalangle HDC = m\sphericalangle HDE = 45°$

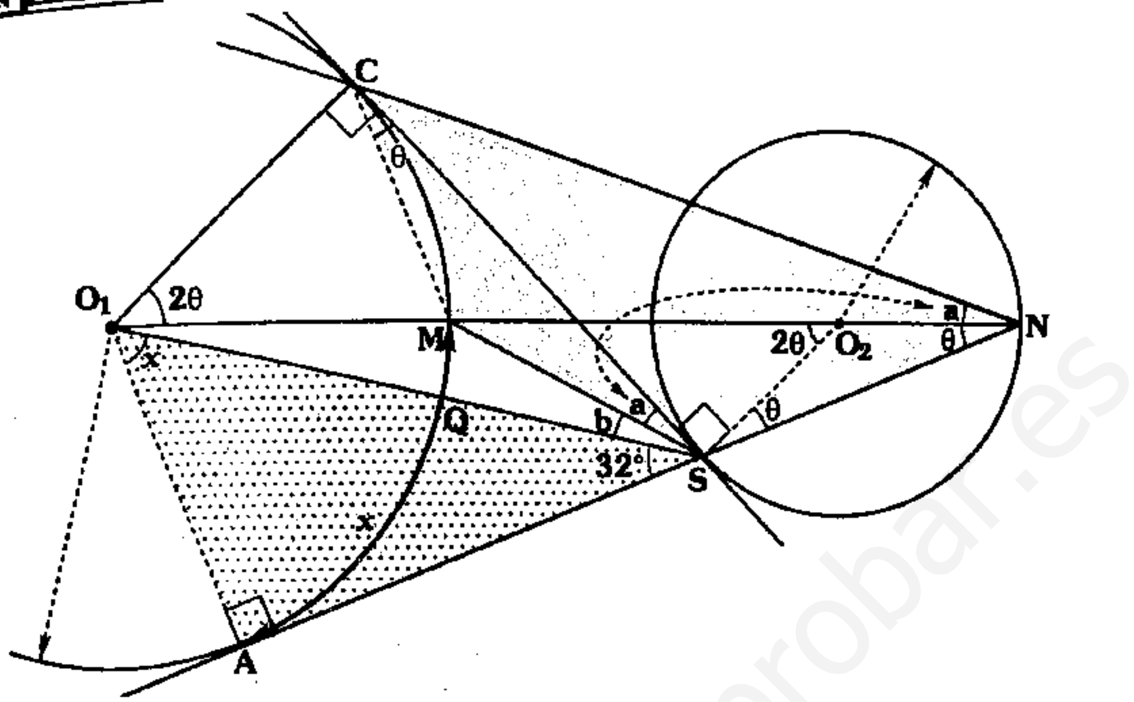
  $\Rightarrow$ el $\triangle$HLED: inscriptible

  $\Rightarrow m\sphericalangle HEL = m\sphericalangle HDL = \dfrac{37°}{2}$

$$\therefore \ x = \frac{37°}{2} = 18°30'$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 267**

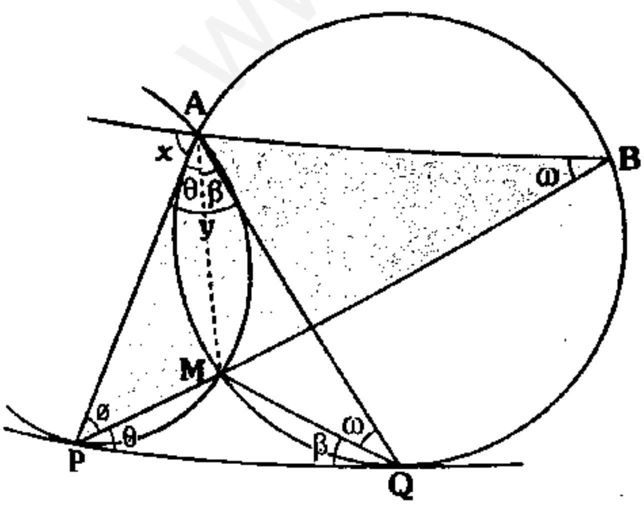



Nos piden "x". Dato: $a+b=32°$

- Sea $m\sphericalangle CO_1M = 2\theta \rightarrow m\sphericalangle MCS = \theta$
- Como $\overline{O_1C} // \overline{SO_2} \rightarrow m\sphericalangle SO_2O_1 = 2\theta \rightarrow m\sphericalangle SNO_2 = \theta$
- ⌂MCNS: inscrito $\rightarrow m\sphericalangle MSC = a \rightarrow m\sphericalangle CSO_1 = a+b = 32°$
- Como $\overrightarrow{SO_1}$ es bisectriz del ángulo CSA $\rightarrow m\sphericalangle O_1SA = 32°$
- $⊿O_1AS$: **$x = 58°$**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 268**




Nos piden la relación entre x e y.

- Sea $m\sphericalangle MAP = \theta$ y $m\sphericalangle MAQ = \beta$

$\rightarrow y = \theta + \beta$

- Por ángulo semiinscrito:

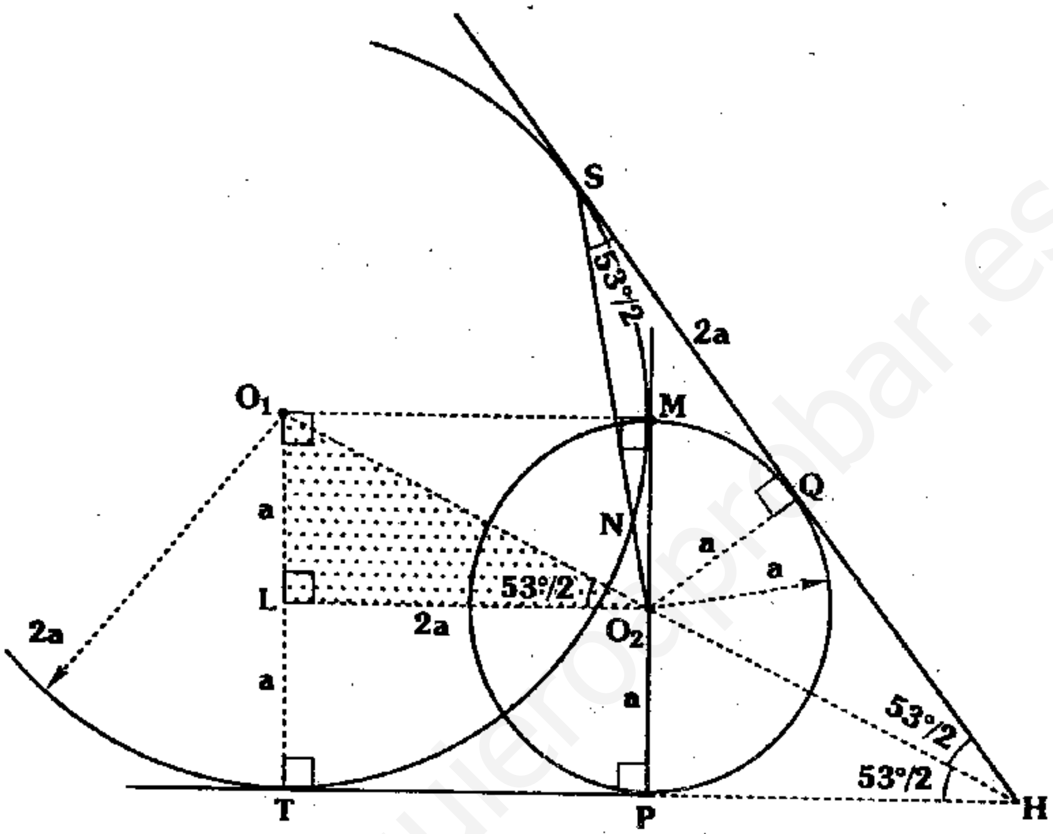
$m\sphericalangle MPQ = \theta$ y $m\sphericalangle MQP = \beta$

- En $\Delta PAB$: $x = \omega + \varnothing$
- En PAQ: $y + \underbrace{\theta + \beta}_{y} + \underbrace{\varnothing + \omega}_{x} = 180°$

$\therefore$ **$x = 180° - 2y$**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 269**



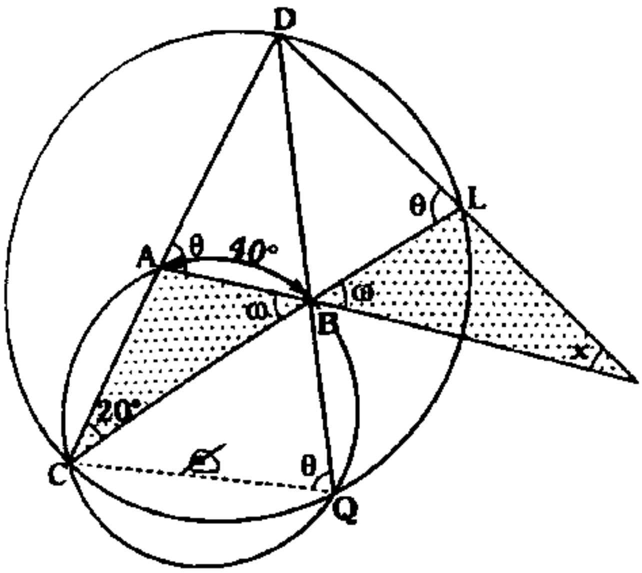

Nos piden: $m\widehat{PQ} - m\widehat{TN}$

- Se prolonga $\overline{TP}$ y $\overline{SQ}$ las cuales se cortan en H $\rightarrow$ $O_1$, $O_2$ y H: colineales.
- Sea $O_2P = O_2M = a$ ⊿ $O_1LO_2$: notable $\rightarrow m\measuredangle LO_2O_1 = \dfrac{53°}{2}$ $\rightarrow m\measuredangle THS = 53°$
- ⊿ $O_2QS$: notable de 53°/2
- Como: $m\widehat{PQ} + 53° = 180° \rightarrow m\widehat{PQ} = 127°$
- Debido a que $m\widehat{SN} = 53°$ y $m\widehat{SN} + \widehat{TN} = 127°$ $\rightarrow m\widehat{TN} = 74°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{PQ} - m\widehat{TN} = 53°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 270




Piden "x".

Dato $m\widehat{AB} = 40°$

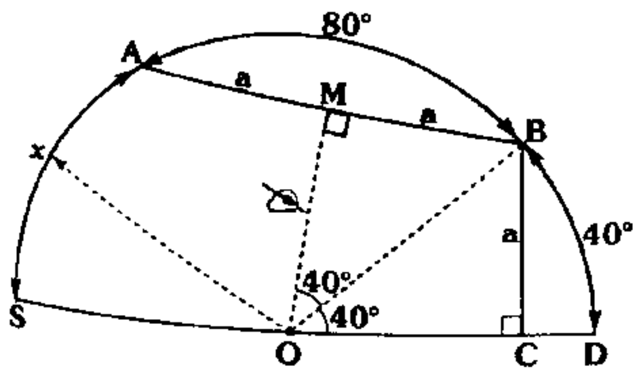
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle ACB = 20°$
- Sea $m\sphericalangle CQD = \theta \Rightarrow m\sphericalangle BAD = \theta$
- También: $m\sphericalangle CLD = \theta$
- En los ángulos sombreados:

$$\theta = x + \omega = 20° + \omega$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 20°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 271




Nos piden "x".

- Como AB=2(BC) entonces se traza $\overline{OM} \perp \overline{AB} \rightarrow$ AM=MB M
- Debido a que MB=BC $\rightarrow \overline{OB}$ es bisectriz del

$$m\sphericalangle MOC \rightarrow m\sphericalangle BOC = 40°$$

$$\rightarrow m\widehat{BD} = 40°$$

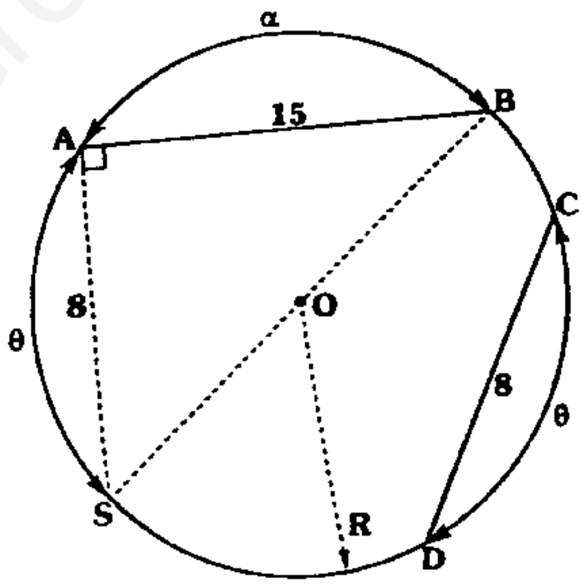
- Finalmente:

$$x + 80 + 40° = 180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 60°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 272




Nos piden R.

- Se traza el diámetro $\overline{BS}$, como

$$\alpha + \theta = 180° \rightarrow m\widehat{AS} = \theta$$

- Como:

$$m\widehat{AS} = m\widehat{CD} \rightarrow AS = CD = 8$$

- En $\triangle$SAB:

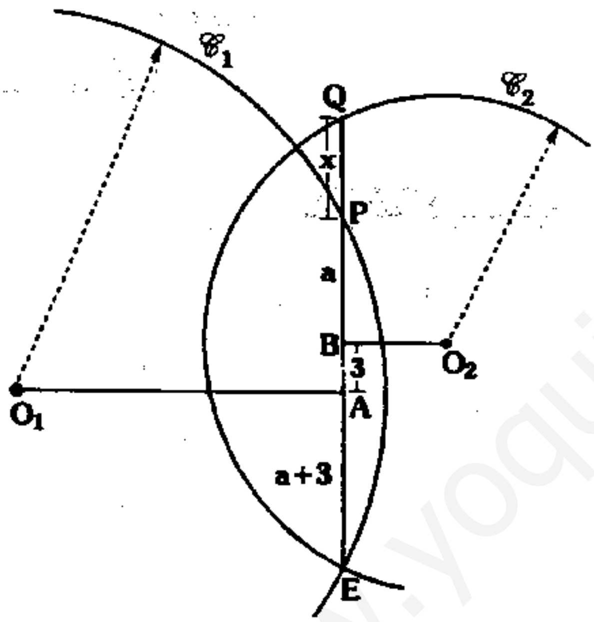
$$(SB)^2 = 8^2 + 15^2$$

$$\rightarrow \underbrace{SB}_{2R} = 17$$

$$\therefore \mathbf{R = 8,5}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 273**




Piden "x".

- Sea PB=a
- Por propiedad en $\mathscr{C}_1$: PA=AE=a+3

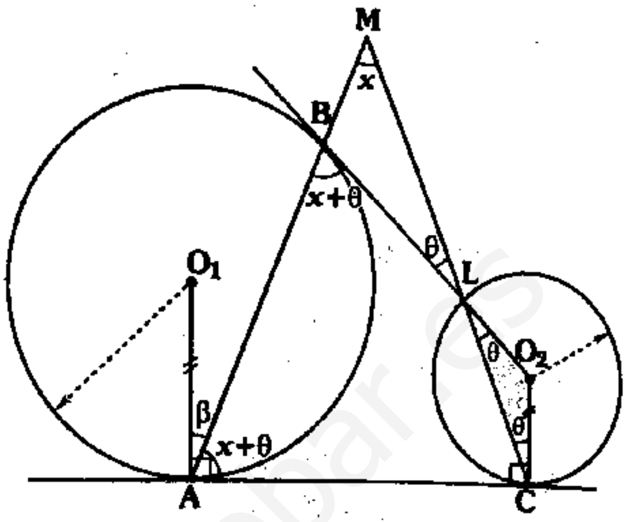
$$\text{en } \mathscr{C}_2: \underbrace{QB}_{} = BE$$

$$\cancel{a} + x = \cancel{a} + 6$$

$$\therefore \mathbf{x = 6}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 274**



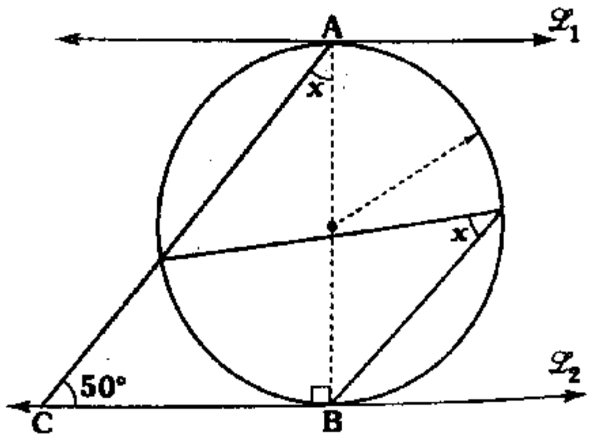

Piden "x".

- $\overline{O_1A} // \overline{O_2C} \rightarrow x = \theta + \beta$
- $\Delta LO_2C$ : isósceles
- $\Delta LMB$ : $m\measuredangle ABL = x + \theta$
- $m\measuredangle ABL = m\measuredangle BAC$ (propiedad)
- En A: $x + \underbrace{\beta + \theta}_{x} = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 275**




Piden "x".

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \overline{AB}$ es diámetro
- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle BAC = x$$

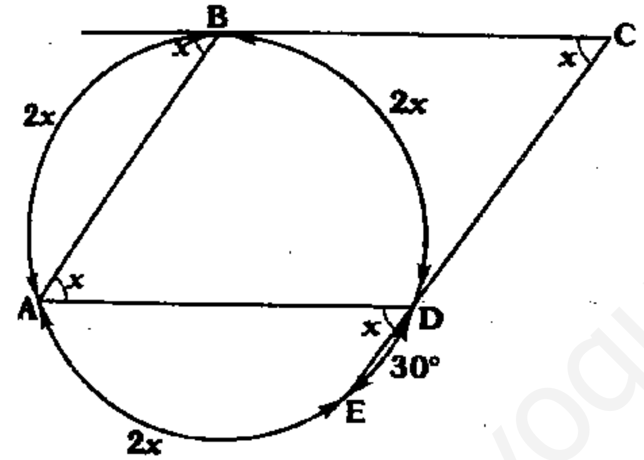
- En ⊿ABC:

$$x + 50° = 90°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 40°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 276




Piden "x".

- Como ABCD: paralelogramo

$\rightarrow \ m\measuredangle BAD = x$

$\rightarrow \ m\overset{\frown}{BD} = 2x$

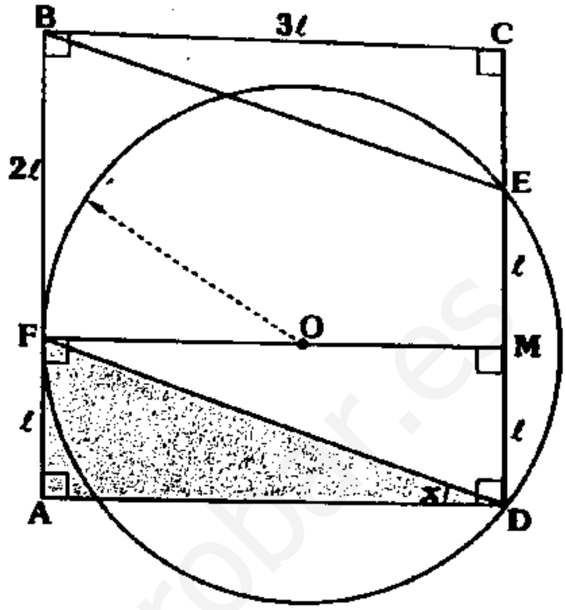
$\rightarrow \ m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{AE} = 2x$

- $2x + 2x + 2x + 30° = 360°$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 55°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 277




Piden "x".

- Como $\overline{OF} \perp \overline{AB} \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{ED}$

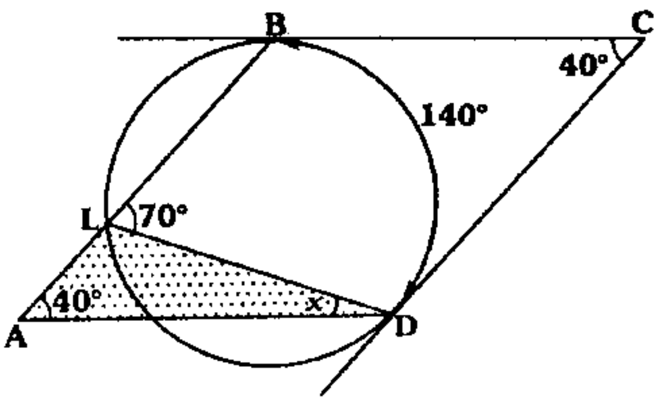
$\rightarrow \ EM = MD = \ell$

- FBED: paralelogramo $\rightarrow$ $FB = 2\ell$
- AFMD: rectángulo $\rightarrow$ $AF = \ell$
- ABCD: cuadrado $\rightarrow$ $AD = 3\ell$
- ⊿FAD: notable

$$\therefore \ \boldsymbol{x = \frac{37°}{2}}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 278



Piden "x".

- Como ABCD: paralelogramo

$$\rightarrow m\measuredangle BAD = 40°$$

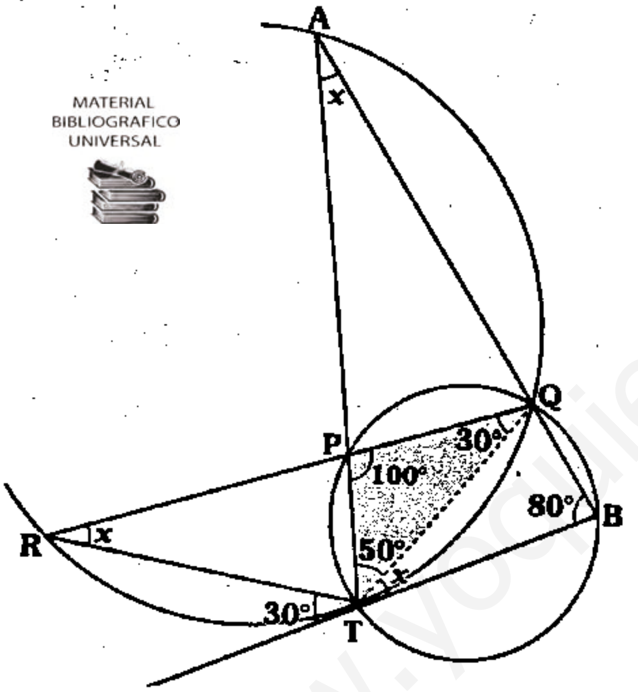
- Por propiedad: $m\overset{\frown}{BD} = 140°$
- En $\Delta A\overset{\frown}{L}D$: $x + 40° = 70°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 30°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 279






Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito $m\measuredangle TAQ = x$
- Por ángulo semi-inscrito:

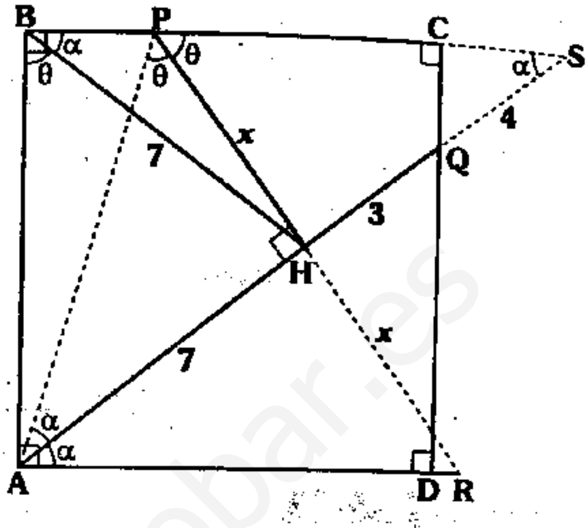
  – $m\measuredangle QTB = x$

  – $m\overset{\frown}{RT} = 60°$
- En $\Delta TPQ$: $m\measuredangle PTQ = 60°$
- $\Delta TBA$: $x + x + 50° + 80° = 180°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 25°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 280




Nos piden "x"

- $\triangle$ABPH: inscriptible $\rightarrow$ $m\measuredangle APH = \theta$
- Se prolonga $\overline{AQ}$ la cujal corta a $\overleftrightarrow{BC}$ en S.
- $\Delta APS$: isósceles $\rightarrow$ AH=HS
- En $\triangle ABS$: AH=HS=BH=7
- Al prolongar $\overline{PH}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en R
- De la observación:

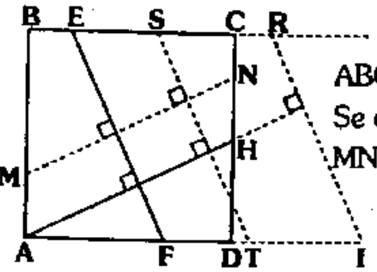
$$\underbrace{PR} = AQ$$

$$2x = 10$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 5}$$

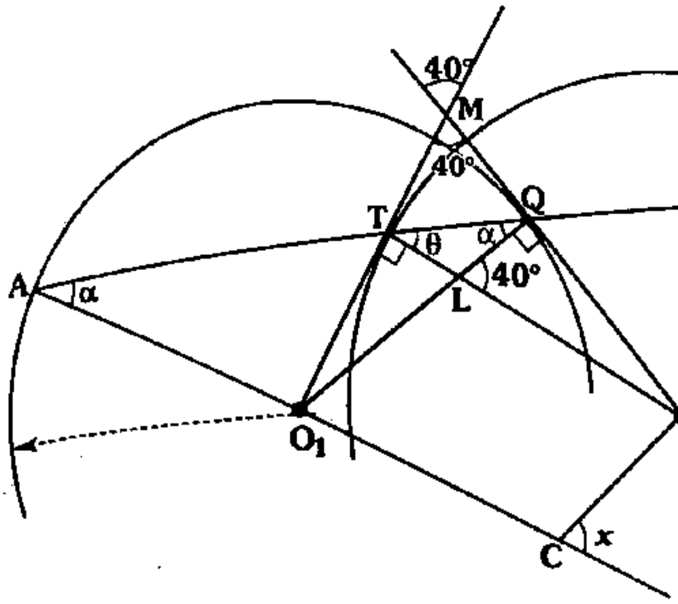
**Clave B**

### Observación




ABCD: cuadrado
Se cumple:
MN=AH=EF=ST=RI

**RESOLUCIÓN Nº 281**




Piden "x".

- $\Delta AO_1Q$ y $\Delta O_2TB$ : isósceles

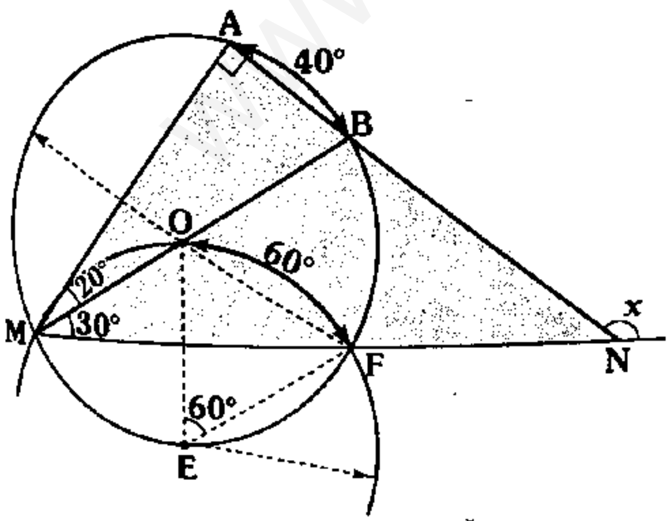
$$\rightarrow\ m\measuredangle O_1AQ = m\measuredangle O_1QA = \alpha \quad y \quad m\measuredangle O_2TB = m\measuredangle O_2BT = \theta$$

- $\triangle LTMQ$: inscriptible $\rightarrow$ $m\measuredangle O_2LQ = 40°$
- En $\Delta ABC$ : $\quad x = \alpha + \theta$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 40°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 282**




Nos piden "x".

- Como $\overline{MB}$ es diámetro

$\rightarrow\ m\measuredangle MAB = 90°$ y $m\measuredangle AMB = 20°$

- $\Delta EFO$ : equilátero

$\rightarrow\ m\measuredangle OMF = 30°$

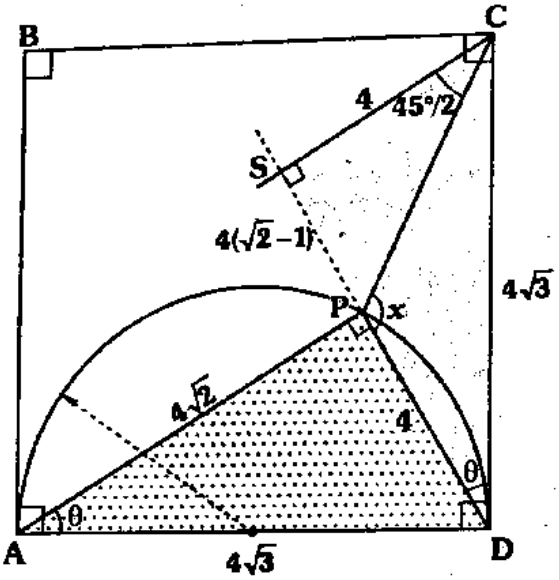
- $\triangle MAN$:

$$x = 90° + 50°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 140°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 283




Nos piden "x".

- Se prolonga $\overline{DP}$ y se traza $\overline{CS} \perp \overleftrightarrow{DP}$
- $⊿DPA \cong ⊿CSD$

$$\rightarrow \; CS = PD = 4$$

$$\rightarrow \; SP = 4\sqrt{2} - 4 = 4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

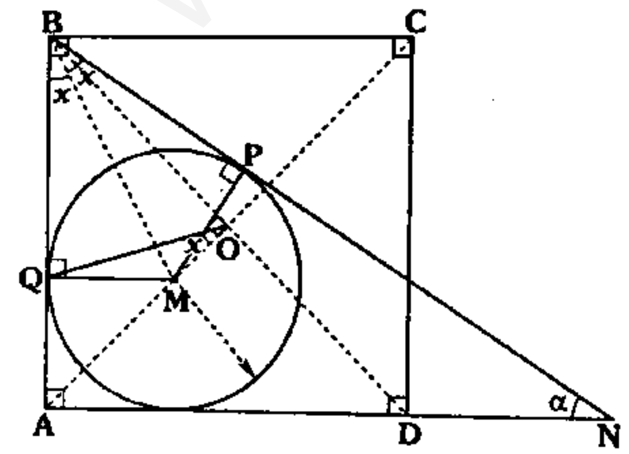
- $⊿PSC$: notable de 45°/2

$$x = 90° + \frac{45°}{2}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 112°30'}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 284




Nos piden "x".

- Sea M el centro de la circunferencia inscrita en el $⊿BAN$.
- Notemos que $\triangle$MQBO y $\triangle$MQPB: inscriptibles

$$\rightarrow \; m\sphericalangle MBQ = m\sphericalangle MBN = x$$

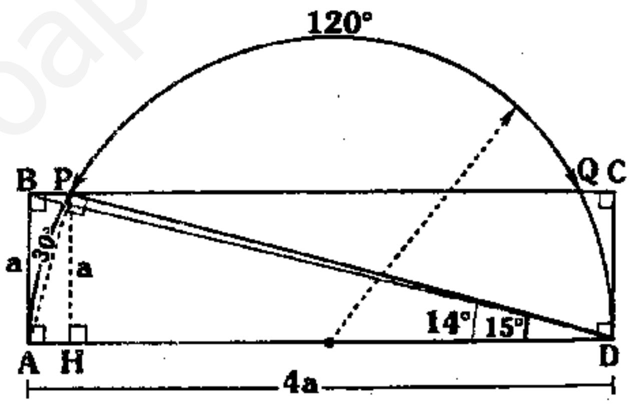
- Finalmente en $⊿ANB$:

$$2x + \alpha = 90°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 45° - \frac{\alpha}{2}}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 285




Nos piden: $m\sphericalangle BDP$

- Como $m\widehat{PQ} = 120 \rightarrow \; m\widehat{NP} = 30°$

$$\rightarrow m\sphericalangle ADP = 15°$$

- En $⊿APD$: por propiedad

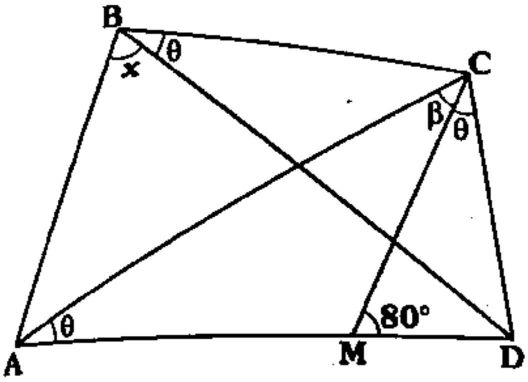
$$AD = 4(PH)$$

- $⊿BAN$: notable de 14°

$$\therefore \; \mathbf{m\sphericalangle BDP = 1°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 286



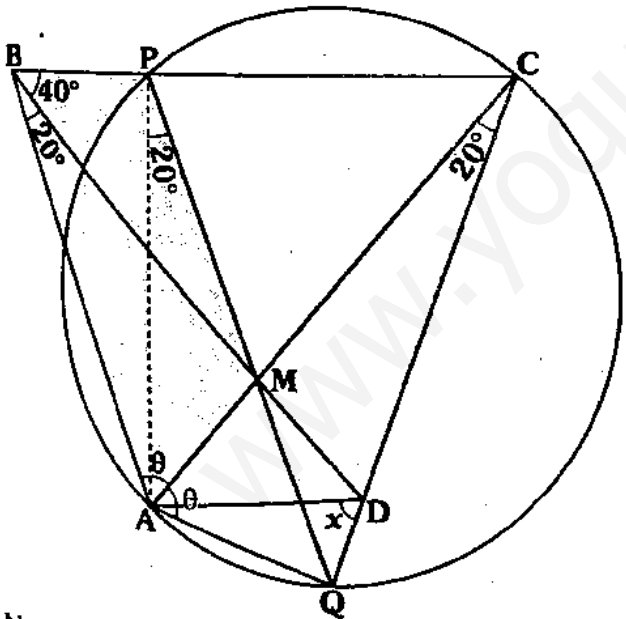

Nos piden "$x$".

- $\triangle$ABCD: inscriptible $\rightarrow\ x = \theta + \beta$
- $\Delta$AMC : $\theta + \beta = 80°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 80°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 287




Nos piden "$x$".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle QPC = \theta$$

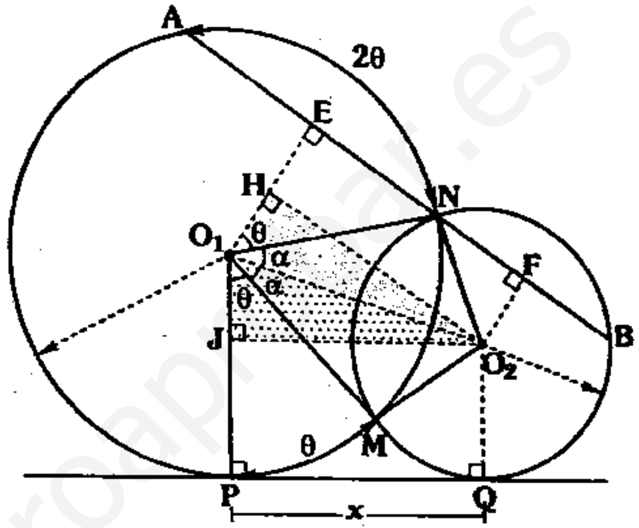
$$m\measuredangle APQ = 20°$$

- $\triangle$ABPM: inscriptible $\rightarrow m\measuredangle ABM = 20°$
- $\triangle$ABCD: inscriptible

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 288




Nos piden: $\dfrac{PQ}{AB}$

- Del dato: $m\widehat{AN} = 2\theta$ y $m\widehat{PM} = \theta$
- $\triangle\ MO_1NO_2$ : trapezoide simétrico

$$\rightarrow m\measuredangle NO_1O_2 = m\measuredangle O_2O_1$$

- Se traza $\overline{O_1E} \perp \overline{AN} \rightarrow m\measuredangle EO_1N = \theta$
- $⊿O_1JO_2 \cong ⊿O_1HO_2$

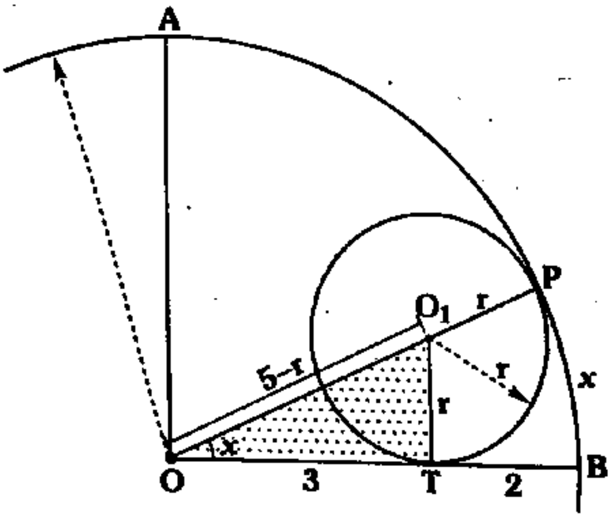
$$\rightarrow \underbrace{JO_2}_{2x} = \underbrace{HO_2}_{\frac{AB}{2}}$$

$$2x = \frac{AB}{2} \rightarrow AB = 2x$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{PQ}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 289**




Nos piden "$x$".

- O, $O_1$ y O: colineales
- Del dato: OT=3 y TB=2 → $OO_1 = 5T$
- En ⊿ $OTO_1$ :

$$(5-r)^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{8}{5}$$

- De la conservación:

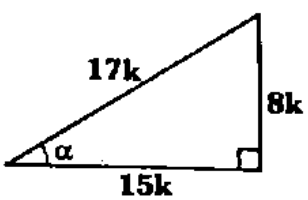
$$\frac{O_1T}{TO} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 28°}$$

**Clave E**

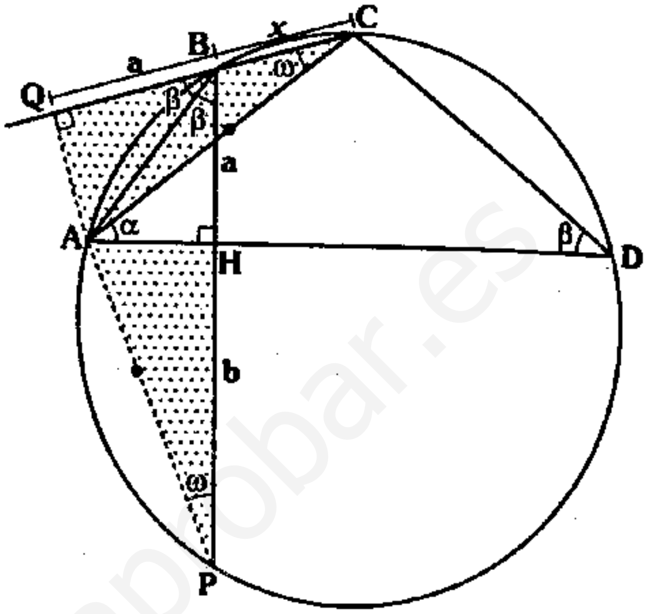
**Recordar**

(Libro 3 – congruencia de triángulos)




Se cumple : $x = 28°$

**RESOLUCIÓN Nº 290**




Piden $x$, función de "a" y "b".

- Del dato: $\alpha + \beta = 90°$

  → m∢ABP = β

- Como $m\widehat{AP} = m\widehat{ABC}$

  → AP = AC

- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{CB}$
- Como m∢HBA = m∢ABQ = β

  → BH = BQ = a

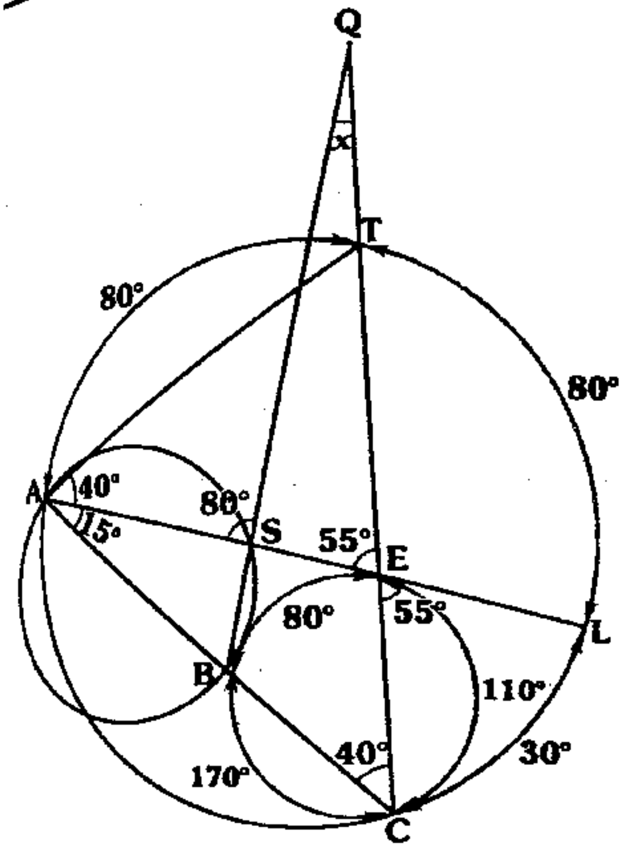
- ⊿AQC ≅ ⊿AHP

  → $x + a = b$

  $\therefore \ \boldsymbol{x = b - a}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 291**




Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\widehat{AT} = m\widehat{TL} = 80°$$

- Por ángulo inscrito: $m\widehat{LC} = 30°$

- por ángulo interior:

$$m\measuredangle AET = \frac{80° + 30°}{2} = 55°$$

- Como $m\widehat{BC} = m\widehat{ASB} = 170°$

$$\rightarrow m\measuredangle ASQ = \frac{170°}{2} = 85°$$

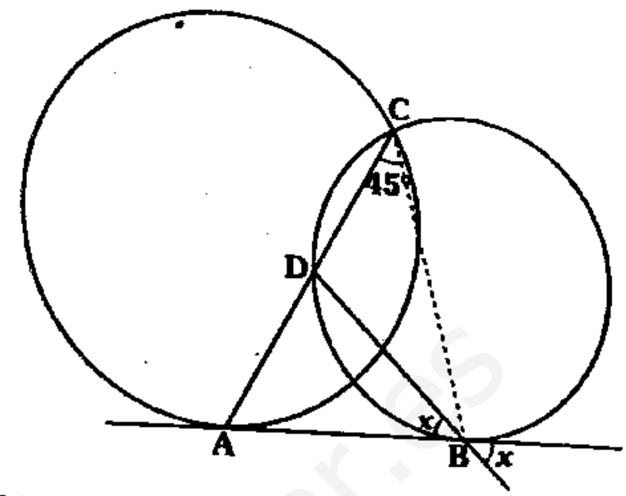
- En $\Delta SQE$:

$$x + 55° = 85°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 30°}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 292**




Nos piden "x".

- Por propiedad de circunferencias ortogonales.

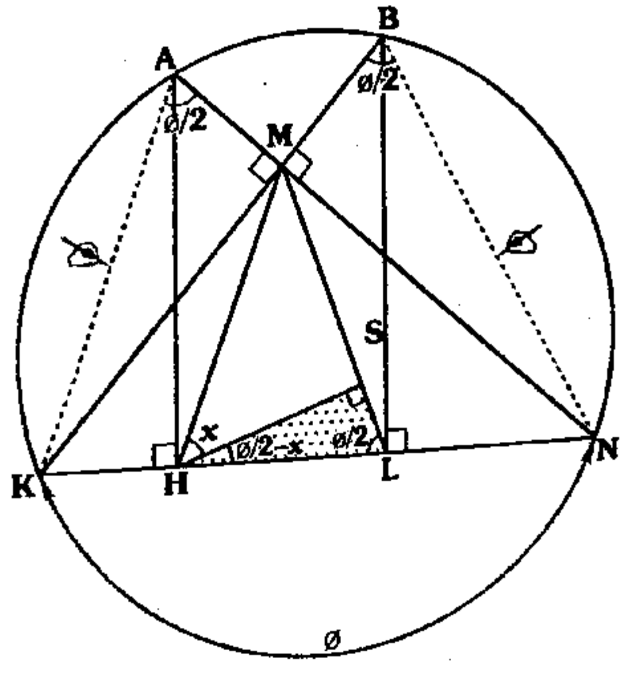
$$m\measuredangle ACB = 45°$$

- Por ángulo semiinscrito

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 45°}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 293**




Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle NAK = m\sphericalangle NBK = \frac{\emptyset}{2}$$

- ⌂LMBN y ⌂AMHK: inscriptibles

$$\rightarrow\ m\sphericalangle MLH = \frac{\emptyset}{2}\ \text{ y }\ m\sphericalangle MHL = \frac{\emptyset}{2}$$

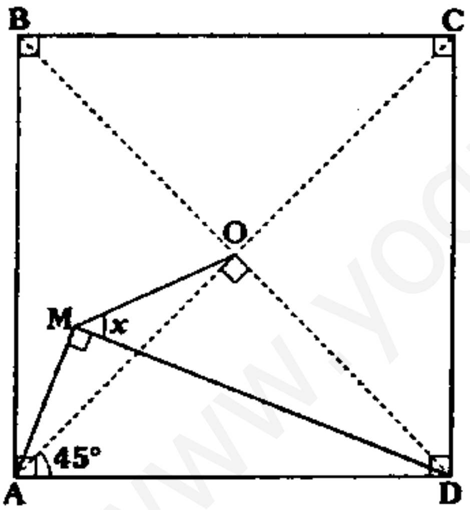
$$\rightarrow\ m\sphericalangle SHL = \frac{\emptyset}{2} - x$$

- ⊿HSL: $\frac{\emptyset}{2} - x + \frac{\emptyset}{2} = 90°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = \emptyset - 90°}$$

**Clave B**

## Resolución Nº 294




Nos piden "x".

- Como $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

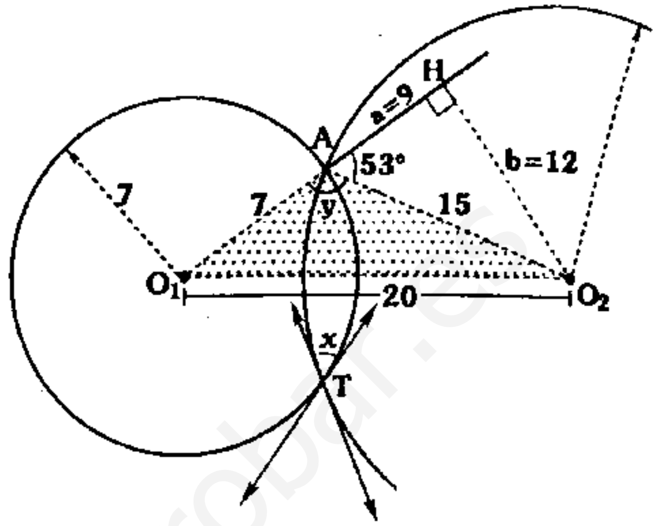
$$\rightarrow\ m\sphericalangle AOD = 90°$$

- ⌂ADOM: inscriptible

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 45°}$$

**Clave C**

## Resolución Nº 295




Nos piden "x".

- En ⊿$O_1HO_2$ y ⊿$AHO_2$:

$$a = 9\ \text{ y }\ b = 12$$

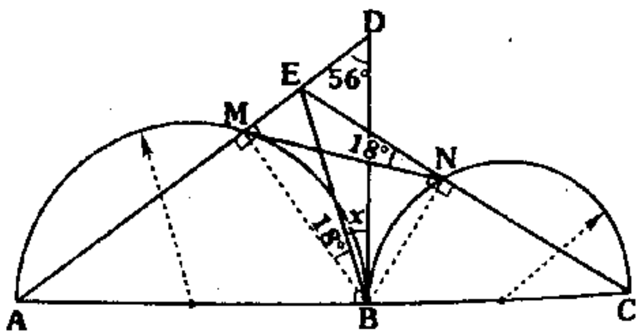
- Luego: $y = 127°$
- Por propiedad:

$$x + y = 180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 53°}$$

**Clave D**

## Resolución Nº 296




Nos piden "x".

- Como $m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle BNC = 90°$

$\rightarrow$ $\triangle$BMEN: inscriptible

$\rightarrow$ m$\measuredangle$MBE = 18°

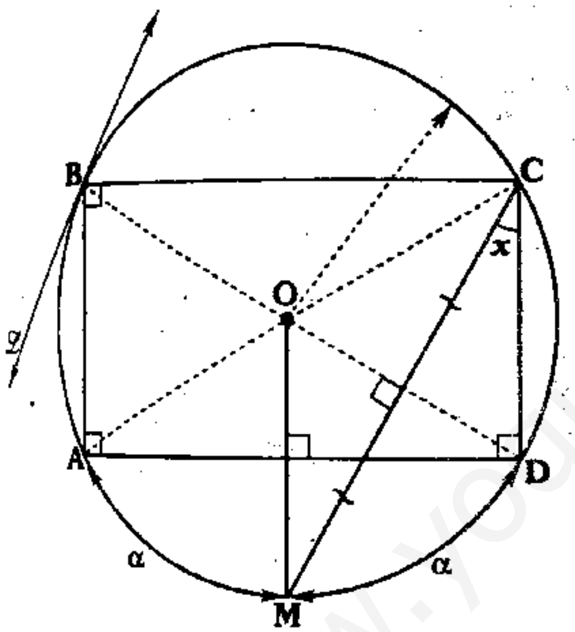
En $\triangle$BMD:

$$x + 18° + 56° = 90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 16°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 297




Nos piden "x"

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ // $\overline{CM}$ $\rightarrow$ $\overline{BD} \perp \overline{CM}$

  $\rightarrow$ m$\widehat{CD}$ = m$\widehat{MD}$ = α

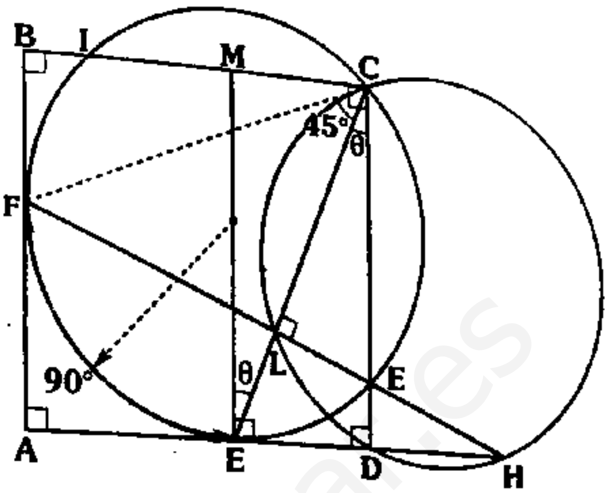
- $\overline{AC}$: diámetro $\rightarrow$ 3α = 180°

  $\rightarrow$ α = 60°

- Por ángulo inscrito: $\mathbf{x = 30°}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 298




Nos piden: m$\widehat{IC}$

- Como: m$\measuredangle$CDH = 90°

  $\rightarrow$ m$\measuredangle$CLH = 90°

- m$\widehat{EF}$ = 90° $\rightarrow$ m$\measuredangle$FCE = 45°
- $\Delta$FCE : isósceles

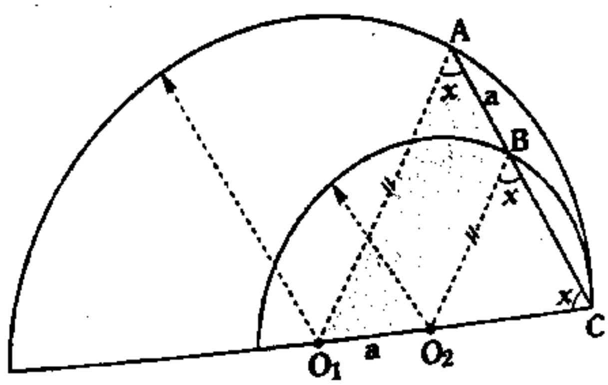
  $\rightarrow$ m$\measuredangle$FEC = m$\measuredangle$FCE = 45° + θ

- $\triangle$CLE: 45° + 2θ = 90° $\rightarrow$ 2θ = 45°
- Como m$\widehat{IC}$ = 4θ

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{IC} = 90°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 299

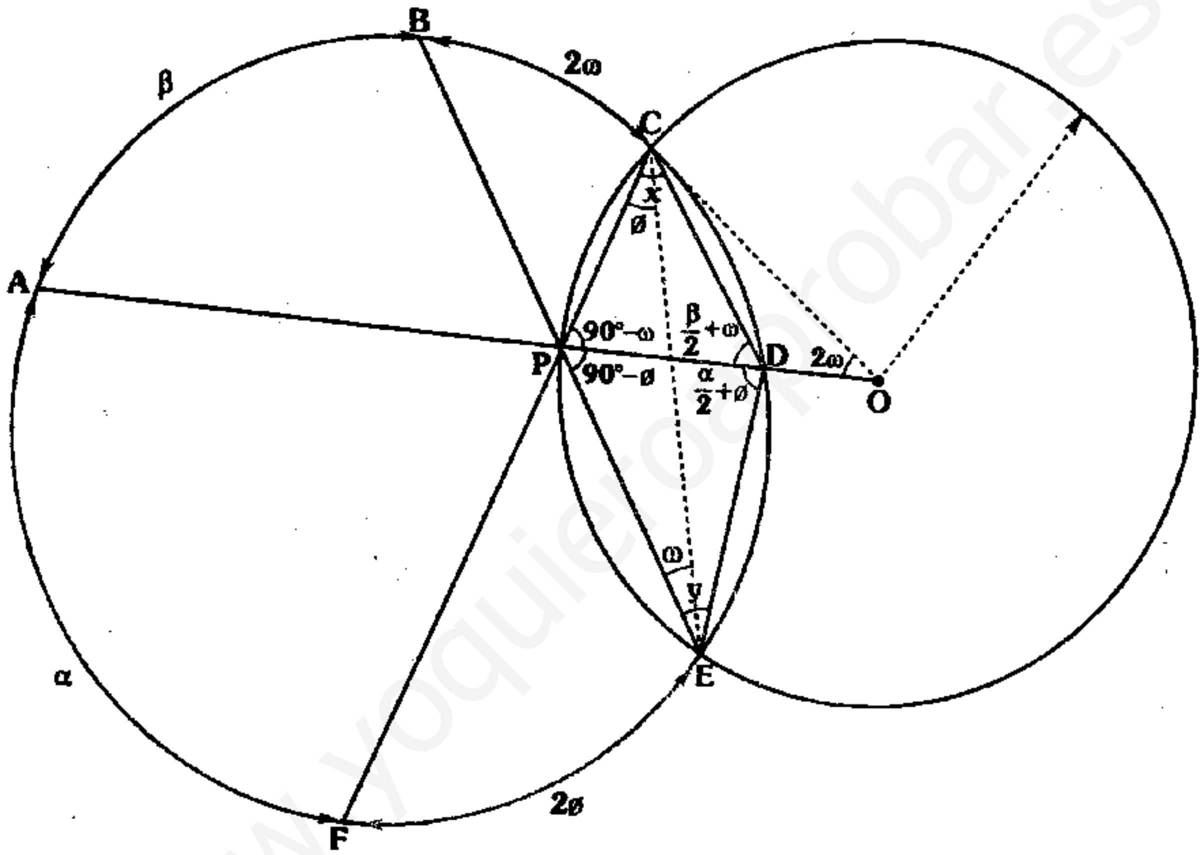



Nos piden "x".

- $\Delta O_2BC$ y $\Delta O_1AC$ : isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle O_2BC = m\measuredangle O_1AC = x$
- $O_1ABO_2$ : trapecio isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle AO_1C = x$
- En $\Delta ABC$ : $\boldsymbol{x = 60°}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 300**




Piden: $x - y$

- Sea $m\measuredangle PEC = \omega$ y $m\measuredangle PCE = \emptyset$ $\rightarrow$ $m\widehat{PC} = 2\omega$
- $\Delta POC$ : isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle OPC = 90° - \omega$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle PDC = \dfrac{\beta}{2} + \omega$
- Análogamente: $m\measuredangle EPD = 90° - \emptyset$ y $m\measuredangle PDE = \dfrac{\alpha}{2} + \emptyset$
- En $\Delta PCD$ y $\Delta PDE$ : $x + \cancel{90°} - \omega + \dfrac{\beta}{2} + \omega = y + \cancel{90°} - \emptyset + \dfrac{\alpha}{2} + \emptyset$

$$\therefore\ \boldsymbol{x - y = \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

**Clave C**

# Geometría

## ENUNCIADO DE LOS

# PROBLEMAS PROPUESTOS

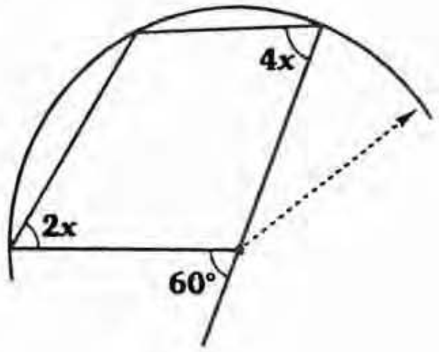
- Anual
- Cepre Uni
- Semestral
- Semestral Intensivo
- Repaso

## CIRCUNFERENCIA

# Problemas Propuestos
## Ciclo Anual

**PROBLEMA Nº 1**

En el gráfico, calcule "$x$".

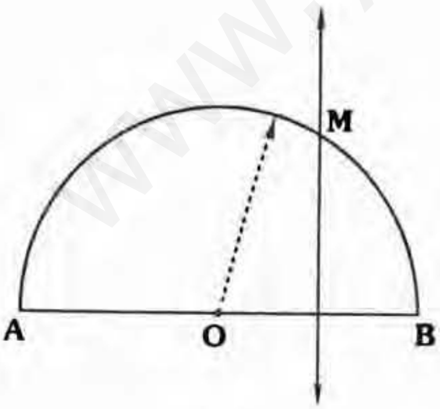



A) 20°  B) 30°  C) 40°

D) 25°  E) 35°

**PROBLEMA Nº 2**

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{OB}$, calcule $m\widehat{AM}$.



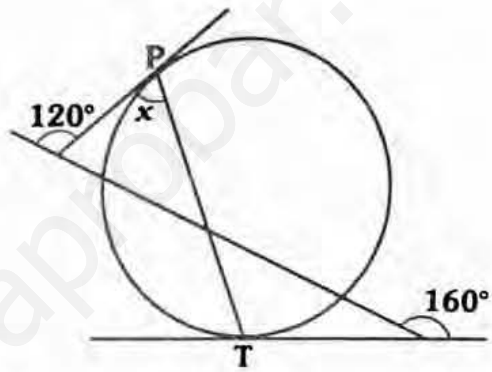

A) 90°  B) 120°

C) 135°  D) 127°

E) 143°

**PROBLEMA Nº 3**

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. Calcule "$x$".

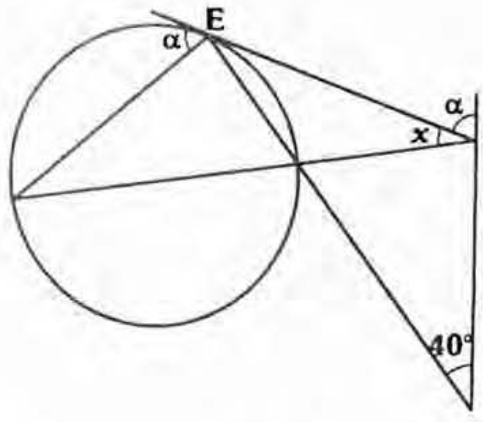



A) 60°  B) 70°  C) 80°

D) 75°  E) 85°

**PROBLEMA Nº 4**

Si E es punto de tangencia. Calcule "$x$".



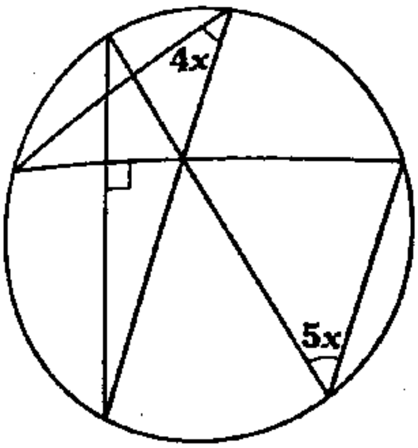

A) 20°  B) 30°

C) 40°  D) 50°

E) 60°

**PROBLEMA Nº 5**

Calcule "x", en:



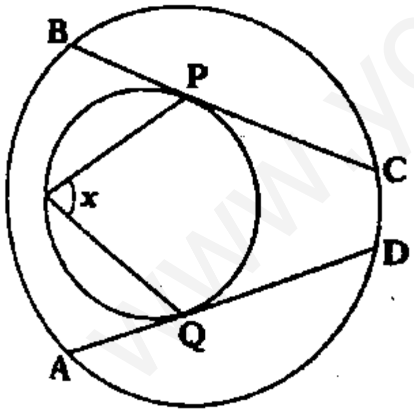

A) 20°　　B) 25°　　C) 30°

D) 10°　　E) 18°

**PROBLEMA Nº 6**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AB} - m\widehat{CD} = 80°$.

Calcule "x".




A) 50°　　B) 100°　　C) 80°

D) 40°　　E) 70°

**PROBLEMA Nº 7**

En el gráfico, T es punto de tangencia.

Calcule "x".

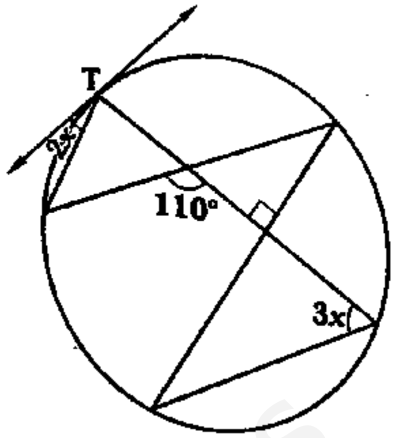
A) 15°

B) 20°

C) 25°

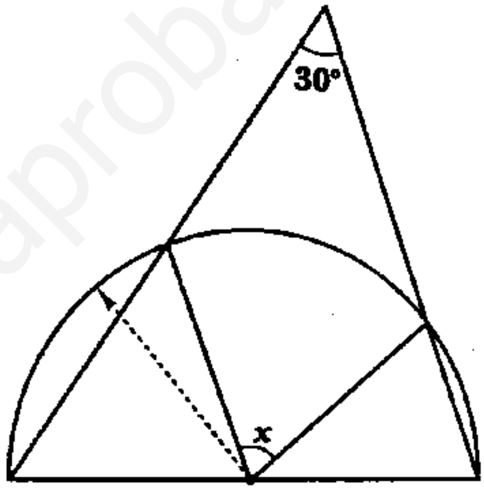
D) 30°

E) 35°




**PROBLEMA Nº 8**

Del gráfico, calcule "x".




A) 70°　　B) 120°　　C) 110°

D) 40°　　E) 80°

**PROBLEMA Nº 9**

N y L son puntos de tangencia, $m\widehat{PQ} = 40°$ y $m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle BCA = 100°$.

Calcule "x".

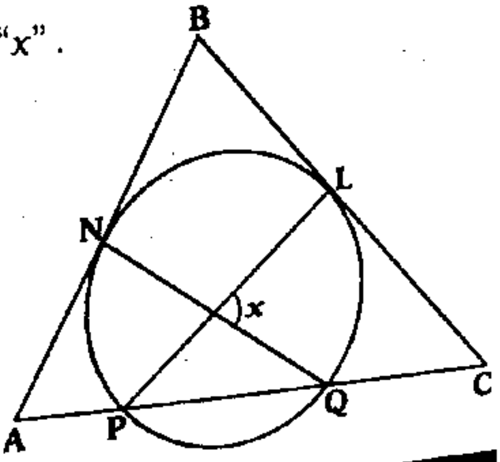
A) 70°

B) 140°

C) 110°

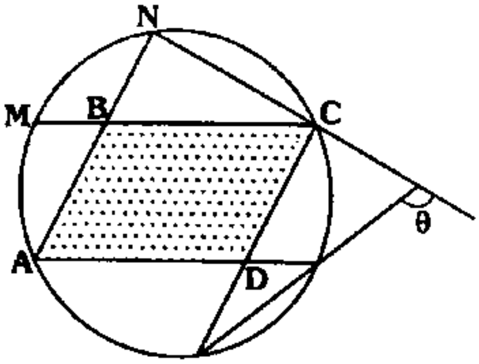
D) 40°

E) 80°



**PROBLEMA Nº 10**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo. Calcule $m\overset{\frown}{MNC}$.

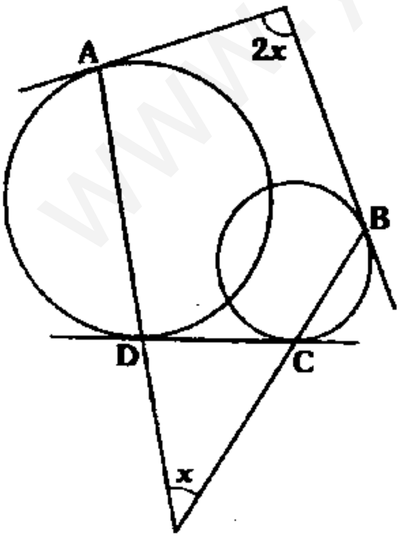



A) θ
B) $360° - 2\theta$
C) $90° + \theta$
D) $90° - \theta$
E) $180° - \theta$

**PROBLEMA Nº 11**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Calcule "x".




A) 30°
B) 36°
C) 45°
D) 54°
E) 60°

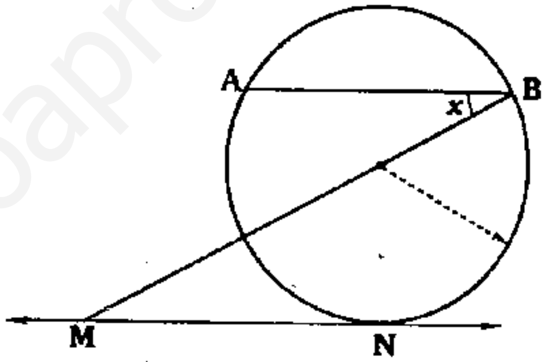
**PROBLEMA Nº 12**

En la semicircunferencia de diámetro AB se ubica M, luego en el triángulo AMB se inscribe la circunferencia de centro O, en $\overline{MB}$. Se ubica P talque MP=PB y $m\sphericalangle MOP = 90°$. Calcule $m\overset{\frown}{MB}$.

A) 105°
B) 74°
C) 53°
D) 90°
E) 106°

**PROBLEMA Nº 13**

N es punto de tangencia, $\overline{AB} // \overline{MN}$ y AB=MN. Calcule "x".



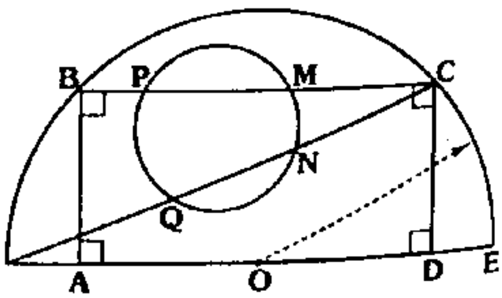

A) 30°
B) 45°
C) $\frac{53°}{2}$
D) $\frac{37°}{2}$
E) 8°

**PROBLEMA Nº 14**

En el gráfico, 2(DO)=3(DE) y $m\overset{\frown}{PQ} = 80°$.

Calcule $m\overset{\frown}{MN}$.

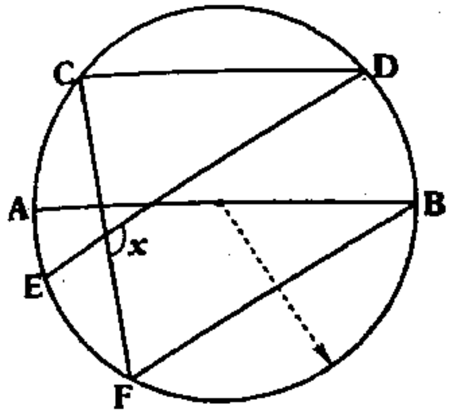
A) 27°
B) 28°
C) 16°
D) 20°
E) 14°



**PROBLEMA Nº 15**

Si $\overline{CD}//\overline{AB}$ y $\overline{ED}//\overline{FB}$ y $m\widehat{EF}=50°$.

Calcule "x".

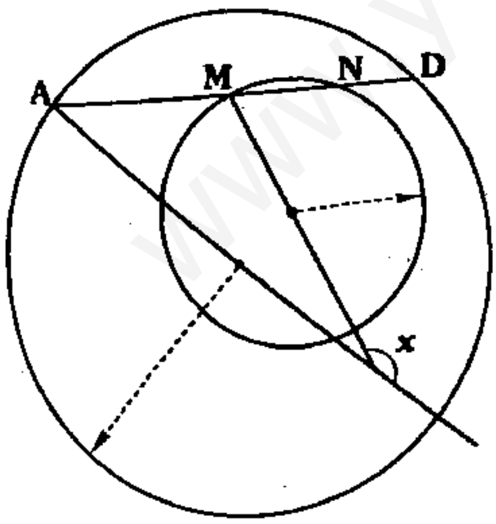



A) 130°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 115°

**PROBLEMA Nº 16**

En el gráfico, $m\widehat{AD}-m\widehat{MN}=40°$.

Calcule "x".

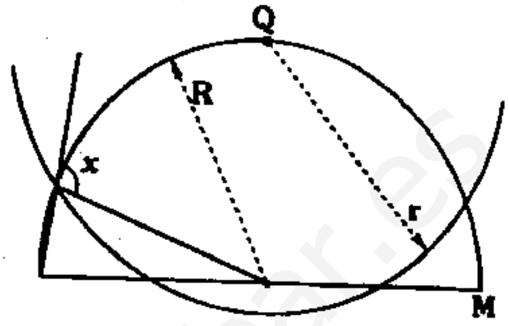



A) 140°
B) 120°
C) 160°
D) 165°
E) 170°

**PROBLEMA Nº 17**

En el gráfico, $m\widehat{QM}=90°$ y $\frac{R}{r}=\frac{5}{6}$.

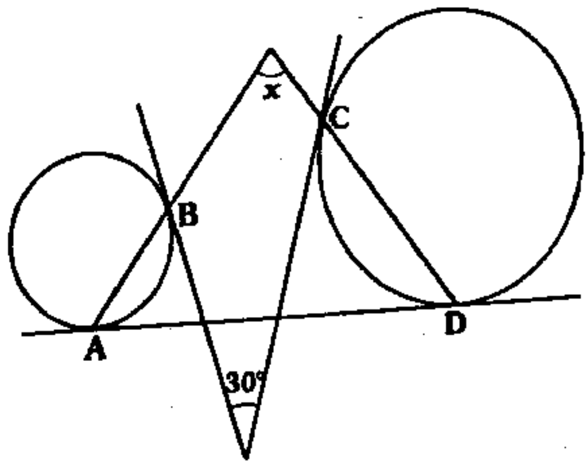
Calcule "x".




A) 98°
B) 95°
C) 100°
D) 104°
E) 105°

**PROBLEMA Nº 18**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

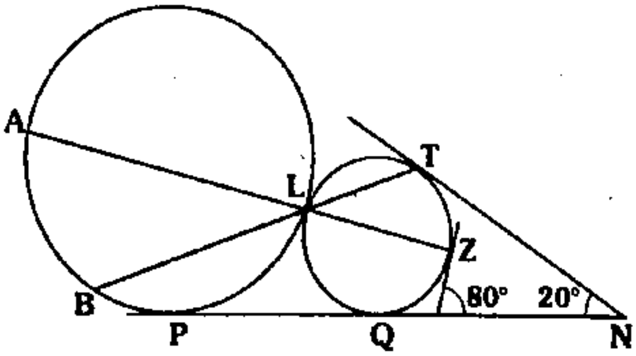



A) 105°
B) 75°
C) 120°
D) 60°
E) 90°

**PROBLEMA Nº 19**

P, L, T, Z y Q son puntos de tangencia.

Calcule $m\widehat{AB}-m\widehat{BP}$.




A) 80° B) 50° C) 60°

D) 40° E) 90°

**PROBLEMA Nº 20**

Si $m\widehat{AB}=60°$ y BC=a, B y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

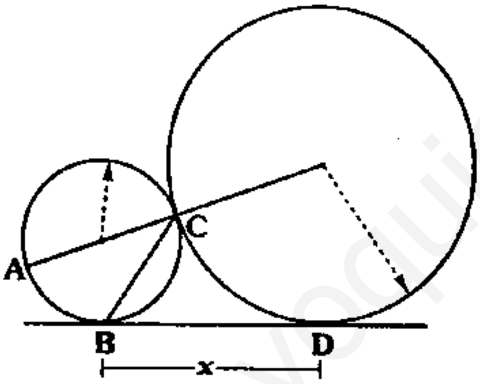
A) $a\sqrt{3}$

B) 2a

C) a

D) $a\sqrt{2}$

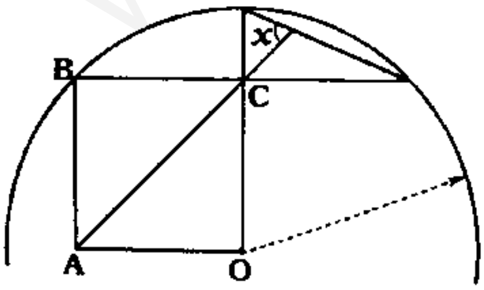
E) $a\sqrt{5}$




**PROBLEMA Nº 21**

En el gráfico, ABCO es un cuadrado.

Calcule "x".



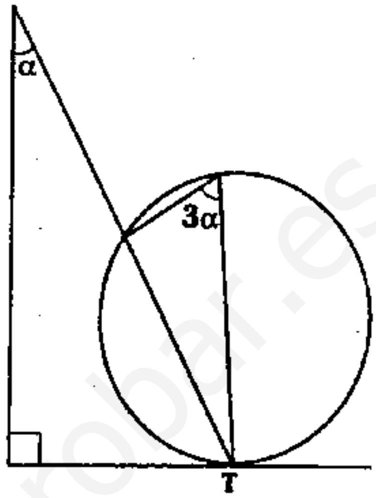

A) 53° B) 60° C) 45°

D) $\frac{135°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

**PROBLEMA Nº 22**

En el gráfico, T es punto de tangencia.

Calcule "x".



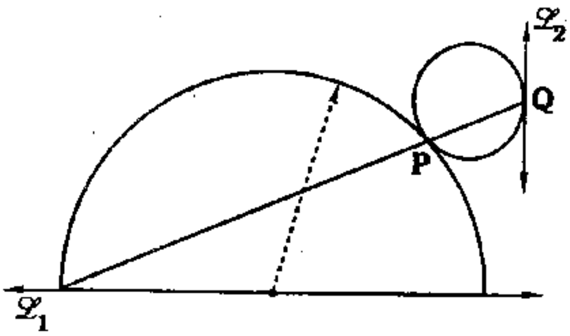

A) 22°30' B) 26°30' C) 30°

D) 45° E) 23°

**PROBLEMA Nº 23**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangecia.

Demostrar $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.




**PROBLEMA Nº 24**

Calcule $m\widehat{AB}$

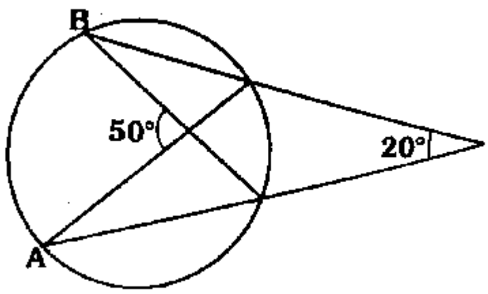
A) 80°

B) 35°

C) 70°

D) 55°

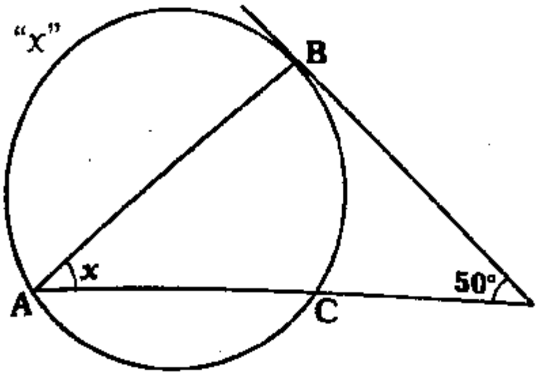
E) 45°



**PROBLEMA Nº 25**

Si $m\widehat{AC}=120°$ y B es punto de tangencia.

Calcule "x"




A) 55°

B) 45°

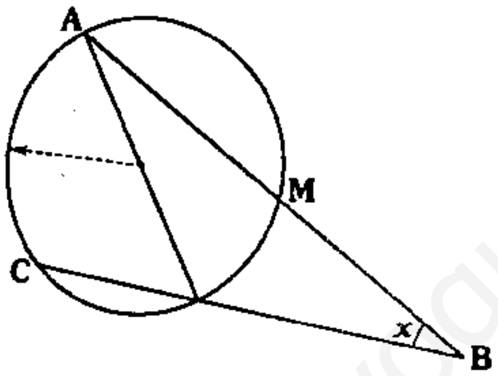
C) 35°

D) 40°

E) 80°

**PROBLEMA Nº 26**

Si $m\widehat{AC}=100°$ y AM=MB. Calcule "x".




A) 10° B) 15° C) 20°

D) 25° E) 35°

**PROBLEMA Nº 27**

Si A, B y C son puntos de tangencia.

Calcule "x".

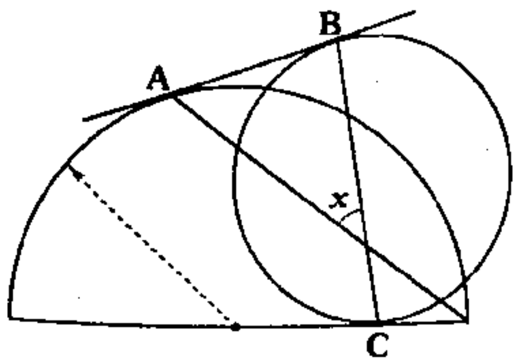
A) 30°

B) 60°

C) 36°

D) 72°

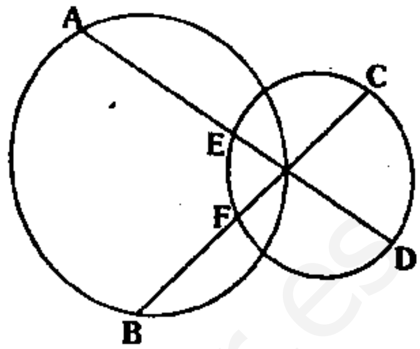
E) 45°




**PROBLEMA Nº 28**

Si $m\widehat{AB}=160°$ y $m\widehat{CD}=90°$.

Calcule $m\widehat{EF}$.




A) 50° B) 80° C) 40°

D) 60° E) 70°

**PROBLEMA Nº 29**

Si $m\widehat{AP}+m\widehat{PB}=280°$.

Calcule $m\widehat{CQ}+m\widehat{DQ}$.

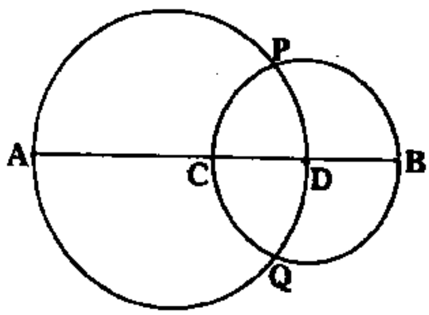
A) 100°

B) 140°

C) 80°

D) 70°

E) 105°




**PROBLEMA Nº 30**

Si $m\widehat{DQ}=40°$; A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

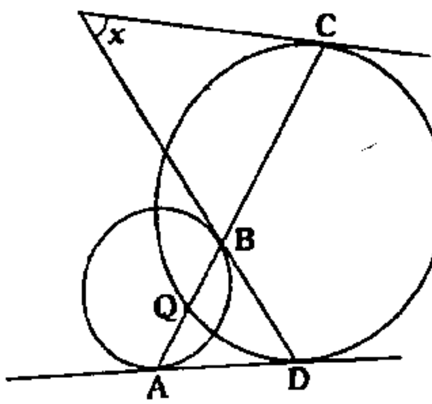
A) 50°

B) 20°

C) 40°

D) 30°

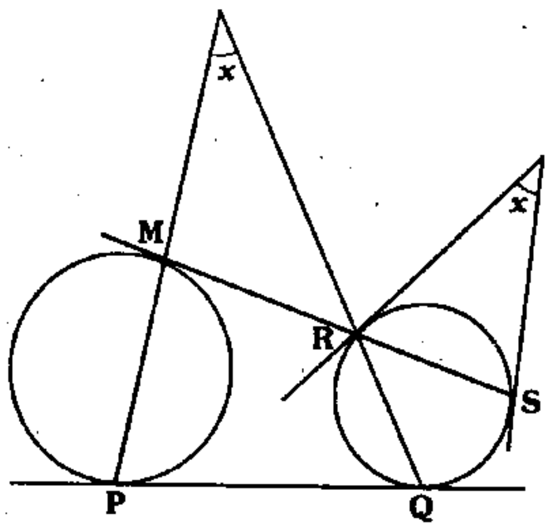
E) 10°



**PROBLEMA Nº 31**

Si P, Q, R, S y M son puntos de tangencia.

Calcule "$x$".



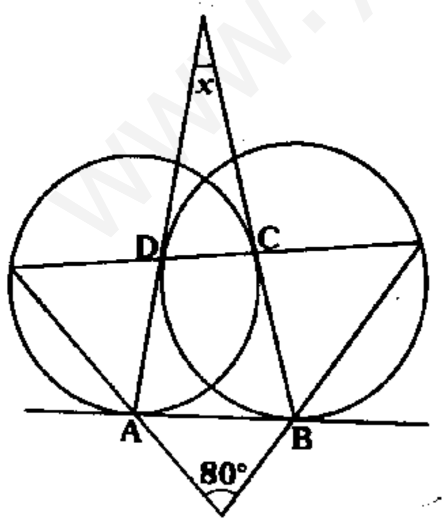

A) 36°  B) 45°  C) 54°

D) 60°  E) 30°

**PROBLEMA Nº 32**

Si A, B, C y D son puntos de tangencia.

Calcule "$x$".

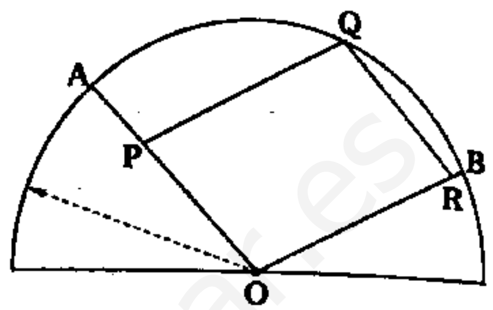



A) 40°  B) 20°  C) 50°

D) 60°  E) 80°

**PROBLEMA Nº 33**

Si OPQR es un paralelogramo. Calcule el máximo valor entero que puede tomar $m\widehat{AB}$.



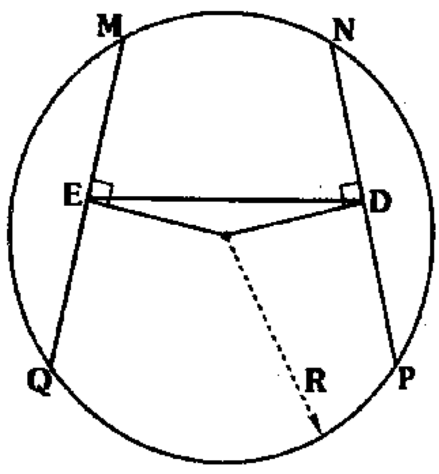

A) 179°  B) 134°  C) 89°

D) 119°  E) 59°

**PROBLEMA Nº 34**

En el gráfico, $R=2$, $m\widehat{MN}=60°$ y $m\widehat{QM}=m\widehat{NP}=105°$.

Calcule ED.



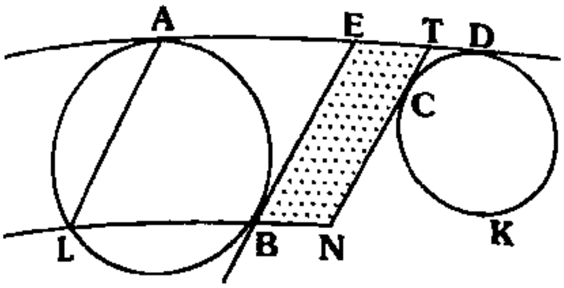

A) 2,5  B) 2,8  C) 3

D) 3,5  E) $\sqrt{2}+1$

**PROBLEMA Nº 35**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $3\left(m\widehat{CD}\right)=2(m\sphericalangle ALB)$ y NBET es un paralelogramo.

Calcule $m\measuredangle BNC$.



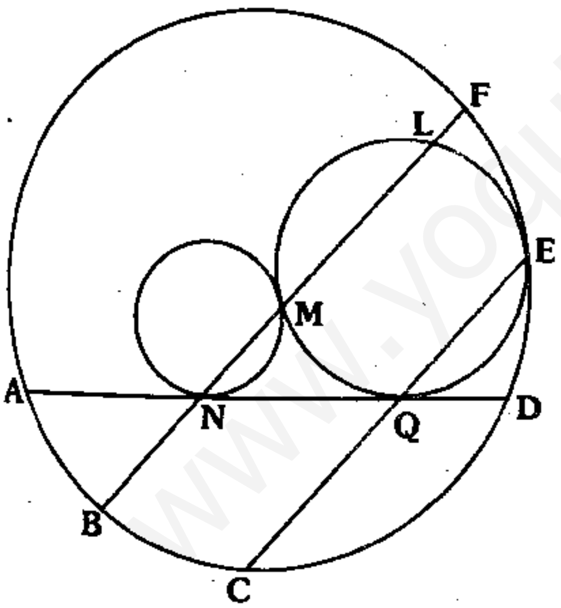

A) 115°   B) 116°   C) 118°

D) 120°   E) 135°

**Problema Nº 36**

En el gráfico, N, M, Q y E son puntos de tangencia. Si $\overline{BF}//\overline{CE}$ y $m\widehat{CDE}=112°$.

Calcule $m\widehat{EL}$.




A) 56°   B) 68°   C) 34°

D) 38°   E) 66°

**Problema Nº 37**

Si $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=40°$.

Calcule "x".

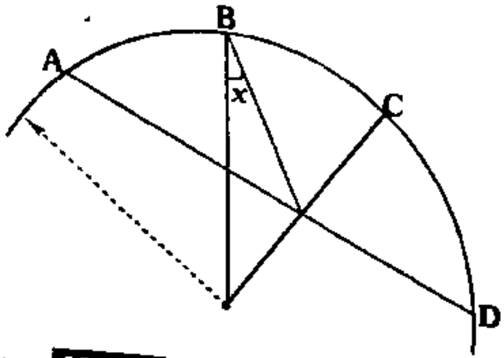
A) 20°

B) 30°

C) 40°

D) 50°

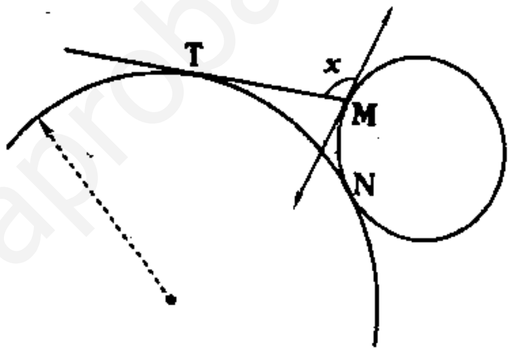
E) 36°




**Problema Nº 38**

En el gráfico, M, N, T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TN}+m\widehat{NM}=140°$.

Calcule "x".



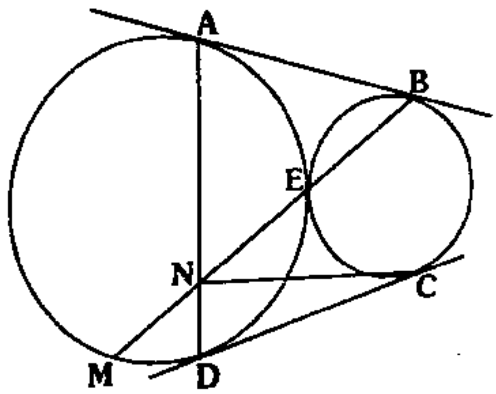

A) 70°   B) 110°   C) 140°

D) 120°   E) 100°

**Problema Nº 39**

En el gráfico, A, B, C, D y E son puntos de tangencia.

Si $m\widehat{DM}=50°$, calcule $m\measuredangle DCN$.



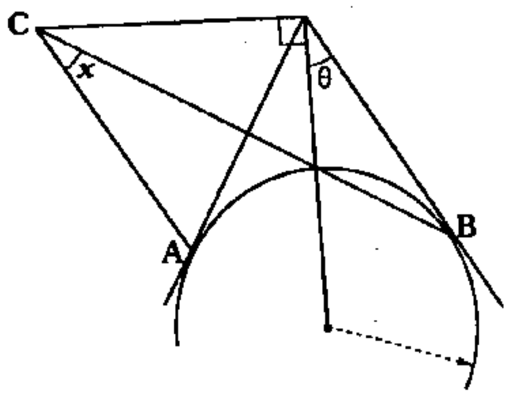

A) 15°   B) 20°   C) 22°5'

D) 24°   E) 25°

**PROBLEMA Nº 40**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia.

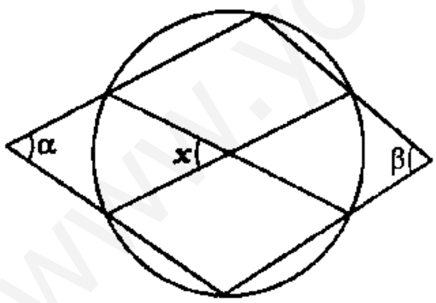
Calcule m∢ACB.




A) θ
B) 2θ
C) 45°−θ
D) 45°−2θ
E) 90°−2θ

**PROBLEMA Nº 41**

Si α+β=150°. Calcule "x".



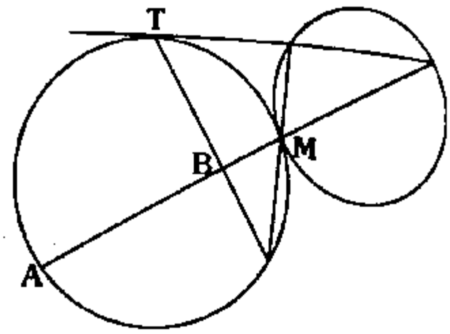

A) 30°
B) 75°
C) 105°
D) 45°
E) 15°

**PROBLEMA Nº 42**

En el gráfico, M y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AT}=110°$ y m∢TBA=80°.

Calcule $m\widehat{TM}$.

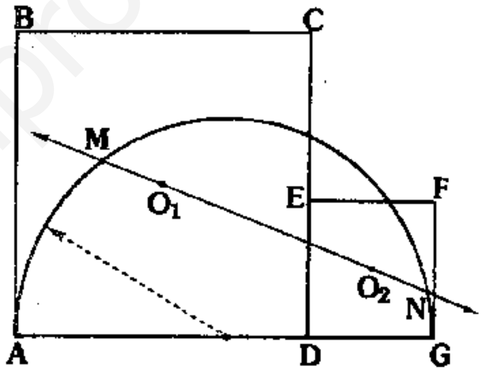
A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 30°




**PROBLEMA Nº 43**

En el gráfico, $O_1$ y $O_2$ son centros de los cuadrados ABCD y DEFG. Si AD=3(DG).

Calcule $m\widehat{AM}-m\widehat{NG}$



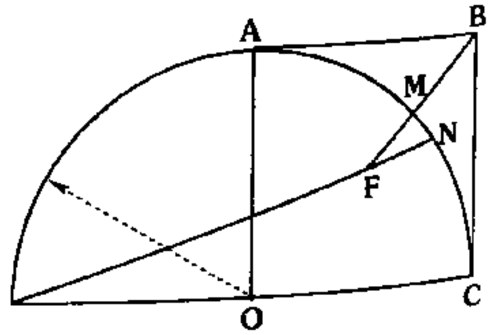

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) $\frac{53°}{2}$

**PROBLEMA Nº 44**

En el gráfico, F es centro del cuadrado OABC.

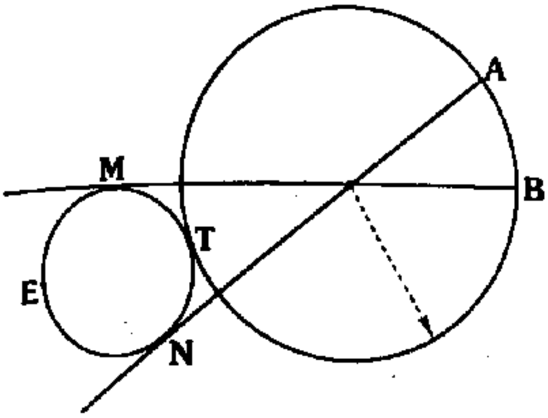
Calcule $m\widehat{MN}$.

A) 30°
B) 15°
C) 8°
D) 4°
E) 16°



**PROBLEMA Nº 45**

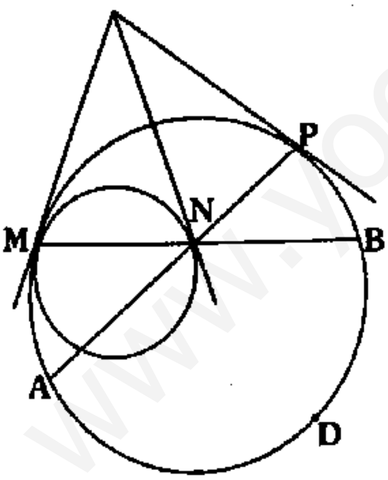
En el gráfico, M, N y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{MEN}=6\left(m\widehat{AB}\right)$, calcule $m\widehat{AB}$.




A) 30°  B) 32°  C) 36°
D) 40°  E) 45°

**PROBLEMA Nº 46**

En el gráfico, M, N y P son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{ADB}$.

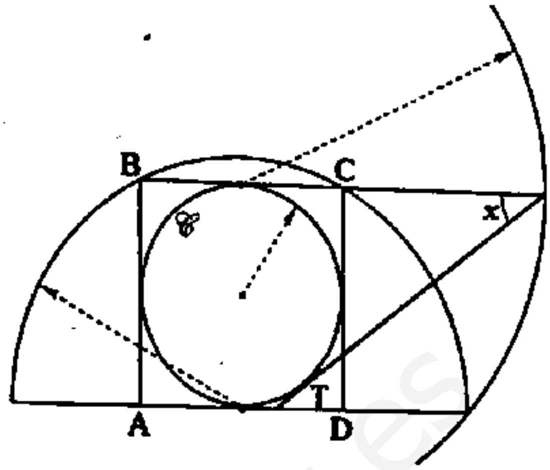



A) 90°  B) 135°  C) 120°
D) 180°  E) 205°

**PROBLEMA Nº 47**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado circunscrito respecto de $\mathscr{C}$ y T es punto de tangencia.

Calcule "x".

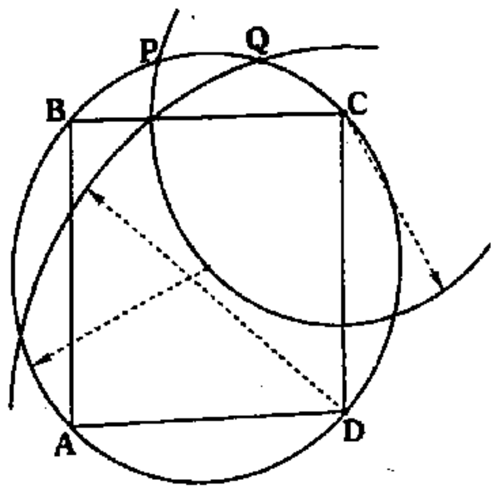



A) 16°  B) 30°
C) 37°  D) 45°
E) 53°

**PROBLEMA Nº 48**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado.

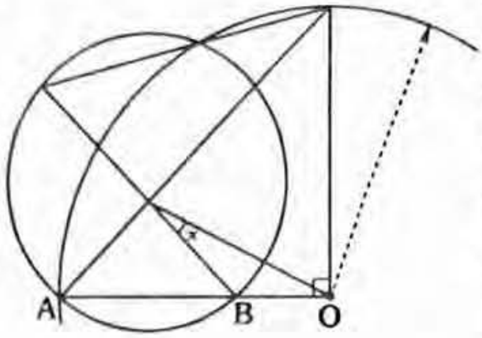
Calcule $m\widehat{PQ}$.




A) 15°  B) 16°
C) 30°  D) 37°/2
E) 53°/2

**PROBLEMA Nº 49**

Si AB=2(OB). Calcule "x".




A) 18.5°

B) 15°

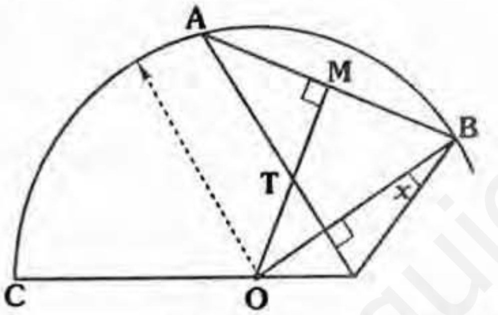
C) 26,5°

D) 22,5°

E) 14°

**PROBLEMA Nº 50**

En el gráfico, OT=MT y $m\widehat{CAB}=135°$. Calcule "x".

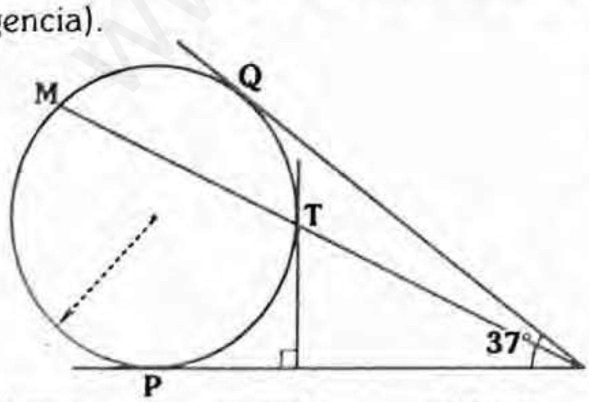



A) 14° B) 18,5° C) 26,5°

D) 22,5° E) 30°

**PROBLEMA Nº 51**

Calcule $m\widehat{MP}$ (T, P y Q son puntos de tangencia).

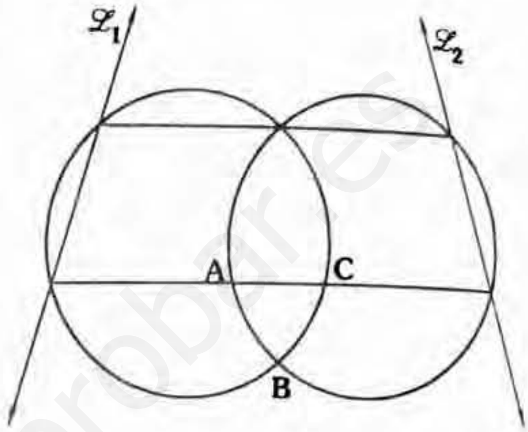



A) 90° B) 106° C) 104°

D) 127° E) 143°

**PROBLEMA Nº 52**

En el gráfico, la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es 40°. Calcule $m\widehat{AB}+m\widehat{BC}$.

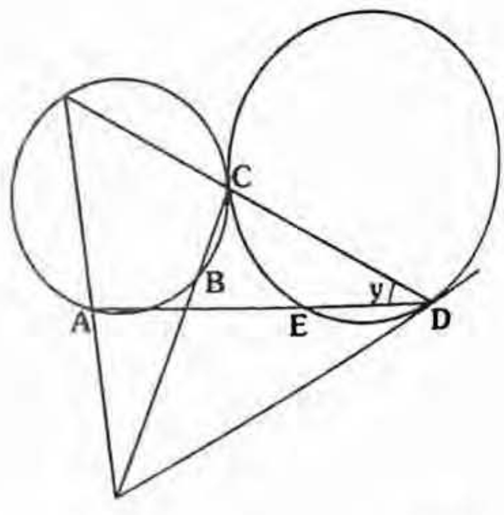



A) 40° B) 80° C) 60°

D) 30° E) 20°

**PROBLEMA Nº 53**

C y D son puntos de tangencia. Si $m\widehat{CED}-m\widehat{AB}=50°$, calcule y




A) 25° B) 50° C) 20°

D) 40° E) 30°

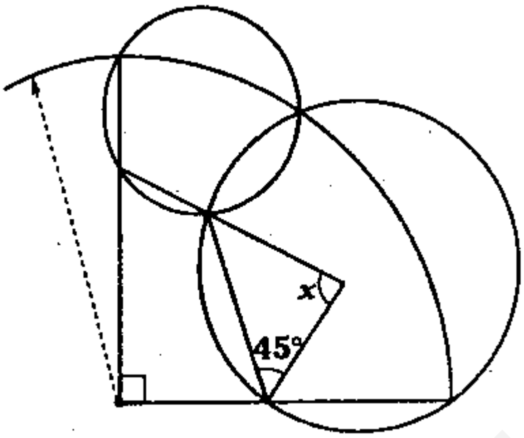
## PROBLEMA Nº 54

Desde el punto A exterior a una circunferencia se trazan la tangente AT (T es punto de tangencia) y la secante ABC, talque $m\widehat{TC}=2\left(m\widehat{BT}\right)$ y AT es igual al radio de dicha circunferencia. Calcule m∢CAT.

A) 10° B) 12,5° C) 15°
D) 17,5° E) 22,5°

## PROBLEMA Nº 55

Calcule "x", en:

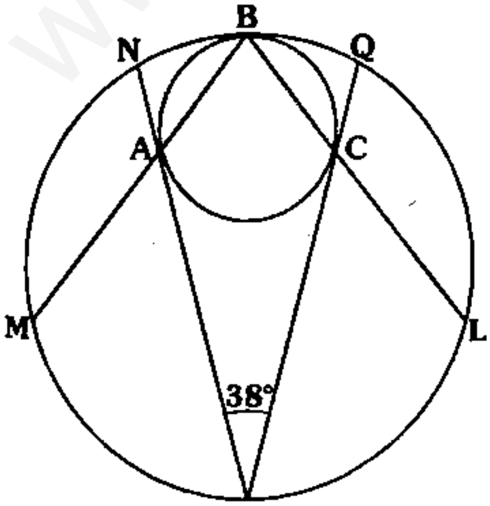



A) 60° B) 90° C) 105°
D) 75° E) 120°

## PROBLEMA Nº 56

En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{MN}+m\widehat{QL}$.

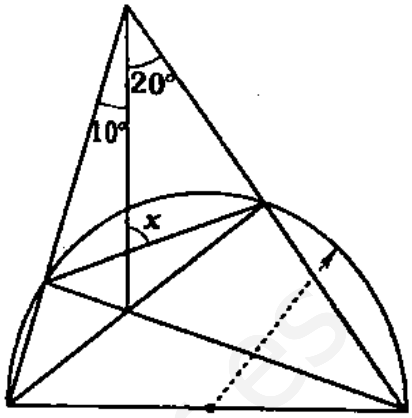
A) 76°
B) 108°
C) 109°
D) 142°
E) 138°




## PROBLEMA Nº 57

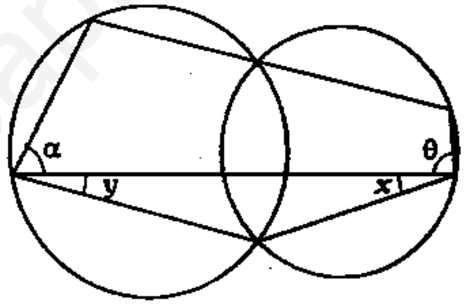
En el gráfico, calcule "x".

A) 70°
B) 60°
C) 50°
D) 80°
E) 40°




## PROBLEMA Nº 58

En el gráfico, $\alpha+\theta=140°$.
Calcule $x+y$.

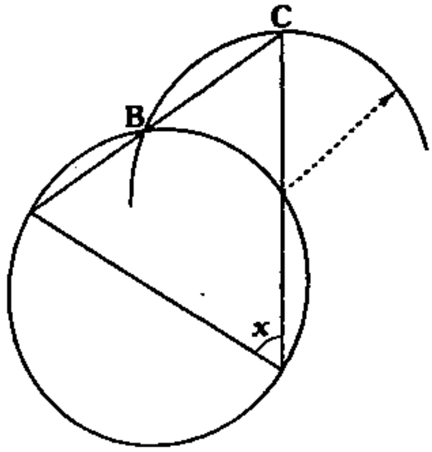



A) 40° B) 20° C) 50°
D) 70° E) 60°

## PROBLEMA Nº 59

Si $m\widehat{BC}=50°$. Calcule "x".

A) 50°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 80°



**PROBLEMA Nº 60**

En el gráfico, calcule "$x$".

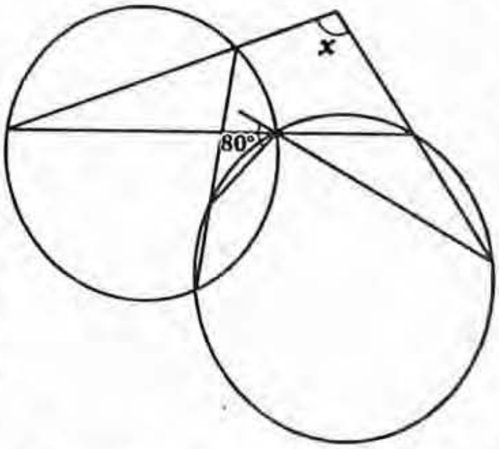
A) 80°

B) 160°

C) 100°

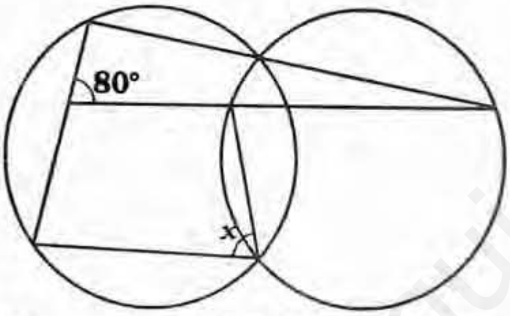
D) 140°

E) 120°




**PROBLEMA Nº 61**

Calcule "$x$", en:




A) 80° B) 100° C) 120°

D) 140° E) 160°

**PROBLEMA Nº 62**

A, B y C son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{AB} = 60°$. Calcule "$x$".

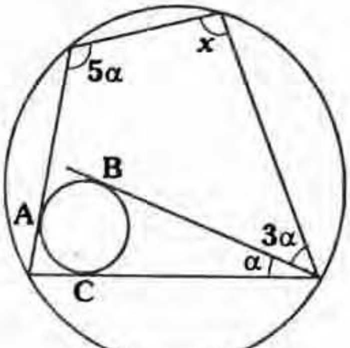
A) 120°

B) 130°

C) 140°

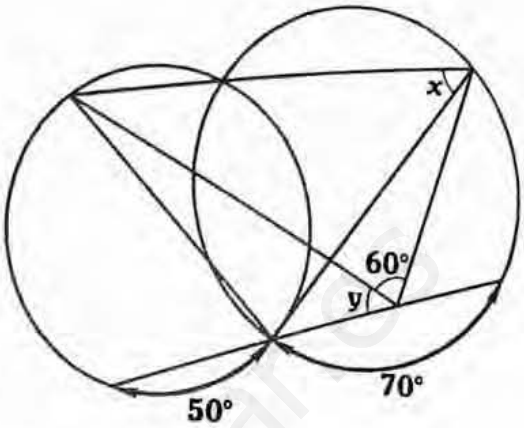
D) 150°

E) 160°




**PROBLEMA Nº 63**

Calcule $x/y$.




A) 2 B) 1/2 C) 1

D) 2/3 E) 3/2

**PROBLEMA Nº 64**

Desde el punto R exterior a una circunferencia de diámetro AB, se trazan las secantes RA y RB que intersecan a la circunferencia en P y Q respectivamente. Si $AP = PR$ y $m\overset{\frown}{QB} = 36°$. Calcule $m\sphericalangle PQR$.

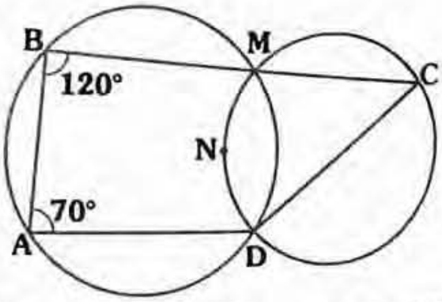
A) 36° B) 54° C) 72°

D) 45° E) 66°

**PROBLEMA Nº 65**

En el gráfico, $m\overset{\frown}{MND} = m\overset{\frown}{MC}$.

Calcule $m\sphericalangle ADC$.

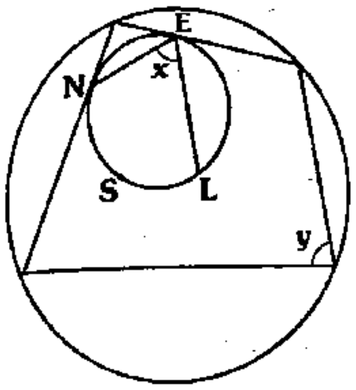



A) 110° B) 115° C) 120°

D) 100° E) 140°

**Problema Nº 66**

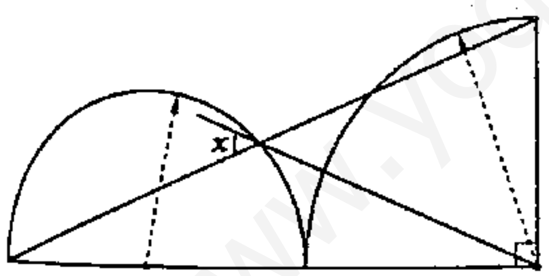
En el gráfico, N y E son puntos de tangencia. Si $x+y=190°$ y $3(m\overset{\frown}{NE})=4(m\overset{\frown}{EL})$. Calcule $m\overset{\frown}{NSL}$.




A) 220°
B) 230°
C) 240°
D) 250°
E) 260°

**Problema Nº 67**

Calcule "x" en:




A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

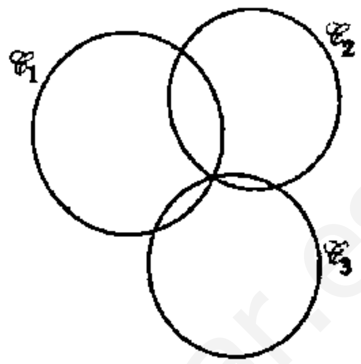
**Problema Nº 68**

Dado el cuadrado ABCD, en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M y en $\overline{AD}$ el punto N tal que ND=3(AN). Si $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ se cortan en P. Calcule $m\sphericalangle PBM$.

A) 30°
B) 37°
C) 53°
D) 45°
E) 60°

**Problema Nº 69**

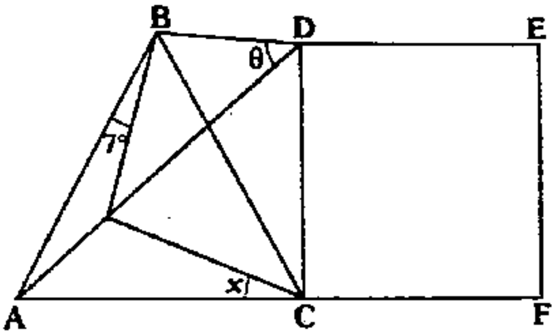
En el gráfico, indique el número de circunferencia tangentes a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.




A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

**Problema Nº 70**

En el gráfico, las regiones ABC y CDEF son regulares e isoperimétricas. Calcule $x$ en función de "θ".




A) $60°-\theta$
B) $53°-\theta$
C) $37°-\theta$
D) $\dfrac{37°}{2}-\theta$
E) $23°-\theta$

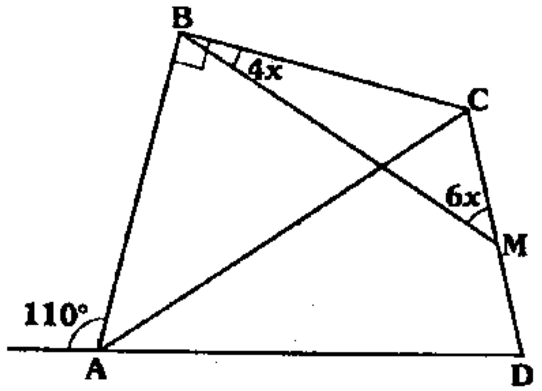
**Problema Nº 71**

En la diagonal AC del cuadrado ABCD se ubica P, talque $m\sphericalangle CBP=20°$, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica E, de modo que $m\sphericalangle DCE=25°$. Calcule $m\sphericalangle PEC$.

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 28°

**PROBLEMA Nº 72**

Si AC=AD y CM=MD. Calcule "x".

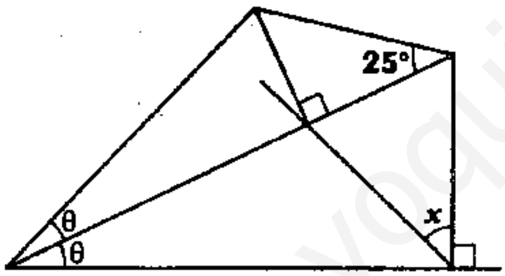



A) 2,5°  B) 2°  C) 5°

D) 7,5°  E) 10°

**PROBLEMA Nº 73**

En el gráfico, calcule "x".




A) 20°  B) 40°  C) 25°

D) 65°  E) 50°

**PROBLEMA Nº 74**

En un cuadrilátero inscriptible tres de sus ángulos interiores consecutivos miden $x$, $2x$ y $4x$.

Calcule la medida el mayor de los ángulos de dicho cuadrilátero.

A) 120°  B) 150°  C) 144°

D) 140°  E) 108°

**PROBLEMA Nº 75**

La circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD es tangente a $\overline{BC}$ en P y a $\overline{CD}$ en M. Se traza $\overline{MQ} \perp \overline{AP}$ (Q en $\overline{AP}$).

Calcule m∢QDM.

A) 37°  B) $\frac{37°}{2}$  C) 30°

D) $\frac{45°}{2}$  E) $\frac{53°}{2}$

**PROBLEMA Nº 76**

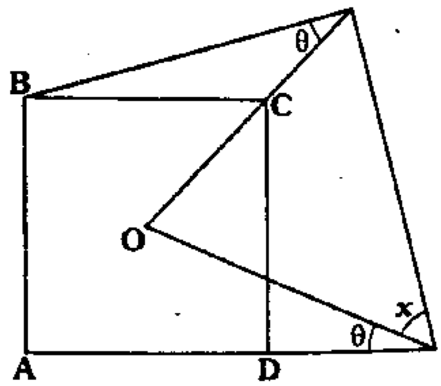
ABCD es un cuadrado de centro O, M es exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que m∢BMC=90°. Calcule m∢OMC.

A) 30°  B) 45°  C) 60°

D) 53°  E) 37°

**PROBLEMA Nº 77**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O. Calcule "x".



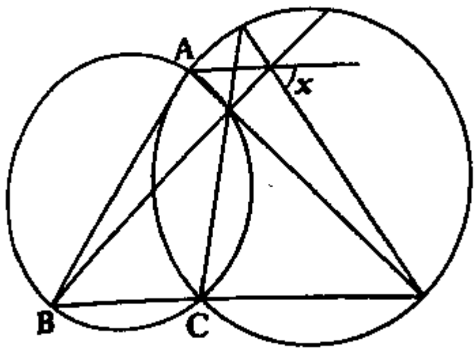

A) 45°  B) 60°

C) 2θ  D) 45°+θ

E) 90°−θ

**PROBLEMA Nº 78**

Si $m\widehat{ABC}=220°$, calcule "x".

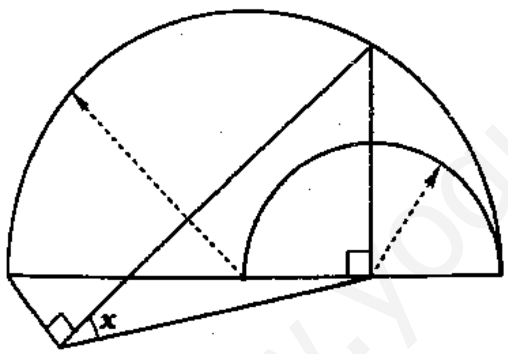



A) 140° B) 70° C) 110°

D) 55° E) 65°

**PROBLEMA Nº 79**

Calcule "x", en:




A) 30° B) $\dfrac{53°}{2}$ C) $\dfrac{37°}{2}$

D) $\dfrac{45°}{2}$ E) $\dfrac{75°}{2}$

**PROBLEMA Nº 80**

En una circunferencia de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares. En las prolongaciones de $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente, de modo que $m\measuredangle APQ=90°$ y $\overline{AQ}$ interseca a la circunferencia en F. Si $m\widehat{FB}=30°$, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

A) 75° B) 60° C) 45°

D) 72° E) 90°


**PROBLEMA Nº 81**

En un triángulo ABC acutángulo, K es el circuncentro y O es el ortocentro; por B trazamos la bisectriz que intercepta a la mediatriz del lado $\overline{AC}$ en E.

Si $m\measuredangle ABC=60^\circ$ y $m\measuredangle OKA=12^\circ$, halle $m\measuredangle BEK$.

A) 18° B) 24° C) 30°
D) 36° E) 48°

**PROBLEMA Nº 82**

En un triángulo ABC, se ubica un punto F en la altura $\overline{BH}$ al que $m\measuredangle FAC=3m\measuredangle BCF=m\measuredangle BCA$ y $\overline{AB}\cong\overline{FC}$. Halle $m\measuredangle HBC$.

A) 30° B) 36° C) 40°
D) 45° E) 60°

**PROBLEMA Nº 83**

En una recta se ubican los puntos A, M, B y N consecutivos. Se construyen una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ de centro M y el cuadrante BNP con centro en N. Una tangente exterior común determina los puntos de tangencia E en la semicircunferencia y F en el cuadrante. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{AE}$ y $\overline{PF}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 75°

**PROBLEMA Nº 84**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recot en B) y se ubica un punto interior M. Si $MC=8$; $m\measuredangle BCM=m\measuredangle MAC$, $AB=BC$ y $m\measuredangle AMB=3m\measuredangle ACB$, halle MB.

A) 4 B) 4,5 C) 5
D) 5,5 E) 6

**PROBLEMA Nº 85**

En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BQ}$ de manera que $\overline{AB}\cong\overline{QC}$. Si $m\measuredangle A=80^\circ$ y $m\measuredangle BQA=30^\circ$, halle $m\measuredangle C$.

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 36° E) 45°

**PROBLEMA Nº 86**

En el rectángulo ABCD, M y N son puntos medio de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Calcule el perímetro de MNC, si el perímetro de ABCD es 2p y la suma de las medidas de los inradios de AMN, MBC y NCD es S.

A) $p+s$ B) $p-s$
C) $2(p-s)$ D) $\frac{p+s}{2}$
E) $\frac{3}{2}(p-s)$

**PROBLEMA Nº 87**

ABCD es un trapecio isósceles ($AB=CD$, $BC<AD$). Si M y N son puntos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

tales que MBCN y AMND son circunscriptibles, la mediana del trapecio mide "m u y" $AB=\ell u$, calcule la longitud de MN.

A) $\ell-m$  B) $\ell+m$  C) $\frac{\ell+m}{2}$

D) $\frac{\ell-m}{2}$  E) $2(\ell-m)$

**PROBLEMA Nº 88**

La circunferencia inscrita al triángulo ABC con centro en R, es tangente a $\overline{AB}$ en P y la circunferencia exinscrita relativa al lado AB es tangente a ese lado en E. Si BC=6, AC=9, DR=4, halle la distancia de R a E.

A) 3  B) 4  C) 5

D) 4,5  E) 6

**PROBLEMA Nº 89**

En el triángulo ABC rectángulo (recto en B) se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ y los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EH}$ perpendiculares a $\overline{AC}$ (F y H en $\overline{AC}$). Si $FH=\ell$, calcule el inradio del triángulo ABC.

A) $\frac{\ell}{2}$  B) $\frac{\ell}{3}$  C) $\ell$

D) $\frac{2\ell}{3}$  E) $\frac{\ell}{4}$

**PROBLEMA Nº 90**

Demostrar que la longitud del exradio relativo a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los exradios relativos a los catetos y del inradio.

**PROBLEMA Nº 91**

Las circunferencias $C_1$ y $C_2$ son exteriores, AB y CD son sus tangentes comunes exteriores (A y C en $C_1$, B y D en $C_2$). La tangente común interior EF (E en $C_1$, F en $C_2$), intercepta a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en M y N. Si $AB+EF=\ell$, calcule BM+CN.

A) $\ell$  B) $\frac{\ell}{2}$  C) $\frac{3\ell}{2}$

D) $2\ell$  E) $\frac{2\ell}{3}$

**PROBLEMA Nº 92**

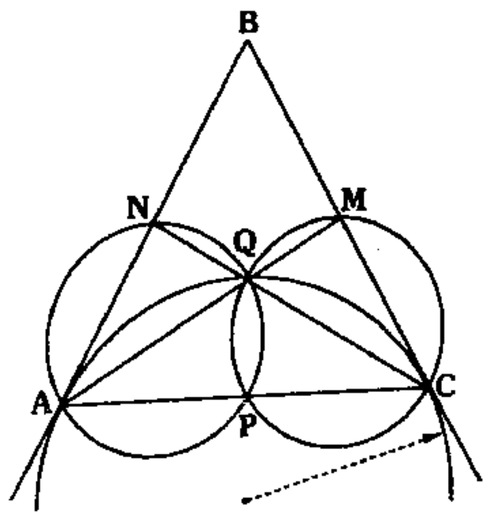
Desde F se trazan $\overleftrightarrow{FA}$ y $\overleftrightarrow{FB}$ tangente a una circunferencia en A y B tales que $m\measuredangle AFB=90°$. Por F se traza la secante que intercepta a la circunferencia en E y M tal que $m\overset{\frown}{AM}=2m\overset{\frown}{AE}$. Calcule $m\measuredangle AFE$.

A) 18°  B) 22,5°  C) 27°

D) 15°  E) 30°

**PROBLEMA Nº 93**

En la figura BA y BC son tangentes. Calcule la medida del ángulo AQN.

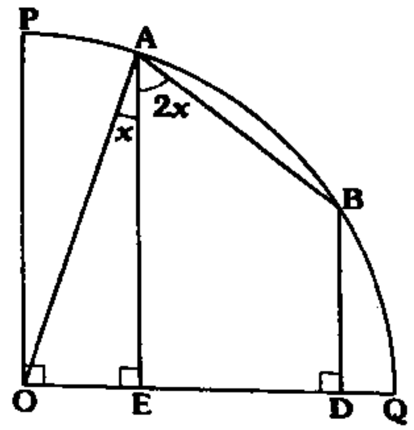



A) 60°  B) 75°  C) 45°

D) 53°  E) 67,5°

**PROBLEMA Nº 94**

En la figura AB=2BD y POQ es un cuadrante. Calcule "x".




A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 22,5°
E) 15°

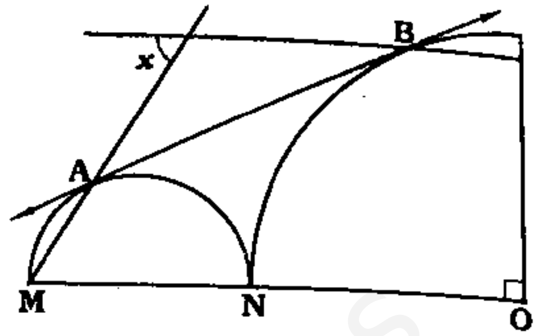
**PROBLEMA Nº 95**

Dos circunferencias $C_1$ y $C_2$ son tangentes exteriores en F. Se trazan las secantes AFB y CFH, A y C en $C_1$ y B y H en $C_2$. Si la $m\widehat{AC}=140°$, calcule el ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos CAB y CHB.

A) 45°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 55°

**PROBLEMA Nº 96**

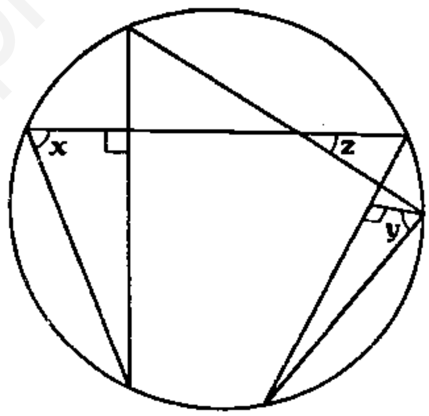
En la figura $\widehat{MAN}$ es semicircunferencia y OCN un cuadrante A y B son puntos de tangencia. Halle "x".




A) 45°
B) 37°
C) 53°
D) 60°
E) 75°

**PROBLEMA Nº 97**

En la figura, halle $x+y+z$




A) 120°
B) 130°
C) 140°
D) 150°
E) 180°

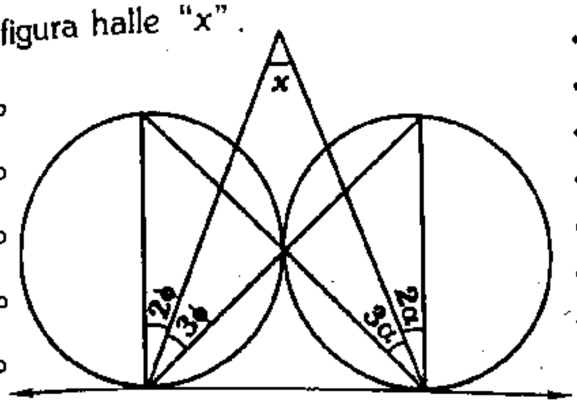
**PROBLEMA Nº 98**

Dos circunferencias de centros O y $O_1$ son tangentes interiores en C ( $O_1$ de radio menor) y las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ $\left(B\in\widehat{AC}\right)$ de la circunferencia O se interceptan en E (punto de $O_1$) que es el punto de tangencia de $\overline{BD}$ con $O_1$. Si $m\widehat{AB}=52°$ y $m\widehat{BC}=72°$, calcule $m\sphericalangle ACD$.

A) 26°
B) 25°
C) 28°
D) 29°
E) 30°

**PROBLEMA Nº 99**

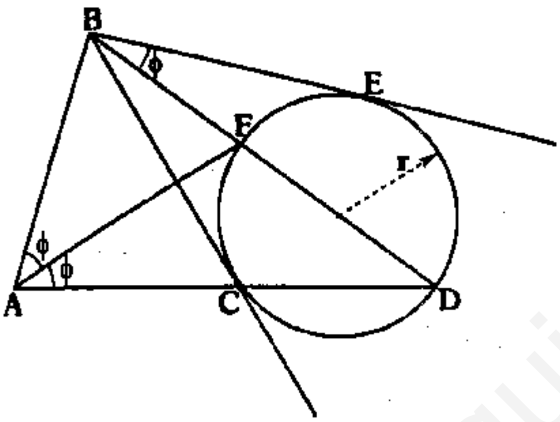
En la figura halle "$x$".




A) 36°
B) 42°
C) 24°
D) 30°
E) 32°

**PROBLEMA Nº 100**

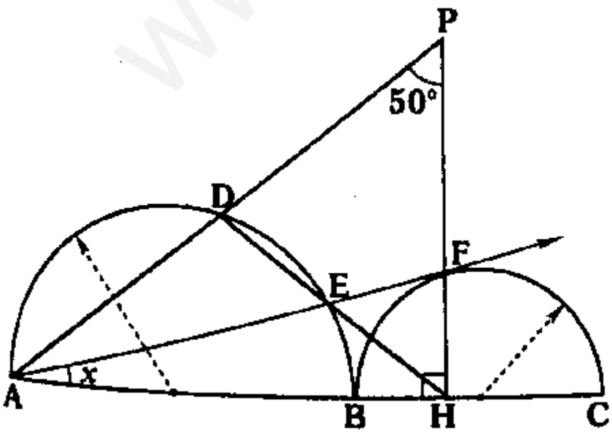
En la figura, calcule AB, si r=3u.




A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}+1$
D) $\sqrt{3}+1$ E) $3\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 101**

En la figura, halle "$x$"




A) 15° B) 10° C) 5° D) 20° E) 25°

**PROBLEMA Nº 102**

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y luego $\overline{HN}\perp\overline{AB}$ y $\overline{HM}\perp\overline{BC}$. Si $m\measuredangle MAC=39°$, calcule $m\measuredangle MNC$.

A) 36° B) 40° C) 39°
D) 51° E) 42°

**PROBLEMA Nº 103**

En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$. Calcule la medida del ángulo que determinan los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{BK}$, siendo K el circuncentro del triángulo ABC.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) F.D

**PROBLEMA Nº 104**

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CP}$.

Si $m\measuredangle BAC=\alpha$, $m\measuredangle ABC=\beta$ y $m\measuredangle BCA=\gamma$, entonces demostrar que:

A) $m\measuredangle PQF=180°-2\alpha$
B) $m\measuredangle PFQ=180°-2\beta$
C) $m\measuredangle QPF=180°-2\gamma$

**PROBLEMA Nº 105**

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica R punto medio de $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ es perpendicular a $\overline{BR}$ $(F\in\overline{BR})$, calcule la distancia del centro del cuadrado al segmento BR.

A) $\frac{1}{3}AF$ B) $\frac{1}{4}AF$ C) $\frac{2}{3}AF$
D) $\frac{1}{2}AF$ E) $\frac{3}{4}AF$

**PROBLEMA Nº 106**

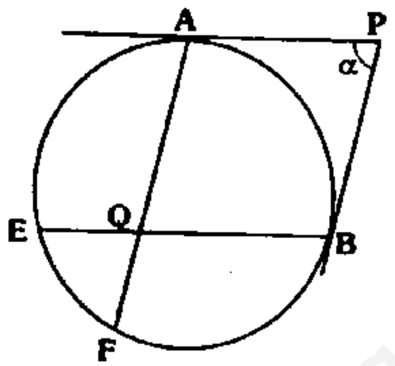
Dadas dos circunferencias ortogonales de centros $O_1$ y $O_2$ que se interceptan en B y P, se trazan las tangentes común. AC más distante de B que de P. Halle la $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 45° C) 50°

D) 60° E) 71°

**PROBLEMA Nº 107**

En la figura A y B son puntos de tangencia, $\overline{EB} // \overline{AP}$, $\overline{AF} // \overline{PB}$ sea: $m\measuredangle APB = \alpha$, halle $m\widehat{EF}$.




A) $90° - \alpha$ B) $3\alpha - 180°$

C) $2\alpha - 90°$ D) $\frac{\alpha}{2}$

E) $\alpha$

**PROBLEMA Nº 108**

¿Es verdad?

I. En una circunferencia, a arcos congruentes le corresponden cuerdas congruentes.

II. En una circunferencia, todo diámetro que biseca a una cuerda, es perpendicular a dicha cuerda.

III. En una circunferencia, si las distancias del centro a dos cuerdas de la circunferencia son iguales, entonces dichas cuerdas son paralelas.

A) sólo I B) sólo II

C) sólo III D) I, II y III

E) sólo I y II

**PROBLEMA Nº 109**

Se tiene el rectángulo ABCD, en $\overline{AD}$ se ubica un punto F de manera que en el cuadrilátero ABCF se encuentra inscrita una circunferencia de diámetro 2R, en el triángulo FDC se inscribe la circunferencia de diámetro 2r. Calcule $2R - r$.

A) $\frac{1}{2}AF$ B) $\frac{3}{4}AF$ C) $\frac{4}{5}AF$

D) AF E) $\frac{3}{2}AF$

**PROBLEMA Nº 110**

Se tiene el pentágono ABCDE inscrito en una circunferencia, $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BD}$, $m\widehat{AB} = 100°$. Calcule: $m\measuredangle CED$.

A) 20° B) 25° C) 40°

D) 50° E) 75°

**PROBLEMA Nº 111**

En una circunferencia se trazan dos cuerdas AB y CD perpendiculares entre sí. Las tangentes trazadas a la circunferencia en B y C se intersecan en F; $m\measuredangle BFC = \theta$, calcule: $m\measuredangle ABD$.

A) $90° - \frac{\theta}{2}$ B) $180° - \theta$ C) $\frac{\theta}{2}$

D) $\theta - 90°$ E) $\theta$

**PROBLEMA Nº 112**

ABCD es un cuadrilátero convexo de perímetro 2p circunscrito a una circunferencia. Se construyen los triángulos rectángulos BFC y AGD rectos en F y G, respectivamente, y exteriores al cuadrilátero; si BF+FC+AG+GD=K, calcule la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos.

A) $\frac{K-p}{2}$ B) $K-p$

C) $\frac{K+p}{2}$ D) $p-\frac{K}{2}$

E) $K+\frac{p}{2}$

**PROBLEMA Nº 113**

En un triángulo ABC, se traza la circunferencia $\mathscr{C}$ que contiene los puntos medios de los tres lados. Si $B\in\mathscr{C}$, entonces la $m\measuredangle ABC$ es:

A) 75° B) 90°

C) Depende de las medidas de los ángulos del triángulo

D) 120° E) 135°

**PROBLEMA Nº 114**

En un triángulo ABC recto en B, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}\left(\overline{AM}\cong\overline{MC}\right)$. Si $m\measuredangle BCA=15$ y $AC=\left(\sqrt{3}+1\right)u$ entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia inscrita al triángulo BHM es:

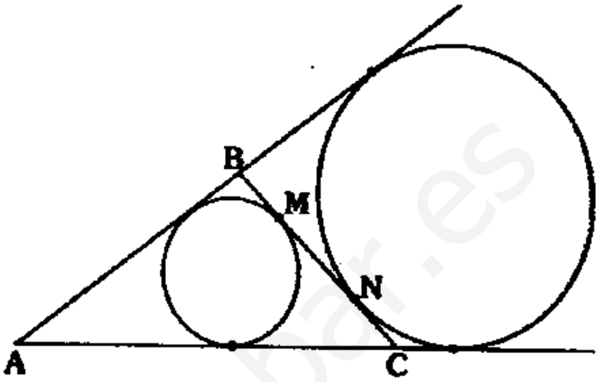
A) 0,45 B) 0,75 C) 0,15

D) 0,35 E) 0,25

**PROBLEMA Nº 115**

En el gráfico, Si AC=b y AB=c.

Entonces: $\frac{BM}{NC}+MN$ es:




A) $2+c-b$ B) $1+b-c$

C) $1+\frac{b-c}{2}$ D) $1+2B-C$

E) $1+b-2c$

**PROBLEMA Nº 116**

Desde el punto P que pertence a la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC, se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{SQ}$ interseca a la prolongación de $\overline{AB}$ en T, entonces la $m\measuredangle PTA$ es:

A) 30° B) 60° C) 75°

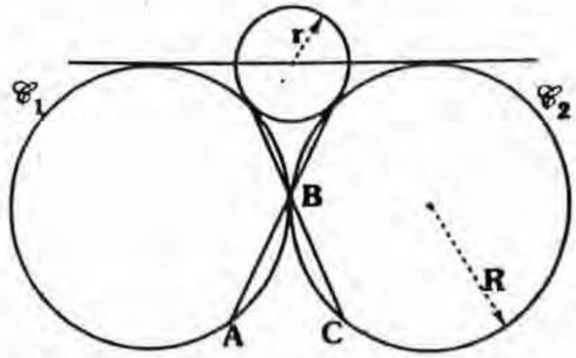
D) 90° E) 100°

**PROBLEMA Nº 117**

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son congruentes y tangentes, una circunferencia tiene su centro en la recta tangente común L.

Calcule:

**a)** $m\measuredangle ABC$ **b)** $\frac{r}{R}$




A) $60° \; ; \; \dfrac{1}{2}$  B) $45° \; ; \; \sqrt{2}-1$

C) $30° \; ; \; \dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$  D) $53° \; ; \; \dfrac{3}{8}$

E) $37° \; ; \; \dfrac{4}{9}$

**PROBLEMA Nº 118**

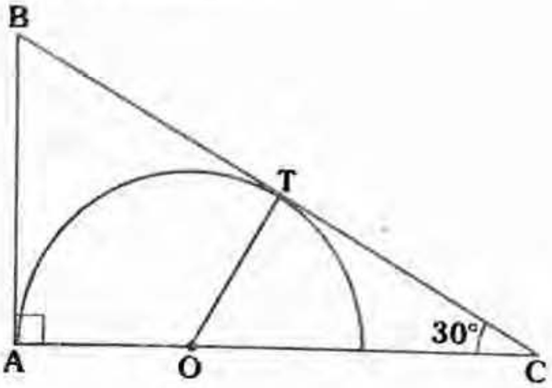
La circunferencia exinscrita de un triángulo ABC relativa a $\overline{BC}$ es tangente a la prolongación de $\overline{AC}$ en E, O es el centro de la circunferencia, se traza $\overline{CF}$ perpendicular a $\overline{BO}$ : $m\sphericalangle AEF = 2(m\sphericalangle BAC)$. Halle la medida del ángulo BAC.

A) 18°  B) 36°  C) 37°

D) 45°  E) 60°

**PROBLEMA Nº 119**

En el gráfico OT=5u, calcule AB en "u" (O es centro).




A) $2\sqrt{2}$  B) $4\sqrt{3}$

C) $5\sqrt{3}$  D) $6\sqrt{2}$

E) $7\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 120**

En una circunferencia de centro O, se traza el diámetro AB y en su prolongación se ubica el punto F, tal que AO=OB=BF. Desde F, talque AO=OB=BF. Desde F se traza la tangente a la circunferencia, siendo J el punto de tangencia. Halle la medida del ángulo OJA.

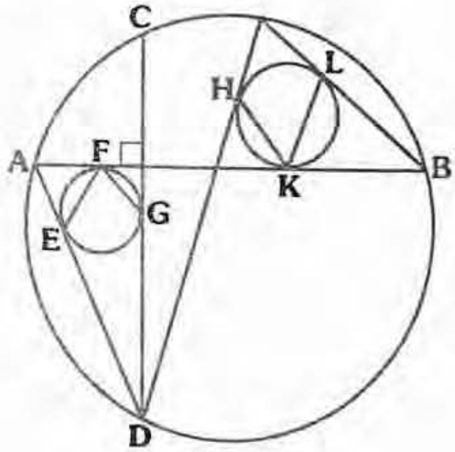
A) 15°  B) 30°  C) 45°

D) 60°  E) 20°



**PROBLEMA Nº 121**

En el gráfico, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $m\sphericalangle EFG = 79°$. Halle $m\sphericalangle HKL$. (E, F, G, H, K y L son puntos de tangencia).

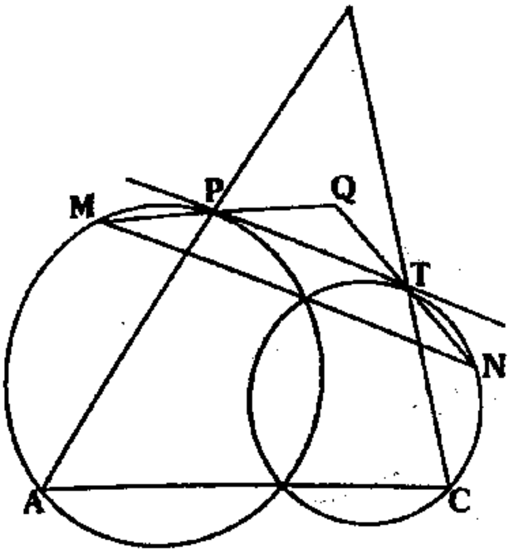



A) 50°  B) 56°  C) 58°

D) 64°  E) 72°

**PROBLEMA Nº 122**

$\overleftrightarrow{PT}$ es la tangente común a las circunferencias. $m\sphericalangle ABC = 38°$, halle $m\sphericalangle MQN$.

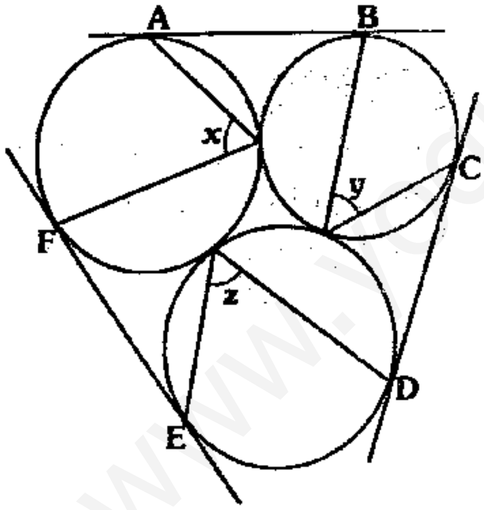



A) 128°　　B) 138°　　C) 142°

D) 148°　　E) 152°

**PROBLEMA Nº 123**

En la figura, A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia. Halle $x+y+z$.




A) 90°　　B) 120°　　C) 180°

D) 240°　　E) 280°

**PROBLEMA Nº 124**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sean las cuerdas AB y BC congruentes se ubican los puntos P y Q de manera que AP=CQ, entonces $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{CA}$.

II. Una circunferencia está inscrita en un triángulo ABC, tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P, Q y R respectivamente; entonces las cevianas $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ concurren.

III. Sean las cuerdas $\overline{AB}$ y CD no paralelas de una circunferencia. Entonces, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pasan por el centro de la circunferencia.

IV. En una circunferencia, todo diámetro que biseca a una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.

A) FVFV　　B) VFVF　　C) VVFF

D) VVVF　　E) FVVF

**PROBLEMA Nº 125**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En una circunferencia, si el diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces divide a la cuerda y al arco que subtiende en partes congruentes respectivamente.

II. En una circunferencia, si dos cuerdas son paralelas, entonces los arcos comprendidos entre las cuerdas, son congruentes.

III. La circunferencia es un conjunto convexo.

A) VFV　　B) VVF　　C) VVV

D) FVF　　E) FFF

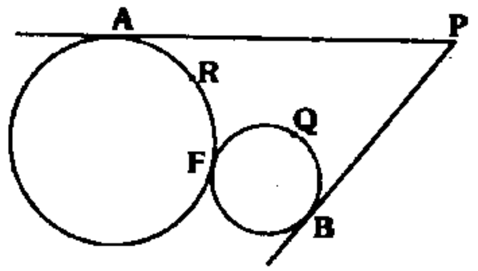
**PROBLEMA Nº 126**

Dos circunferencias congruentes de centros $O_1$ y $O_2$ son tangentes exteriores, halle la medida del ángulo que forman las tangentes trazadas desde $O_1$ y $O_2$ a las circunferencias.

A) 90°  B) 98°  C) 105°
D) 106°  E) 120°

**PROBLEMA Nº 127**

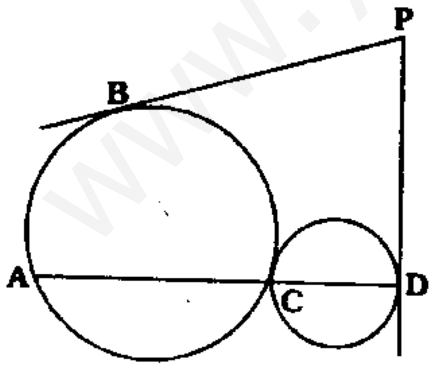
En la figura, A, F y B son puntos de tangencia, $m\widehat{ARF}=\alpha$ y $m\widehat{FQB}=\beta$.
Halle $m\measuredangle APB$.




A) $\frac{\alpha+\beta}{2}$  B) $\alpha+\beta$
C) $\beta-\alpha$  D) $360°-(\alpha+\beta)$
E) $360°-2\alpha-2\beta$

**PROBLEMA Nº 128**

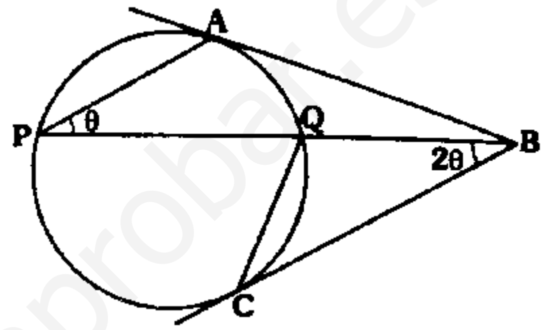
En la figura mostrada B, C y D son puntos de tangencia. Si $m\measuredangle BPD=62°$.
Halle $m\widehat{AB}$




A) 30°  B) 31°
C) 45°  D) 62°
E) 75°

**PROBLEMA Nº 129**

En la figura, A y C son puntos de tangencia. Si AP=QC, calcule la medida del ángulo ABC.




A) 30°  B) 45°  C) 53°
D) 60°  E) 75°

**PROBLEMA Nº 130**

Una circunferencia de centro O inscrita en un triángulo ABC determina los puntos de tangencia P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, la prolongación de $\overline{AO}$ intercepta a $\overline{QR}$ en T.
Si $m\measuredangle ATR=\beta$, entonces la $m\measuredangle ABC$ es:

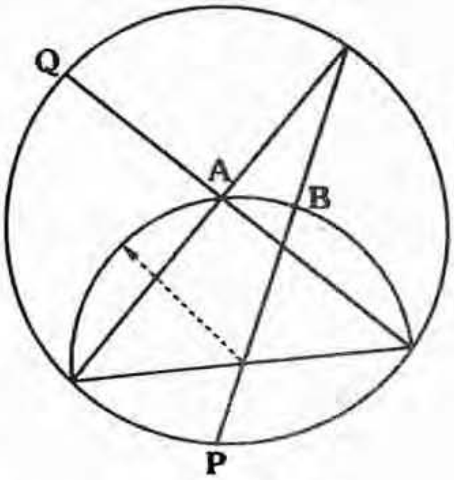
A) $45°+\beta$  B) $60°+\beta$
C) $\beta$  D) $2\beta$
E) $90°-\beta$

# Problemas Propuestos

## Ciclo Semestral

**PROBLEMA Nº 131**

Si $m\widehat{AB}=20°$. Calcule $m\widehat{PQ}$.



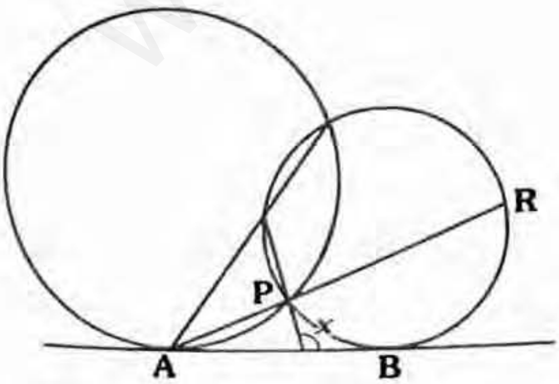

A) 100°  B) 110°

C) 120°  D) 130°

E) 140°

**PROBLEMA Nº 132**

Si $m\widehat{PBR}=160°$ ; A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

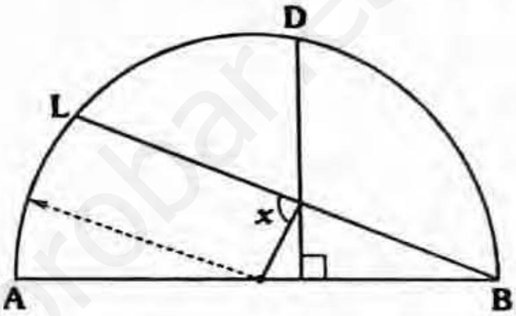



A) 80°  B) 100°  C) 40°

D) 140°  E) 70°

**PROBLEMA Nº 133**

Si $m\widehat{DB}=2\left(m\widehat{AL}\right)=80°$. Calcule "x".

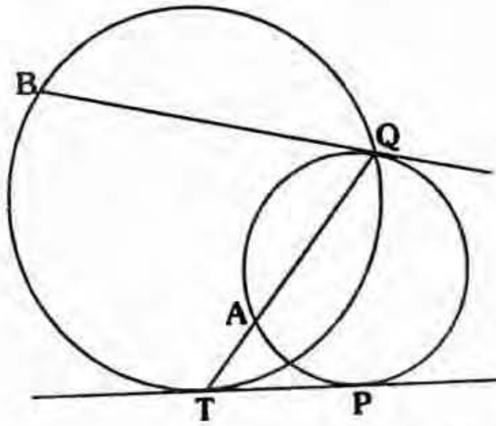



A) 50°  B) 80°  C) 40°

D) 70°  E) 25°

**PROBLEMA Nº 134**

Si P, Q y T son puntos de tangencia y $m\widehat{AP}=40°$. Calcule $m\widehat{QB}$.

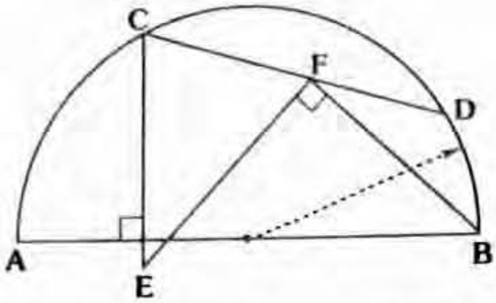



A) 20°  B) 40°  C) 60°

D) 70°  E) 80°

**PROBLEMA Nº 135**

Si CF=FD y EF=FB. Calcule $m\widehat{CD}$.

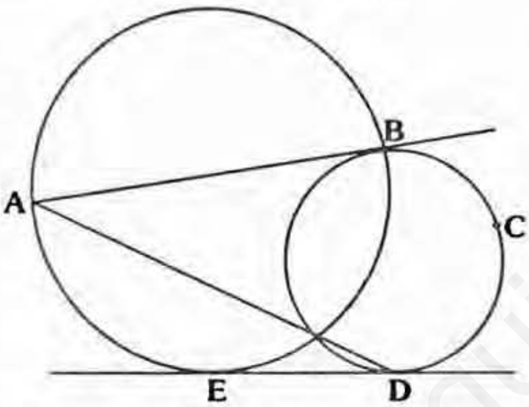



A) 120° B) 150° C) 90°

D) 72° E) 135°

**PROBLEMA Nº 136**

Si B, D y E son puntos de tangencia y $m\widehat{BCD} = 200°$. Calcule $m\widehat{AE}$.




A) 60° B) 50° C) 40°

D) 100° E) 80°

**PROBLEMA Nº 137**

Del gráfico. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{MO}$.

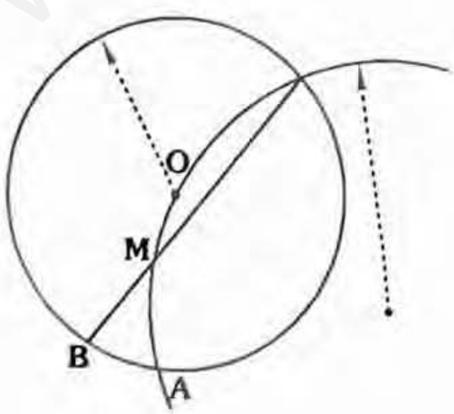
A) 135°

B) 60°

C) 90°

D) 150°

E) 72°




**PROBLEMA Nº 138**

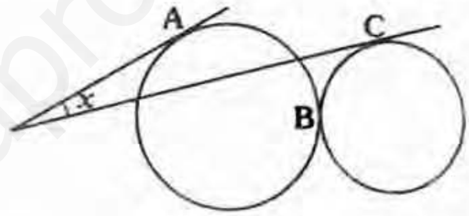
Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las rectas tangentes perpendiculares $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B son puntos de tangencia) y la secante PCD; $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$. Calcule $m\widehat{BD}$.

A) 60° B) 53° C) 30°

D) 45° E) 36°

**PROBLEMA Nº 139**

Si A, B y C son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 200°$. Calcule "$x$".

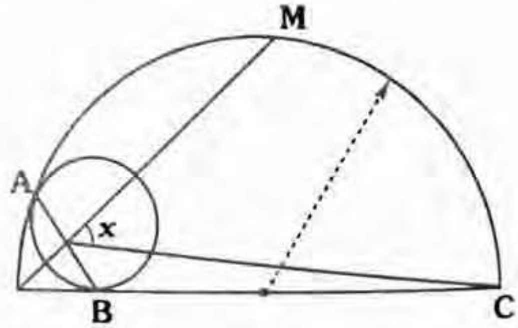



A) 100° B) 90° C) 25°

D) 20° E) 35°

**PROBLEMA Nº 140**

Si A y B son puntos de tangencia y $m\widehat{AM} = m\widehat{MC}$. Calcule "$x$".

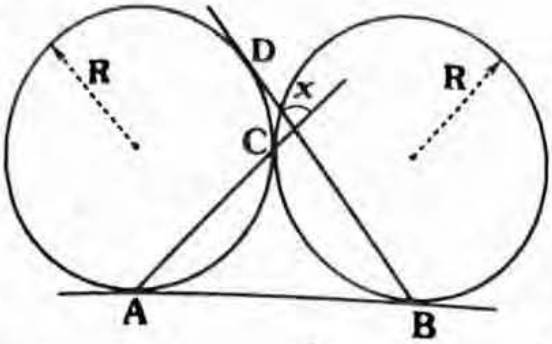



A) 45° B) 60° C) 30°

D) 53° E) 75°

**PROBLEMA Nº 141**

Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".




A) 60°

B) 75°

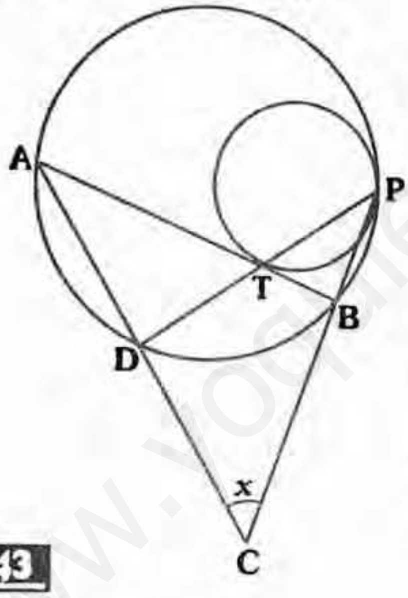
C) 90°

D) 98°

E) 82°

**PROBLEMA Nº 142**

Si P y T son puntos de tangencia; $m\widehat{PB}=40°$ y AD=DC. Calcule "x".




A) 40°

B) 70°

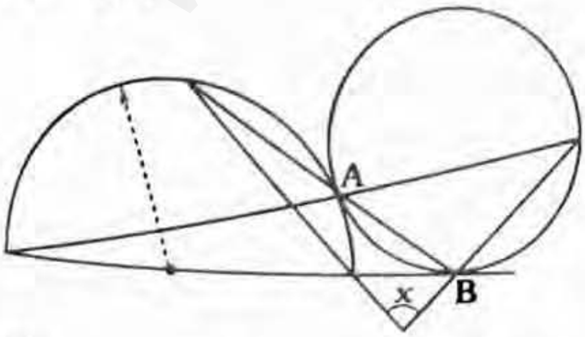
C) 55°

D) 80°

E) 35°

**PROBLEMA Nº 143**

Si A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

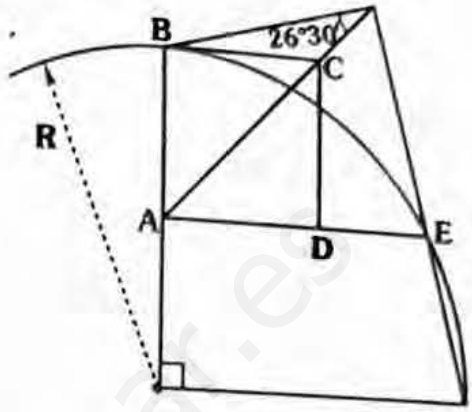



A) 60° B) 120° C) 45°

D) 90° E) 135°

**PROBLEMA Nº 144**

ABCD es un cuadrado y R=5. Calcule DE.




A) 3

B) 2

C) 1

D) 2,5

E) 1,5

**PROBLEMA Nº 145**

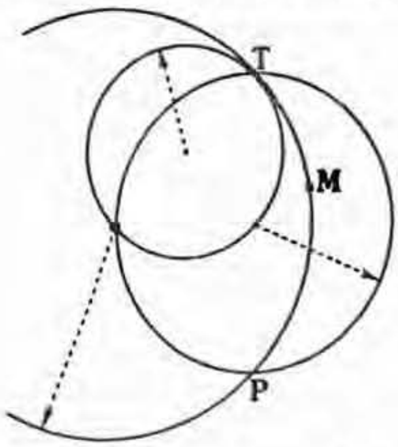
Se tienen las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ de centros $O_1$ y $O_2$, respectivamente secantes en P y Q una recta pasa por P y corta a las circunferencias en A y B. (A en $\mathscr{C}_1$ y B en $\mathscr{C}_2$), si $5(AB)=8(O_1O_2)$. Calcule $m\widehat{APQ}$.

A) 120° B) 135° C) 118°

D) 106° E) 121°

**PROBLEMA Nº 146**

T es punto de tangencia, calcule $m\widehat{TMP}$.

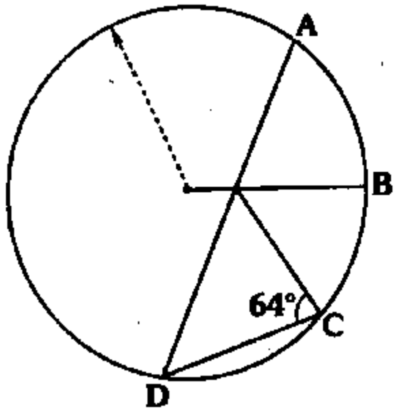



A) 105° B) 90° C) 120°

D) 180° E) 150°

**PROBLEMA Nº 147**

Si $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}$. Calcule $m\widehat{BCD}$.




A) 96°

B) 104°

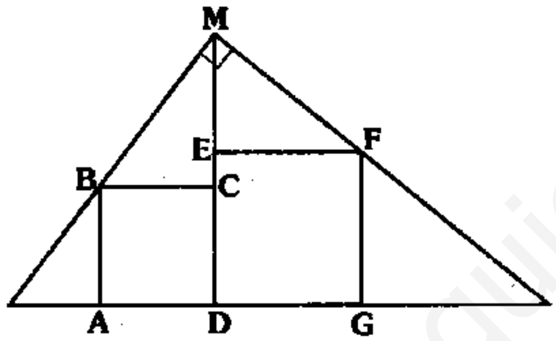
C) 124°

D) 116°

E) 126°

**PROBLEMA Nº 148**

Si ABCD y DEFG son cuadrados. Calcule BM/MF.

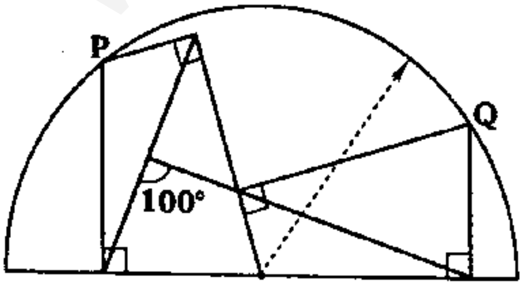



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1

D) 1/2 E) 2

**PROBLEMA Nº 149**

Calcule $m\widehat{PQ}$

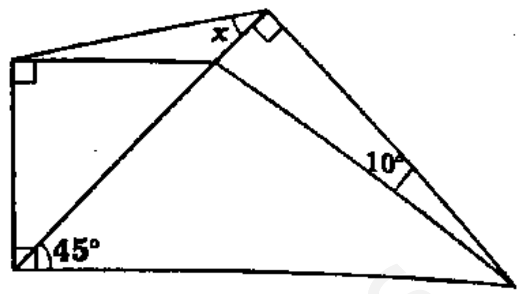



A) 125° B) 80° C) 140°

D) 100° E) 50°

**PROBLEMA Nº 150**

Calcule "$x$".

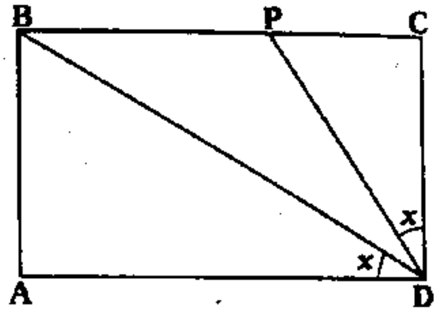



A) 25° B) 30° C) 35°

D) 40° E) 38°

**PROBLEMA Nº 151**

Si ABCD es un rectángulo; AB=BP. Calcule "$x$".




A) 53°/2

B) 37°/2

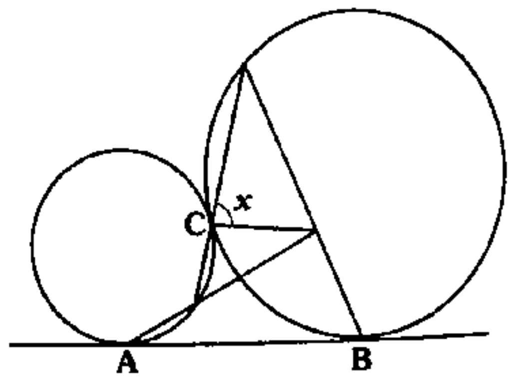
C) 127°/4

D) 143°/2

E) 127°/2

**PROBLEMA Nº 152**

Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "$x$".

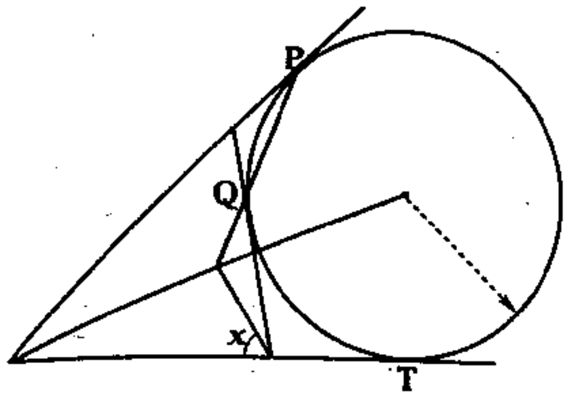



A) 72° B) 60° C) 54°

D) 90° E) 120°

**PROBLEMA Nº 153**

Si P, Q y T son puntos de tangencia y $m\widehat{PQT}=140°$. Calcule "$x$".

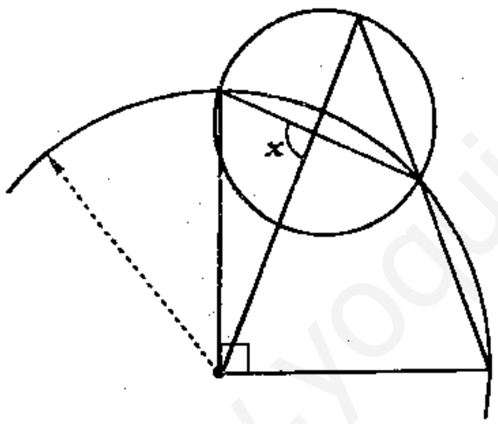



A) 70° B) 40° C) 50°
D) 80° E) 55°

**PROBLEMA Nº 154**

Calcule "x", en:

A) 60°
B) 75°
C) 67,5°
D) 135°
E) 90°




**PROBLEMA Nº 155**

En la semicircunferencia $S_1$, de diámetro $\overline{AB}$ se ubica P, se traza una circunferencia $\mathscr{C}_1$ tangente a $\overleftrightarrow{AB}$ en A y a la prolongación de $\overline{BP}$ en C.

Si $\overline{AP}\cap\mathscr{C}_1=\{T\}$ y $\overleftrightarrow{CT}\cap\overline{AB}=\{H\}$.

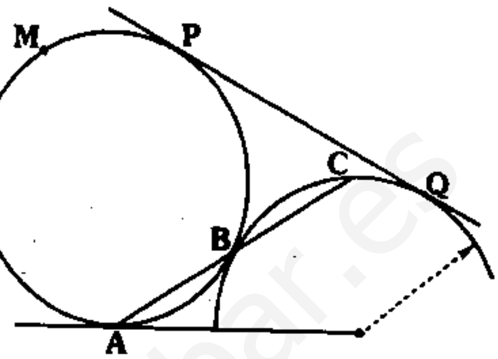
Si $m\widehat{CT}=x$ y $m\sphericalangle AHC=z$. Calcule $x/z$.

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) 2
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**PROBLEMA Nº 156**

A, B, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{AMP}=220°$.

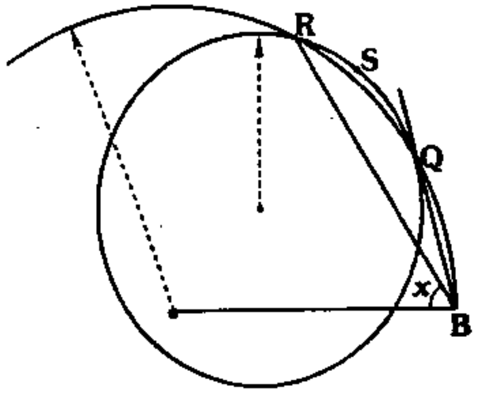
Calcule $m\widehat{CQ}$.




A) 50° B) 60° C) 70°
D) 20° E) 40°

**PROBLEMA Nº 157**

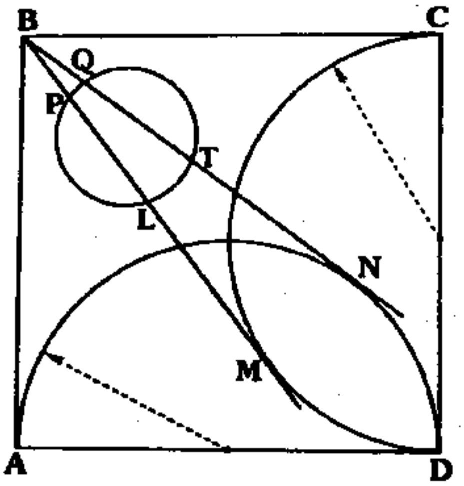
En el gráfico Q es pun punto de tangencia $m\widehat{RSQ}=50°$, calcule "x".




A) 50° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 70°

**PROBLEMA Nº 158**

ABCD es un cuadrado, M y N son puntos de tangencia y $m\widehat{LT}$ toma su menor valor entero par. Calcule $m\widehat{PQ}$.




A) 1°  B) 2°  C) 3°

D) 6°  E) 7°

**PROBLEMA Nº 159**

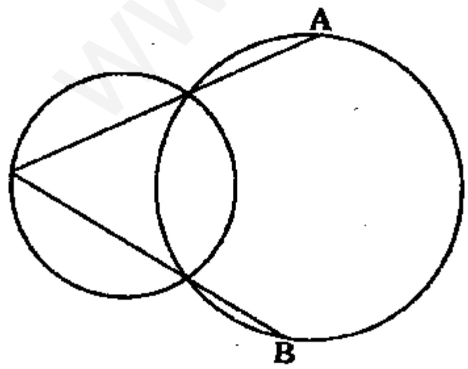
Se tienen dos circunferencias ortogonales y congruentes de radio R se intersecan en A y B. Si la línea de centros interseca a dichas circunferencias en M y N, calcule el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilineo MAN.

A) R/3  B) R/2  C) R/4

D) R/5  E) R/6

**PROBLEMA Nº 160**

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales, calcule $m\widehat{AB}$.




A) 90°  B) 135°  C) 120°

D) 180°  E) 225°

**PROBLEMA Nº 161**

En el gráfico, M, N y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{LC} = 50°$. Calcule $\widehat{ALC}$.

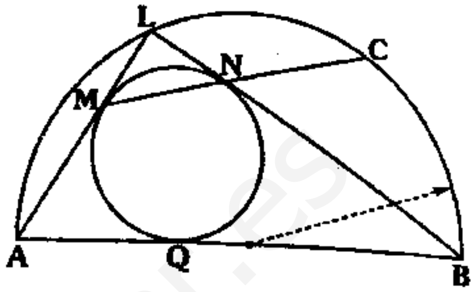
A) 140°

B) 130°

C) 120°

D) 110°

E) 100°




**PROBLEMA Nº 162**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, con $AB = BC$, $m\measuredangle ACD = 2\alpha$, $m\measuredangle ACB = 60° - 4\alpha$ y $m\measuredangle DAC = 30° + 2\alpha$.

Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$.

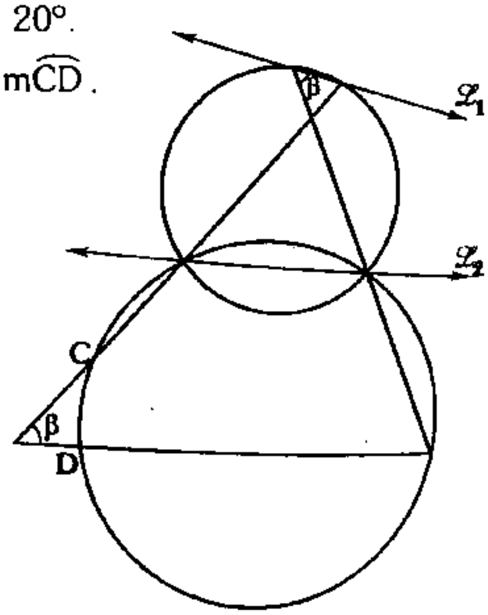
A) 30°  B) $80° + \alpha$  C) $60 - \alpha$

D) 45°  E) 60°

**PROBLEMA Nº 163**

La medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ mide 20°.

Calcule $m\widehat{CD}$.




A) 10°

B) 30°

C) 20°

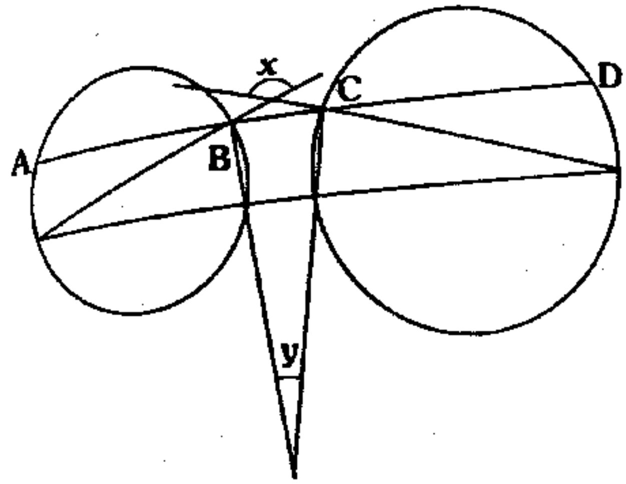
D) 40°

E) 50°

**PROBLEMA Nº 164**

En el gráfico, $m\widehat{AB}+m\widehat{CD}=80°$.

Calcule $x-y$




A) 40°

B) 50°

C) 60°

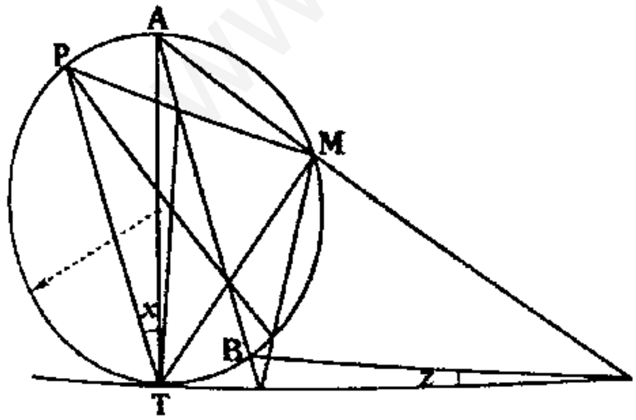
D) 80°

E) 70°

**PROBLEMA Nº 165**

En el gráfico, T es punto de tangencia, $m\widehat{AP}=6z$ y $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$.

Calcule "$x$".




A) $3z$

B) $4z$

C) $5z$

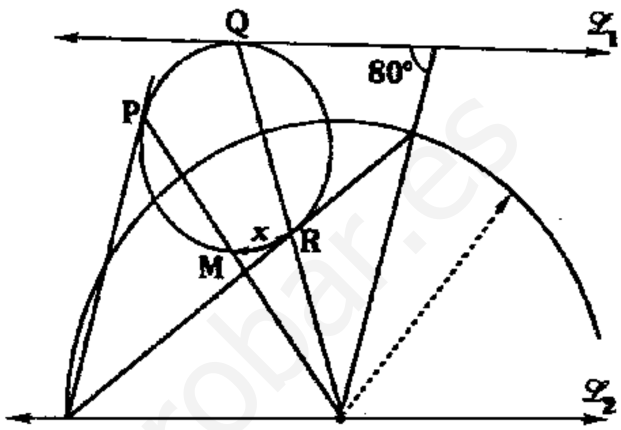
D) $6z$

E) $2z$

**PROBLEMA Nº 166**

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, P, Q y R son puntos de tangencia.

Calcule "$x$".




A) 20°

B) 70°

C) 40°

D) 50°

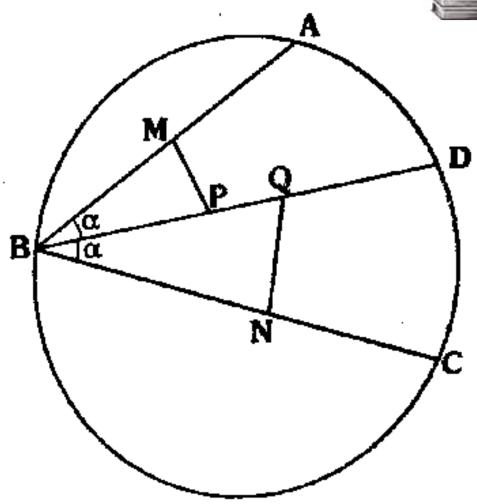
E) 35°

**PROBLEMA Nº 167**

En el gráfico, $\overleftrightarrow{PM}$ y $\overleftrightarrow{QN}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule $\dfrac{BP}{QD}$.






A) 3/5

B) 4/5

C) 1/2

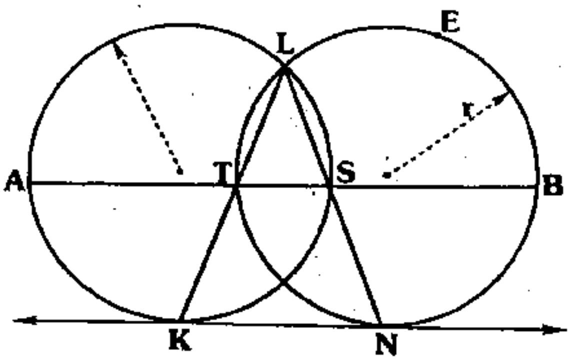
D) 2

E) 1

**PROBLEMA Nº 168**

En el gráfico, las circunferenicas son ortogonales, $m\widehat{AK}=m\widehat{EB}$ y $r=16$.

Calcule EN.




A) 16  B) $16\sqrt{2}$  C) $16\sqrt{3}$

D) $16\sqrt{5}$  E) 32

**PROBLEMA Nº 169**

Se tiene el cuadrado ABCD de centro G. P y F están en las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente, tal que FG=GP y $m\sphericalangle DCP=26°30'$. Calcule $m\sphericalangle FGM$.

$\left(\overline{PC}\cap\overline{BF}\right)=\{M\}$

A) 18°30'  B) 15°  C) 16°

D) 22°30'  E) 8°

**PROBLEMA Nº 170**

En la circunferencia de centro O se traza la cuerda AB en la cual se ubica M tal que $m\sphericalangle OMA=45°$; la prolongación de $\overline{MO}$ corta a la circunferencia en P.

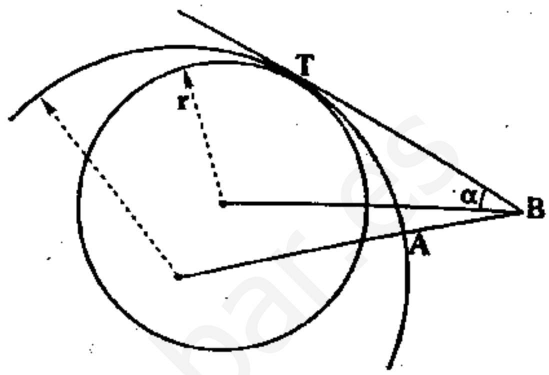
Si $AB=(MP)\sqrt{2}$, calcule $m\widehat{AP}$.

A) 45°  B) 53°  C) 60°

D) 75°  E) 90°

**PROBLEMA Nº 171**

T es punto de tangencia y $m\widehat{AT}=2\alpha$. Calcule AB.

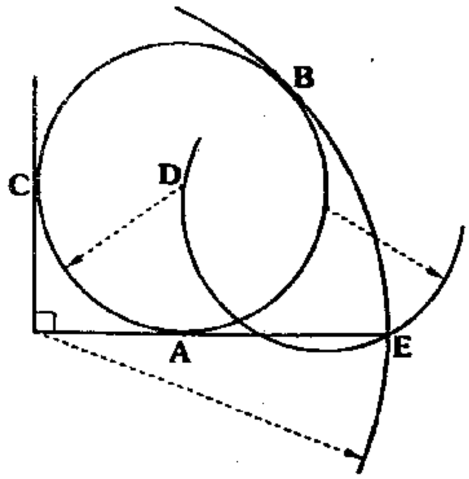



A) $\frac{r}{2}$  B) r  C) 2r

D) $\frac{r}{3}$  E) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA Nº 172**

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{ED}$.




A) 90°  B) 60°

C) 120°  D) 135°

E) 106°

**PROBLEMA Nº 173**

Se tiene el cuadrante AOB (AO=OB), se ubica E y P en el arco AB tal que E está en $\overset{\frown}{AP}$. Si $\overline{EP} // \overline{AB}$ y $m\measuredangle OPA = 65°$, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{EB}$.

A) 110° B) 150° C) 143°
D) 140° E) 120°

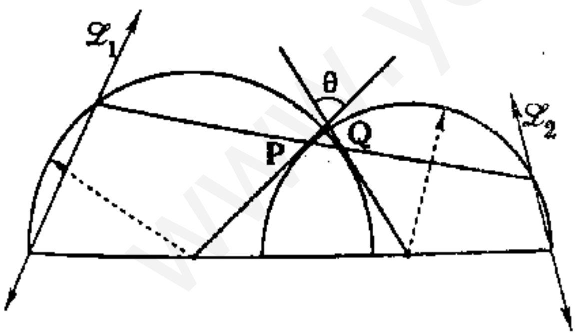
**PROBLEMA Nº 174**

Se tiene el rectángulo ABCD, con diámetro AD se traza la semicircunferencia que corta a $\overline{BC}$ en P y Q $\left(P \in \overline{BQ}\right)$. Si $m\overset{\frown}{PQ} = 120°$, calcule $m\measuredangle PDB$.

A) 1° B) 2° C) 3°
D) 7,5° E) 7°

**PROBLEMA Nº 175**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Halle la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.




A) θ B) 2θ C) 45°−θ
D) $\frac{\theta}{2}$ E) 45°+θ

**PROBLEMA Nº 176**

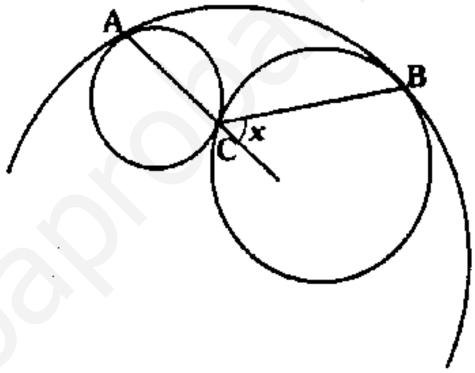
Se tiene el cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia, en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica P y Q y en $\overline{AB}$ están R y S tal que PQRS es un cuadrado.

Calcule $m\overset{\frown}{PQ}$.

A) 15° B) 30° C) 32°
D) 16° E) 28°

**PROBLEMA Nº 177**

A, B y C son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{AB} = 40°$. Calcule "x".




A) 40° B) 50° C) 60°
D) 65° E) 70°

**PROBLEMA Nº 178**

En el cuadrilátero convexo ABCD, con $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Si $m\measuredangle BAC = 7°$; $m\measuredangle CBD = 37°$ y $m\measuredangle DAC = 23°$. Calcula $m\measuredangle BDC$.

A) 21° B) 42° C) 63°
D) 69° E) 76°

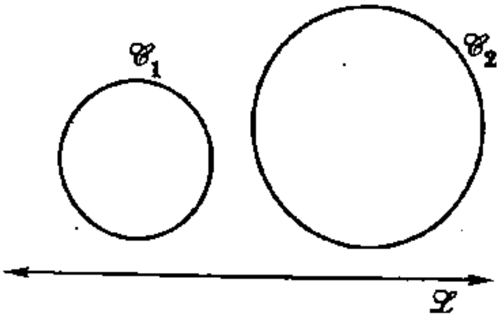
**PROBLEMA Nº 179**

Se tienen tres circunferencias coplanares secantes dos a dos. Indique el número de circunferencias tangentes comunes a las tres circunferencias se pueden trazar.

A) 1 B) 8 C) 2
D) 3 E) 5

**PROBLEMA Nº 180**

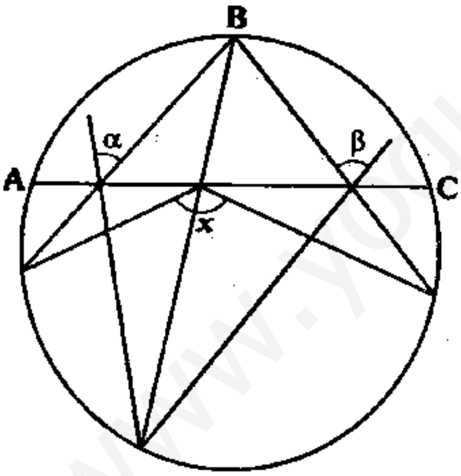
En el gráfico, ¿cuántas circunferencias se pueden trazar, tangente a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{L}$ ?




A) 5 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

**PROBLEMA Nº 181**

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule "x" en función de "$\alpha$" y "$\beta$".

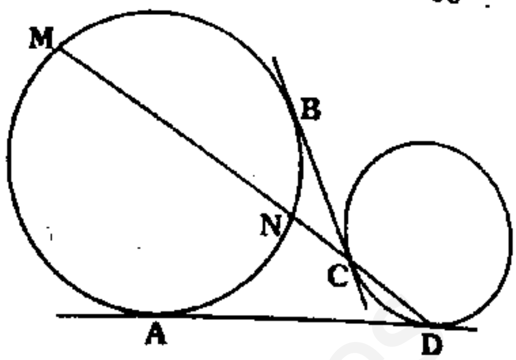



A) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ B) $\alpha+\beta$
C) $2(\alpha+\beta)$ D) $90°+(\alpha+\beta)$
E) $180° - \dfrac{(\alpha+\beta)}{2}$

**PROBLEMA Nº 182**

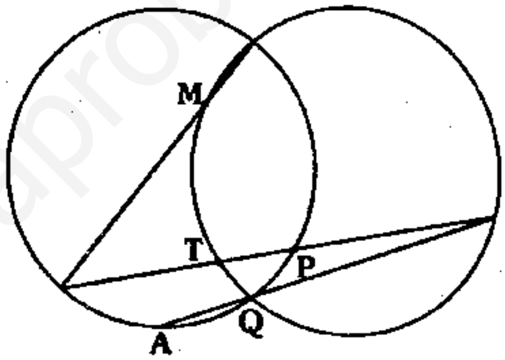
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Demuestre que $m\widehat{MB} + m\widehat{AN} = 180°$.




**PROBLEMA Nº 183**

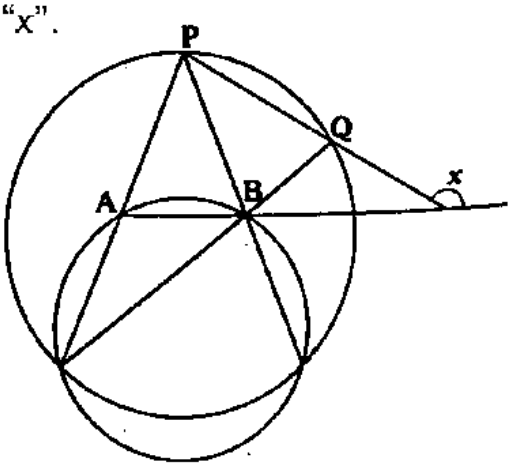
En el gráfico, $m\widehat{TM} = \alpha$, calcule $m\widehat{AQP}$.




A) $\alpha$ B) $2\alpha$ C) $\dfrac{\alpha}{2}$
D) $90°-\alpha$ E) $180°-\alpha$

**PROBLEMA Nº 184**

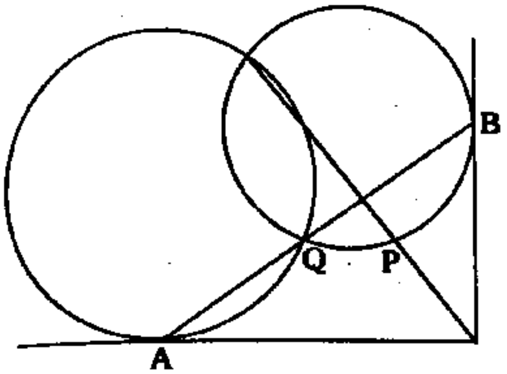
En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{PQ} = 80°$.
Calcule "x".




A) 120°
B) 140°
C) 160°
D) 100°
E) 135°

**PROBLEMA Nº 185**

A y B son puntos de tangencia y $m\widehat{AQ}=50°$. Calcule $m\widehat{PB}$.




A) 40° B) 20° C) 25°
D) 50° E) 65°

**PROBLEMA Nº 186**

En la semicircunferencia de diámetro AB, se ubican los puntos P y Q, talque $m\widehat{AP}=90°$ y $\overline{AQ}$ interseca a $\overline{PB}$ en M; luego en $\overline{AB}$ se ubica L, tal que $m\measuredangle AQL=45°$ y AM=2(LB).

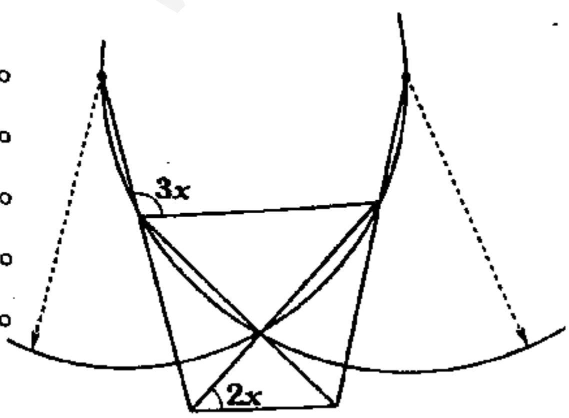
Calcule $m\measuredangle PLQ$.

A) 45° B) 30° C) 60°
D) 53° E) 37°

**PROBLEMA Nº 187**

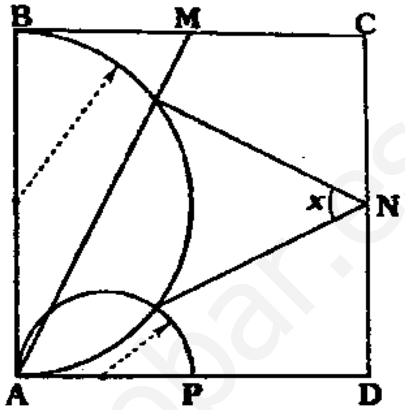
Del gráfico, calcule "x".

A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 18°
E) 22°




**PROBLEMA Nº 188**

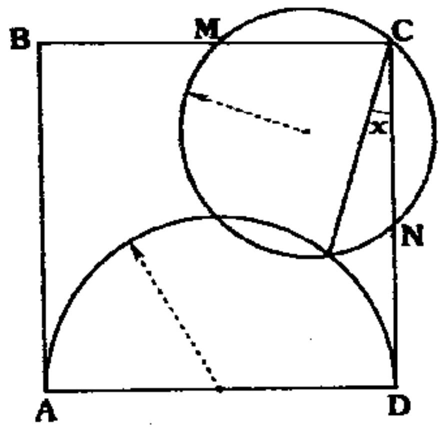
M, N y P son puntos medios y ABCD es un cuadrado. Calcule "x".




A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 189**

ABCD es un cuadrado y BM=MC=CN. Calcule "x".




A) 15° B) 18,5° C) 22,5°
D) 26,5° E) 30°

**PROBLEMA Nº 190**

A y B son puntos de tangencia, si PQ=QB. Calcule "x".

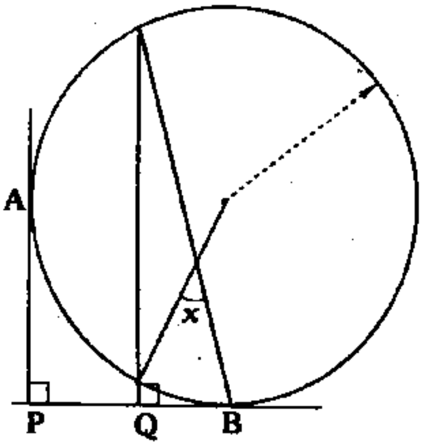
A) 30°

B) 45°

C) 60°

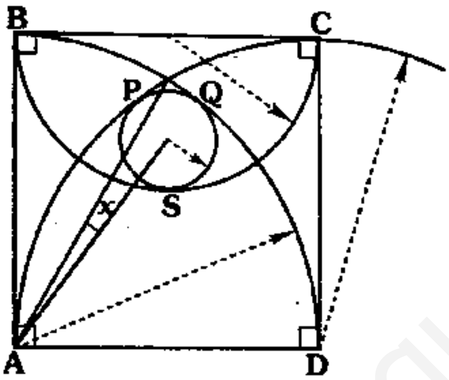
D) 37°

E) 53°




**Problema Nº 191**

ABCD es cuadrado, calcule x. Si BQ y S son puntos de tangencia.




A) 15° B) 8° C) 7,5°

D) 4° E) 10°

**Problema Nº 192**

Si B es punto de tangencia y $\overline{AB}//\overline{CD}$. Calcule "x".

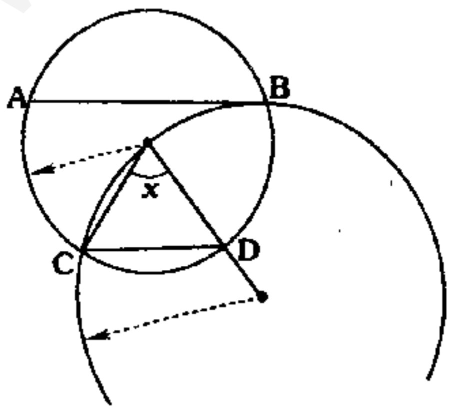
A) 60°

B) 45°

C) 90°

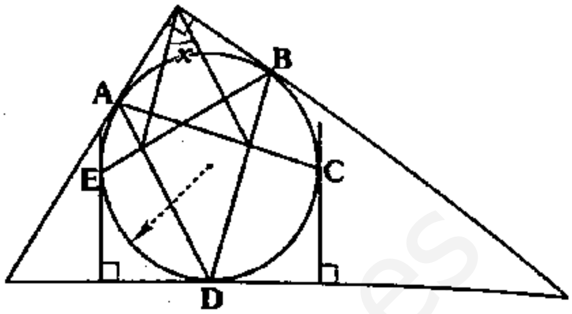
D) 72°

E) 36°




**Problema Nº 193**

Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

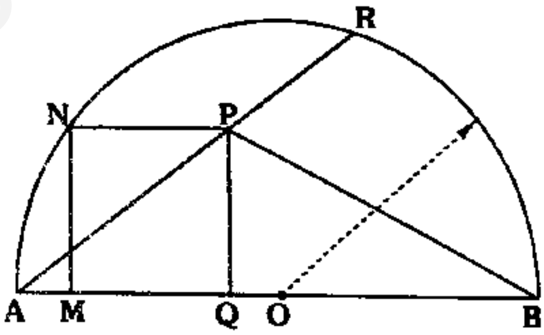



A) 30° B) 60° C) 45°

D) 37° E) 53°

**Problema Nº 194**

Calcule $m\widehat{NR}$. Si MNPQ es un cuadrado y $m\measuredangle PBQ = \dfrac{53°}{2}$.




A) 60° B) 63° C) 69°

D) 37° E) 53°

**Problema Nº 195**

Se tiene dos circunferencias tangentes exteriores donde "P" es el punto de tangencia común. Luego se trazan las tangentes exteriores comunes determinando los puntos de tangencia A y B en una de ellas y en la otra los puntos C y D.

Calcule $m\measuredangle APB + m\measuredangle DPC$

A) 160° B) 170° C) 180°

D) 150° E) 140°

**PROBLEMA Nº 196**

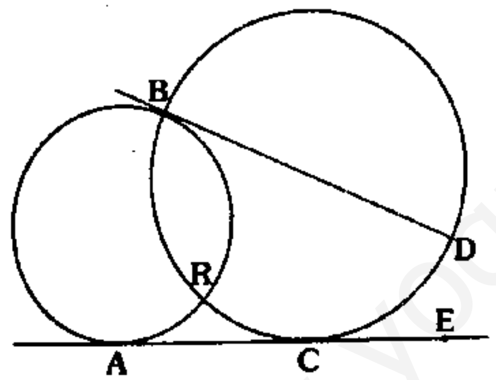
En un rectángulo ABCD "O" punto medio de $\overline{AC}$, en $\overline{BC}$ se ubica el punto P, luego se traza $\overline{PH} \perp \overline{BO}$ $(H \in \overline{BO})$.

Si $\overline{AC} \cap \overline{PD} = \{T\}$, $m\measuredangle PTC = 90°$ y HP=3PT. Calcule $m\measuredangle HPT$.

A) 53° B) 37° C) 45°
D) 30° E) 60°

**PROBLEMA Nº 197**

Según el gráfico $m\dfrac{\overset{\frown}{ARB}}{5} = m\dfrac{\overset{\frown}{BRC}}{4} = m\dfrac{\overset{\frown}{CED}}{2}$.
Calcule $m\overset{\frown}{CED}$ siendo A, B y C puntos de tangencia.




A) 53° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 70°

**PROBLEMA Nº 198**

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Luego se traza $\overline{BH} \perp \overline{AP}$ $(H \in \overline{AP})$ que intersecta a la circunferencia en el punto T, calcule $m\overset{\frown}{AT}$ si AH=HP.

A) 53° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 75°

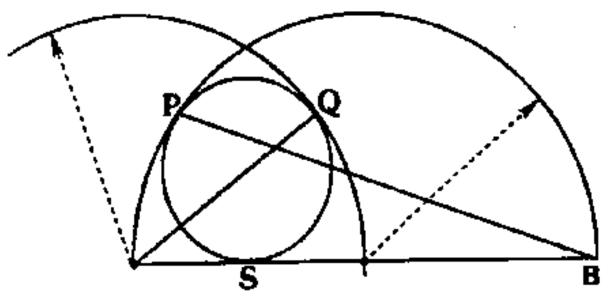
**PROBLEMA Nº 199**

En una circunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$ se ubica un punto C $(C \in \overset{\frown}{AB})$ y se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ $(H \in \overline{AB})$ tal que: $m\overset{\frown}{BC} = 80°$. En el arco AC se ubica el punto P, calcule el menor valor entero de la $m\measuredangle HCP$.

A) 51° B) 61° C) 49°
D) 79° E) 81°

**PROBLEMA Nº 200**

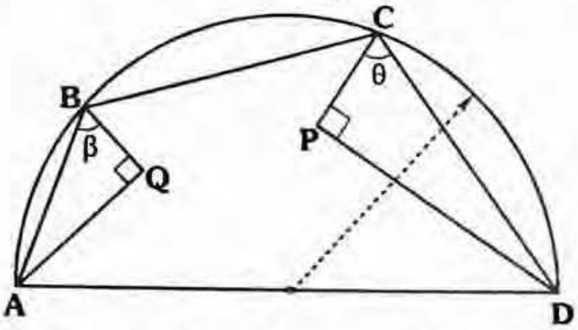
En el gráfico, P,Q y S son puntos de tangencia.




A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) 67,5°

**PROBLEMA N° 201**

En el gráfico, $m\widehat{AC}=2\beta$, $m\widehat{BD}=2\theta$ y $AQ+PD=BC$. Calcule $m\widehat{BC}$.

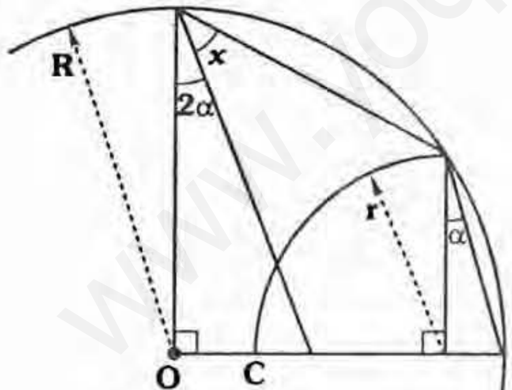



A) 90° B) 120° C) 127°

D) 106° E) 135°

**PROBLEMA N° 202**

Si $4R=3(OC)+7r$, calcule "$x$".




A) 30° B) 37° C) 23°

D) 45° E) 53°

**PROBLEMA N° 203**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

**I.** Si dos circunferencias son secantes y la suma de las medidas de los arcos a uno y otro lado de cuerda común es 180°, entonces dichas circunferencias son ortogonales.

**II.** Las diagonales en un cuadrilátero bicentrico son perpendiculares.

**III.** En un polígono inscrito de "n" lados, ($n$ es par, $n\geq 4$) la suma de medidas de los ángulos internos alternadamente es $180°(n-3)$.

**IV.** Todo trapezoide simétrico convexo es un cuadrilátero inscriptible.

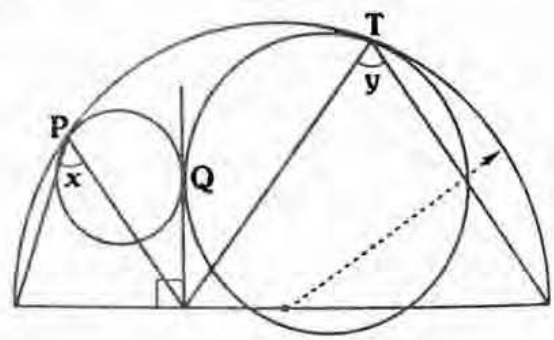
A) VFVF B) FFFF

C) VVVF D) FVFF

E) FVVF

**PROBLEMA N° 204**

En el gráfico, $m\widehat{PT}=\alpha$, calcule $x+y$, si P, Q y T son puntos de tangencia.




A) $180°-\alpha$ B) $90°+\dfrac{\alpha}{2}$

C) $45°+2\alpha$ D) $180°-2\alpha$

E) $2\alpha$

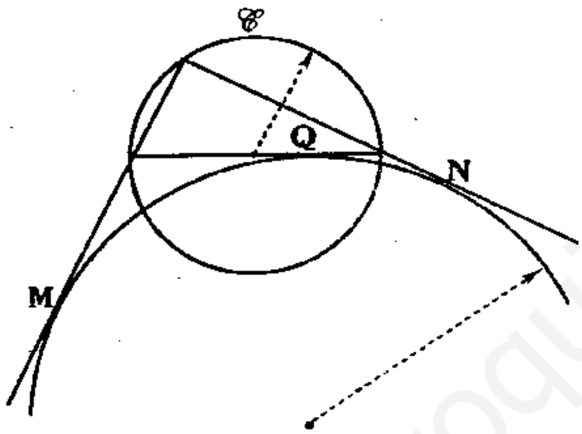
**PROBLEMA Nº 205**

Se tiene el cuadrilátero inscriptible ABCD las diagonales se cortan en Q. Si $m\measuredangle CAD = 15°$, $BC = CD$ y $AD = AB + BQ$. Calcule $m\measuredangle ACD$.

A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 112°

**PROBLEMA Nº 206**

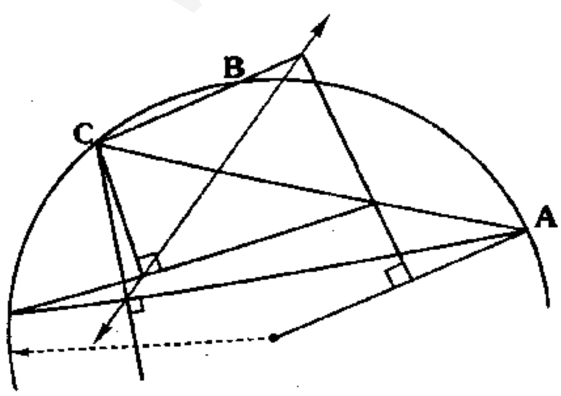
En el gráfico, M, Q y N son puntos de tangencia. Calcule la medida dél ángulo entre $\mathscr{C}$ y $\overleftrightarrow{MN}$.




A) 60° B) 45° C) 30°
D) 90° E) 0°

**PROBLEMA Nº 207**

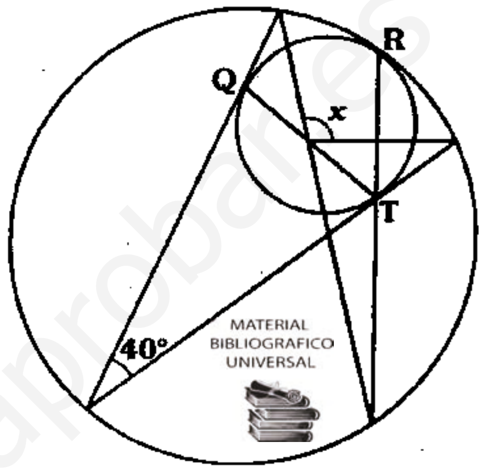
En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 80°$, calcule $m\overset{\frown}{BC}$.




A) 10° B) 20° C) 50°
D) 40° E) 30°

**PROBLEMA Nº 208**

En el gráfico T, Q y R son puntos de tangencia. Calcule "x".




A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 130°

**PROBLEMA Nº 209**

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la circunferencia inscrita, la cual es tangente a $\overline{AB}$ en P, a $\overline{BC}$ en Q y T en $\overline{AC}$, se ubica H en $\overset{\frown}{PQ}$ tal que $\overline{HT} \perp \overline{AC}$, las rectas TP y QH se cortan en S.
Si $m\measuredangle HTP = 20°$, calcule $m\measuredangle ABS$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 40°

**PROBLEMA Nº 210**

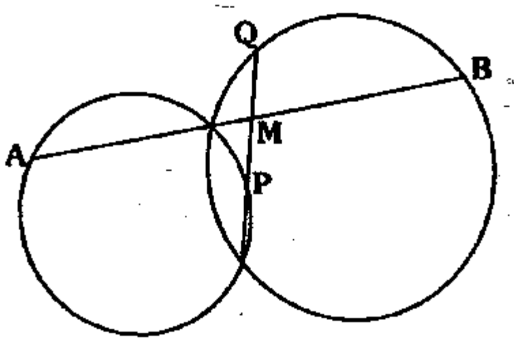
En el triángulo rectángulo donde un ángulo agudo mide 37°. Calcule la medida del menor arco determinado por la mediatriz de la hipotenusa en la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

A) 45°  B) 135°  C) 60°

D) 120°  E) 106°

**PROBLEMA Nº 211**

En el gráfico, AM=MB. Demuestre que PM=MQ.




**PROBLEMA Nº 212**

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior $\overline{BL}$, en cuya prolongación se ubica H, tal que: $m\measuredangle ABH=120°$, $m\measuredangle HBC=15°$, $m\measuredangle BHC=90°$ y $AB=2(BH)$. Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 5°  B) 10°  C) 15°

D) 20°  E) 25°

**PROBLEMA Nº 213**

Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos de centros $O_1$, $O_2$ y $O_3$, radios $r_1$, $r_2$ y $r_3$. O es centro de la circunferencia mayor y tangente a las tres circunferencias anteriores. Calcular el valor entero, el radio de la circunferencia de centro O (O es interior al triángulo $O_1O_2O_3$), si $r_1+r_2+r_3=6$.

A) 2  B) 3  C) 4

D) 5  E) 6

**PROBLEMA Nº 214**

En la semicircunferencia de diámetro ED, se ubican en forma consecutiva A, B, C y D talque A está más cerca a E. $\overline{AD}\cap\overline{EC}=\{P\}$, $\overline{AC}\cap\overline{EB}=\{S\}$ y $\overrightarrow{PS}\cap\overrightarrow{CB}=\{M\}$.

Si $m\widehat{BC}=m\widehat{CD}$ y $m\widehat{ABD}=8(m\measuredangle AMP)$.

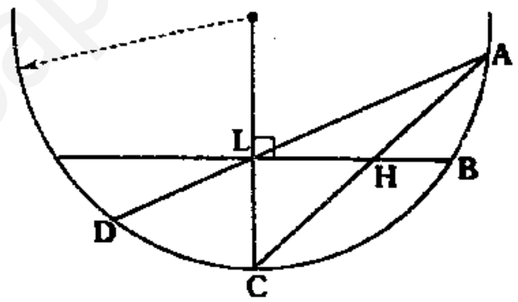
Calcule $m\measuredangle AMP$.

A) 5°  B) 6°  C) 8°

D) 10°  E) 18°

**PROBLEMA Nº 215**

En el gráfico, LD=10. Calcule el menor valor entero de HC.

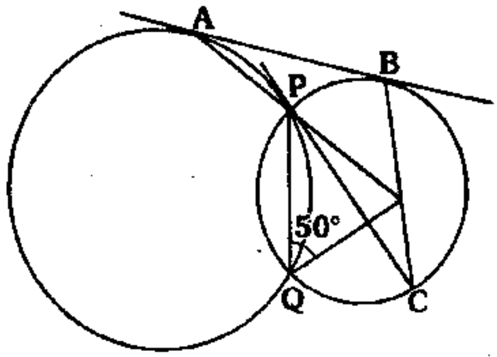



A) 9  B) 10  C) 11

D) 13  E) 15

**PROBLEMA Nº 216**

A, B y P son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PQC}$.

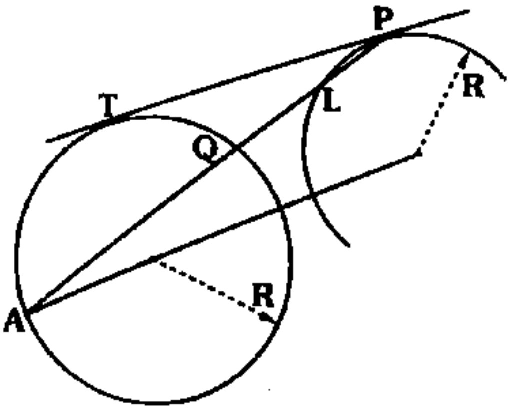



A) 100°  B) 180°  C) 160°

D) 140°  E) 190°

**PROBLEMA Nº 217**

T y P son puntos de tangencia. Si AQ=PQ, calcule $m\measuredangle ALT$.




A) 30°

B) 15°

C) 18°

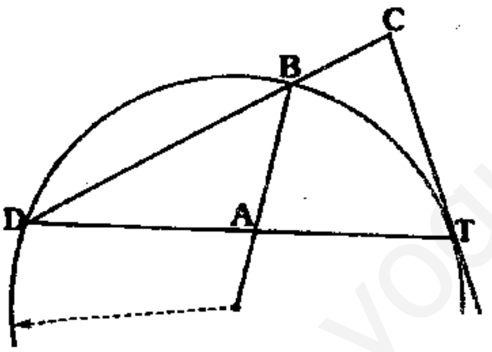
D) 18°30'

E) 27°30'

**PROBLEMA Nº 218**

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $m\widehat{BT}=60°$ y $6(BC)=5(AB)$.

Calcule $m\widehat{DB}$.

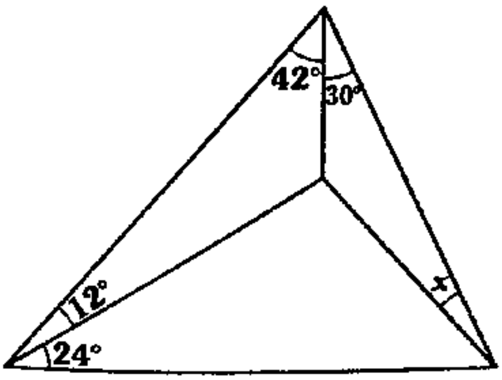



A) 74° B) 53° C) 76°

D) 84° E) 82°

**PROBLEMA Nº 219**

Calcule "x" en:




A) 12

B) 10°

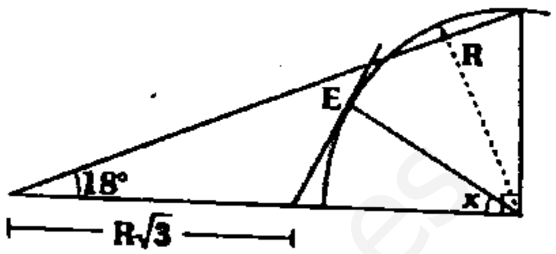
C) 15°

D) 18°

E) 30°

**PROBLEMA Nº 220**

En el gráfico, E es punto de tangencia. Calcule "x".

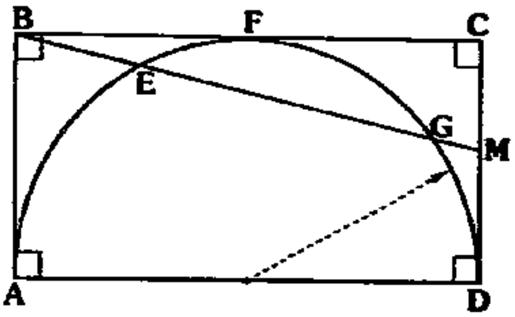



A) 36° B) 18° C) 36°

D) 42° E) 30°

**PROBLEMA Nº 221**

F es punto de tangencia y $m\widehat{EF}=m\widehat{GD}$. Calcule $m\widehat{EF}$.




A) 30° B) 45° C) 37°

D) 53° E) 15°

**PROBLEMA Nº 222**

En el problema anterior, calcule BE/GM.

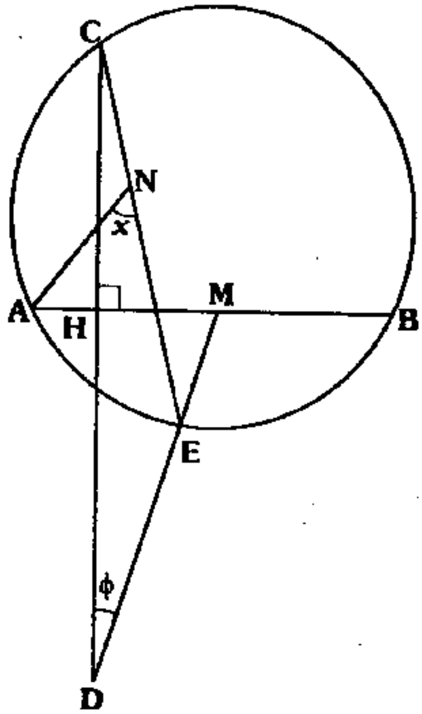
A) $\sqrt{3}-1$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3}+2$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

**PROBLEMA Nº 223**

Si AM=MB, CN=NE y CH=HD.

Calcule "x", en función de $\phi$



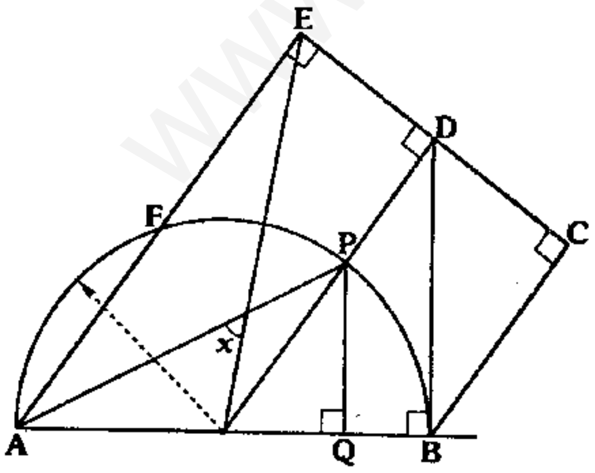

A) $\phi$ B) $2\phi$ C) $90° - \dfrac{\phi}{2}$

D) $90° - \phi$ E) $90° - 2\phi$

**PROBLEMA Nº 224**

En el gráfico, PQ=EF.

Calcule "x".



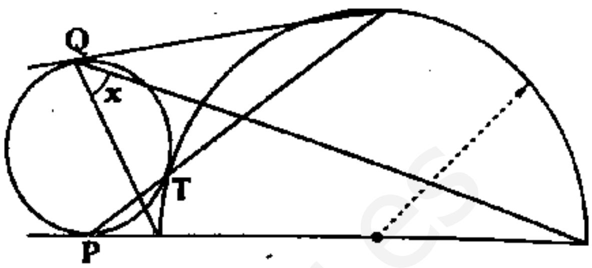

A) 37° B) 53° C) 45°

D) 49° E) 75°

**PROBLEMA Nº 225**

P, Q y T son puntos de tangencia.

Calcule "x".




A) 30° B) 60° C) 45°

D) 53° E) 37°

**PROBLEMA Nº 226**

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, M y N son puntos medios de los arcos AB y BC respectivamente.

Si $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ trisecan a $\overline{MN}$. Calcule m∢ABC.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 79° E) 90°

**PROBLEMA Nº 227**

Se tiene el triángulo ABC donde se ha trazado la circunferencia inscrita, la cual es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ en F, D y E respectivamente. Se ubica H∈I en las prolongaciones de $\overline{DF}$ y $\overline{DE}$ respectivamente, tal que DHAI es un paralelogramo, $\overline{AB} \cap \overline{HI} = \{M\}$ y $\overline{AC} \cap \overline{HI} = \{N\}$.

Calcule $\dfrac{MN}{BC}$

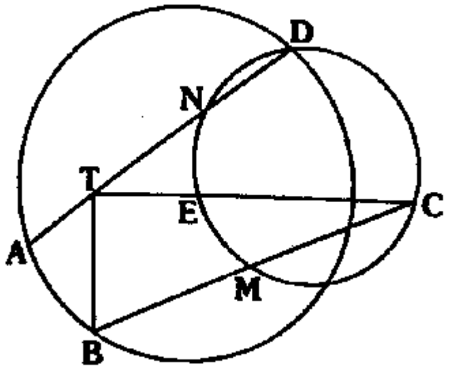
A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**PROBLEMA Nº 228**

En el gráfico, $m\widehat{DNM}=2(m\sphericalangle BTA)$ y $m\widehat{AB}=24°$.

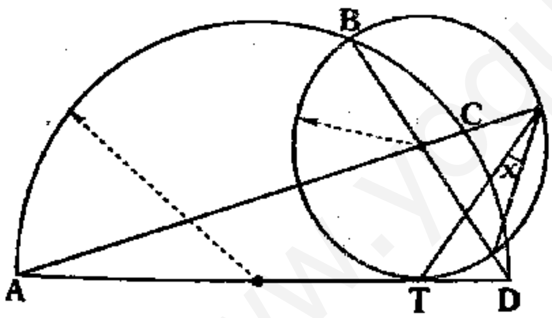
Calcule $m\widehat{ME}$.




A) 12° B) 24° C) 36°
D) 48° E) 54°

**PROBLEMA Nº 229**

Si $m\widehat{BC}=36°$ y T es punto de tangencia. Calcule "$x$".




A) 16° B) 18° C) 20°
D) 22° E) 24°

**PROBLEMA Nº 230**

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, P está en $\widehat{BC}$ talque la recta de Simson de P respecto del triángulo corta a la prolongación de $\overline{AB}$ en S.
Si $m\sphericalangle ASL=\theta$.

A) $\theta$ B) $2\theta$ C) $3\theta$
D) $90°-\theta$ E) $180°-2\theta$

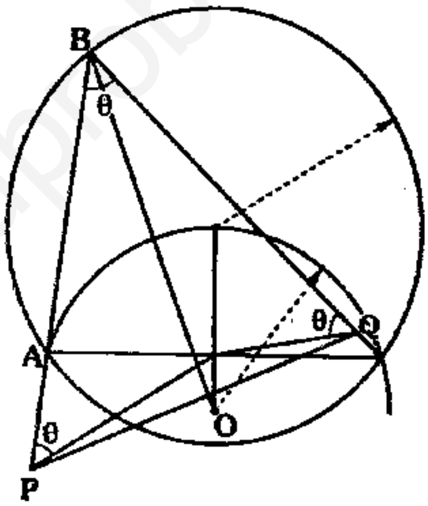
**PROBLEMA Nº 231**

Se tiene el cuadrilátero ABCD, H está en $\overline{BD}$ y L en la prolongación de $\overline{AB}$ talque BLCH es un cuadrado. La recta $\overline{LH}$ corta a $\overline{AC}$ en su punto medio M.
Calcule $m\sphericalangle CMD$.

A) 60° B) 45° C) 90°
D) 120° E) 135°

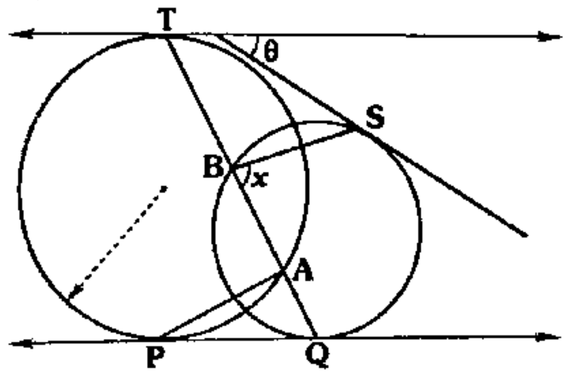
**PROBLEMA Nº 232**

Demostrar que $\overline{PQ}\perp\overline{OB}$.




**PROBLEMA Nº 233**

P, Q, S y T son puntos de tangencia. Si $\overline{PA}//\overline{BS}$, calcule x en función de:




A) $\theta$ B) $2\theta$ C) $90°-\dfrac{\phi}{2}$
D) $90°-\dfrac{\phi}{4}$ E) $45°-\theta$

**PROBLEMA Nº 234**

Se tiene el pentágono convexo ABCDE talque AE=ED, BC=AB+CD y $m\measuredangle BAE + m\measuredangle CDE = 180°$.

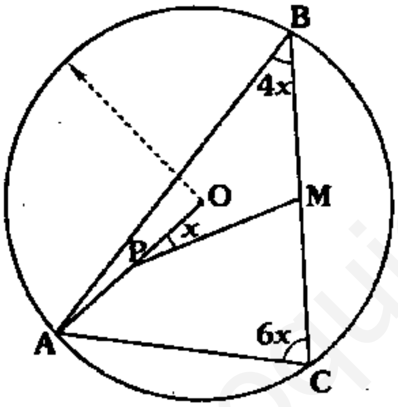
Calcule: $\dfrac{m\measuredangle AED}{m\measuredangle BEC}$.

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

D) 3 E) $\frac{2}{3}$

**PROBLEMA Nº 235**

En el gráfico, AP=PO y BM=MC.
Calcule "x".




A) 10°

B) 12°

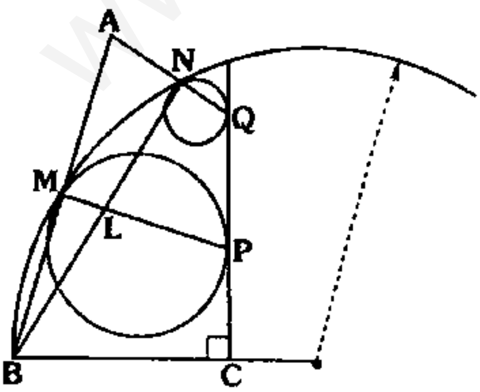
C) 15°

D) 6°

E) 8°

**PROBLEMA Nº 236**

M, N, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{BM} = 20°$. Calcule $m\measuredangle LAM$.




A) 10° B) 20° C) 30°

D) 15° E) 18°

**PROBLEMA Nº 237**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y en ella se ubica Q, luego con diámetro QB se traza una circunferencia secante AB en L; O es centro de la circunferencia y la recta tangente a la semicircunferencia trazada por Q y es paralela a $\overline{OL}$.

Calcule la medida del ángulo entre la circunferencia y la semicircunferencia.

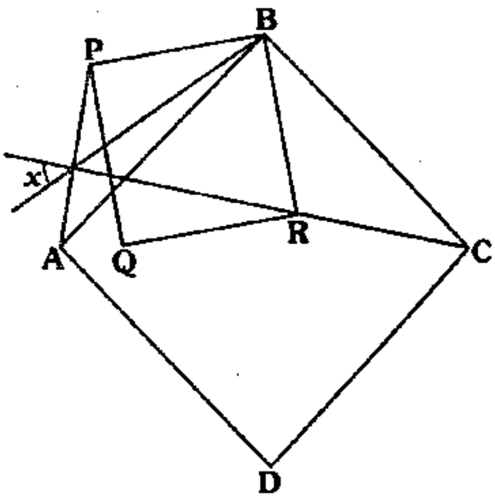
A) 20° B) 18°

C) 37° D) 60°

E) 30°

**PROBLEMA Nº 238**

ABCD y PBRQ son cuadrados.
Calcule "x".




A) 30° B) 15° C) 45°

D) 75° E) 36°

**PROBLEMA Nº 239**

ABCD es un cuadrado, T y P son puntos de tangencia, $\overline{AM} // \overline{LN}$ y BM=NC.
Calcule "x".

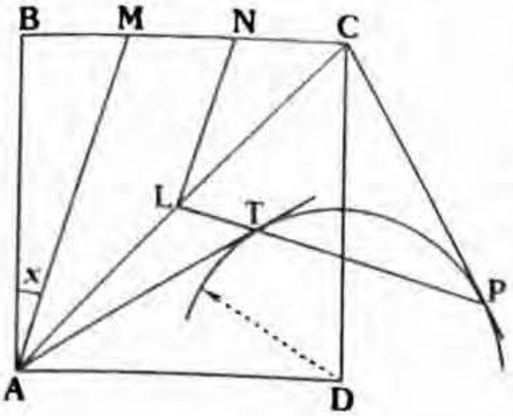
A) $30°$

B) $8°$

C) $37°$

D) $37°/2$

E) $53°/2$




**PROBLEMA Nº 240**

P, Q y T son puntos de tangencia.
Calcule "$x$".

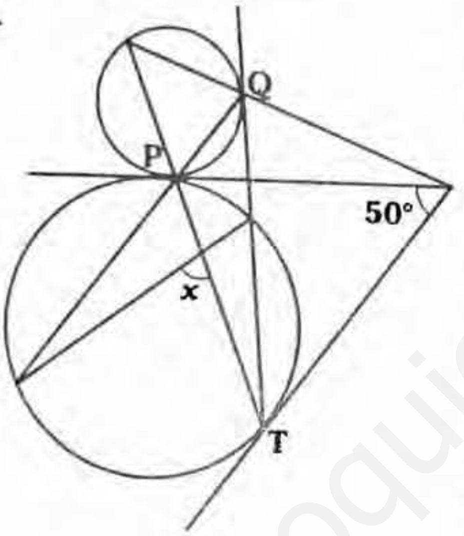
A) $90°$

B) $40°$

C) $80°$

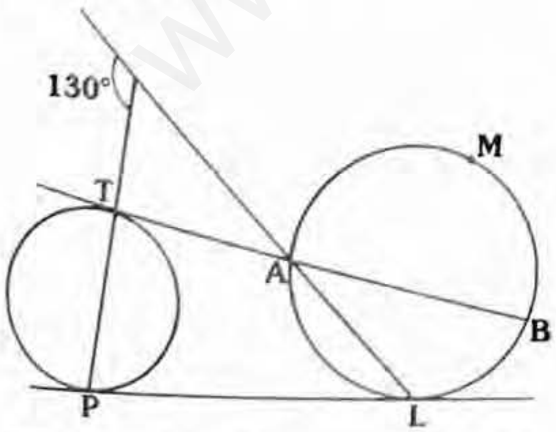
D) $50°$

E) $100°$




**PROBLEMA Nº 241**

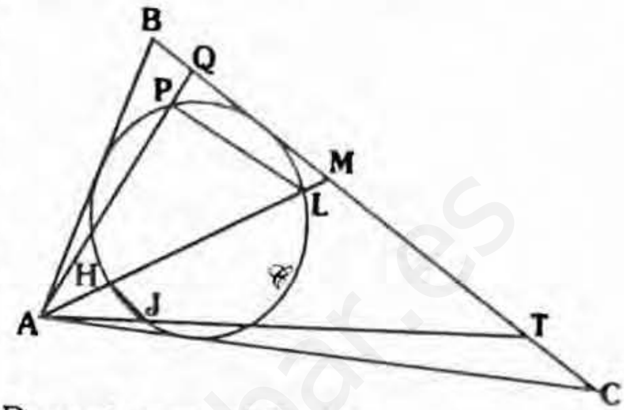
T, P y L son puntos de tangencia.
Calcule $m\widehat{AMB}$.




A) $180°$ B) $182°$ C) $260°$
D) $230°$ E) $200°$

**PROBLEMA Nº 242**

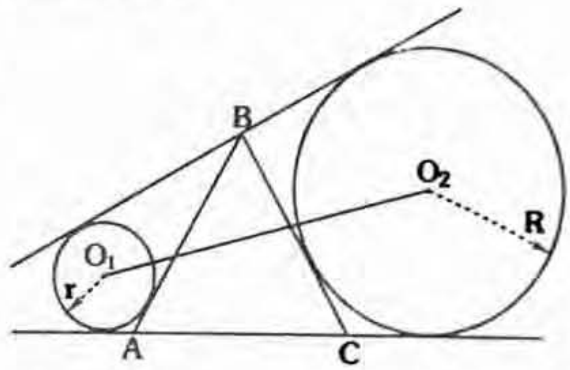
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita, BM=MC y $\overline{HJ}//\overline{PL}//\overline{BC}$.




Demostrar que BQ=TC.

**PROBLEMA Nº 243**

Si el triángulo ABC es equilátero.
Calcule $O_1O_2$.




A) $\dfrac{2}{3}\sqrt{R^2+r^2}$ B) $(R+r)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\sqrt{\dfrac{R^2+r^2+Rr}{2}}$ D) $2\sqrt{R^2+r^2+Rr}$

E) $(R-r)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

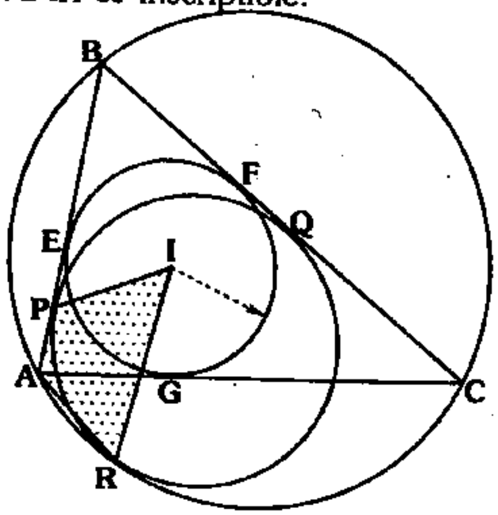
**PROBLEMA Nº 244**

Se tiene el triángulo isósceles ABC(AB=BC). M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. P está en la región exterior relativa a $\overline{AB}$, si B es punto medio de $\overline{PQ}$, $\overline{PB} \perp \overline{BA}$ y $\overline{CM} \perp \overline{AP}$.

Demostrar que $m\measuredangle ANP = 90°$.

**PROBLEMA Nº 245**

En el gráfico, E, F, G, P, Q y R son puntos de tangencia. Demostrar que el cuadrilátero APIR es inscriptible.




**PROBLEMA Nº 246**

ABCD es un cuadrado AM=MB y T es punto de tangencia.

Calcule "x".

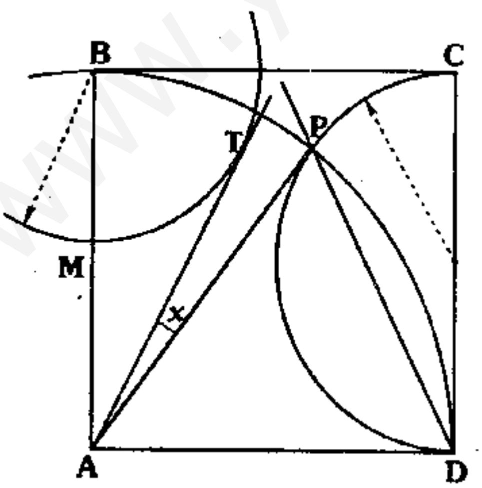
A) 8°

B) 7°

C) 6°

D) 14°

E) 17°




**PROBLEMA Nº 247**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, donde: $m\measuredangle BAC = 10°$, $m\measuredangle CAD = 70°$, $m\measuredangle ADB = 60°$ y $m\measuredangle BDC = 20°$.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 35° B) 25° C) 20°

D) 30° E) 10°

**PROBLEMA Nº 248**

Se tiene el triángulo ABC ($AB \neq BC$), se traza la bisectriz interior BD, Q y P son las proyecciones ortogonales de A y C sobre $\overline{BD}$. L es la proyección ortogonal de D sobre $\overline{BC}$.

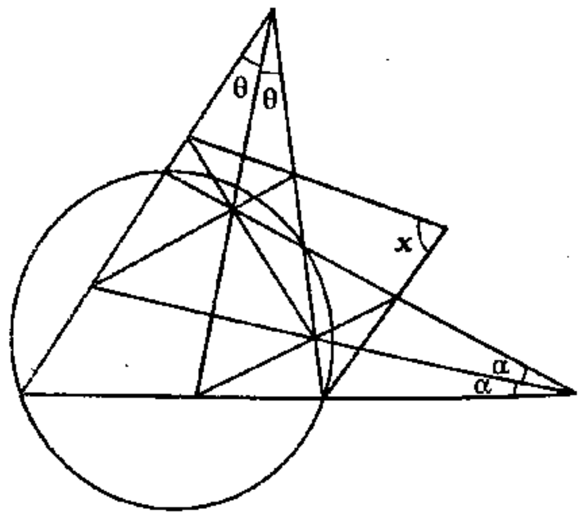
Calcule $\dfrac{m\measuredangle QLD}{m\measuredangle DLP}$.

A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 2

D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{2}{3}$

**PROBLEMA Nº 249**

Del gráfico, calcule "x".



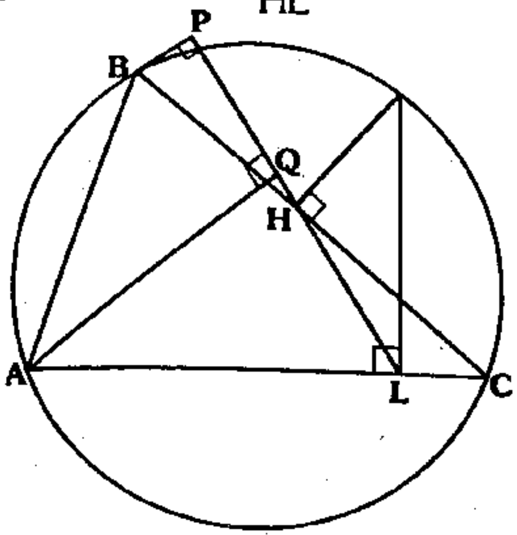

A) 60° B) 45°

C) 90° D) 75°

E) 135°

**PROBLEMA Nº 250**

Del gráfico, calcule. $\dfrac{PQ}{HL}$




A) F.D. B) 2 C) 1

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 251**

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica E y F en $\overline{BC}$ (en el orden B, E, F y F), si $m\sphericalangle BAE = m\sphericalangle CDF$ y $m\sphericalangle EAF = m\sphericalangle FDE$. Si $m\sphericalangle FAC = 40°$, calcule $m\sphericalangle EDB$.

A) 50° B) 20° C) 40°

D) 80° E) 60°

**PROBLEMA Nº 252**

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias que se tocan en A y B, sea $\overleftrightarrow{PQ}$ una recta que pasa por A tal que P está en $\mathscr{C}_1$ y Q en $\mathscr{C}_2$. Halle el lugar geométrico del punto medio de $\overline{PQ}$ al variar esta recta.

A) Una recta

B) Un segmento

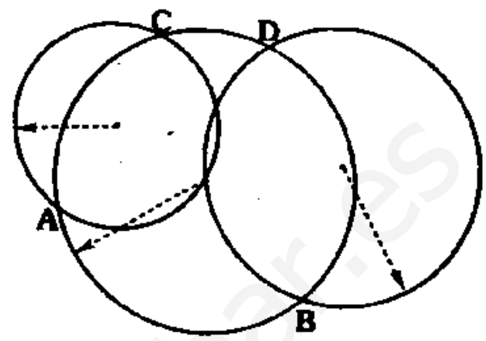
C) Una circunferencia

D) Solo puntos de una circunferencia

E) Una elipse

**PROBLEMA Nº 253**

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 80°$ y $m\widehat{CD} = 20°$. Calcule la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.




A) 50° B) 30° C) 40°

D) 45° E) 60°

**PROBLEMA Nº 254**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, las diagonales se cortan en M.

Si $m\sphericalangle DCA = m\sphericalangle ACB = x$; $m\sphericalangle DAC = 2x$; $m\sphericalangle ABD = 3x$ y $m\sphericalangle DBC = 4x$.

Calcule "x".

A) 18° B) 15° C) 12°

D) 10° E) 20°

**PROBLEMA Nº 255**

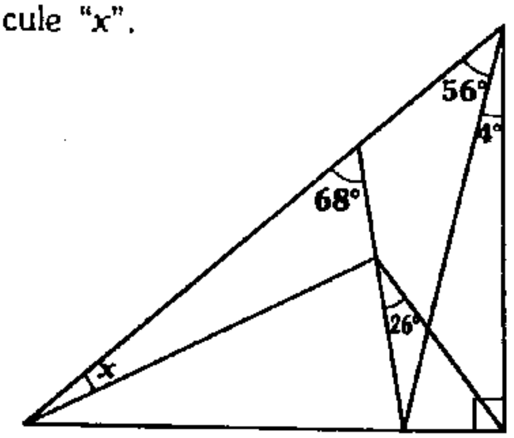
En el rectángulo ABCD, se ubica el punto medio M de $\overline{AB}$, con centro en B y radio BM se traza el cuadrante MBN $(N \in \overline{BC})$ y una semicircunferencia de diámetro $\overline{CD}$, si $3(AB) = 2(BC)$. Calcule la medida del ángulo formado por las tangentes trazadas desde A a dichos arcos.

A) 23° B) 22°3' C) 26°3'

D) 30° E) 31°

**PROBLEMA Nº 256**

Calcule "$x$".

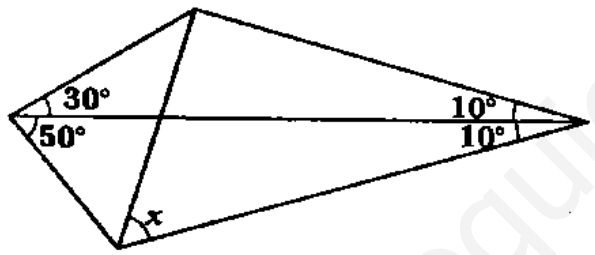



A) 15° B) 18° C) 22°

D) 25° E) 24°

**PROBLEMA Nº 257**

Calcule "$x$".

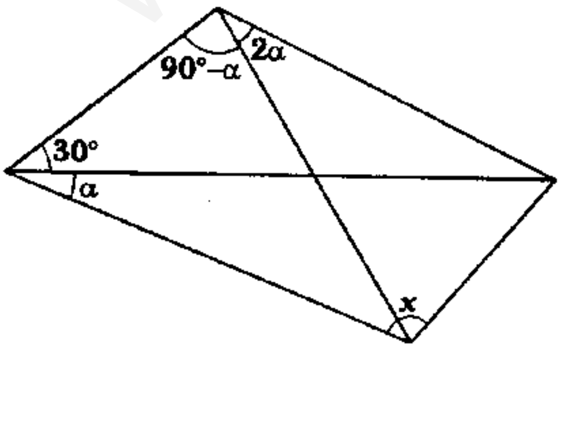



A) 30° B) 45° C) 49°

D) 55° E) 60°

**PROBLEMA Nº 258**

Calcule "$x$".

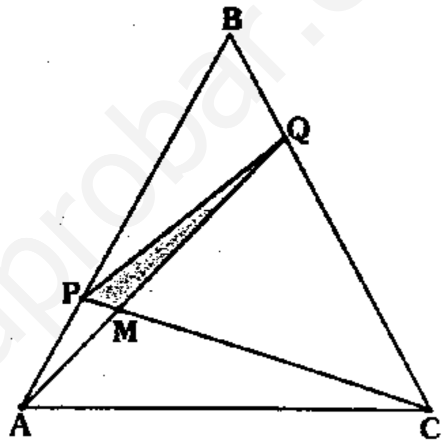



A) 135° B) 120° C) 116°

D) 106° E) 127°

**PROBLEMA Nº 259**

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero tal que AP=BQ. Si $AB=\ell$, calcule la distancia del circuncentro del $\Delta$MPQ hacia $\overline{AC}$.




A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$

C) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2\ell}{3}$

E) $\frac{2\ell}{3}\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 260**

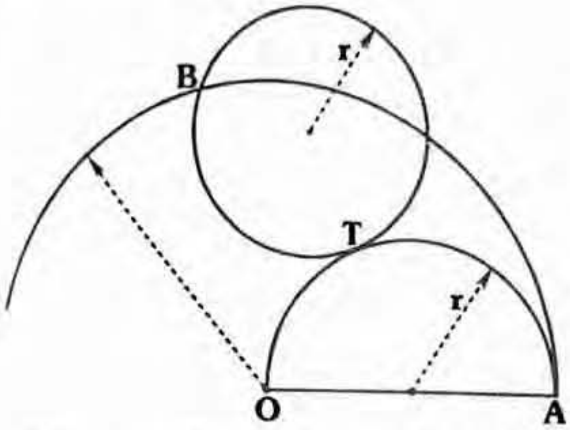
Se tiene el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$. Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_A}$ la recta de Simson de A respecto del triángulo BCD, análogamente se definen $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_B}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_C}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_D}$.

Demostrar que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_A}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_B}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_C}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_D}$ concurren.

# Problemas Propuestos
## Ciclo Repaso

**PROBLEMA Nº 261**

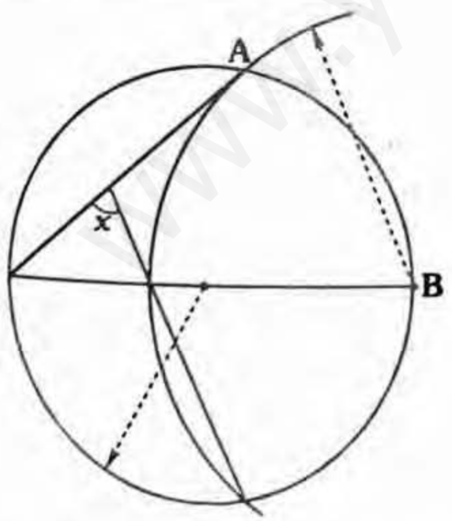
En el gráfico, T es punto de tangencia si $m\overset{\frown}{OT}=40°$. Calcule $m\overset{\frown}{TB}$.




A) 100°  B) 140°  C) 160°
D) 80°  E) 120°

**PROBLEMA Nº 262**

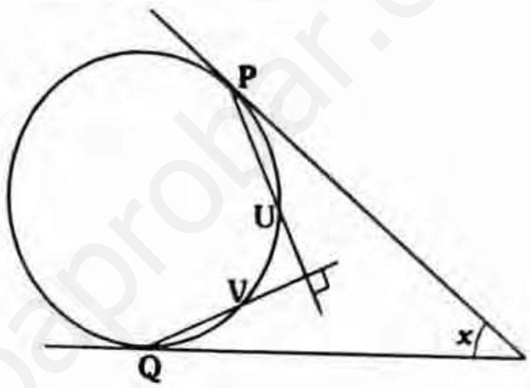
Si $m\overset{\frown}{AB}=\alpha$, calcule "x".




A) $135°-\dfrac{3\alpha}{4}$  B) $2\alpha$  C) $90°-\alpha$
D) $180°-\alpha$  E) $180°-2\alpha$

**PROBLEMA Nº 263**

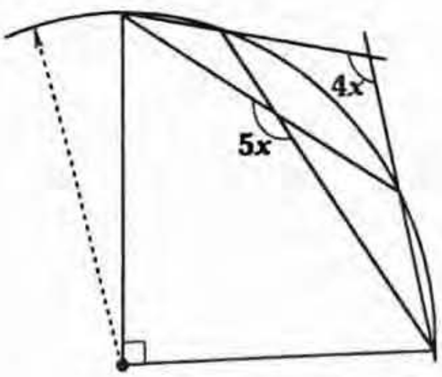
P y Q son puntos de tangencia, si $m\overset{\frown}{UV}=30°$. Calcule "x".




A) 30°  B) 45°
C) 60°  D) 67,5°
E) 75°

**PROBLEMA Nº 264**

Calcule "x", en:




A) 20°  B) 8°  C) 10°
D) 25°  E) 30°

**PROBLEMA Nº 265**

T y R son puntos de tangencia, si PQ=6, calcule r.

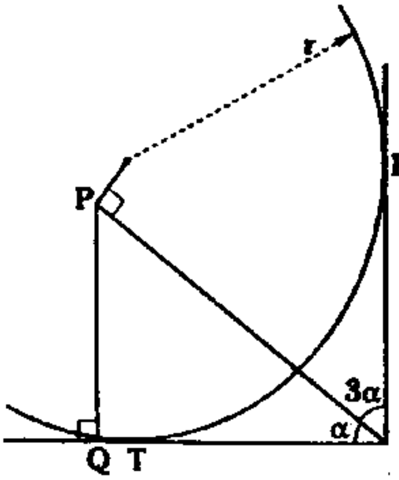
A) 3

B) $3\sqrt{2}$

C) 6

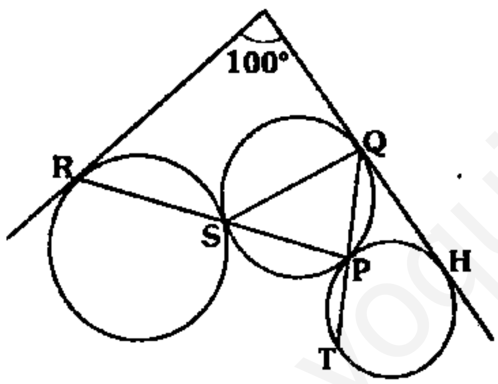
D) $6\sqrt{2}$

E) 12




**PROBLEMA Nº 266**

H, P, Q, R y S son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PT}$.




A) 50° B) 90° C) 100°

D) 80° E) 55°

**PROBLEMA Nº 267**

T es punto de tangencia, ABCD es un cuadrado. Si BT=2 y TC=1. Calcule "x"

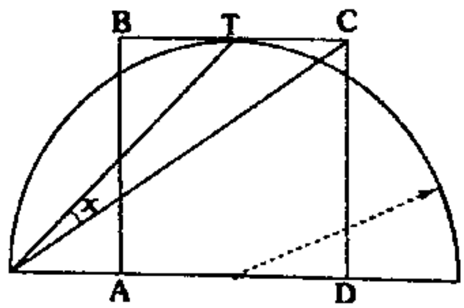
A) 8°

B) 10°

C) 15°

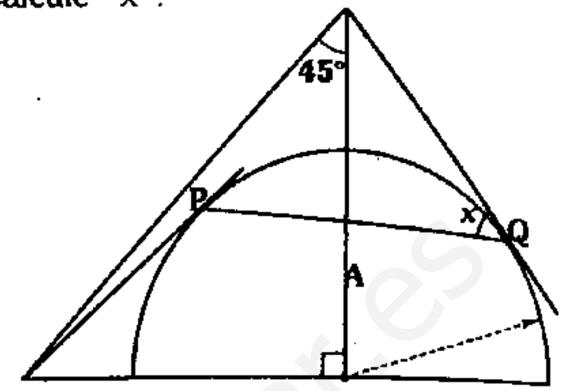
D) 37°/2

E) 53°/2




**RESOLUCIÓN Nº 268**

Si P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".




A) 30° B) 60° C) 45°

D) 35° E) 50°

**PROBLEMA Nº 269**

Si AB=2(BC). Calcule "x".

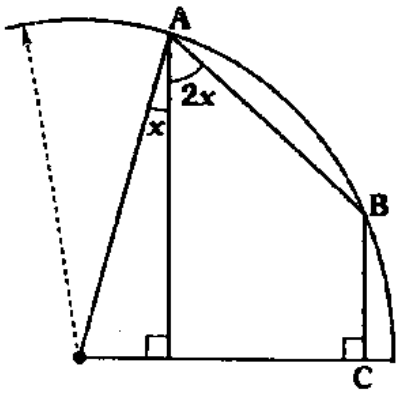
A) 22°30'

B) 15°

C) 20°

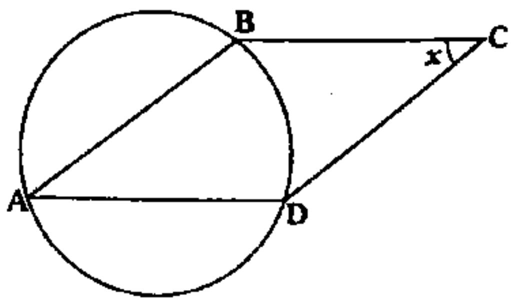
D) 53°/2

E) 37°/2




**PROBLEMA Nº 270**

Si ABCD es un rombo; $m\widehat{AD}=134°$. Calcule "x".

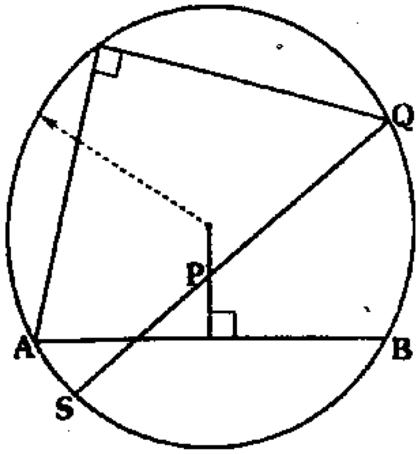



A) 67° B) 48° C) 38°

D) 46° E) 52°

**PROBLEMA Nº 271**

Si $AB=1,2(PQ)$. Calcule $m\widehat{BS}$.



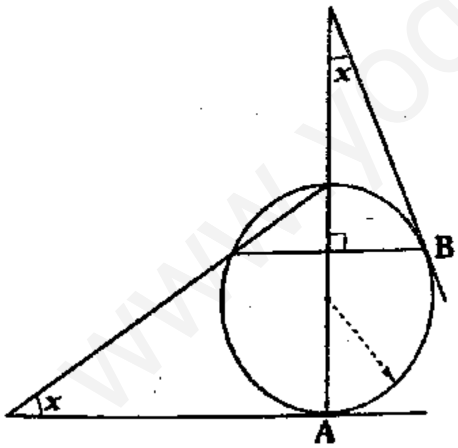

A) 30°   B) 60°   C) 53°

D) 74°   E) 37°

**PROBLEMA Nº 272**

Si A y B son puntos de tangencia.

Calcule "x".



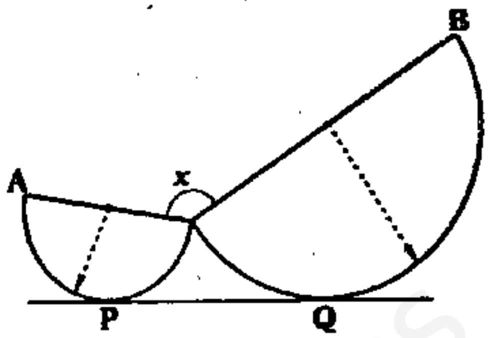

A) 53°/2   B) 37°/2   C) 37°

D) 15°   E) 30°

**PROBLEMA Nº 273**

Si P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{AP}+m\widehat{BQ}=250°$.

Calcule "x".




A) 65°   B) 125°

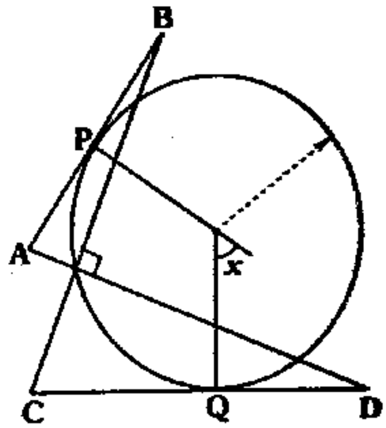
C) 110°   D) 62°

E) 120°

**PROBLEMA Nº 274**

Si P y Q son puntos de tangencia $AP=PB$; $CQ=QD$.

Calcule "x".




A) 30°   B) 45°

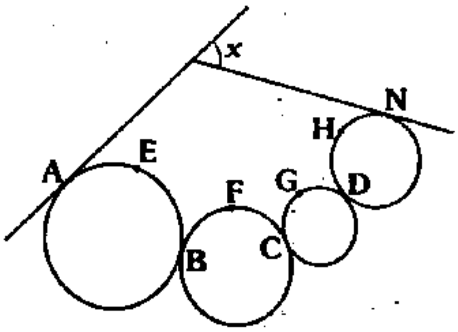
C) 75°   D) 60°

E) 53°

**PROBLEMA Nº 275**

Calcule "x" en el gráfico, si :

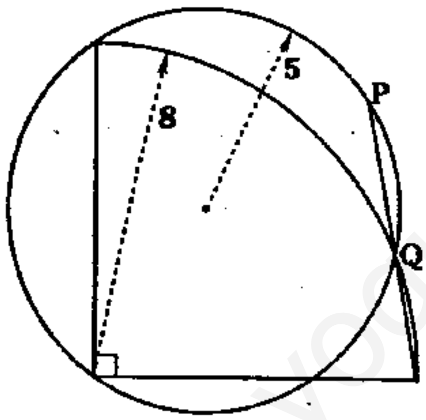
$$m\widehat{AEB}+m\widehat{BFC}+m\widehat{CGD}+mDHN=570°$$




A) 10°   B) 20°   C) 30°
D) 40°   E) 50°

**PROBLEMA Nº 276**

Del gráfico, calcule $m\widehat{PQ}$.




A) 37°   B) 74°   C) 53°
D) 45°   E) 58°

**PROBLEMA Nº 277**

En un triángulo rectángulo se traza una circunferencia que pasa por los tres puntos medios de sus lados. Calcular la medida del arco exterior a la hipotenusa si los arcos exteriores a los catetos miden 80° y 100° respectivamente.

A) 10°   B) 15°   C) 20°
D) 25°   E) 40°

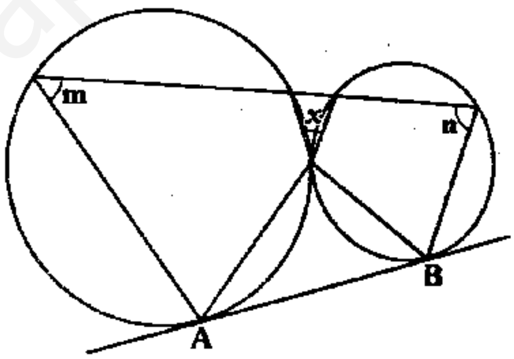
**PROBLEMA Nº 278**

Dos circunferencias tangentes exteriores en el punto C, son tangentes interiores a una tercera circunferencia en los puntos A y B. Calcular: $m\widehat{AB}$; si $m\widehat{AC}+m\widehat{BC}=260°$. (A y B pertenecen a la circunferencia mayor).

A) 60°   B) 80°   C) 90°
D) 70°   E) 100°

**PROBLEMA Nº 279**

Si. $m+n=140°$, calcule "x". A y B: son puntos de tangencia.




A) 30°   B) 40°   C) 50°
D) 60°   E) 70°

**PROBLEMA Nº 280**

En un triángulo ABC, recto en "B", se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, por D se levanta una perpendicular a $\overline{AC}$, que intersecta a $\overline{BC}$ en P y a la prolongación de $\overline{AB}$ en Q. Calcular: AC, si PQ=5m, PD=6m.

A) 13m   B) 14m   C) 15m
D) 16m   E) 17m

**PROBLEMA Nº 281**

Se tiene un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{CD}$ y la ceviana $\overline{BE}$ intersectándos en P. Calcular: mDACB, si; el cuadrilátero ADPE es inscriptible y AD=DE. $m\measuredangle ABE=20^\circ$.

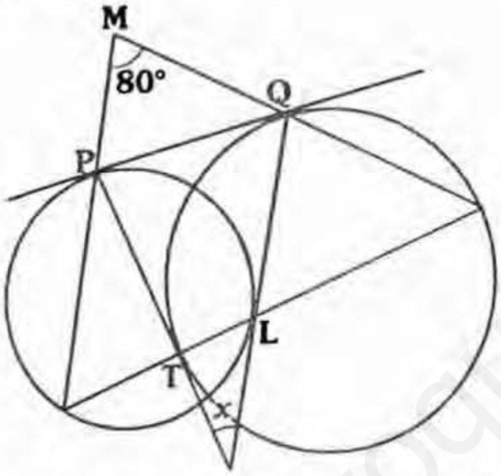
A) $20^\circ$ B) $30^\circ$ C) $40^\circ$

D) $50^\circ$ E) $60^\circ$

**PROBLEMA Nº 282**

En el gráfico, P y Q y L son puntos de tangencia.

Calcule "x".

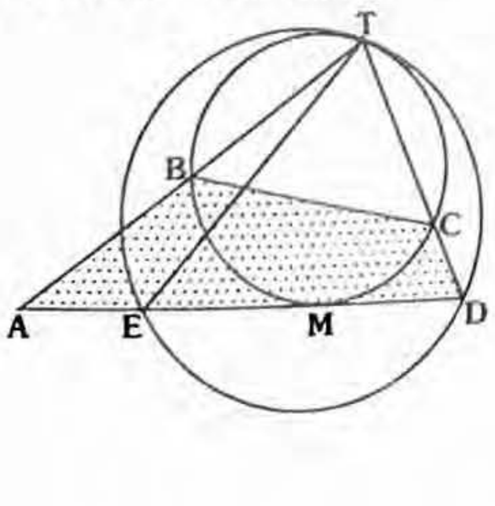



A) $5^\circ$ B) $10^\circ$ C) $15^\circ$

D) $20^\circ$ E) $25^\circ$

**PROBLEMA Nº 283**

M es punto de tangencia, si ET=TD. ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD?




A) Trapecio

B) Trapezoide de simétrico

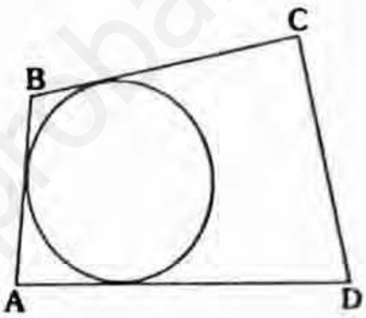
C) Inscriptible

D) Circunscriptible

E) Bicéntrico

**PROBLEMA Nº 284**

En el gráfico, se muestra una circunferencia tangente a los lados CB, BA y AD Indique la relación correcta.




A) $AB+CD=BC+AD$

B) $AB+CD<BC+AD$

C) $AB+CD>BC+AD$

D) $AB+CD<BD+AC$

E) No existe ninguna relación entre $AB+CD$ y $BC+AD$.

**PROBLEMA Nº 285**

P es un punto interior del triángulo isósceles ABC(AB=BC) talque:

$m\measuredangle PAC=m\measuredangle PCB=m\measuredangle PBA$ y

$m\measuredangle ABC=37^\circ$

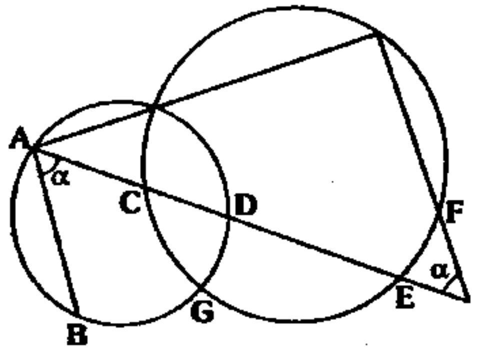
Calcule $m\measuredangle PCA$.

A) $18^\circ$ B) $26^\circ30'$ C) $22^\circ30'$

D) $45^\circ$ E) $37^\circ$

**PROBLEMA Nº 286**

En el gráfico, $m\overset{\frown}{CG}+m\overset{\frown}{GD}+m\overset{\frown}{EF}=120°$. Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.



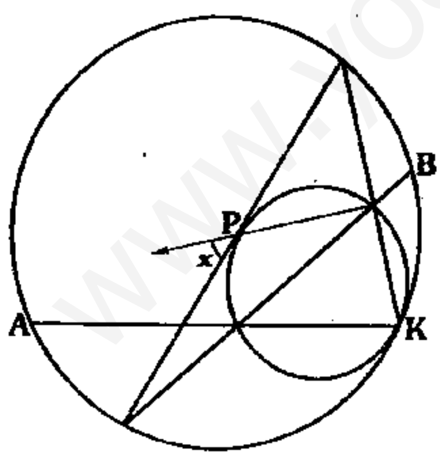

A) 100° B) 80°

C) 140° D) 60°

E) 120°

**PROBLEMA Nº 287**

Calcule "x", si: $m\overset{\frown}{AB}=130°$, siendo "P" y "K" puntos de tangencia.



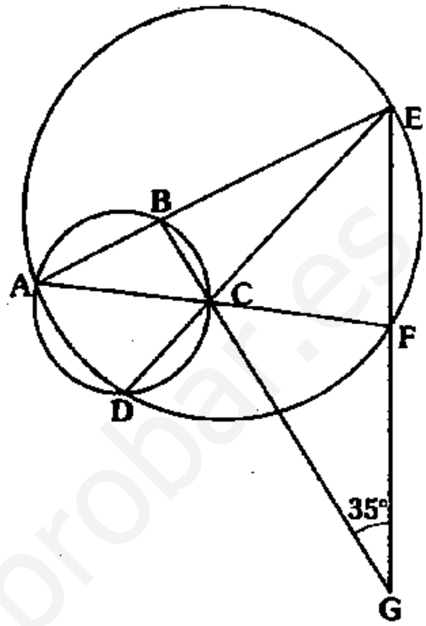

A) 50° B) 32°30'

C) 80° D) 22°30'

E) 65°

**PROBLEMA Nº 288**

Según la figura, $m\sphericalangle BGE=35°$, calcule $m\overset{\frown}{BC}$.

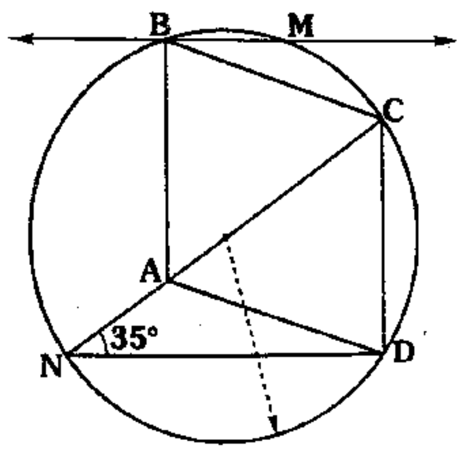



A) 35° B) 70° C) 80°

D) 55° E) 140°

**PROBLEMA Nº 289**

Calcule $m\overset{\frown}{MC}$, si: $\overleftrightarrow{BM}//\overline{ND}$ y ABCD es un paralelogramo.




A) 40° B) 20° C) 80°

D) 35° E) 70°

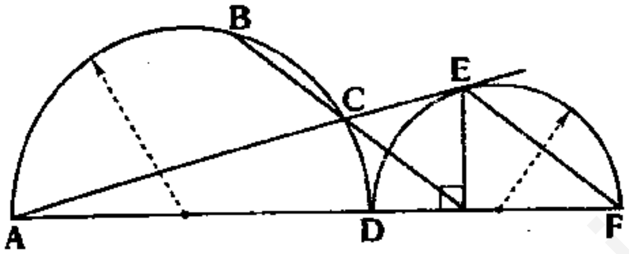
**PROBLEMA Nº 290**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en el cual se ubican los puntos M y P, ("P"$\in \overset{\frown}{MB}$) y $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$, luego se ubica el punto "Q" en $\overline{AB}$, tal que: $3AQ = 5QB$. Calcule $m\measuredangle PQB$, si $m\measuredangle QMB = m\measuredangle BMP$.

A) 76° B) 31° C) 62°
D) 45° E) 14°

**PROBLEMA Nº 291**

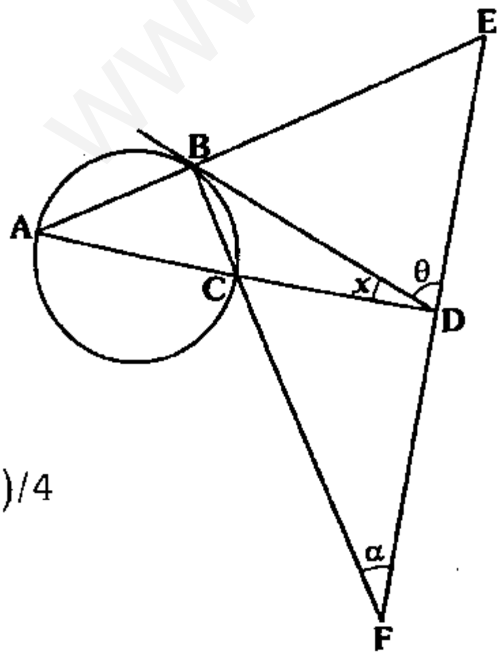
Según el gráfico, calcule $m\measuredangle EFD$, si $m\overset{\frown}{BCD} = \alpha$. (D es punto de tangencia).




A) $\alpha/4$ B) $\alpha/2$ C) $\alpha$
D) $3\alpha/2$ E) $2\alpha$

**PROBLEMA Nº 292**

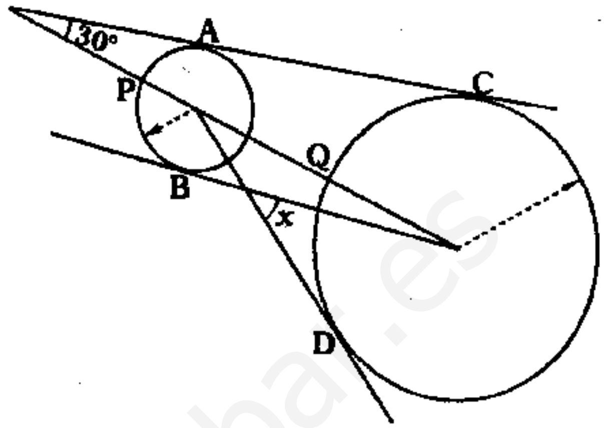
Halle "x", si BE=ED, B punto de tangencia.




A) $\alpha$
B) $\theta$
C) $\alpha/2$
D) $\theta/2$
E) $(\alpha+\theta)/4$

**PROBLEMA Nº 293**

En la figura mostrada. Calcule "x", si $\overset{\frown}{APB} = 160°$, $\overset{\frown}{CQD} = 130°$.




A) 20° B) 30° C) 25°
D) 40° E) 50°

**PROBLEMA Nº 294**

En el cuadrilátero convexo ABCD, AC=CD, $m\measuredangle ABD = 20°$ y $m\measuredangle DBC = 80°$.

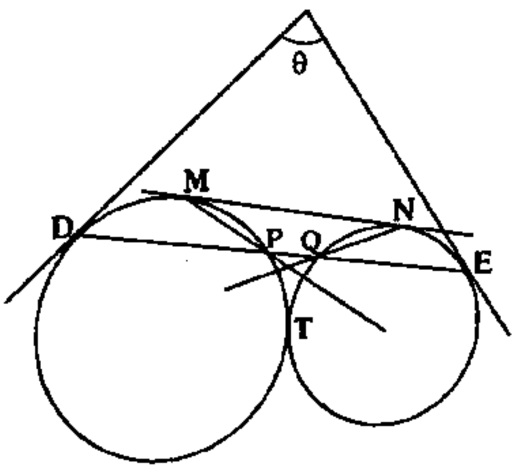
Calcule $m\measuredangle ACD$.

A) 15° B) 18° C) 20°
D) 25° E) 40°

**PROBLEMA Nº 295**

M, N y T son puntos de tangencia.

Calcule la medida del mayor ángulo entre $\overleftrightarrow{MP}$ y $\overleftrightarrow{NQ}$.



A) $2\theta$ B) $180°-\theta$

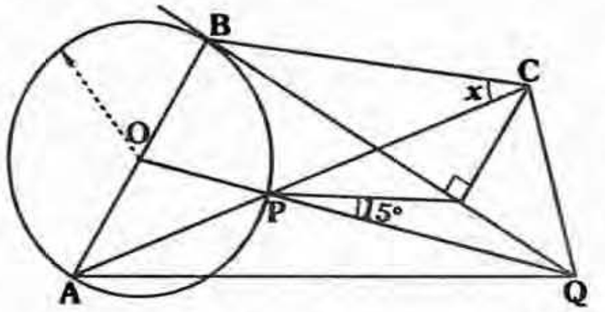
C) $90°+\theta$ D) $90°+\frac{\theta}{2}$

E) $\frac{3\theta}{2}$

**PROBLEMA Nº 296**

En la figura mostrada, B es punto de tangencia, si $\overline{BP}//\overline{CQ}$ y $m\widehat{AP}=110°$.

Calcule "x".

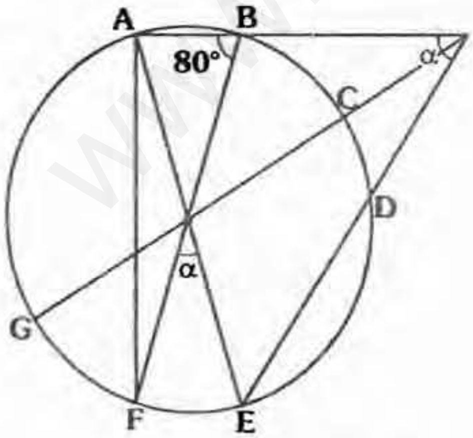



A) 20° B) 25° C) 35°

D) 40° E) 50°

**PROBLEMA Nº 297**

Calcule $m\widehat{GF}$, si $m\widehat{ABC}=120°$




A) 20° B) 35° C) 70°

D) 60° E) 40°

**PROBLEMA Nº 298**

Según el gráfico calcule "x", si: $m\widehat{PBR}=160°$ y A, B son puntos de tangencia.

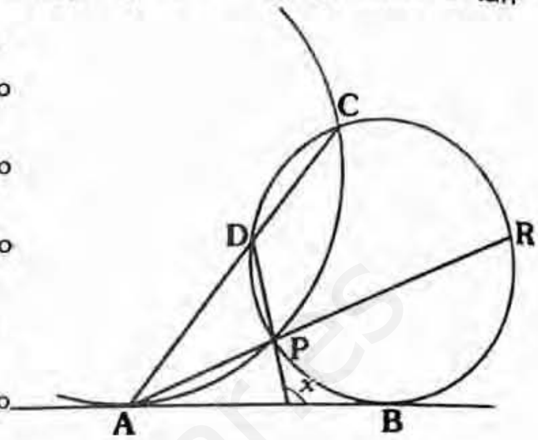
A) 160°

B) 120°

C) 100°

D) 80°

E) 130°




**PROBLEMA Nº 299**

En la figura calcule "x", si $m\widehat{AF}=m\widehat{EO}$ y $m\widehat{CDE}=80°$.

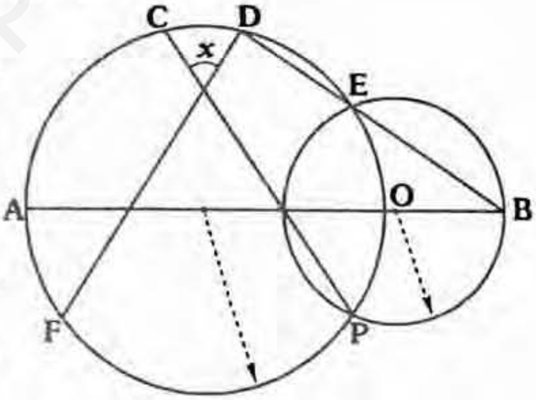
A) 160°

B) 80°

C) 100°

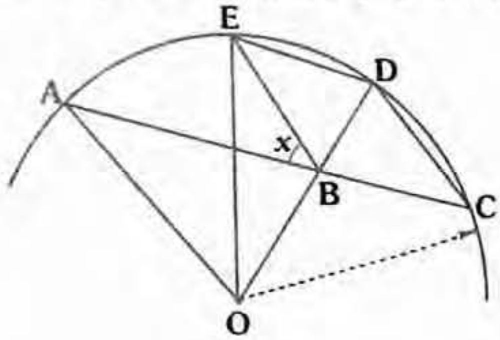
D) 160°

E) 130°




**PROBLEMA Nº 300**

Calcule "x", BCDE: rombo y $\overline{OA}//\overline{BE}$




A) 72° B) 36° C) 60°

D) 30° E) 45°

# CLAVES DE RESPUESTAS

## ANUAL

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. A | 13. A | 25. C | 37. B | 49. A | 61. A | 73. D |
| 2. B | 14. A | 26. D | 38. C | 50. C | 62. C | 74. C |
| 3. B | 15. E | 27. E | 39. E | 51. E | 63. C | 75. E |
| 4. C | 16. C | 28. E | 40. A | 52. B | 64. C | 76. B |
| 5. D | 17. A | 29. C | 41. A | 53. A | 65. B | 77. E |
| 6. E | 18. B | 30. C | 42. B | 54. C | 66. A | 78. B |
| 7. B | 19. C | 31. A | 43. B | 55. B | 67. C | 79. A |
| 8. B | 20. B | 32. B | 44. C | 56. D | 68. B | 80. A |
| 9. C | 21. D | 33. D | 45. C | 57. D | 69. D | |
| 10. B | 22. A | 34. E | 46. D | 58. A | 70. A | |
| 11. C | 23. * | 35. E | 47. C | 59. C | 71. C | |
| 12. E | 24. C | 36. B | 48. C | 60. C | 72. C | |

## CEPRE-UNI

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 81. A | 89. A | 97. E | 105. | 113. B | 121. B | 129. D |
| 82. D | 90. * | 98. A | 106. B | 114. E | 122. D | 130. D |
| 83. C | 91. A | 99. A | 107. B | 115. B | 123. C | |
| 84. A | 92. D | 100. E | 108. A | 116. D | 124. E | |
| 85 A | 93. A | 101. B | 109. D | 117. B | 125. B | |
| 86. C | 94. D | 102. C | 110. C | 118. B | 126. E | |
| 87 A | 95. E | 103. C | 111. C | 119. C | 127. D | |
| 88. C | 96. A | 104. * | 112. B | 120. B | 128. D | |

(*) Problemas demostrativos

## SEMESTRAL

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 131. E | 141. E | 151. E | 161. B | 171. B | 181. B | 191. B |
| 132. B | 142. C | 152. D | 162. E | 172. C | 182. * | 192. D |
| 133. B | 143. D | 153. A | 163. C | 173. D | 183. A | 193. C |
| 134. E | 144. B | 154. | 164. A | 174. A | 184. C | 194. C |
| 135. C | 145. D | 155. | 165. B | 175. D | 185. D | 195. C |
| 136. E | 146. B | 156. E | 166. C | 176. D | 186. E | 196. A |
| 137. C | 147. D | 157. D | 167. E | 177. E | 187. C | 197. D |
| 138. A | 148. C | 158. A | 168. E | 178. D | 188. D | 198. B |
| 139. D | 149. D | 159. C | 169. E | 179. D | 189. B | 199. A |
| 140. A | 150. C | 160. D | 170. C | 180. E | 190. B | 200. B |

## SEMESTRAL INTENSIVO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 201. A | 210. * | 219. * | 228. B | 237. E | 246. B | 255. A |
| 202. B | 211. * | 220. C | 229. B | 238. C | 247. C | 256. D |
| 203. B | 212. C | 221. A | 230. * | 239. D | 248. A | 257. E |
| 204. B | 213. D | 222. C | 231. B | 240. C | 249. C | 258. B |
| 205. A | 214. E | 223. C | 232. * | 241. E | 250. C | 259. C |
| 206. D | 215. C | 224. D | 233. * | 242. * | 251. C | 260. * |
| 207. B | 216. C | 225. C | 234. B | 243. D | 252. C | |
| 208. C | 217. D | 226. C | 235. B | 244. * | 253. B | |
| 209. E | 218. A | 227. B | 236. A | 245. * | 254. A | |

## REPASO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 261. B | 267. A | 273. C | 279. C | 285. D | 291. B | 297. E |
| 262. D | 268. C | 274. D | 280. E | 286. E | 292. A | 298. C |
| 263. A | 269. A | 275. C | 281. C | 287. B | 293. B | 299. B |
| 264. E | 270. D | 276. E | 282. D | 288. B | 294. C | 300. A |
| 265. E | 271. D | 277. A | 283. C | 289. A | 295. D | |
| 266. C | 272. E | 278. B | 284. B | 290. A | 296. C | |

# Bibliografía


- **Radmila Bujajick**
  **José Gomez Ortega** — Geometría / Cuaderno de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemática UNAM - 2004

- **Jaime Escobar Acosta** — Elementos de Geometría - 1990

- **Pogorelov, J** — Geometría Elemental Editorial MIR - 1974

- **Apuntes de Patricia Jimenez Gallego - UAZ**

- **Apuntes de Diego Bravo Estrada - PUCP**

- **Material Bibliográfico de Diferentes Instituciones Educativas**

- **Cepre - Uni** — Recopilación de Seminarios, Prácticas calificadas y Exámenes parciales.

- **Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas**

- **www.perugeometrico.blogspot.com**