GEOMETRÍA

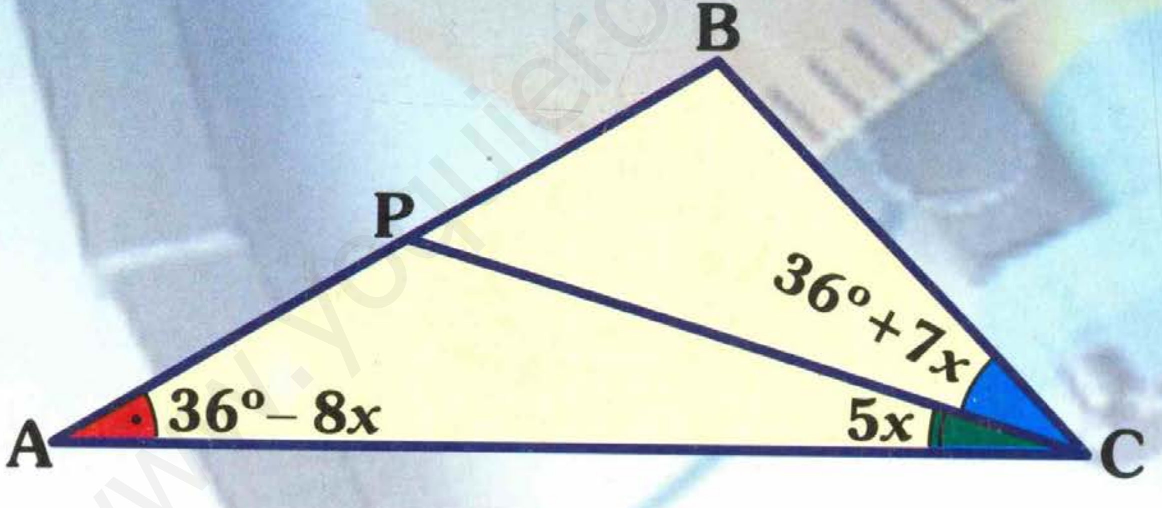
3 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

Dev Sáez Ayala

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



En el gráfico, AP=BC. Calcule x.

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 **Problemas Resueltos**
300 **Problemas Propuestos**

Incluye Problemas de Olimpiadas

Prof.: JULIO ORIHUELA BASTIDAS

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Agradecimiento

- Al apoyo incondicional de toda mi familia.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano, por su apoyo y confianza.
- A los profesores Luis Saavedra, Renzo Pardo y Richard Huamaní.
- A todos mis alumnos y exalumnos de las distintas instituciones educativas, en especial a los estudiantes: Milenka, Diana, Paola, Raúl, Edgard, Martín, Luis, Alexander, Omar Michel y Wilbert.
- Un agradecimiento especial al alumno Juan Carlos Mamani, por la creación del problema expuesta en la portada.

Índice

Congruencia de Triángulos

◆ CONGRUENCIA DE FIGURAS

Índice

CONGRUENCIA DE FIGURAS

Congruencia de Triángulos

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

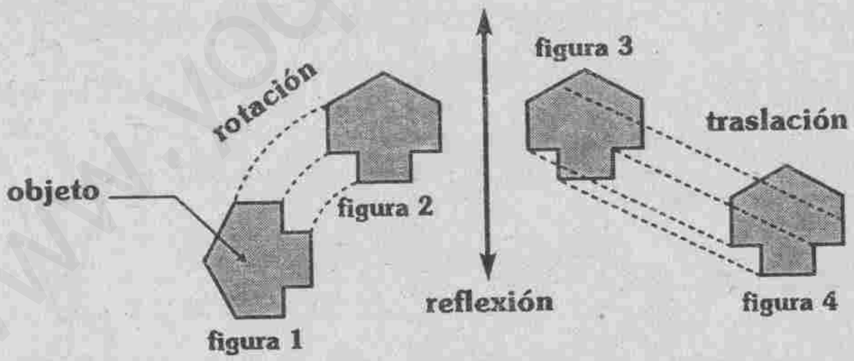
GEOMETRÍA

"El universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto"

Galileo Galilei

NOCIONES PRELIMINARES

El concepto de congruencia tiene su origen con el de igualdad. La realidad nos sugiere conceptos puros que en la propia realidad no existen. Así los conceptos de recta y plano, sugeridos por un rayo de luz o un estanque helado. Los "cambios" que nuestra intuición percibe de los objetos, es decir los "movimientos" nos dan la idea de la congruencia.



La figura 1 se mueve, realizando movimientos de rotación (figura 2), reflexión (figura 3) y traslación (figura 4), de tal forma que la figuras "coinciden".

Intuitivamente hablando, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma[1] e igual tamaño[2].

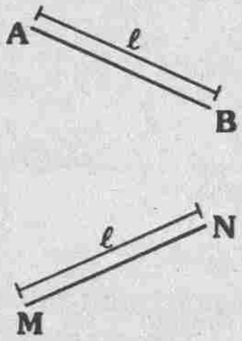
Dentro del desarrollo axiomático griego, las nociones primarias se construían con fundamento en el mundo exterior, es decir se pretendían que los axiomas respondieran a la realidad, este tipo de axiomática se ha denominado axiomática material.

En oposición a la axiomática material, se estructura lo que se ha denominado un sistema axiomático formal.

(1) y (2) acerca de tamaño y forma, ver anexos.

SEGMENTOS CONGRUENTES

Dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.



En el gráfico, los segmentos AB y MN son congruentes.

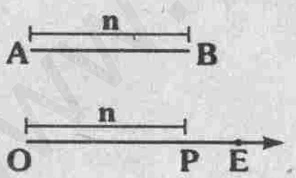
Notación:

$$\overline{AB} \cong \overline{MN}$$

AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN SEGMENTO

Dado un segmento AB y el rayo OE, de origen O. Entonces existe en $\overrightarrow{OE}$ un único punto P tal que:

$$\overline{AB} \cong \overline{OP}$$

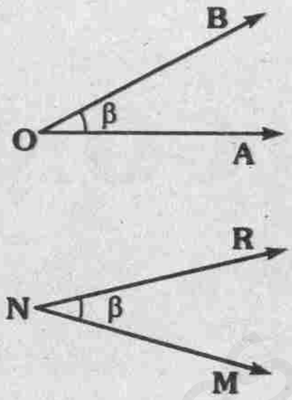


En términos prácticos este axioma afirma la posibilidad de construir o transportar un segmento, haciendo uso del compás.

ÁNGULOS CONGRUENTES

Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida.

$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle MNR$$



En el gráfico, los ángulos AOB y MNR son congruentes.

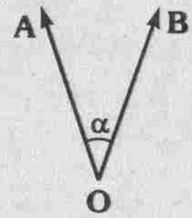
Notación:

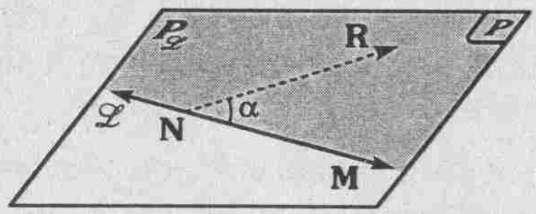
$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle MNR$$

AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO

Sea el ángulo AOB y M un punto en la recta $\mathscr{L}$, situado a su vez en el plano P, sea $P_{\mathscr{L}}$ uno de los semiplanos y $\overrightarrow{NM}$ un rayo en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces existe un único rayo NR en $P_{\mathscr{L}}$, tal que:

$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle MNR$$



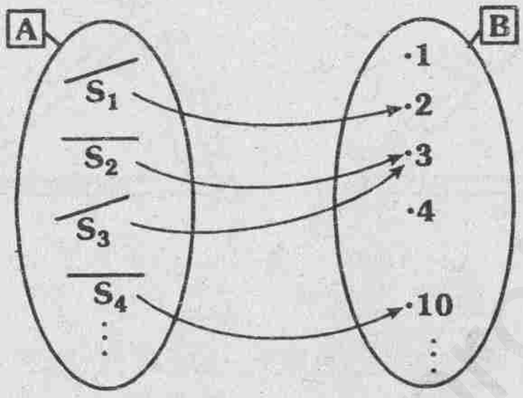


Similar que el axioma anterior, este axioma nos da la posibilidad de la construir un ángulo.

Nota

- *Es cierto que dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida, lo mismo para ángulos, pero en el caso de triángulos, la definición no es tan sencilla, pues no hay una medida que "defina" un triángulo.*

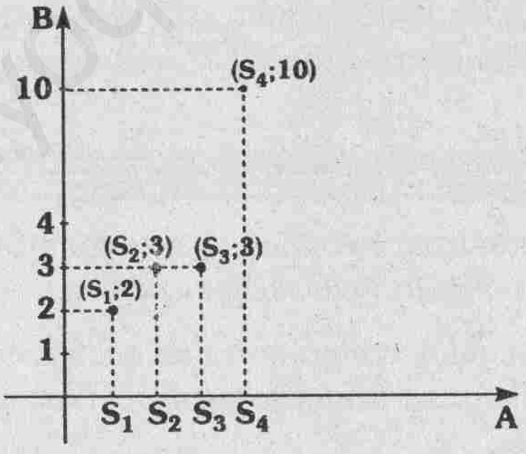
- *El siguiente gráfico, nos "ilustra" fácilmente la congruencia de segmentos.*



A={Conjunto de todos los segmentos}

$B = \mathbb{R}^+$, *en cm.* (Por elegir alguna unidad).

Se puede hacer una correspondencia entre los segmentos y los números reales que representarán sus longitudes, tal que si dos segmentos tengan igual la segunda componente, dichos segmentos serán congruentes.



En este gráfico, se cumple:

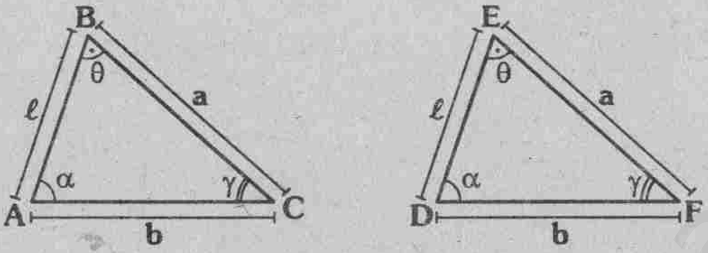
$$\boxed{S_2 \cong S_3}$$

- *Un gráfico similar se puede hacer para ángulos y sus medidas, pero como se ha mencionado no es posible usar algo análogo para triángulos.*

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

DEFINICIÓN

Dos o más triángulos son congruentes, si tienen los lados de uno de ellos respectivamente de igual longitud a los de otro y los ángulos interiores opuestos a dichos lados de igual medida.



En el gráfico:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE};\overline{BC} \cong \overline{EF};\overline{AC} \cong \overline{DF};\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF;\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF \text{ y } \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DFE.$$

Notación:

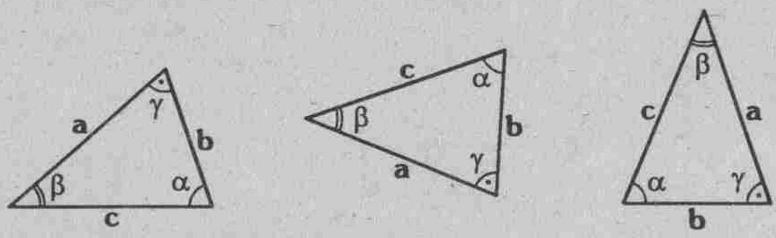
$$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta DEF}$$

La definición anterior establece que dos triángulos son congruentes si tanto los lados como los ángulos se presentan en pares congruentes.

Notar del gráfico, la correspondencia entre vértices: $A-D$, $B-E$ y $C-F$, así como de los ángulos, pero no todos los textos siguen esta convención, cuando se afirma que el ΔABC está en correspondencia con el ΔDEF no respetan las reglas anteriores de correspondencia.

Nota

- *Como regla práctica, cuando dos triángulos son congruentes diremos que a los "lados iguales se oponen ángulo iguales" y viceversa.*
- *En los ejercicios los triángulos congruentes se encontrarán en distintas posiciones, no perder de vista "lados y ángulos iguales". (Ver gráficos).*



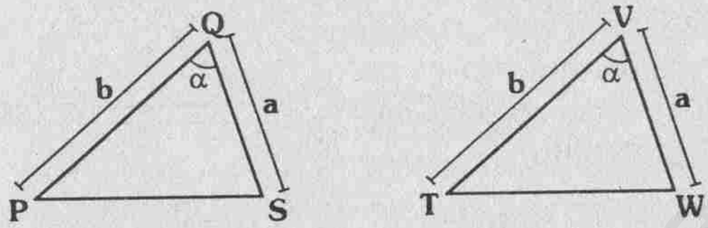
Observe que en todas las posiciones, el opuesto a "α" es "a" y así para cada lado y ángulo.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Los siguientes criterios, establecen condiciones mínimas para la congruencia de dos triángulos.

AXIOMA LADO - ÁNGULO - LADO(LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente de igual longitud y el ángulo determinado por ellos de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

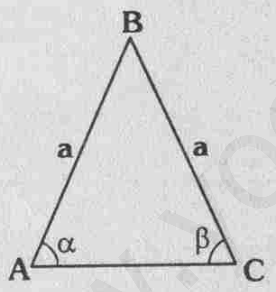


En el gráfico, $PQ=TV$; $QS=VW$ y $m\sphericalangle PQS = m\sphericalangle TVW$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta PQS \cong \Delta TVW}$$

TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

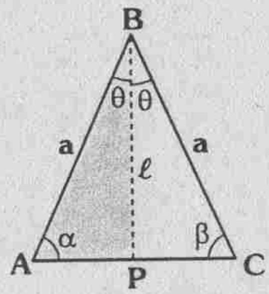
Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida.



En el gráfico, si $\boxed{AB = BC \Rightarrow \alpha = \beta}$

Demostración:

Este teorema fue enunciado en la publicación de triángulos (Fascículo N°2), pero carecíamos de argumentos para su demostración, ahora sí los tenemos:



Se traza la bisectriz interior BP, con ello tenemos: $\Delta ABP \cong \Delta CBP$ (LAL)

Por lo expuesto (regla práctica), en ambos triángulos, el opuesto a $\overline{BP}$, se tendrá:

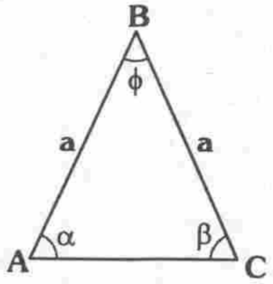
$$\boxed{\alpha = \beta}$$

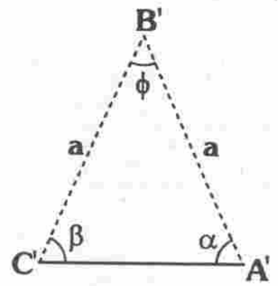
Además, el opuesto a "θ", se tiene:

$$\boxed{AP = PC}$$

Otra forma:

Aunque un poco desconcertado, cuando se ve por primera vez, es que no es común plantear la congruencia consigo mismo, lo cual no está prohibido.



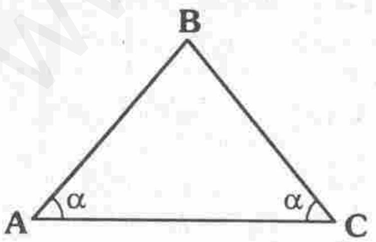


Para mayor facilidad, graficamos el triángulo CBA (aunque no es necesario). Sólo para observar, los dos triángulos.

$\Rightarrow\ \Delta ABC \cong \Delta C'B'A'$ por LAL $\Rightarrow\ \alpha = \beta$

Observación

El recíproco también es cierto, es decir, si un triángulo tiene dos ángulos interiores de igual medida, entonces los lados opuestos tienen igual longitud.



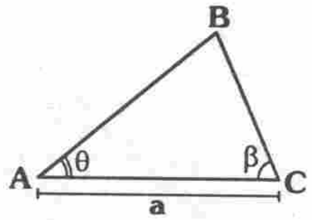
En el gráfico, si:

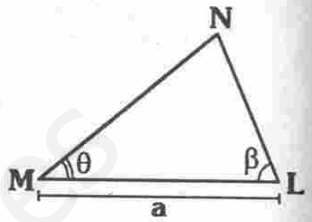
$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB$$

$$\Rightarrow\ AB = BC$$

TEOREMA ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (ALA)

Si dos triángulos tienen un lado de igual longitud y los ángulos adyacentes a este lado respectivamente de igual medida, entonces dichos triángulos son congruentes.





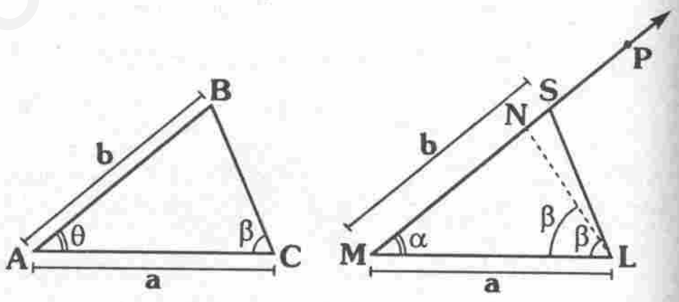
En el gráfico:

$AC = ML$; $m\measuredangle BAC = m\measuredangle NML$ y

$m\measuredangle ACB = m\measuredangle MLN$

$$\Rightarrow\ \boxed{\Delta ABC \cong \Delta MNL}$$

Demostración:



Consideramos el rayo $\overrightarrow{MP}$ que contiene a $\overline{MN}$.

- Por axioma de segmentos, existe en $\overrightarrow{MP}$ el punto (S), tal que AB=MS.
- Por LAL: $\Delta ABC \cong \Delta MSL$,
- Entonces: $m\measuredangle ACB = m\measuredangle MLS = \beta$
- Pero: $m\measuredangle MLN = \beta$

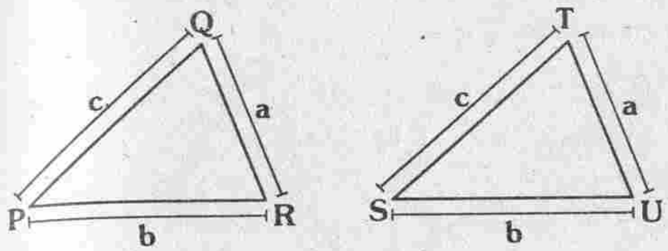
Por el axioma de la construcción de ángulos: el rayo $\overrightarrow{LS}$ debe ser único

$$\Rightarrow\ N = S$$

$$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta MNL$$

TEOREMA LADO-LADO-LADO (LLL)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente de igual longitud, entonces dichos triángulos son congruentes.



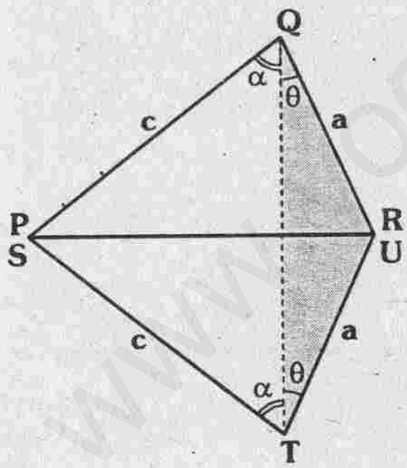
En el gráfico, si:

$PQ=ST$, $QR=TU$ y $PR=SU$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta PQR \cong \Delta STU}$$

Demostración:

Vamos a demostrar el teorema LLL, a partir del teorema del triángulo isósceles.



Ubicamos los triángulos como se muestran, puesto que $PR=SU$, $PQ=ST$ y $QR=UT$, tenemos que los triángulos PQT y QRT son isósceles.

Por LAL, se concluye:

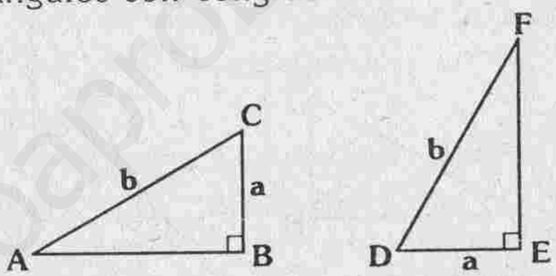
$$\Delta PQR \cong \Delta STU$$

Nota

*Es común encontrar en la mayoria de textos, que se refieran a los criterios expuestos, como "**Casos de congruencia**", en esta publicación se trata de dar un cierto orden e ir introduciendo de a poco el análisis axiomático, por esta razón no usaremos tal nombre.*

TEOREMA

Si dos triángulos rectángulos que tengan sus hipotenusas y un cateto de igual longitud respectivamente, entonces dichos triángulos son congruentes.

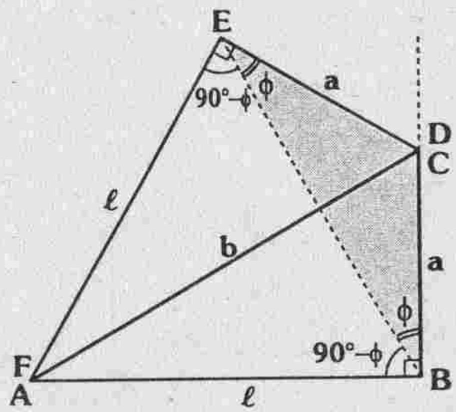


En el gráfico, se tiene:

$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle DEF = 90°$; $AC=DF$ y $BC=DE$

$$\Rightarrow \boxed{\triangle ABC \cong \triangle FED}$$

Demostración:

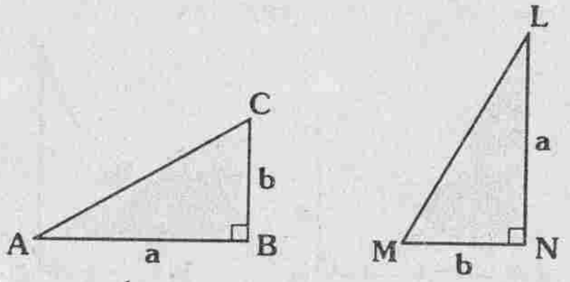


Ubicamos los triángulos como se muestra, pues $AC=FD$.

- Como DE=CB $\Rightarrow$ el ΔEDB es isósceles
  $\Rightarrow$ m$\measuredangle$DEB = m$\measuredangle$EBD
- Como m$\measuredangle$FED = m$\measuredangle$ABD = 90°
  $\Rightarrow$ m$\measuredangle$FEB = m$\measuredangle$ABE = 90° – ϕ
- Luego el ΔEAB es isósceles $\Rightarrow$ FE = AB
  $\therefore$ $\triangle$FED $\cong$ $\triangle$ABC

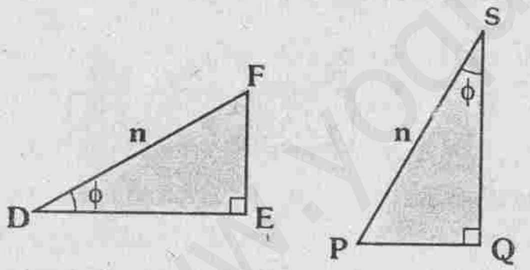
Observación

Los siguientes triángulos rectángulos son congruentes, la prueba es inmediata por LAL o ALA.



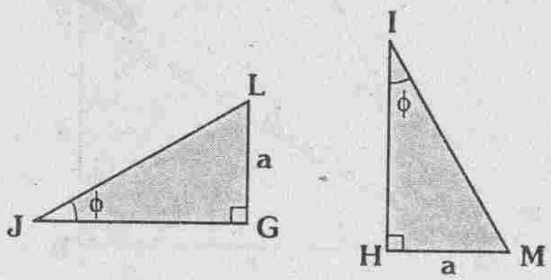
Se cumple:

$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$LNM



Se cumple:

$\triangle$DEF $\cong$ $\triangle$SQP



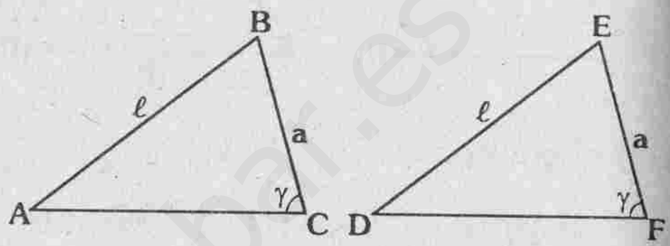
Se cumple:

$\triangle$LGJ $\cong$ $\triangle$MHI

TEOREMA LADO-LADO-ÁNGULO MAYOR

Si dos triángulos tienen dos lados de igual longitud respectivamente y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

(Este teorema se encontrará en muchos textos como "4to caso")



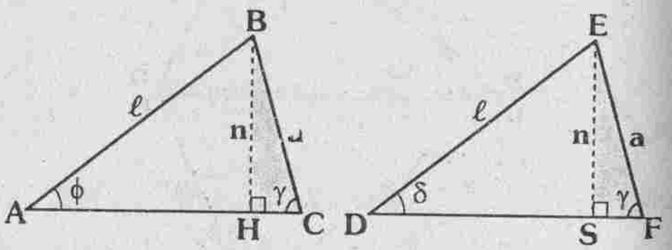
En el gráfico, sea $\ell > a$, AB=DE, BC=EF y m$\measuredangle$BCA = m$\measuredangle$EFD

$\Rightarrow$ ΔABC $\cong$ ΔDEF

Demostración:

Utilicemos los teoremas anteriores, para "γ" se presentan los siguientes casos:

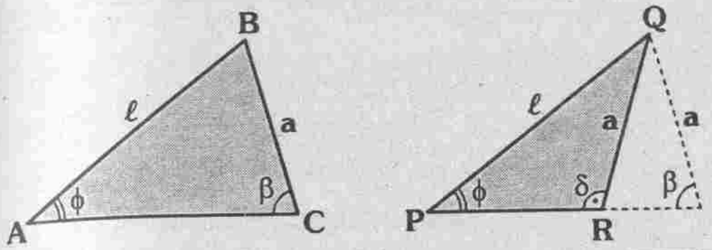
- Si $\gamma = 90°$, ya fue probado.
- Si $\gamma < 90°$, se tiene:



- Como $\ell > a$ $\Rightarrow$ $\gamma > \phi$ y si:
  $\gamma < 90°$ $\Rightarrow$ $\phi < 90°$, lo mismo para "δ".
- Al trazar las alturas desde B y E, se tendrá: H en $\overline{AC}$ y S en $\overline{DF}$.
- Luego:
  $\triangle$BHC $\cong$ $\triangle$ESF $\Rightarrow$ BH=ES, HC=SF
- Finalmente: $\triangle$AHB $\cong$ $\triangle$DSE
  $\Rightarrow$ AH = DS

- Como AH=DS y HC=SF $\Rightarrow$ AC = DF
- Por LLL, se tendrá: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
- Si $\gamma > 90^c$, se demuestra análogamente, sino que la altura estará en al parte externa.

Observación

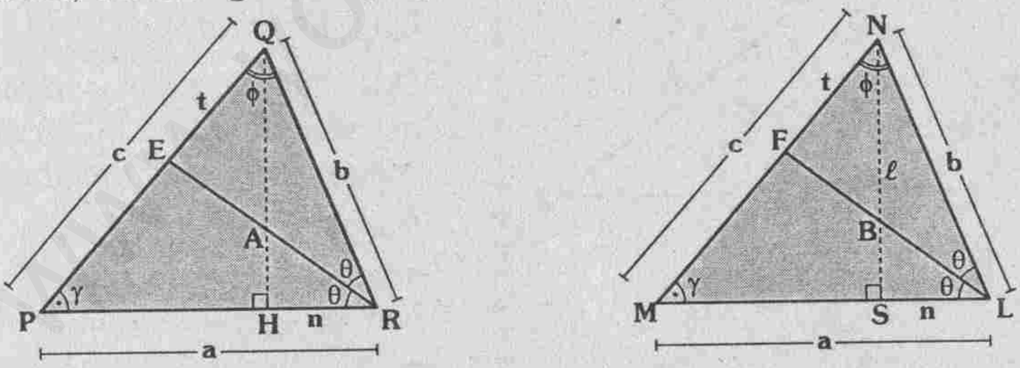


Si: $a < \ell \Rightarrow$ *los triángulos* ABC *y* PQR *no son congruentes, como se muestra.*

Importante

- Es cierto que los tres primeros criterios señalados (LAL, ALA y LLL) son los más usados en la resolución de problemas y deducción de diversos teoremas, por lo tanto se te sugiere tenerlos presente y visualizarlos en los ejemplos, tal vez aparezcan en diferentes posiciones.
- Un criterio a tomar en cuenta, en la resolución de ejercicios, es cuando en dos posiciones diferentes se "repita" un lado o tal vez algún "ángulo" posiblemente usemos congruencia, para ello completar ángulos y relacionarlo con algunos de los criterios mencionados, frecuentemente: LAL, ALA o LLL.
- Cuando dos triángulos son congruentes, entonces todos sus elementos serán respectivamente "iguales", así tenemos:

  En el gráfico, los triángulos PQR y MNL son congruentes:



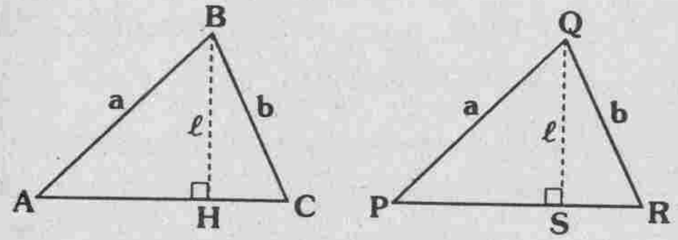
  - $\overline{QH}$ y $\overline{NS}$ son alturas relativas a $\overline{PR}$ y $\overline{ML}$, los cuales son congruentes entonces: QH=NS y LS=HR
  - $\overline{RE}$ y $\overline{LF}$ son bisectrices interiores relativas a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ $\Rightarrow$ RE = LF .
  - Como consecuencia: EA = FB
- En el gráfico anterior se ha indicado unas cuantas relaciones, lo general se indicará en el caso de ***congruencia de figuras*** (∗).

(*) ver anexos

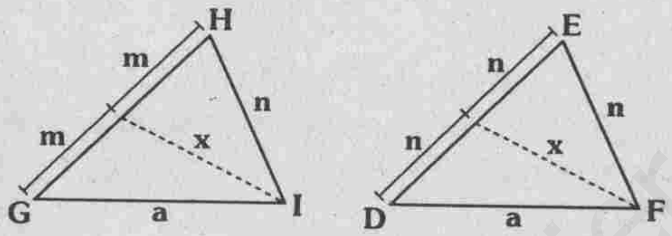
OTROS CRITERIOS DE LA CONGRUENCIA

Como se han mencionado, son condiciones mínimas en dos triángulos para asegurar que sean congruentes.

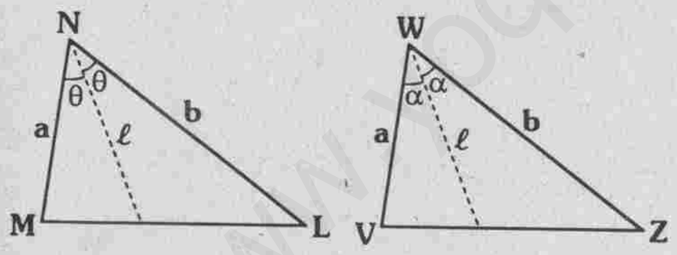
A continuación se muestran gráficamente algunas de dichas condiciones (notar que son tres elementos).



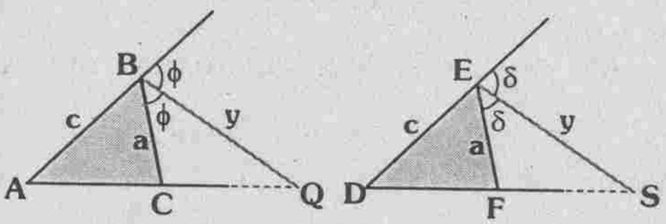
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$



$\Delta GHI \cong \Delta DEF$

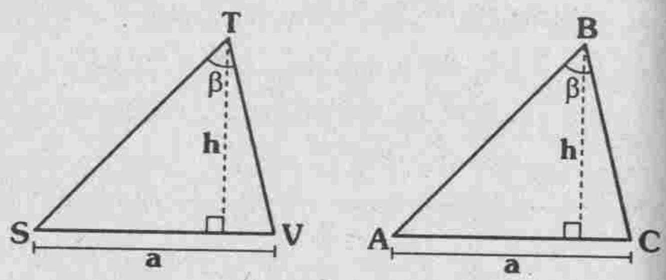


$\Delta MNL \cong \Delta VWZ$



Se cumple:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Se cumple:

$\Delta STV \cong \Delta ABC$

- Si consideramos diversas combinaciones encontraremos más condiciones para la congruencia, así por ejemplo:

- *Dos triángulos son conguentes si tienen dos medianas y un lado respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres medianas respectivamente de igual medida.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen dos alturas y un lado respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres alturas respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen dos bisectrices y un lado respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres bisectrices interiores respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si sus tres bisectrices exteriores son respectivamente de igual longitud.*

- Ahora si consideramos elementos como los exradios e inradios, áreas y perímetros tendremos más criterios (tres condiciones mínimas, como se ha mencionado):

- *Si los tres exradios de dos triángulos son de igual longitud los triángulos son congruentes.*
- *Si dos triángulos tienen un lado en común, el ángulo opuesto de igual medida y el inradio; respectivamente igual, los triángulos son congruentes.*
- *Si dos triángulos tienen igual perímetro, igual área e igual un ángulo, entonces los triángulos son congruentes.*

Nota

El lector puede notar que hay muchas condiciones para verificar la congruencia, algunas de estas demostraciones tienen que ver con capítulos como "circunferencia", "relaciones métricas" y "áreas", en dichas publicaciones se realizará tales demostraciones.

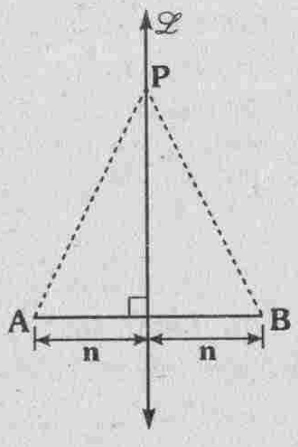
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $P \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces se cumple:

$$\boxed{PA = PB}$$

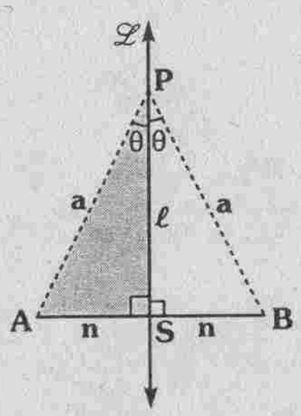


Demostración:

Del gráfico, tenemos:

$$\triangle ASP \cong \triangle BSP \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow \quad AP = PB$$

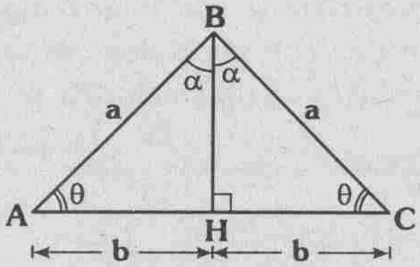


Además:

$$m\measuredangle APS = m\measuredangle BPS$$

Observación

- *En el gráfico anterior, notemos que el triángulo APB es isósceles y que el segmento PS, es altura, bisectriz y a su vez mediana, relativas a la base.*
- *Lo último nos sugiere un trazo en el triángulo isósceles: la altura relativa a la base.*

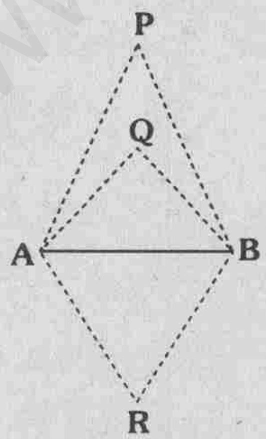


En el gráfico, $\overline{BH}$ *es altura, entonces.* $\overline{BH}$ *es mediana y altura.*

- *También todos las combinaciones son ciertas, es decir: "si en el triángulo isósceles se traza la mediana relativa a la base es también altura y bisectriz, lo mismo para la bisectriz".*

TEOREMA

Si un conjunto de puntos coplanares con un segmento, equidistan de los extremos de dicho segmento, entonces dichos puntos están en la mediatriz.

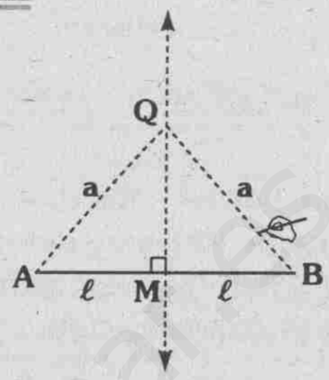


En el gráfico, si:

$$PA=PB \quad , \quad QA=QB \quad , \quad RA=RB$$

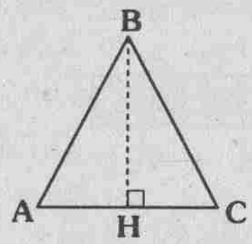
$\Rightarrow$ P, Q y R están en la mediatriz de $\overline{AB}$.

Demostración:



- Bastará analizar uno de los triángulos por ejemplo: AQB, en él se traza la mediana, por el criterio anterior o por LLL: $\Delta AQM \cong \Delta BQM \Rightarrow \overline{QM}$ es también altura, es decir $\overleftrightarrow{QM}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.
- Veamos algunas consecuencias:

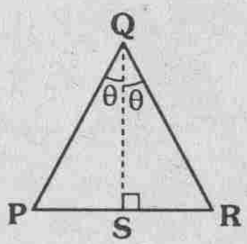
TEOREMA



Si $\overline{BH}$ es altura y mediana, entonces:

$$\boxed{AB=BC}$$

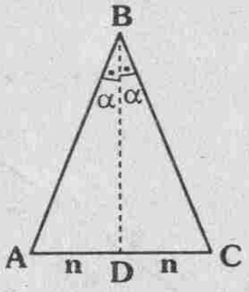
TEOREMA



Si $\overline{QS}$ es altura y bisectriz, entonces:

$$\boxed{PQ=QR}$$

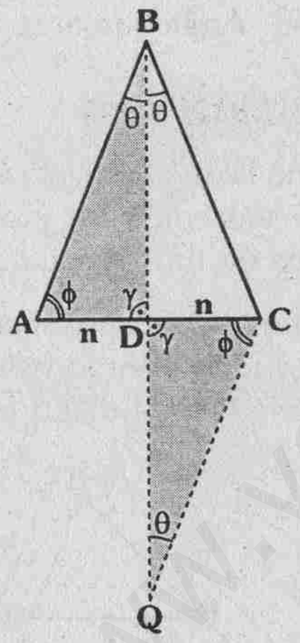
TEOREMA



Si $\overline{BD}$ es mediana y bisectriz, entonces:

$$\boxed{AB = BC}$$

Demostración:



- Se prolonga $\overline{BD}$ y se traza:

$$\overline{CQ} // \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \ m\measuredangle DQC = \theta$$

- ΔBQC: es isósceles

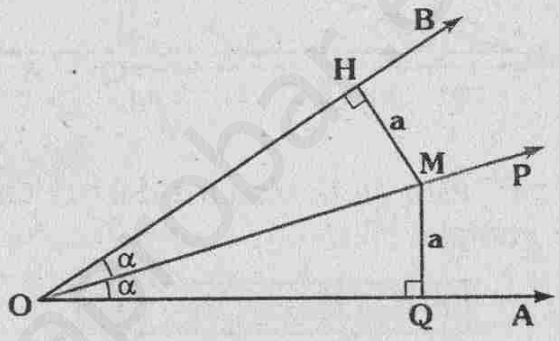
$$\Rightarrow \ BC = CQ$$

- $\Delta BAD \cong \Delta QCD$: (ALA)

$$\Rightarrow \ AB = BC$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

Todo punto de la bisectriz de un ángulo, tiene igual distancia (*) hacia los lados de dicho ángulo.



En el gráfico, $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del $\measuredangle AOB$ y $M \in \overrightarrow{OP}$, se cumple:

$$\boxed{MH = MQ}$$

Demostración:

- Si completamos medidas angulares, tenemos:

$$m\measuredangle OMH = m\measuredangle OMQ = 90° - \alpha$$

$$\Rightarrow \ \triangle OMH \cong \triangle OMQ \ \text{(ALA)}$$

$$\Rightarrow \ MH = MQ$$

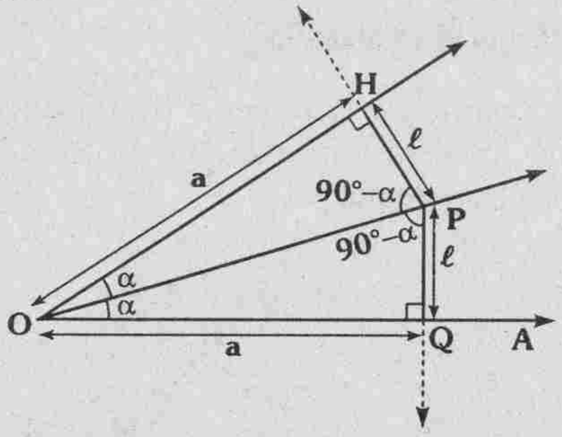
- Además:

$$\boxed{OH = OQ}$$

(*) sobre el término "distancia" ver anexos.

Observación

Es común *encontrar en muchos textos el teorema como se indica a continuación:*



Si "P" está en la bisectriz del $\measuredangle HOB$, se cumple:

$$\boxed{PH = PQ \ \text{ y } \ OH = OQ}$$

Pero notar que no son dos resultados, los cuales se deducen fácilmente de la congruencia.

Pues:

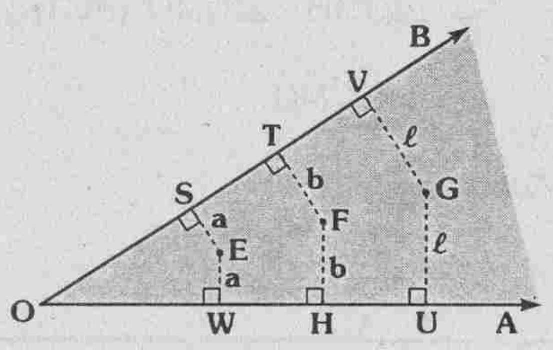
P *está en la bisectriz del* $\measuredangle HOQ$ *y*

O *está en la bisectriz del* $\measuredangle HPQ$

Cumpliéndose el enunciado expuesto.

TEOREMA

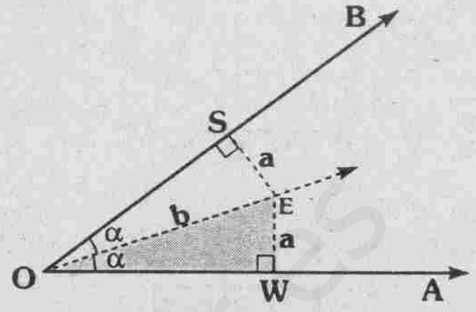
Si un conjunto de puntos están en la región interior de un ángulo y equidistan de los lados del ángulo, entonces dichos puntos están en la bisectriz del ángulo dado.



Si: $ES = EW$, $FT = FH$ y $GV = GU$

$\Rightarrow$ E, F y G están en la bisectriz del $\measuredangle AOB$.

Demostración:



- $\triangle OSE \cong \triangle OWE$

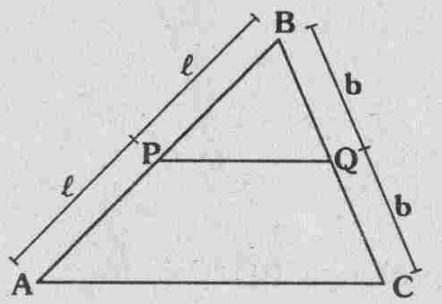
$$\Rightarrow m\measuredangle SOE = m\measuredangle EOA$$

- Es decir "E" está en la bisectriz del ángulo AOB. Análogamente para F y G.

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

Se denomina base media al segmento que tiene como extremos los puntos medios de dos lados de un triángulo.

En todo triángulo la base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.



En el gráfico:

$$AP = PB \quad \text{y} \quad BQ = QC$$

$\overline{PQ}$: base media

Se cumple:

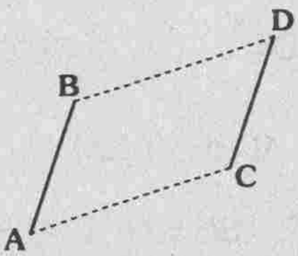
$$\boxed{\overline{PQ} \,//\, \overline{AC} \quad \text{y} \quad PQ = \frac{AC}{2}}$$

Demostración:

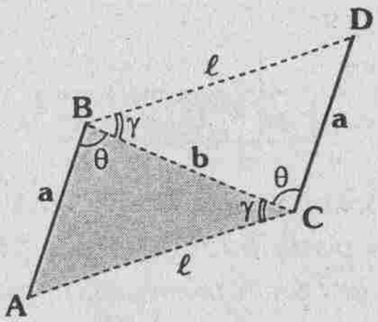
Paso I

Previamente demostremos lo siguiente.

Si: $\overline{AB}//\overline{CD}$ y $AB=CD$.



Se cumple: $BD = AC$ y $\overline{BD}//\overline{AC}$

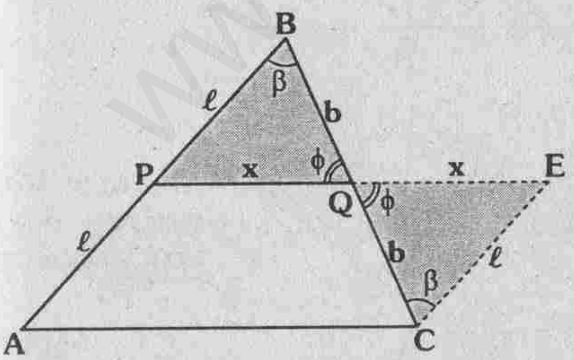


Por ángulos entre paralelas:

$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BCD \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DCB$ (LAL)

$\Rightarrow AC=BD$ y $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle DBC \Rightarrow \overline{BD}//\overline{AC}$

Paso II



Se traza desde C una paralela a $\overline{AB}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{PQ}$ en E.

$$\Rightarrow \Delta BQP \cong \Delta CQE \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow QE = QP = x$$

$$\text{y} \quad PB = CE = \ell$$

Luego, como $AP = CE$ y $\overline{AP}//\overline{CE}$, por la demostración del paso I:

$$AC = PE \Rightarrow AC = 2(PQ)$$

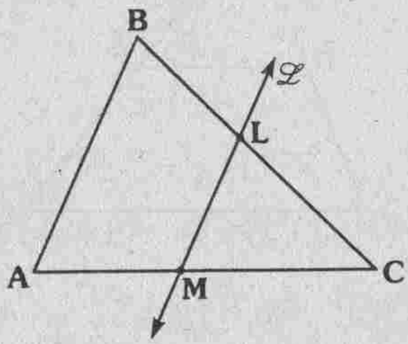
$$\Rightarrow PQ = \frac{AC}{2}$$

$$\overline{AC}//\overline{PE} \Rightarrow \overline{AC}//\overline{PQ}$$

Ahora analicemos los recíprocos:

TEOREMA

Si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta corta en el punto medio al tercer lado.

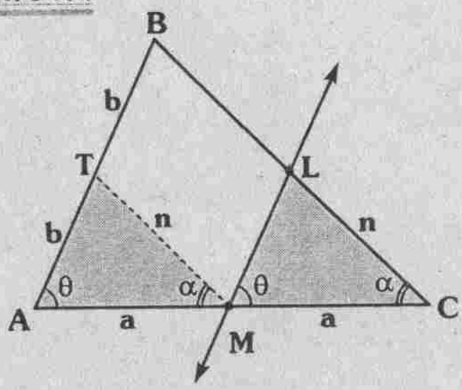


En el gráfico:

Si $AM=MC$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}}//\overline{AB}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{ML} \text{ es base media}}$$

Demostración:



- Se ubica T punto medio de $\overline{AB}$, con ello se tendrá $\overline{MT}$ es base media, entonces:

$$\overline{MT} // \overline{CB} \quad \text{y} \quad BC = 2n$$

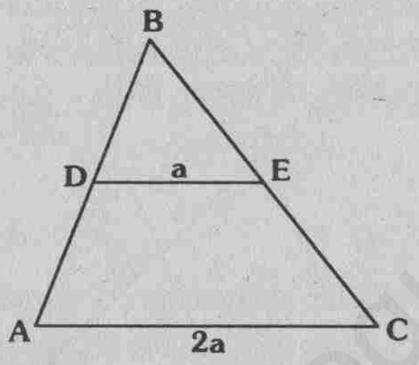
- $\Delta ATM \cong \Delta MLC$ (ALA) $\Rightarrow$ $CL = n$

- Como $BC = 2n$ $\Rightarrow$ $BL = n$

$$\therefore \; BL = LC$$

TEOREMA

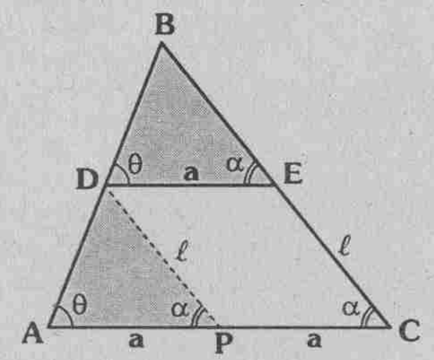
Si un segmento tiene sus extremos en los lados de un triángulo y cumple que es paralelo al tercer lado y tiene por longitud la mitad del tercer lado, entonces dicho segmento es la base media.



Si: $\overline{DE} // \overline{AC}$ y $DE = \dfrac{AC}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{DE} \text{ es base media}}$$

Demostración:



- Se ubica P, punto medio de $\overline{AC}$, se tendrá ahora:

$$DE = PC \quad \text{y} \quad \overline{DE} // \overline{PC}$$

por teorema (Paso I):

$$PD = \ell \quad \text{y} \quad \overline{PD} // \overline{CE}$$

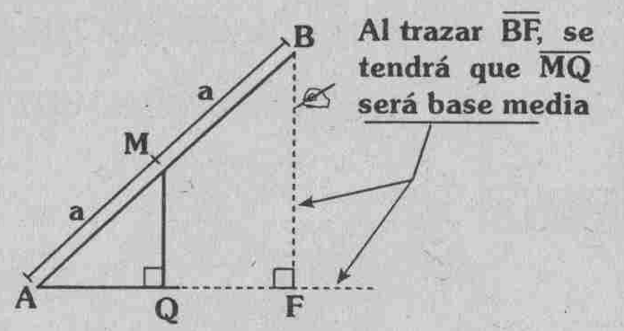
- $\Delta ADP \cong \Delta DBE$ (ALA)

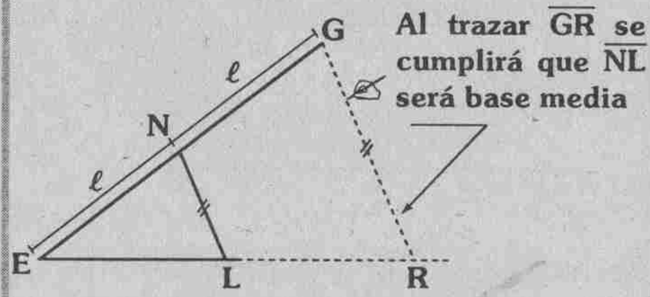
$$\Rightarrow DP = BE = \ell \quad \text{y} \quad AD = DB$$

$$\therefore \; \overline{DE} \text{ es base media.}$$

Observación

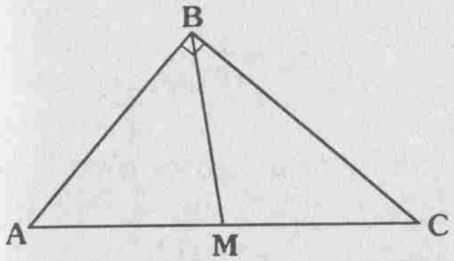
Los teoremas anteriores, nos sugieren algunas posibilidades en los problemas donde encontremos algún punto medio:





TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

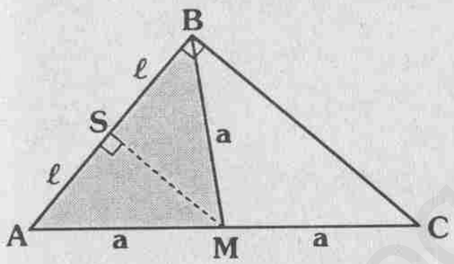
El segmento que une el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo y el punto medio de la hipotenusa, mide la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En el gráfico, AM=MC, entonces:

$$\boxed{BM = \frac{AC}{2}}$$

Demostración:



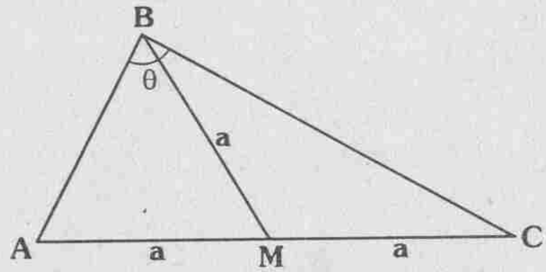
- Se ubica S punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{SM}$ es base media:
- Luego: $\overline{SM} \perp \overline{AB}$
- Por teorema de la mediatriz MA=MB.

$$\therefore \boxed{MB = \frac{AC}{2}}$$

- Además: los triángulos ABM y BMC con isósceles.

TEOREMA

Si en un triángulo la mediana mide la mitad de la longitud del lado al cual es relativo, entonces dicho triángulo es rectángulo (*recto en el vértice del cual se traza la mediana*).

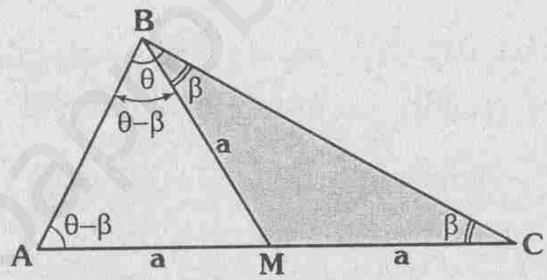


En el gráfico, AM = MC = MB

Se cumple:

$$\boxed{\theta = 90^\circ}$$

Demostración:



- ΔBMC y ΔABM : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle MBC = m\sphericalangle MCB = \beta$$

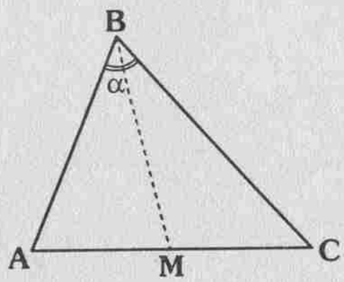
y $$\Rightarrow m\sphericalangle MBA = m\sphericalangle BAM = \theta - \beta$$

- En ΔABC : $\beta + \theta + \theta - \beta = 180^\circ$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

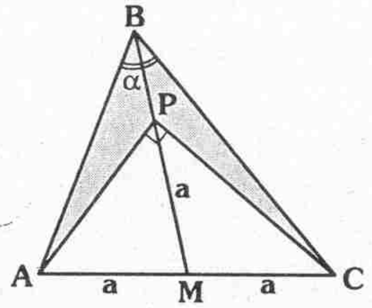
$$\boxed{\frac{AC}{2} < BM \iff \alpha < 90^\circ}$$

Demostración:

La demostración consta de dos partes:

Parte I

- Si: $\dfrac{AC}{2} < BM \Rightarrow \alpha < 90°$



- Sea $AC = 2a \Rightarrow a < BM$, es decir existe en $\overline{MB}$ un punto P tal que $MP = a$.
- Se tiene entonces $AM = MP = MC$

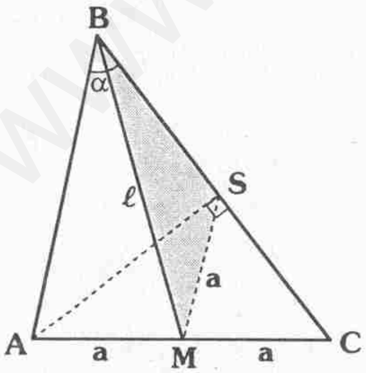
$$\Rightarrow m\measuredangle APC = 90°$$

- En la parte sombreada:

$$\alpha < 90°$$

Parte II

- Si $\alpha < 90° \Rightarrow \dfrac{AC}{2} < BM$

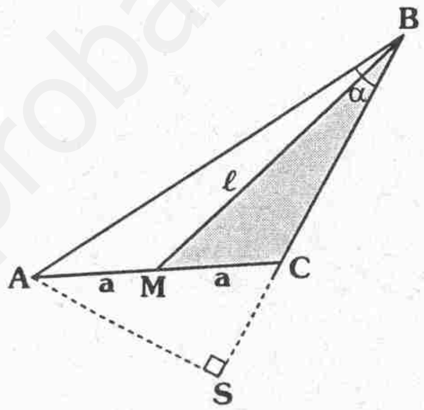


- Como $\alpha < 90°$, al trazar la altura desde A, entonces el pie de dicha altura estará en $\overline{BC}$ o en su prolongación.
- En el $\triangle ASC$, por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: $SM = a$
- Se tiene: $m\measuredangle BSM > 90° \Rightarrow a < \ell$

$$\therefore \frac{AC}{2} < BM$$

Observación

Si el pie de la altura está en la prolongación de $\overline{BC}$ o en "C" también se cumple:

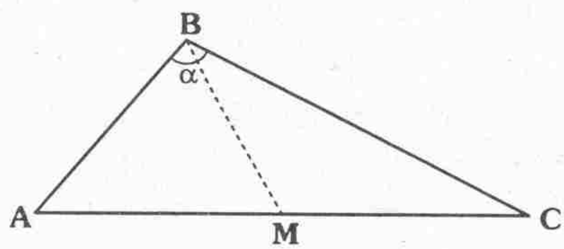


$\ell > a$; *pues* $m\measuredangle ACB > 90°$

es decir: $BM > \dfrac{AC}{2}$

TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana:



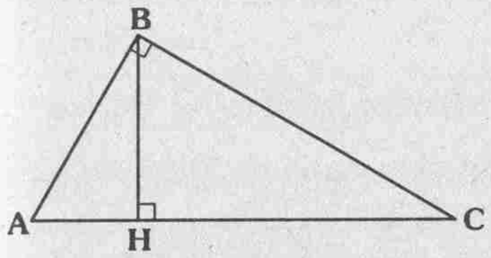
Se cumple:

$$\boxed{\frac{AC}{2} > BM \Leftrightarrow \alpha > 90°}$$

La demostración se análoga a las anteriores, queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

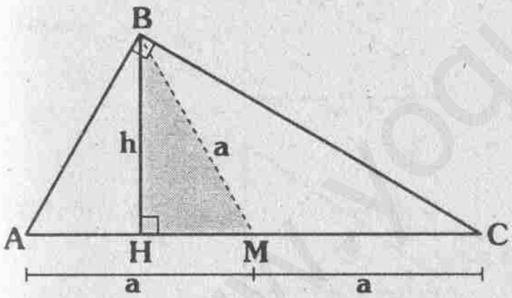
La longitud de la altura relativa a la hipotenusa es menor o igual que la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En el gráfico se cumple:

$$\boxed{BH \le \frac{AC}{2}}$$

Demostración:

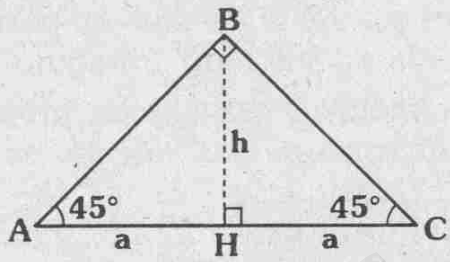


- Cuando se traza la mediana $\overline{BM}$ relativa a $\overline{AC}$, para M hay tres posibilidades (no dejarse llevar por el gráfico), que esté en $\overline{AH}$, o $\overline{HB}$ o que coincida con H.

- Sea M en $\overline{HC}$, en $\triangle BHM$: $BH<BM$

$$\Rightarrow \; h<a \;\Rightarrow\; BH<\frac{AC}{2} \qquad \text{... (I)}$$

- Si $M=H$, es decir la mediana es altura:



- $\triangle ABC$ es isósceles $\Rightarrow a=h$

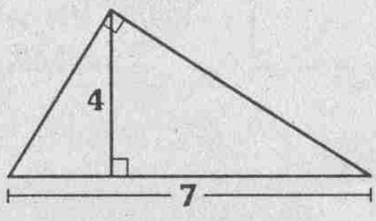
$$\Rightarrow BM=\frac{AC}{2} \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$BM\le\frac{AC}{2}$$

Observación

El último teorema nos da una condición más de existencia para triángulos rectángulos, la relación que debe existir entre la altura y la hipotenusa, por ejemplo el siguiente triángulo "no existe".



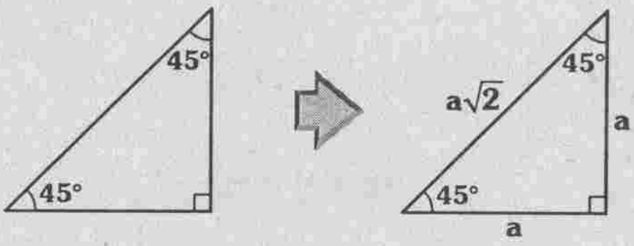
Pues no cumple:

$$4\le\frac{7}{2}$$

TRIANGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

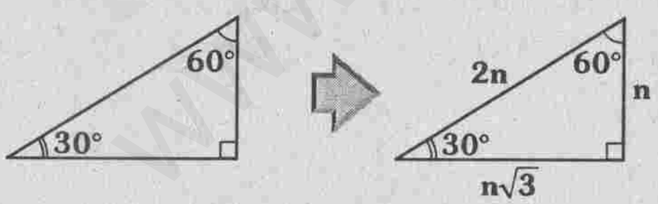
Son un conjunto de triángulos rectángulos donde son conocidas las medidas angulares y a partir de ellas es posible hallar las proporciones de sus lados y viceversa. En realidad en todo triángulo conociendo sus medidas angulares, con cálculos trigonométricos se halla las proporciones, sino que en el siguiente grupo de $\triangle_s$ las razones son sencillas, además se presentan con frecuencia en los ejercicios.

⊿Notable de 45°:

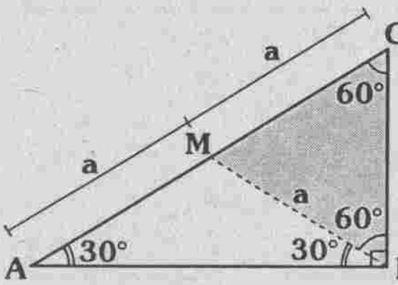


- Vemos que es el único triángulo rectángulo isósceles, por ello los catetos tienen igual longitud y por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa tiene por longitud: "$a\sqrt{2}$".
- Si partimos de un triángulo rectángulo de catetos de igual longitud o cateto e hipotenusa en la razón de 1 a $\sqrt{2}$ en ambos casos de comprueba que los ángulos agudos miden 45°.

⊿Notable de 30° y 60°:



Demostración:



- En el ⊿ABC se traza la mediana BM:

$\Rightarrow BM = a$

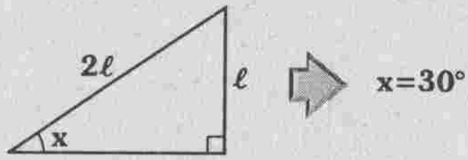
ΔBMC equilátero $\Rightarrow BC = a$

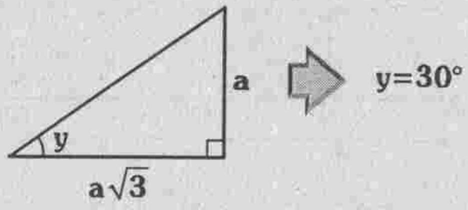
- Por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{AB = a\sqrt{3}}$$

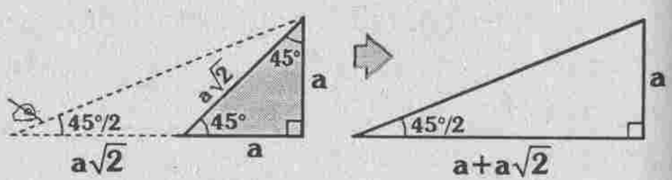
Nota

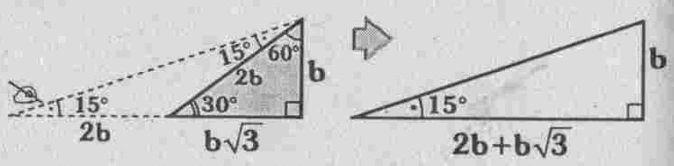
En cada uno de los siguientes casos, se prueba el resultado indicado.





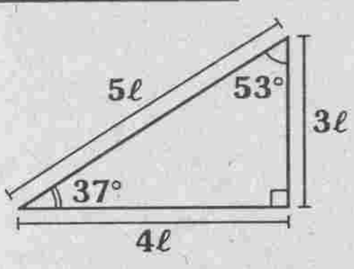
- De los triángulos rectángulos de 45°, 30° y 60°, se deducen los siguientes.





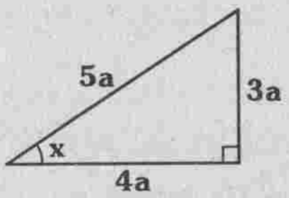
TRIÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS

⊿Notable de 37° y 53°:



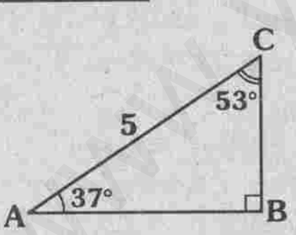
Observación

- *Las proporciones de los lados 3:4:5 nos muestran que* ***es el único triángulo rectángulo en el que los lados están en progresión aritmética****.*
- *En cuanto a los valores aproximados podemos considerar, los siguientes casos:*



Con uso de calculadora:

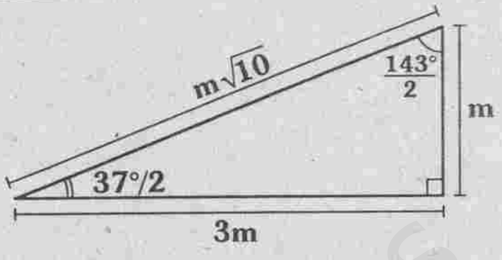
$$\boxed{x = 36{,}869°} \Rightarrow x \approx 37°$$



$$AB = 3{,}993 \approx 4$$
$$BC = 3{,}009 \approx 3$$

- *Debido a su presencia en muchos ejercicios lo usaremos en los problemas como "exactos", pero vemos que en realidad no lo son.*
- *Los triángulos que se deducen a partir de él serán también aproximados.*

⊿Notable de 37°/2 y 143°/2:



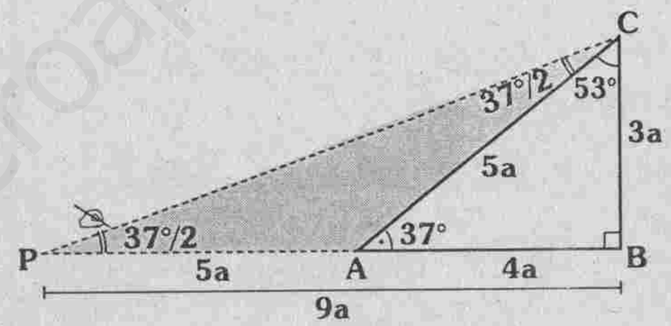
Notar:

$$\frac{37°}{2} = 18{,}5° = 18°30'$$

$$\frac{143°}{2} = 71{,}5° = 71°30'$$

Demostración:

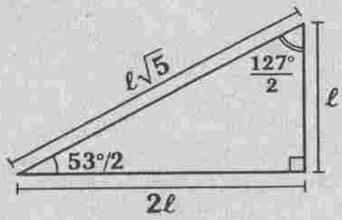
- Partimos del triángulo de 37° y 53°.



- Se prolonga $\overline{BA}$, tal que $AP = AC = 5a$

  ΔPAC isósceles $\Rightarrow$ $m\sphericalangle APC = \dfrac{37°}{2}$
- Luego: $PB = 9a$ y $BC = 3a$
- Es decir: $PB = 3(BC)$
- Sea $BC = m$ $\Rightarrow$ $PB = 3m$, por teorema de Pitágoras: $PC = m\sqrt{10}$

⊿Notable de 53°/2 y 127°/2:



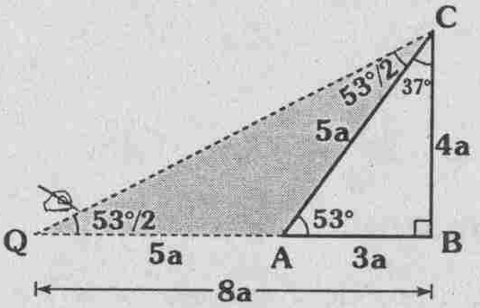
Considerar:

$$\frac{53^\circ}{2} = 26{,}5^\circ = 26^\circ 30'$$

$$\frac{127^\circ}{2} = 63{,}5^\circ = 63^\circ 30'$$

Demostración:

Partimos del ⊿ de 37° y 53°.



Se prolonga $\overline{BA}$ hasta Q tal que $AQ = 5a$.

$\Rightarrow \Delta QAC$ es isósceles, luego:

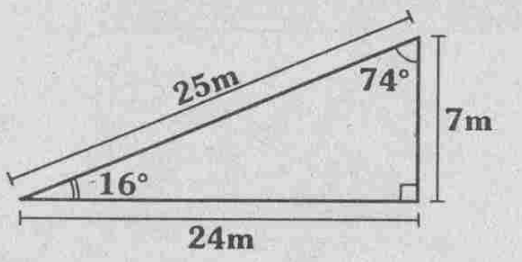
$$m\measuredangle CQA = m\measuredangle QCA = \frac{53^\circ}{2}$$

- Se tendrá: $QB = 8a$ y $BC = 4a$
- Es decir: $QB = 2(BC)$

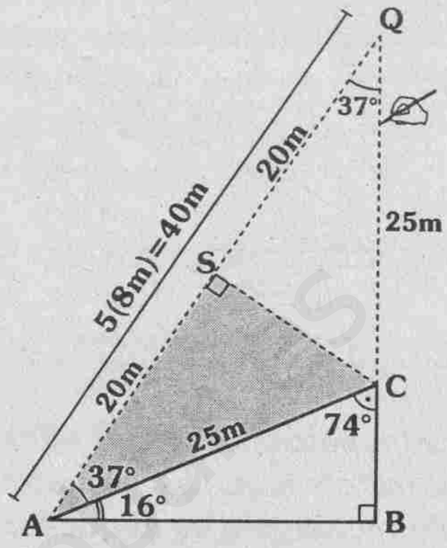
Finalmente hacemos $BC = \ell$ y $\Rightarrow QB = 2\ell$ por teorema de Pitágoras:

$$QC = \ell\sqrt{5}$$

⊿Notable de 16° y 74°:



Demostración:



- Como $74^\circ = 2(37^\circ)$, entonces se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q tal que:

$$CQ = AC = 25m$$

- ΔACQ isósceles en este triángulo se traza la altura $CS \Rightarrow AS = SQ$.
- ⊿ASC notable de 37°

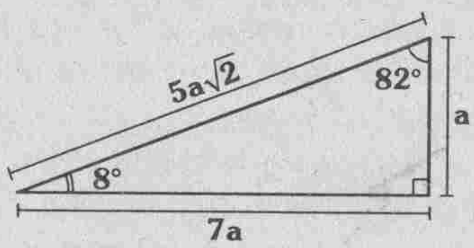
$$\Rightarrow AS = 20m$$

- Con ello el ⊿ABQ que es notable de 37°, tiene hipotenusa 40m.

$$\Rightarrow AB = 3(8m) = 24m$$

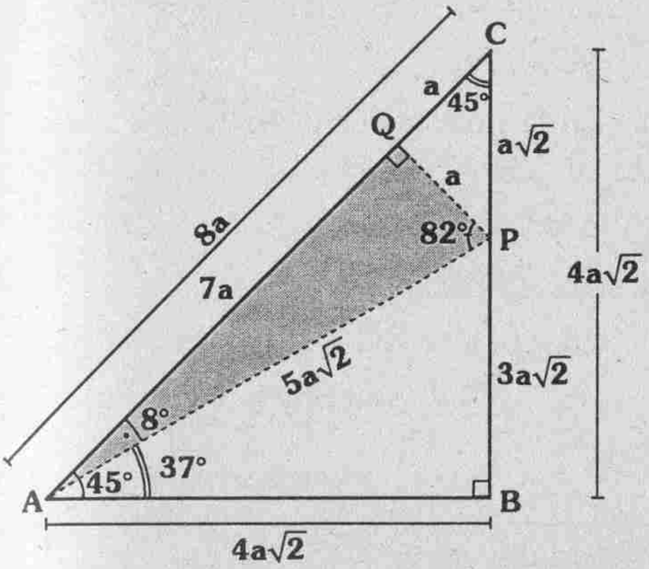
$$\text{y} \quad BQ = 4(8m) = 32m \Rightarrow BC = 7m$$

⊿Notable de 8° y 82°:



Demostración:

- Para la demostración se puede proceder similar que en la obtención del ⊿ de 37°/2 ó 53°/2, a partir del ⊿16° y 74° pues: $16° = 2(8°)$, otra forma es partir así:



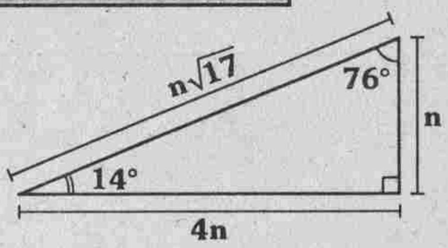
- Del ⊿ABC de 45°, cuyos catetos miden $4a\sqrt{2}$, entonces $AC = 8a$.
- Se ubica P en $\overline{BC}$ tal que:

  $PB = 3a\sqrt{2} \Rightarrow PC = a\sqrt{2}$, $m\sphericalangle PAB = 37°$

  y $m\sphericalangle PAC = 8°$.
- Se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$ (Q en $\overline{AC}$).
- En ⊿PQC notable de 45° $\Rightarrow PQ = QC = a$
- En ⊿AQP se observa:

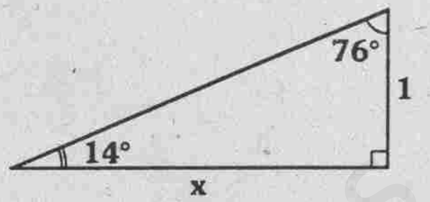
  $AQ = 7a$, $PQ = a$ y $AP = 5a\sqrt{2}$

⊿Notable de 14° y 76°:



Observación

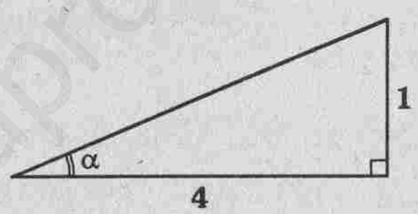
Este triángulo también es aproximado, notemos:



Con uso de calculadora:

$$x = 4,011$$

$$\Rightarrow \boxed{x \approx 4}$$



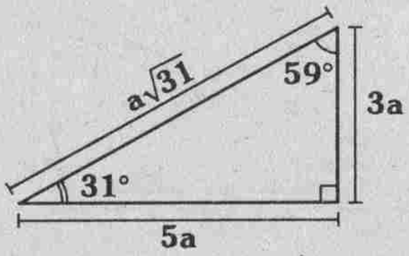
$$\alpha = 14,036°$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \approx 14°}$$

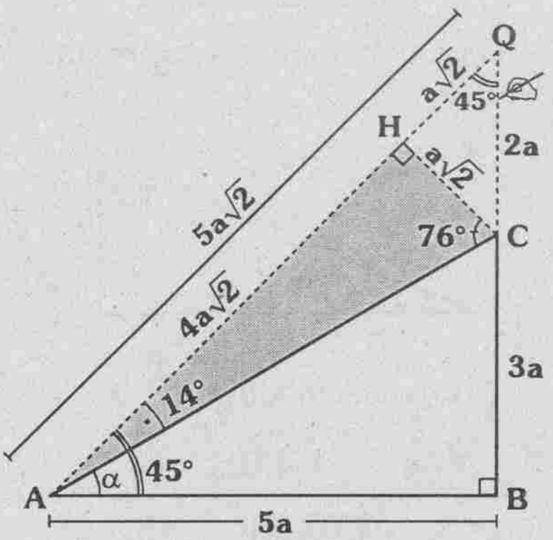
OTROS TRIÁNGULOS NOTABLES

Los siguientes resultados es producto de combinar las medidas angulares obtenidas anteriormente, cabe indicar que son "muy aproximados".

⊿Notable de 31° y 59°:

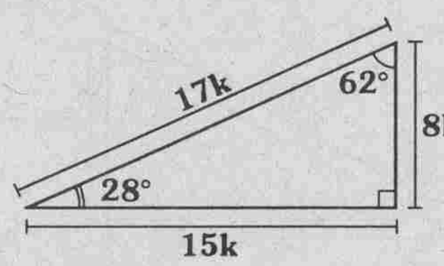


Demostración:

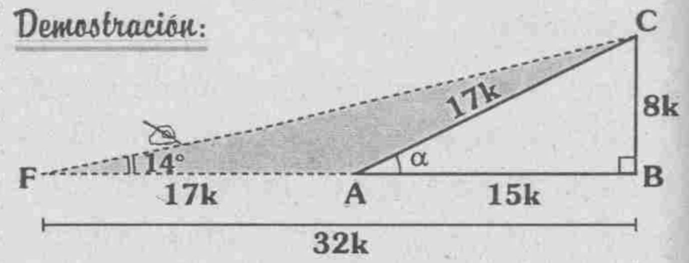


- Partimos del ⊿ABC cuyos catetos miden 3a y 5a.
- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q, tal que:
  $CQ = 2a \Rightarrow BQ = AB = 5a$ y $AQ = 5a\sqrt{2}$
- ⊿ABQ es notable de 45°.
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AQ}$, con H en $\overline{AQ}$.
- En ⊿CHQ: $HQ = QC = a\sqrt{2}$
  $\Rightarrow AH = 4a\sqrt{2}$
- El ⊿AHC es notable de 14° y 76°
  $\Rightarrow \alpha = 45° - 14°$
  $\therefore \boxed{\alpha = 31°}$

⊿Notable de 28° y 62°:

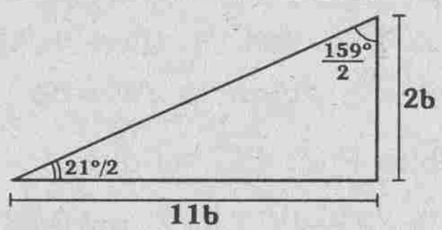


Demostración:



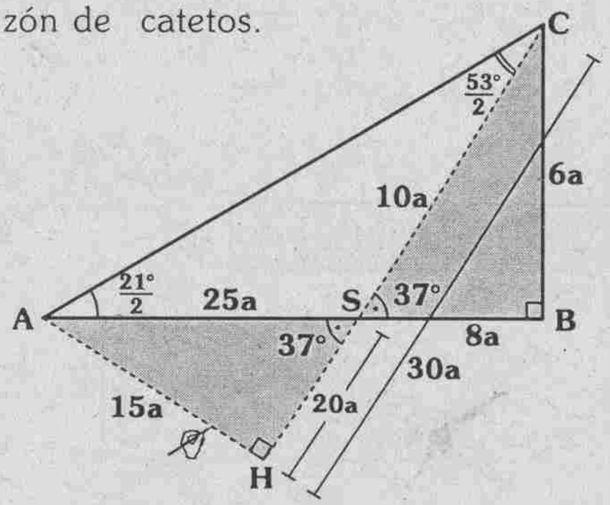
- Partimos del ⊿ABC, cuyos catetos miden 8k y 15k, por teorema de Pitágoras $AC = 17k$.
- En la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica F tal que $AF = 17k$.
  ΔAFC isósceles
- En ⊿FBC, notamos:
  $FB = 32k$ y $BC = 8k \Rightarrow FB = 4(BC)$
  $\Rightarrow m\sphericalangle BFC = 14°$
  $\therefore \boxed{\alpha = 28°}$

⊿Notable de 21°/2 y 159°/2:



Demostración:

- Partimos del ⊿ABC, donde $m\sphericalangle BAC = 21/2°$ probaremos, la razón de catetos.



- Se traza $\overline{CS}$, tal que:

$$m\sphericalangle ACS=\frac{53^\circ}{2}\ \Rightarrow\ m\sphericalangle CSB=37^\circ$$

- Se traza $\overline{AH}\perp\overleftrightarrow{CS}$, sea $AH=15a$

Entonces:

$\triangle AHS$: $HS=20a$ y $AS=25a$

$\triangle AHC$: $HC=30a$

$\Rightarrow SC=10a$

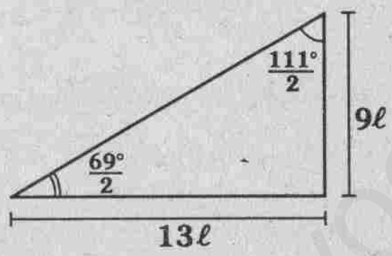
$\triangle SBC$: $SB=8a$ y $BC=6a$

Luego: $AB=33a$ y $BC=6a$

$$\Rightarrow\ \frac{AB}{BC}=\frac{11}{2}$$

$\therefore\ AB=11b$ y $BC=2b$

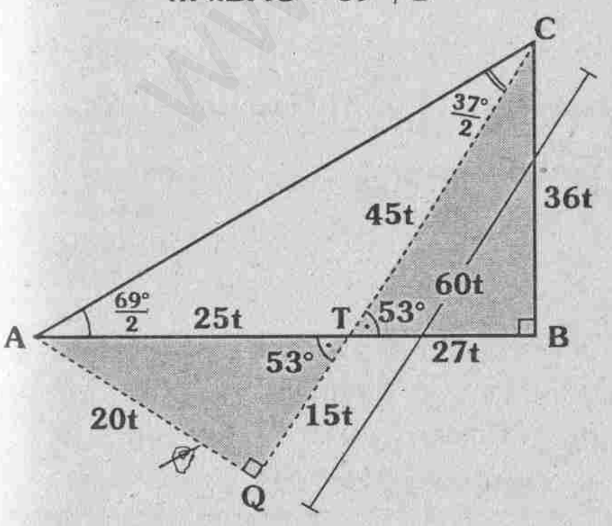
$\triangle$Notable de 69°/2 y 111°/2:



Demostración:

- Partimos del $\triangle ABC$ tal que:

$$m\sphericalangle BAC=69^\circ/2$$



- Se traza $\overline{CT}$, tal que:

$$m\sphericalangle ACT=\frac{37^\circ}{2}\ \Rightarrow\ m\sphericalangle BTC=53^\circ$$

- Se traza $\overline{AS}\perp\overleftrightarrow{CT}$, sea $AQ=20t$

$\triangle ATQ$: $QT=15t$ y $AT=25t$

$\triangle AQT$: $QC=60t\Rightarrow TC=45t$

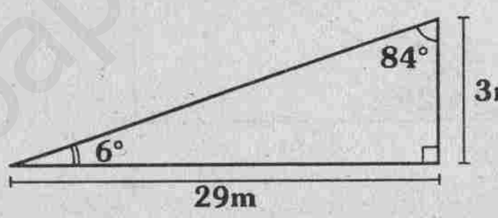
$\triangle CBT$: $TB=27t$ y $BC=36t$

- Luego: $AB=52t$ y $BC=36t$

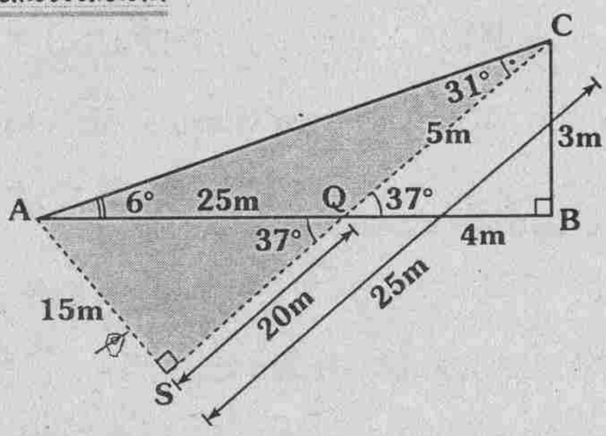
$$\Rightarrow\ \frac{AB}{BC}=\frac{13}{9}$$

$\therefore\ AB=13\ell$ y $BC=9\ell$

$\triangle$Notable de 6° y 84:



Demostración:



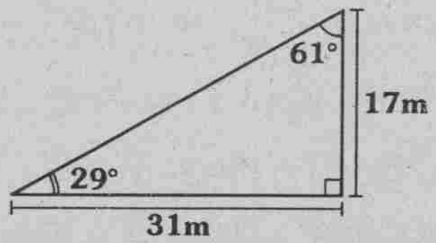
- $\triangle ASC$: notable de 31°.
- Sea: $AS=15m\ \Rightarrow\ SC=25m$
- $\triangle ASQ$ y $\triangle QBC$: notable de 37°

$SQ=20m$ y $AQ=25m$

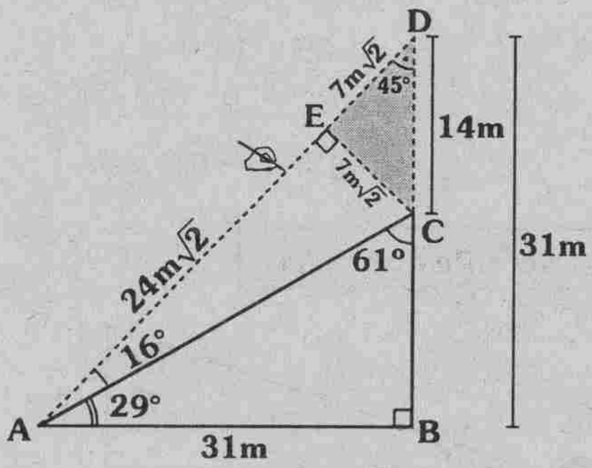
$QC=5m\ \Rightarrow\ QB=4m$ y $BC=3m$

$\Rightarrow CB=3m$ y $AB=29m$

⊿Notable de 29° y 61°:



Demostración:



- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta D tal que:

  $m\measuredangle BDA = 45° \Rightarrow m\measuredangle DAC = 16°$

- En ΔACD se traza la altura $\overline{CE}$, entonces:

  ⊿AEC, notable de 16°:

  $\Rightarrow EC = 7m\sqrt{2}$ y $EA = 24m\sqrt{2}$

  ⊿ECD, notable de 45°:

  $\Rightarrow ED = 7m\sqrt{2}$ y $CD = 14m$

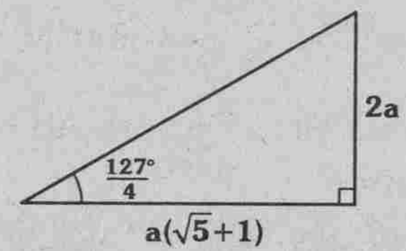
  ⊿ABD: notable de 45°:

  $\Rightarrow$ como $AD = 31m\sqrt{2}$

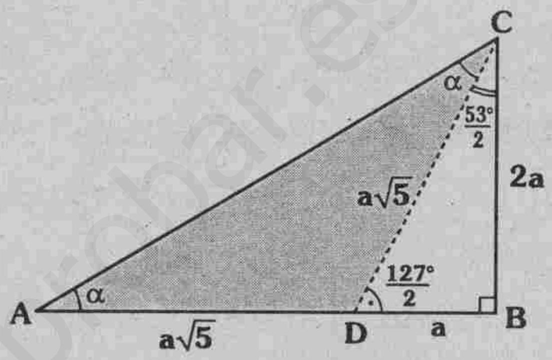
  $\Rightarrow AB = BD = 31m \Rightarrow BC = 17m$

- Luego: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{31}{17}$

⊿Notable de 127°/4:



Demostración:



- Partimos del ⊿ABC, donde:

  $BC = 2a$ y $AB = a + a\sqrt{5}$

- Se traza $\overline{CD}$, tal que $DB = a$

  $\Rightarrow AD = a\sqrt{5}$

- El ⊿DBC es notable de 53°/2

  $\Rightarrow DB = a\sqrt{5}$

- ΔADC : isósceles $\Rightarrow \alpha = \dfrac{127°}{4}$

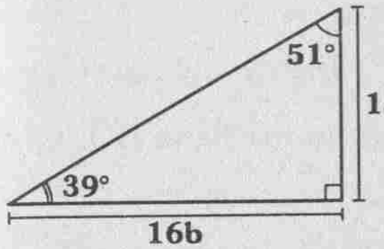
Observación

Del último gráfico, notamos:

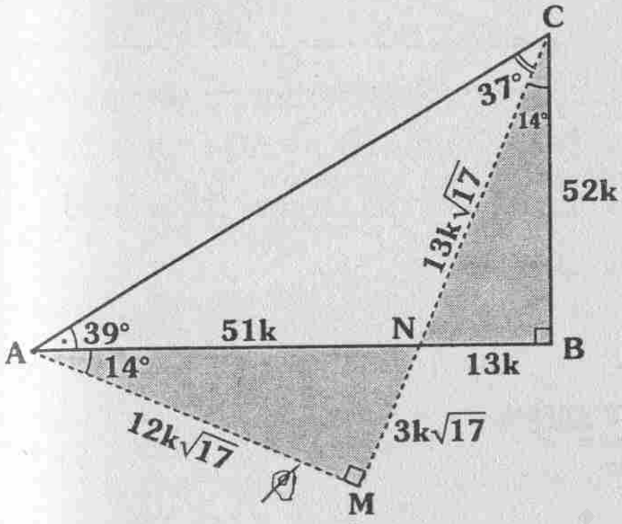
$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

veremos en el capítulo de polígonos regulares que dicho número se denomina "Número aúreo". También $\overline{BC}$ *es sección aúrea de* $\overline{AB}$.

⊿Notable de 39°/51:



Demostración:



- Se parte del ⊿ABC, tal que $m\measuredangle BAC = 39°$, en el cual se traza $\overline{CN}$ tal que $m\measuredangle BCN = 14°$

  $\Rightarrow\ m\measuredangle ACN = 37°$

- Se traza: $\overline{AM} \perp \overline{CN}$ (M en $\overrightarrow{CN}$)
- Sea: $AM = 12k\sqrt{17}$

  ⊿AMN: $NM = 3k\sqrt{17}$ y $AN = 51k$

  ⊿AMC: $MC = 16k\sqrt{17} \Rightarrow NC = 13k\sqrt{17}$

  ⊿NBC: $NB = 13k$ y $BC = 52k$

- Finalmente:

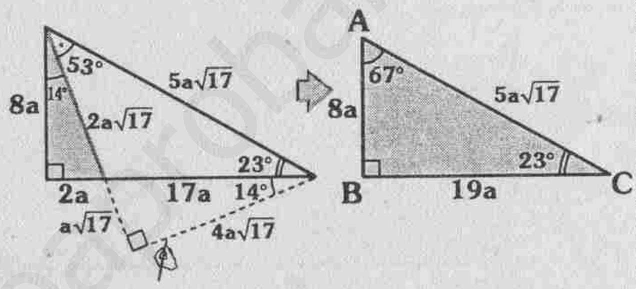
  $BC = 52k$ y $AB = 64k$

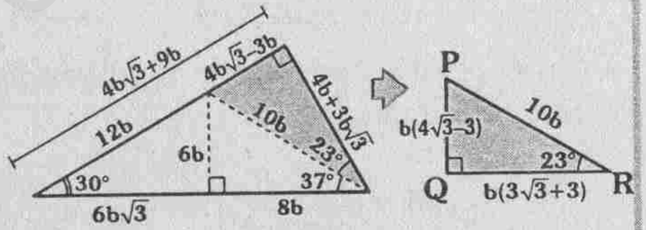
  $$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{13}{16}$$

  $\therefore\ BC = 13b$ y $AB = 16b$

Observación

- *No perder de vista que los triángulos que hemos deducido son aproximados.*
- *El estudiante puede hacer más combinaciones y encontrar sus propios triángulos notables, sin perder de vista que no son "exactos".*
- *Veamos el siguiente caso:*





Se ha obtenido dos triángulos rectángulos de 23°, con razonamientos lógicos, a partir de los triángulos anteriores, este resultado fue previsible pues se han utilizado triángulos aproximados.

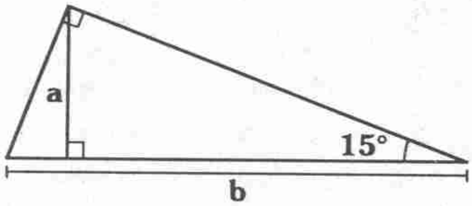
Notar:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{19} = 0{,}423 \\[2ex] \dfrac{PQ}{QC} = \dfrac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+4} = 0{,}427 \end{array}\right\} \dfrac{8}{19} \approx \dfrac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+4}$$

TEOREMAS RELACIONADOS CON LOS TRIÁNGULOS NOTABLES

TEOREMA

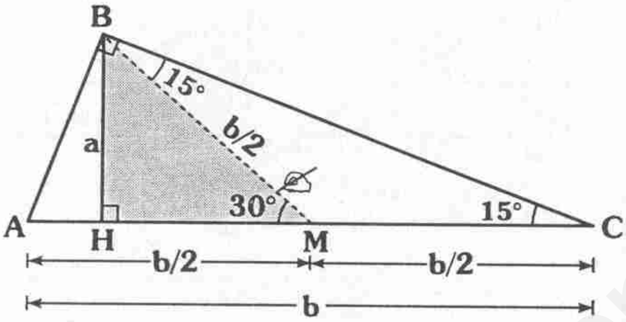
En el gráfico:



Se cumple:

$$\boxed{b = 4a}$$

Demostración:



- En el $\triangle ABC$, se traza la mediana BM, por teorema:

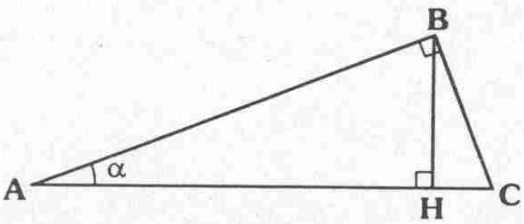
$$BM = \frac{AC}{2} \Rightarrow BM = \frac{b}{2}$$

- $\triangle BHM$ notable de 30°

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = 2a \qquad \therefore\ b = 4a$$

TEOREMA

En el gráfico, $AB > BC$ y $AC = 4(BH)$

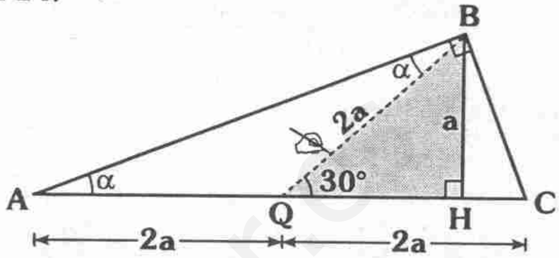


Se cumple:

$$\boxed{\alpha = 15°}$$

Demostración:

- Como $AB > BC \Rightarrow AH > HC$
- Al trazar la mediana BQ, **Q** estará en $\overline{AH}$.

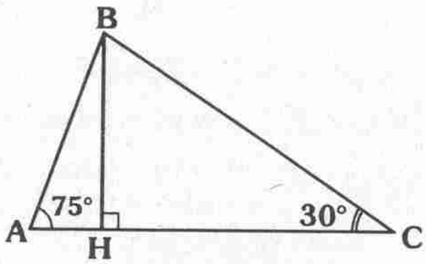


- Por teorema $BQ = AQ = QC = 2a$
- En el $\triangle QHB$, como $BQ = 2(BH)$
- Se cumple:

$$m\angle BQH = 30° \Rightarrow 2\alpha = 30°$$
$$\therefore\ \alpha = 15°$$

TEOREMA

En el gráfico:

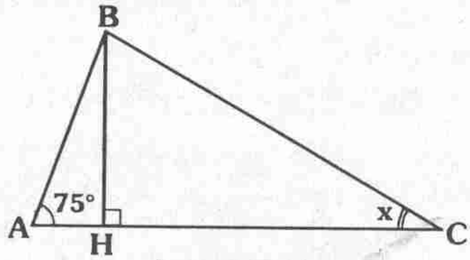


Se cumple: $\boxed{AC = 2(BH)}$

La demostración es directa, se deja para el lector.

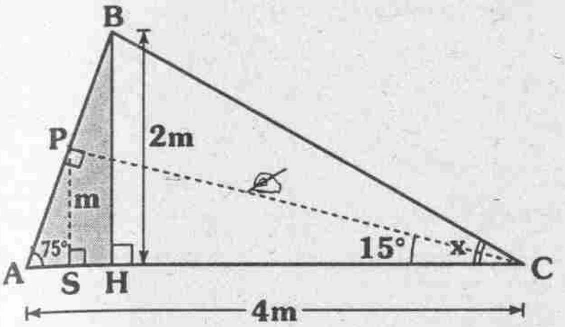
TEOREMA

En el gráfico, $AC = 2(BH)$



Se cumple: $\boxed{x = 30°}$

Demostración:



- Sea $AC = 4m \Rightarrow BH = 2m$
- Se traza la altura CP en el ΔABC.
- En $\triangle APC$, se traza $\overline{PS}$ altura relativa a $\overline{AC}$, por teorema:

$$AC = 4(PS) \Rightarrow PC = m$$

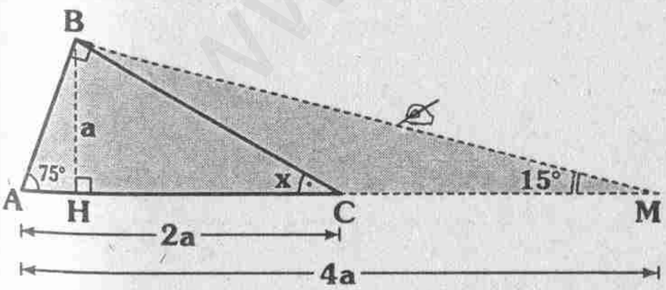
- En $\triangle AHB$, se tiene $\overline{BH} // \overline{PS}$ y $BH = 2(PS) \Rightarrow$ por teorema $\overline{PS}$ es base media, por tanto:

$$AP = PB$$

- En ΔABC: $AP = PB$ y $\overline{CP}$ es altura $\Rightarrow \Delta ABC$ es isósceles $\Rightarrow \overline{CP}$ es bisectriz interior.

$$\therefore\ x = 30°$$

Otra forma:

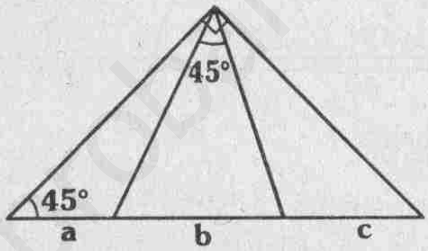


- Se traza $\overline{MB} \perp \overline{AB}$, donde M está en la prolongación de $\overline{AC}$.
- Por teorema: $AC = 4(BH) \Rightarrow AC = 4a$
- Luego: $AC = CM = 2a$
- En $\triangle ABM$, se tendrá $AC = CM$, es decir $\overline{BC}$ es mediana $\Rightarrow BC = 2a$
- En $\triangle BHC$ notable.

$$\therefore\ x = 30°$$

TEOREMA

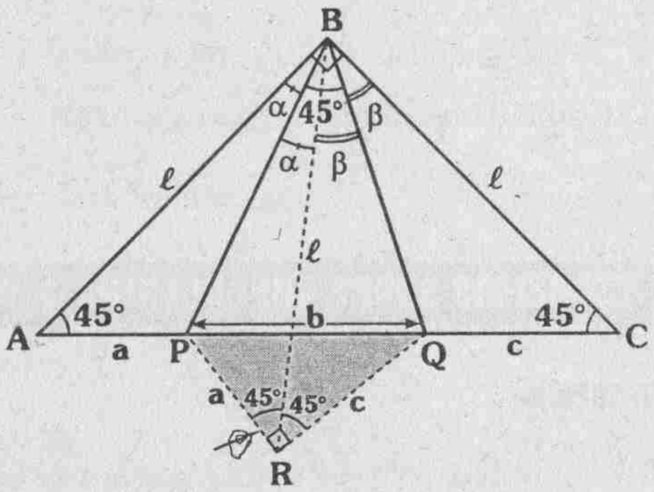
En el gráfico:



Se cumple:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2}$$

Demostración:



- Sea $m\measuredangle ABP = \alpha$ y $m\measuredangle QBC = \beta$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 45°$$

- Se traza $\overline{BR}$ tal que: $RB = \ell$ y $m\measuredangle PBR = \alpha \Rightarrow m\measuredangle RBQ = \beta$

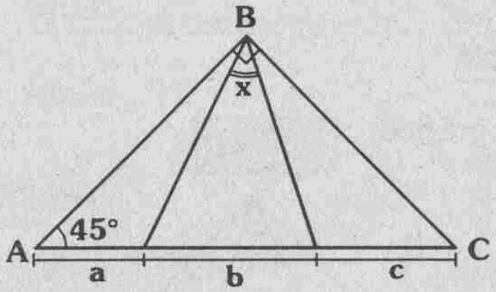
Luego: $\Delta ABP \cong \Delta RBP$ (LAL) $\Rightarrow PR = a$ y $m\sphericalangle PRB = 45°$

$\Delta RBQ \cong \Delta CBQ$ (LAL) $\Rightarrow RQ = c$ y $m\sphericalangle QRB = 45°$

En $\triangle PRQ$: $b^2 = a^2 + c^2$

TEOREMA

En el gráfico, si $b^2 = a^2 + c^2$

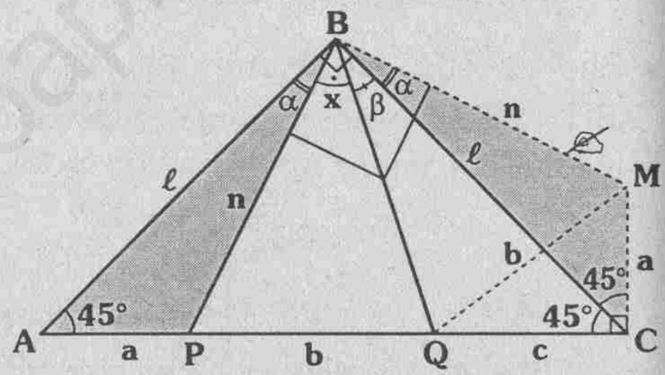


Entonces, se cumple:

$\boxed{x = 45°}$

Demostración:

- Se construye Δ BCM congruente con Δ BAP.
- Luego: $m\sphericalangle QCM = 90°$
- En $\triangle QCM$: $a^2 + c^2 = b^2$
- Por condición: $a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow QM = b$
- $\Delta PBQ \cong \Delta MBQ$ (LLL) $\Rightarrow x = \alpha + \beta$
- Como: $m\sphericalangle PBM = 90° \Rightarrow 2x = 90°$

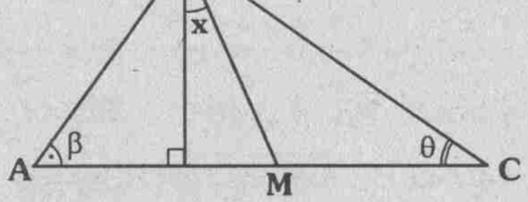


$\therefore x = 45°$

TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA

TEOREMA

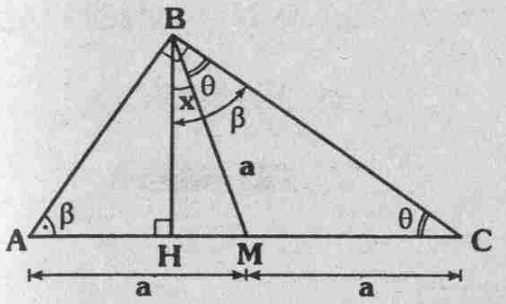
En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana para el $\triangle ABC$.



Se cumple:

$\boxed{x = \beta - \theta}$

Demostración:



- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$AM = MC = MB$$

- ΔMBC: isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle MBC = \theta$$

- En $\triangle ABC$, como $\overline{BH}$ es altura

$$\Rightarrow m\sphericalangle HBC = \beta$$

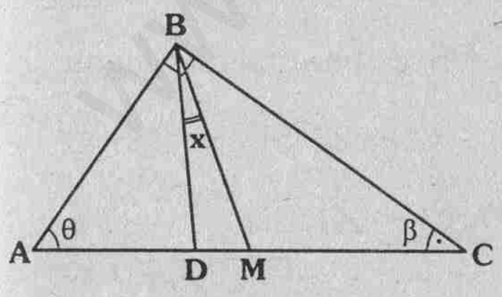
$$\Rightarrow x + \theta = \beta$$

$$\therefore\ x = \beta - \theta$$

TEOREMA

En el gráfico, para el $\triangle ABC$.

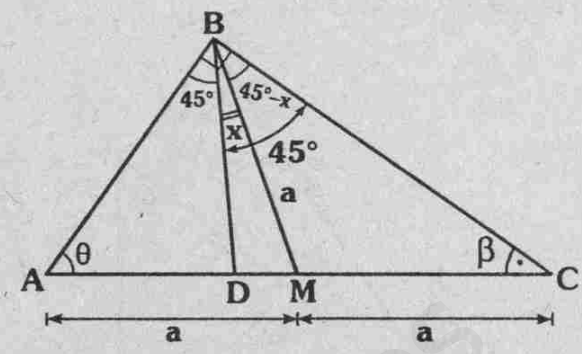
- $\overline{BD}$ es bisectriz interior .
- $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

$$\boxed{x = \frac{\theta - \beta}{2}}$$

Demostración:



- Como $\overline{BM}$ es mediana, por teorema:

$$AM = MB = MC \Rightarrow \theta = 45° + x \quad ...\ (I)$$

$$\beta = 45° - x \quad ...\ (II)$$

- Restando (I) y (II):

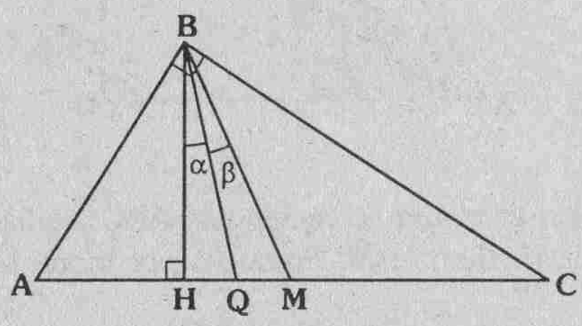
$$\theta - \beta = 2x$$

$$\therefore\ x = \frac{\theta - \beta}{2}$$

TEOREMA

En el gráfico, para el $\triangle ABC$:

- $\overline{BH}$ es altura.
- $\overline{BQ}$ es bisectriz interior y
- $\overline{BM}$ es mediana.



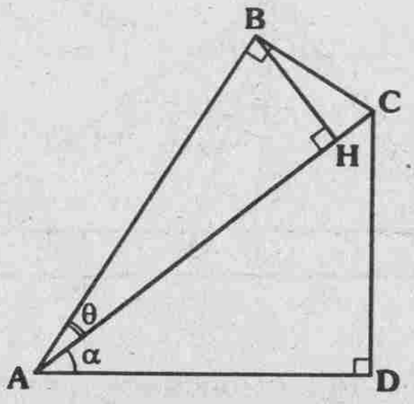
Se cumple:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMA

En el gráfico, se cumple:



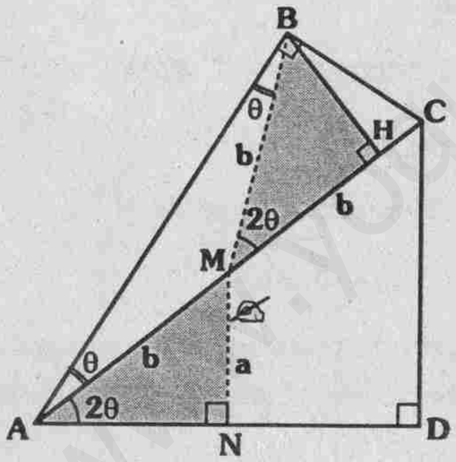
$$\boxed{\alpha = 2\theta \iff CD = 2(BH)}$$

Demostración:

Parte I

- Sea $\alpha = 2\theta$, se va a demostrar:

$$CD = 2(BH)$$



- En el triángulo rectángulo ABC, se traza la mediana BM, entonces por teorema:

$$AM = MC = MB$$

- En el $\triangle ADC$, se traza la base media $\overline{MN}$, por teorema:

$$CD = 2(MN)\text{ , sea } MN = a \Rightarrow CD = 2a$$

- Luego:

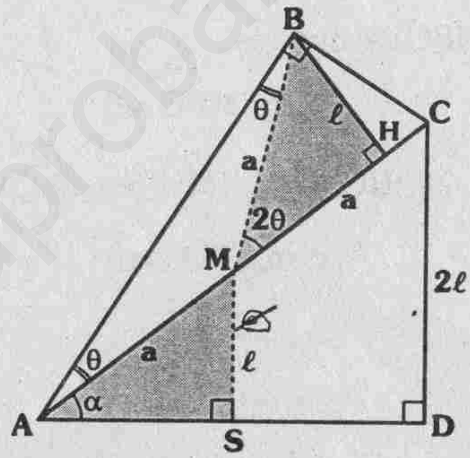
$$\triangle AMN \cong \triangle MBH \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow \quad BH = MN = a$$

$$\therefore \quad CD = 2(BH)$$

Parte II

- Sea $CD = 2(BH)$ se va a demostrar $\alpha = 2\theta$.



- Se traza la mediana BM en el triángulo ABC, por teorema:

$$BM = MA = MC = a$$

- En el $\triangle ADC$ se traza $\overline{MS} \perp \overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{MS}$ es base media, luego:

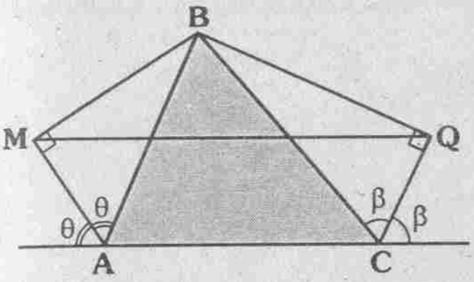
$$CD = 2(MS) \Rightarrow MS = \ell$$

- $\triangle ASM \cong \triangle MBH$

$$\therefore \boxed{\alpha = 2\theta}$$

TEOREMA

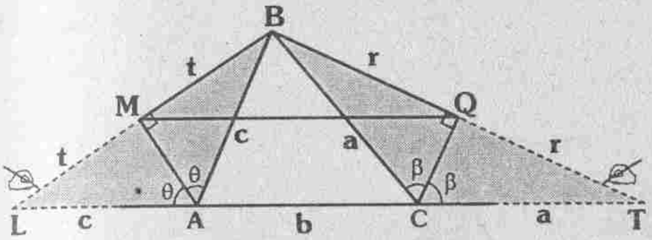
En el gráfico donde "p" es el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$\boxed{MQ = p \quad y \quad \overline{MQ} // \overline{AC}}$$

Demostración:



- Por condición:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Se prolonga $\overline{BM}$ y $\overline{CA}$, los cuales se cortan en L, en ΔLAB vemos que $\overline{AP}$ es bisectriz y altura $\Rightarrow \Delta LAB$ es isósceles, luego:

$$AL = c \qquad y \qquad LM = MB$$

- Análogamente se prueba que el ΔBCT es isósceles, entonces:

$$CB = CT = a \quad y \quad BQ = QT$$

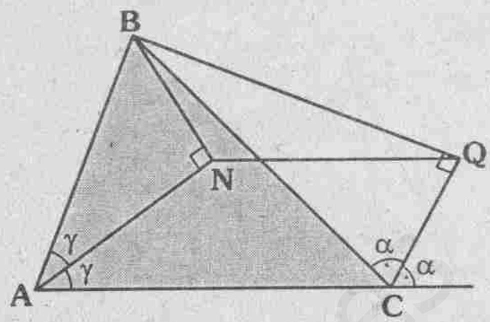
- En ΔLBT; se tendrá que $\overline{MQ}$ es base media, entonces:

$$MQ = \frac{a+b+c}{2} \quad y$$

$$\overline{MQ} // \overline{AB}$$

TEOREMA

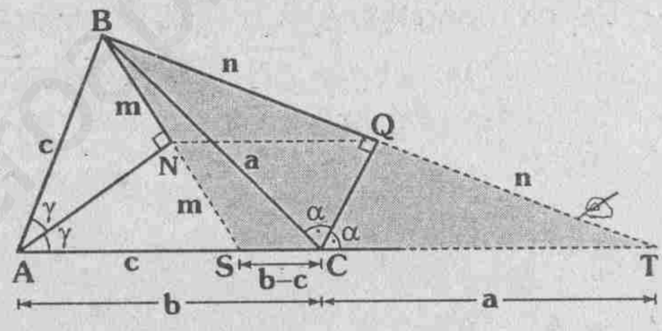
Sea **p** el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$\boxed{NQ = p - AB \quad y \quad \overline{NQ} // \overline{AC}}$$

Demostración:



- En el gráfico se está considerando $b > c$ (*aunque no necesariamente, sino lo fuera se prueba análogamente*).

- ΔABS y ΔBCT son isósceles.

$$\Rightarrow AS = c \; ; \; CT = a \; ; \; BN = NS \; \text{ y } \; BQ = QT$$

- ΔSBT: $\overline{NQ}$ es base media.

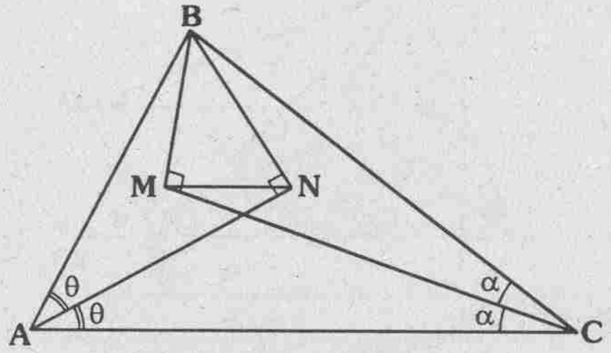
$$\Rightarrow NQ = \frac{a+b-c}{2} \quad y \quad \overline{NQ} // \overline{ST}$$

$$NQ = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2}$$

$$\therefore NQ = p - c \qquad y \qquad \overline{NQ} // \overline{AC}$$

TEOREMA

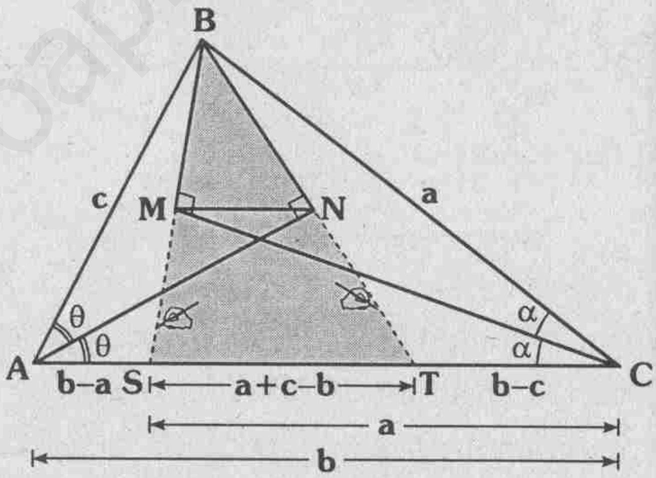
En el gráfico, **p** es el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$\boxed{MN = p - AC \quad y \quad \overline{MN} // \overline{AC}}$$

Demostración:



- En los triángulos ABT y CBS se observará que las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ respectivamente son también bisectrices, entonces:

- ΔABT y ΔSBC son isósceles

$$\Rightarrow AB = AT = c \quad ; \quad CB = CS = a \quad ;$$

$$BN = NT \quad y \quad BM = MS$$

- En triángulo SBT: $\overline{MN}$ es base media, entonces:

$$MN = \frac{a+b-c}{2} \quad y \quad \overline{MN} // \overline{ST}$$

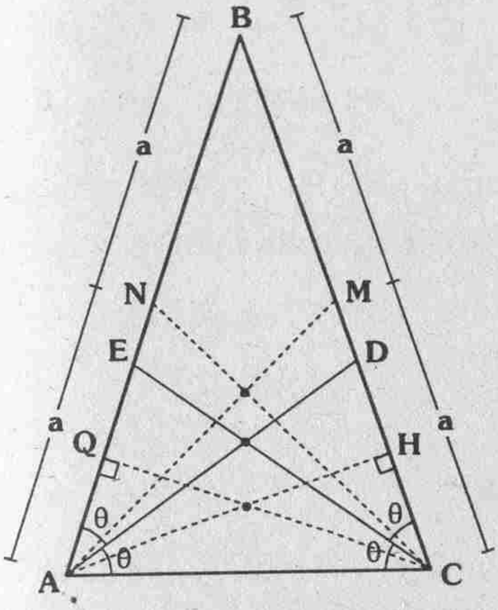
$$\Rightarrow \quad MN = \frac{a+b+c-2b}{2} = \frac{2p-2b}{2}$$

$$\therefore \; MN = p - b$$

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO ISÓSCELES

TEOREMA

En el gráfico, $AB = BC$



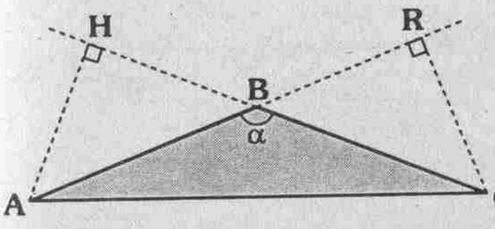
Entonces:

- $\overline{AH}$ y $\overline{CQ}$: alturas $\Rightarrow$ $\boxed{AH = CQ}$
- $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: medianas $\Rightarrow$ $\boxed{AM = CN}$
- $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ bisectrices $\Rightarrow$ $\boxed{AD = CE}$

Cada uno de los resultados indicados queda como ejercicio para el lector.

Observación

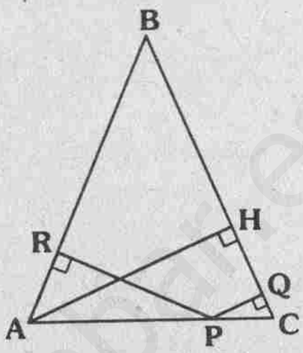
Si un triángulo es isósceles y obtusángulo.



Si $\alpha > 90°$ y $AB = BC \Rightarrow \boxed{AH = CR}$

TEOREMA

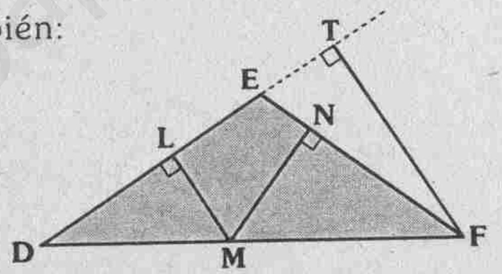
La suma de distancias de un punto de la base a los otros lados, es igual a la longitud de cualquiera de las alturas trazadas de los extremos de la base.



Si $AB = BC$ y $P \in \overline{AC}$

$\Rightarrow \boxed{PR + PQ = AH}$

También:

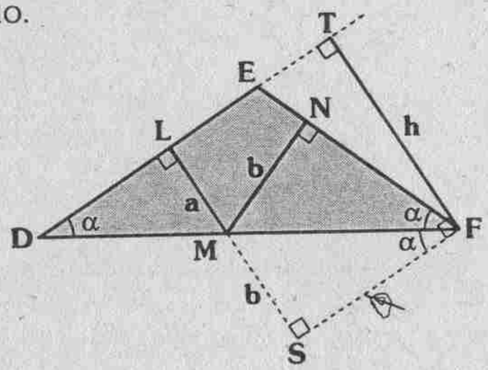


Si $DE = EF$ y $M \in \overline{DF}$

$\Rightarrow \boxed{ML + MN = FT}$

Demostración:

- Se puede elegir cualquiera de los triángulos (acutángulo u obtusángulo) isósceles. Escojamos el segundo triángulo.



- ΔDEF : isósceles
- Se prolonga $\overline{LM}$ y se traza $\overline{FS} \perp \overleftrightarrow{LM}$.
- Como $\overline{FS} // \overline{DE} \Rightarrow m\measuredangle MFS = \alpha$
- Por teorema de la bisectriz:

$$MN = MS = b$$

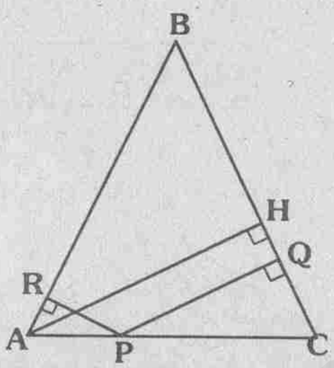
- Como: $\overline{LT} // \overline{SF}$ y $\overline{LS} // \overline{TF}$

$$\Rightarrow h = a + b$$

TEOREMA

En el gráfico, si $P \in \overline{AC}$ y

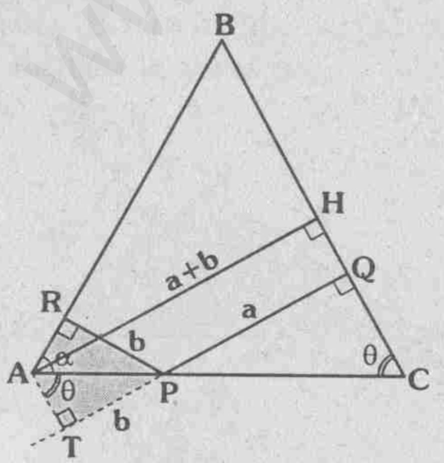
$$PR + PQ = AH \Rightarrow AB = BC$$



(se trata del recíproco del teorema anterior).

Demostración:

- El ΔABC, puede ser acutángulo, obtusángulo o rectángulo.



- Se prolonga $\overline{QP}$ y se traza:

$$\overline{AT} \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overline{AT} // \overline{BC}$$

- Como:

$$\overline{AH} // \overline{TQ} \quad y \quad \overline{AT} // HQ$$

$$\Rightarrow AH = TQ \Rightarrow PT = b$$

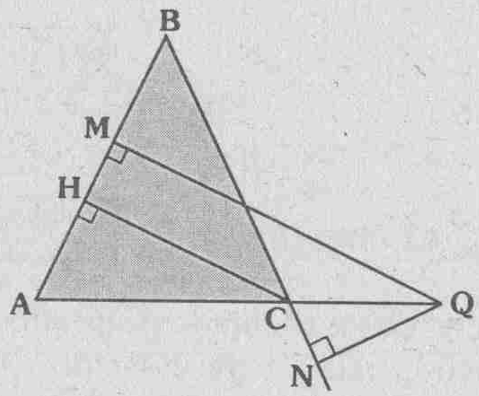
- Como $PR = PT$, por el recíproco del teorema de la bisectriz: $\alpha = \theta$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ es isósceles}$$

$$\therefore AB = BC$$

TEOREMA

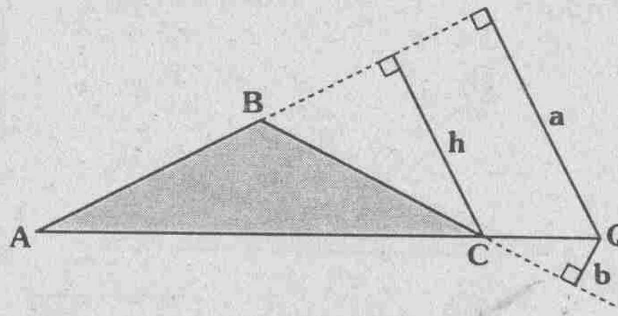
En el gráfico, $AB = BC$ y Q está en la prolongación de $\overline{AC}$ (o $\overline{CA}$).



Se cumple:

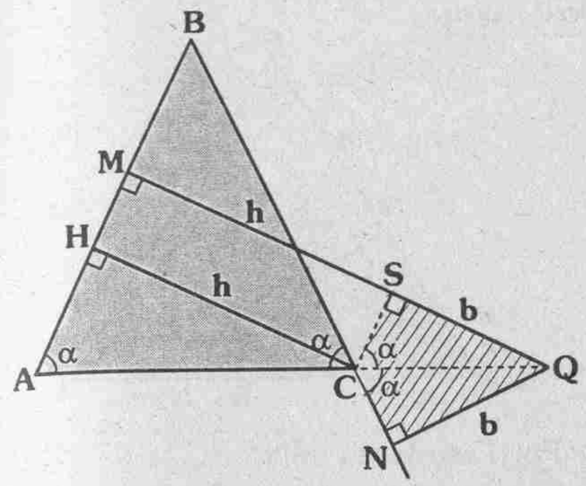
$$\boxed{QM - QN = CH}$$

También: si $AB = BC$



$$\boxed{h = a - b}$$

Demostración:



- Elijamos el primer triángulo.
- Como AB = BC:

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle CAB$$

- Se traza:

$$\overline{CS} \perp \overline{MQ} \;\Rightarrow\; CH = SM$$

- Como:

$$\overline{CS} /\!/ \overline{AB} \;\Rightarrow\; m\sphericalangle SCQ = \alpha$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$QN = QS$$

$$\Rightarrow \quad QM = b + h$$

$$QM = QN + CH$$

$$\therefore \quad QM - QN = CH$$

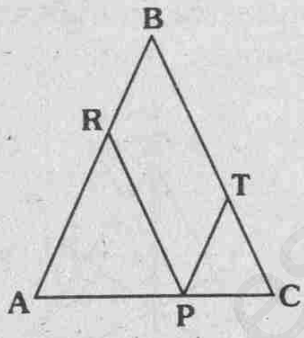
Observación

El recíproco también se cumple, es decir:

$$Si\ \ QM - QN = CH \;\Rightarrow\; AB = BC$$

TEOREMA

Si $AB = BC$, $P \in \overline{AC}$, $\overline{PR} /\!/ \overline{BC}$ y $\overline{PT} /\!/ \overline{AB}$.



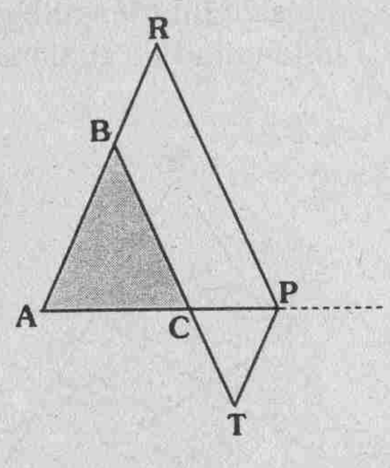
Se cumple:

$$\boxed{PR + PT = AB}$$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

Si $AB = BC$, P está en la prolongación de $\overline{AC}$, $\overline{PR} /\!/ \overline{BC}$ y $\overline{PT} /\!/ \overline{AB}$.



Se cumple:

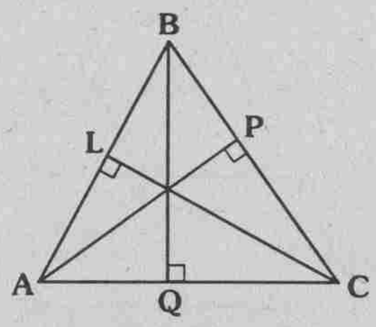
$$\boxed{PR - PT = AB}$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

TEOREMA

Las tres alturas de un triángulo equilátero son congruentes.



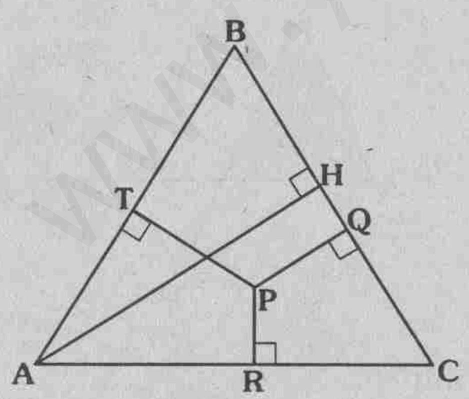
Si ΔABC es equilátero, entonces:

$$\boxed{AP = BQ = CL}$$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

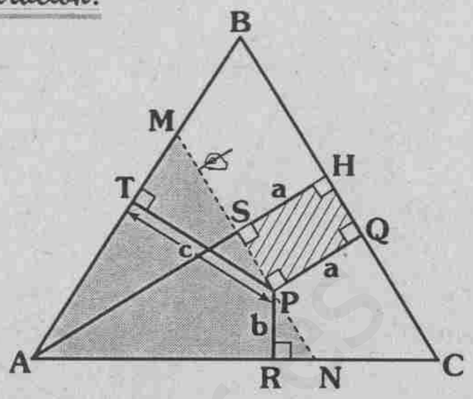
La suma de distancias de un punto interior a los lados de un triángulo equilátero, es igual a la longitud de cualquiera de las alturas.



Si ΔABC es equilátero y P está en la región interior, entonces:

$$\boxed{PQ + PR + PT = AH}$$

Demostración:



- Por P se traza $\overline{MN} // \overline{BC}$

  $\Rightarrow \Delta AMN$ es equilátero
- Por el teorema anterior: $b + c = AS$
- Pero como: $PQ = SH = a$

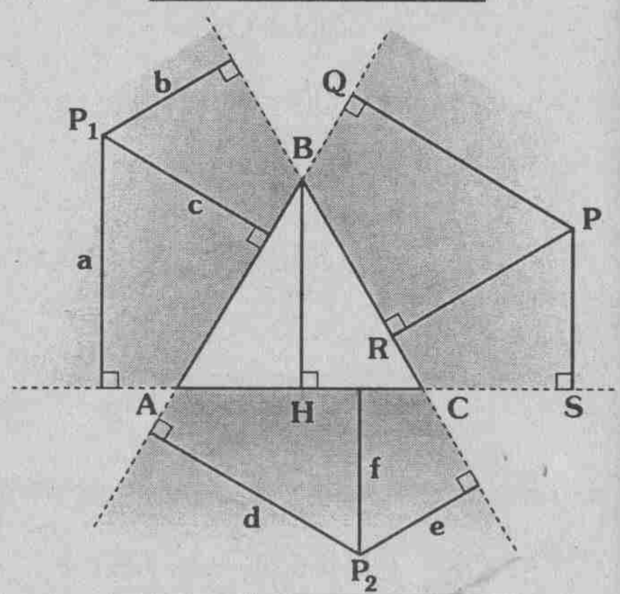
  $\Rightarrow \quad AH = AS + SH$

  $\therefore \quad AH = b + c + a$

TEOREMA

En el gráfico, si P se ubica en cualquiera de las regiones sombreadas (exteriores relativas a cada lado), se cumple:

$$\boxed{PQ + PS - PR = BH}$$



$$\boxed{a + b - c = d + e - f = BH}$$

Demostración:

- Por P se traza $\overline{MN} // \overline{BC}$

  $\Rightarrow$ ΔMNA es equilátero

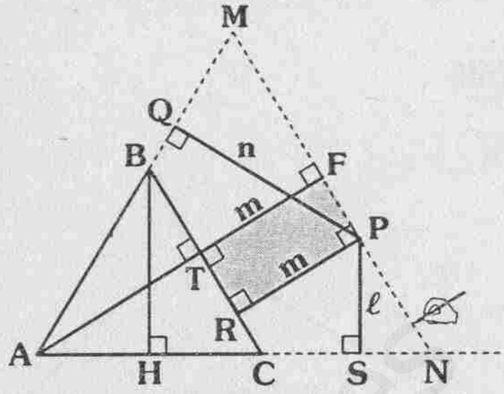
- ΔABC equilátero $\Rightarrow$ $BH = AT$

- Por teorema del Δ isósceles

$$AF = n + \ell$$

$$AT + m = n + \ell$$

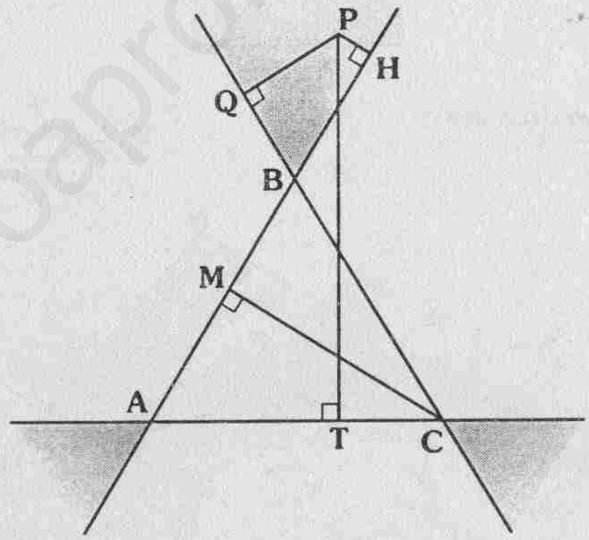
$$\Rightarrow \quad AT = n + \ell - m$$



$$\therefore \; BH = PQ + PS - PR$$

TEOREMA

En el gráfico, el ΔABC es equilátero y P se ubica en cualquiera de las regiones sombreadas.



Se cumple:

$$\boxed{PT - PQ - PH = CM}$$

Demostración:

- Se traza por P una paralela a $\overline{AC}$ que corta a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ en F y L respectivamente.

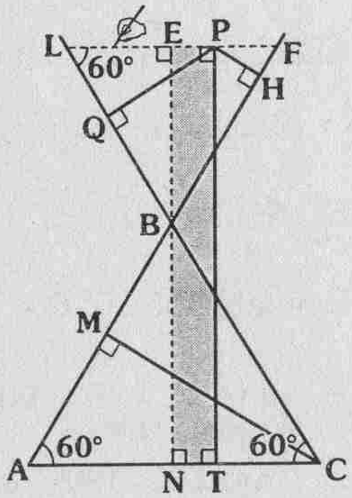
  ΔLBF equilátero $\Rightarrow$ $PQ + PH = BE$

  ΔABC equilátero $\Rightarrow$ $BN = CM$

- Luego: $PT = BE + BN$

  $\Rightarrow$ $PT = PQ + PH + CM$

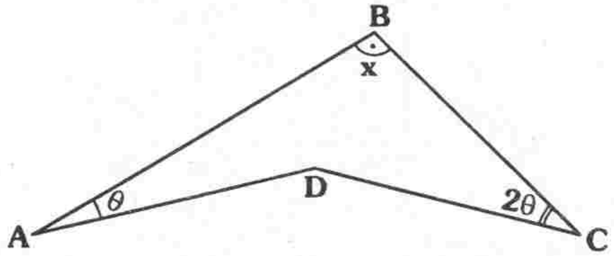
  $\therefore$ $PT - PQ - PH = CM$



TEOREMAS SOBRE CUADRILÁTEROS NO CONVEXOS (CÓNCAVOS)

TEOREMA

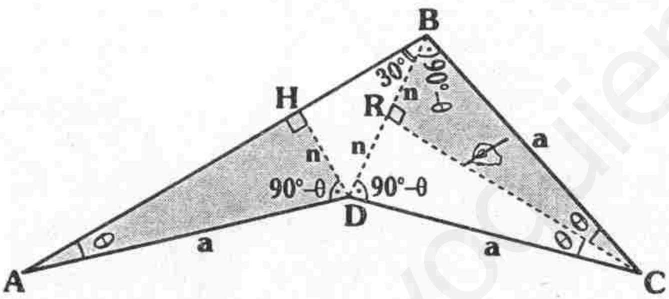
Caso I



- En el gráfico, si AD=DC=BC, se cumple:

$$\boxed{x = 120° - \theta}$$

Demostración:



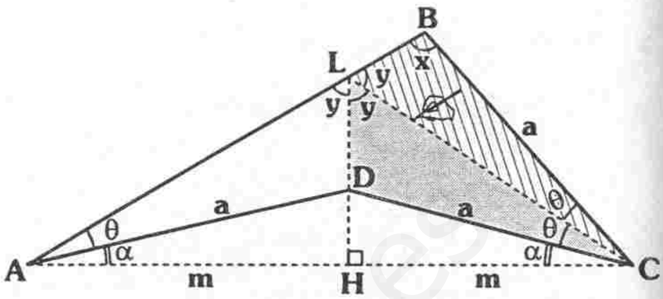
- Se traza $\overline{BD}$, entonces el $\triangle BDC$ es isósceles.
- En el $\triangle BDC$ se traza la altura $\overline{CR}$

  $\Rightarrow$ DR = BR y $m\sphericalangle BCR = m\sphericalangle RCD$
- $⊿ RBC \cong ⊿ HDA$(ALA) $\Rightarrow$ HD = BR
- $⊿ BDH$: notable de 30°/60°

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 30° + 90° - \theta$

  $\therefore\ m\sphericalangle ABC = 120° - \theta$

Otra forma de demostrar:



- $\triangle ADC$: isósceles
- $\overrightarrow{DH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ LA = LC
- Luego: $m\sphericalangle LCD = \theta$ y

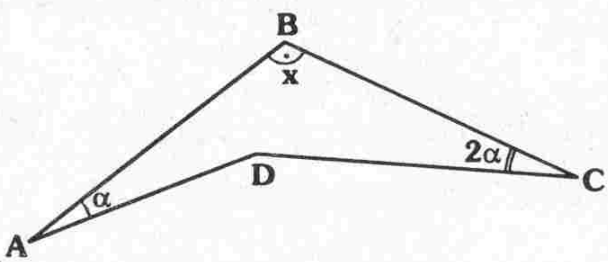
  $m\sphericalangle ALH = m\sphericalangle CLH = y$
- $\triangle DCL \cong \triangle BCL$ (LAL)

  $\Rightarrow m\sphericalangle BLC = y$
- En "L": $y + y + y = 180° \Rightarrow y = 60°$
- En $\triangle BLC$: $x + 60° + \theta = 180°$

  $\therefore\ x = 120° - \theta$

TEOREMA

Caso II

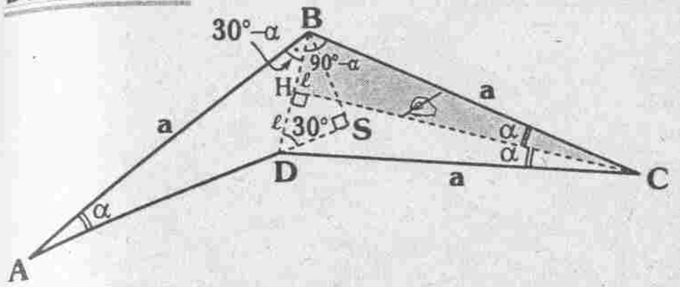


En el gráfico, AB = BC = CD

Se cumple:

$$\boxed{x = 120° - 2\alpha}$$

Demostración:



- ΔBDC : isósceles.
- En ΔBDC se traza la altura $\overline{CH}$, entonces:

$BH = HD$ y $m\sphericalangle BCH = m\sphericalangle DCH$

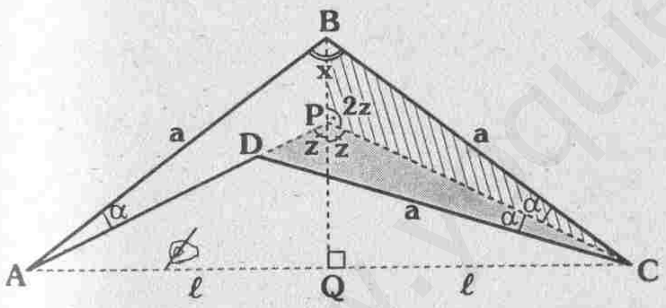
- $\triangle ASB \cong \triangle CHB$ (LAL) $\Rightarrow BS = \ell$
- $\triangle DSB$: notable de 30°

$\Rightarrow$ $m\sphericalangle ABD = 30° - \alpha$

- Luego: $m\sphericalangle ABC = 30° - \alpha + 90° - \alpha$

$\therefore$ $m\sphericalangle ABC = 120° - 2\alpha$

Otra forma de demostrar:



- En el ΔABC se traza la altura $\overline{BQ}$, entonces $\overline{BQ}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.
- Por teorema de la mediatriz:

$AP = PC$ y $m\sphericalangle APQ = m\sphericalangle QPC = z$

- $\Delta DCP \cong \Delta BCP$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\sphericalangle BPC = 2z$
- Luego: $z + 2z = 180°$ $\Rightarrow$ $z = 60°$
- En $\triangle ABCP$: $x + \alpha + \alpha = 2z = 120°$

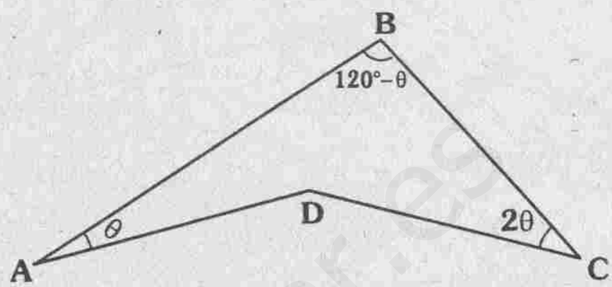
$\therefore$ $x = 120° - 2\alpha$

Los siguientes teoremas son los recíprocos de los dos teoremas anteriores mencionados.

ANALICEMOS PRIMERO LOS RECÍPROCOS DEL CASO I

TEOREMA

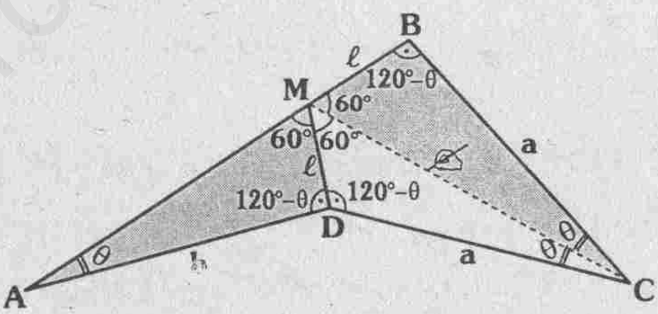
En el gráfico, si $BC = CD$



Se cumple:

$\boxed{AD = BC}$

Demostración:



- Se traza $\overline{CM}$ bisectriz, luego:
- $\Delta BCM \cong \Delta DCM$ (LAL)

$\Rightarrow$ $MB = MD = \ell$

- También:

$m\sphericalangle BMC = m\sphericalangle CMD = 60°$

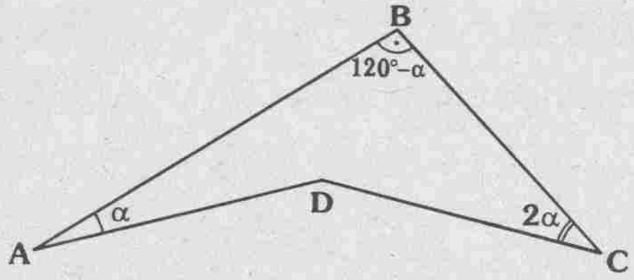
- Luego:

$\Delta AMD \cong \Delta CMB$ (LAL)

$\Rightarrow$ $a = b$

TEOREMA

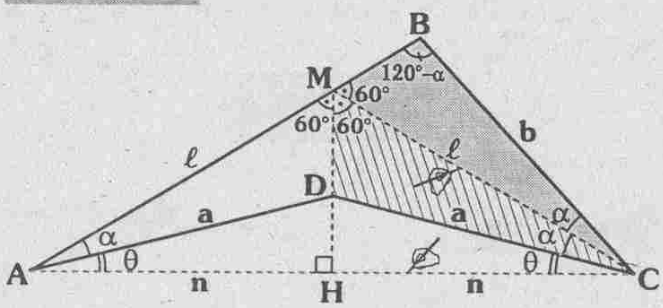
En el gráfico, $AD = DC$.



Se cumple:

$$\boxed{BC = CD}$$

Demostración:



- ΔADC: isósceles, $\overline{DH}$ es altura, mediana y bisectriz.
- $\overline{DH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ $AM = MC$.
- Como:

$m\measuredangle AMC = 120° \Rightarrow m\measuredangle AMD = m\measuredangle DMC = 60°$

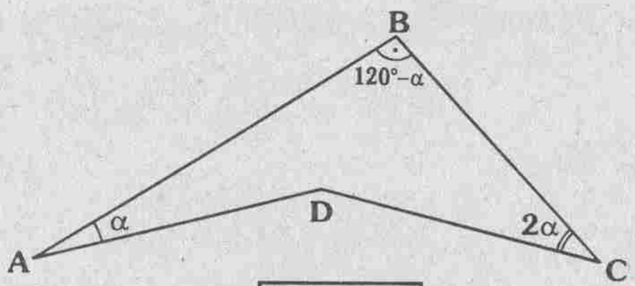
$\Rightarrow m\measuredangle BMC = 60°$

- $\Delta DMC \cong \Delta BMC$ (ALA)

$\therefore\ a = b$

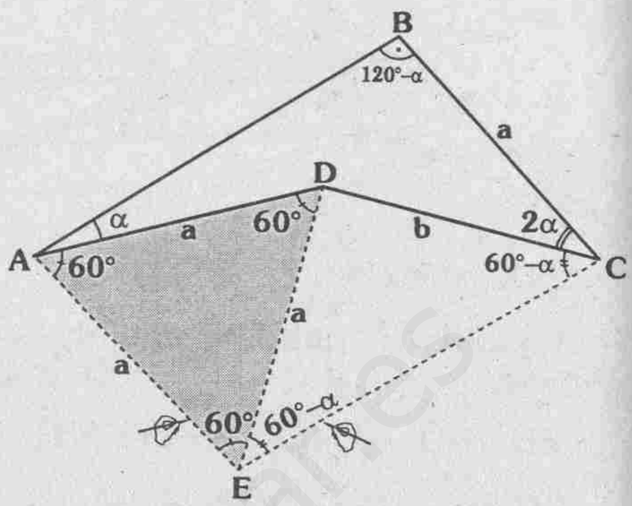
TEOREMA

En el gráfico, $AD = BC$.



Se cumple: $\boxed{DC = BC}$

Demostración:



- Por A se traza $\overline{AE} // \overline{BC}$ tal que:

$AE = BC \Rightarrow \overline{AB} // \overline{EC}$

- Luego:

$m\measuredangle DAE = 60°$ y $m\measuredangle DCE = 60° - \alpha$

- También, como $DA = DE$ y

$m\measuredangle BAE = 60° \Rightarrow \Delta DAE$: equilátero

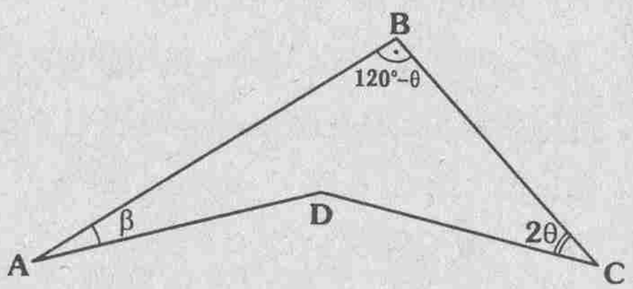
$\Rightarrow m\measuredangle DEC = 60° - \alpha$

- ΔEDC: isósceles

$\Rightarrow a = b$

TEOREMA

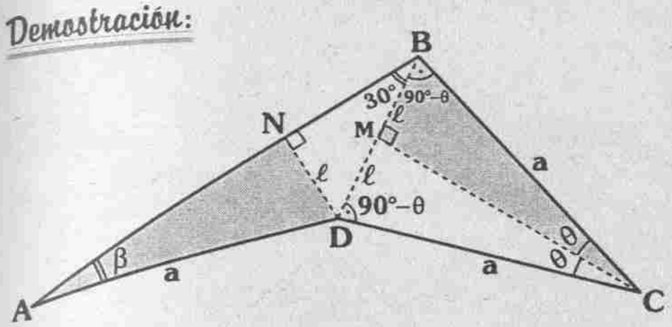
En el gráfico, $AD = DC = BC$.



Se cumple:

$$\boxed{\beta = \theta}$$

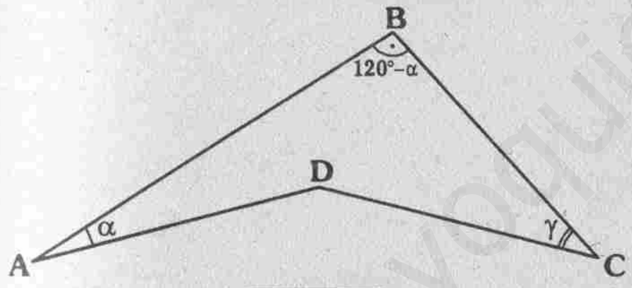
Demostración:



- Se traza $\overline{BD}$, entonces el ΔBDC es isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle DBC = 90° - \theta$.
- Como:
  $m\measuredangle ABC = 120° - \theta \Rightarrow m\measuredangle ABD = 30°$
- Se traza: $\overline{CM} \perp \overline{BD}$ y $\overline{DN} \perp \overline{AB}$.
- Luego: $\triangle AND \cong \triangle BMC$
  $\therefore \quad \beta = \theta$

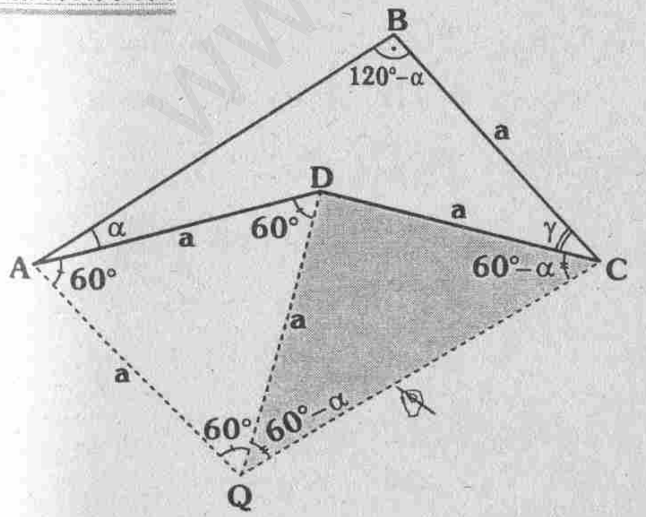
TEOREMA

En el gráfico, $AD = BC = CD$.



Se cumple: $\boxed{\gamma = 2\alpha}$

Demostración:

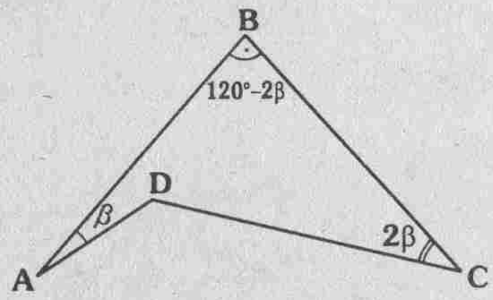


- Se traza $\overline{AQ} // \overline{BC}$ y $AQ = BC$, entonces $\overline{AB} // \overline{QC}$, luego $m\measuredangle DAQ = 60°$.
- Como: $AD = AQ$ y $m\measuredangle DAQ = 60°$
  $\Rightarrow$ ΔADQ: es equilátero
  ΔDQC: isósceles
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle DQC = m\measuredangle DCQ = 60° - \alpha$
- Como $\overline{CQ} // \overline{BA}$, entonces:
  $$\gamma + 60° - \alpha + 120° - \alpha = 180°$$
  $$\therefore \quad \gamma = 2\alpha$$

AHORA ANALICEMOS LOS RECÍPROCOS DEL CASO II

TEOREMA

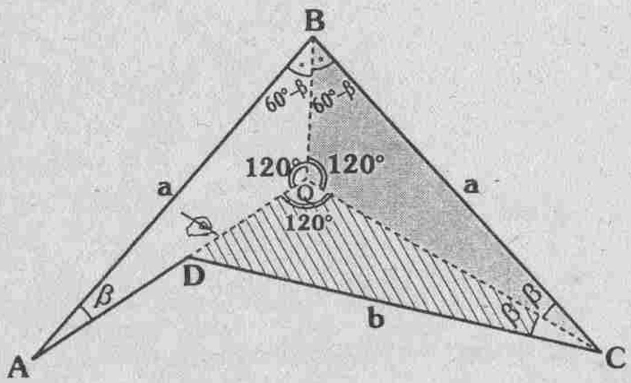
En el gráfico, $AB = BC$.



Se cumple:

$$\boxed{BC = CD}$$

Demostración:



- Se traza la bisectriz del $\measuredangle ABC$, que corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q, entonces:

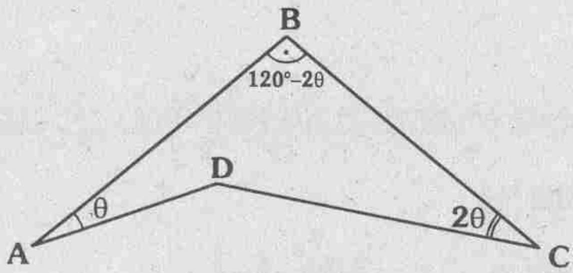
$$m\measuredangle AQB = m\measuredangle CQB = 120°$$

- Luego: $m\measuredangle DQC = 120°$
- $\Delta QCB \cong \Delta QCD$ (ALA)

$$\therefore \quad a = b$$

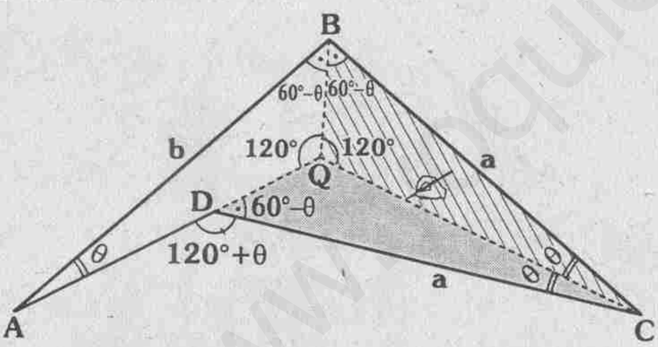
TEOREMA

En el gráfico, $BC = CD$.



Se cumple: $\boxed{AB = BC}$

Demostración:



- Se traza la bisectriz del $\measuredangle BCD$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q.
- Como: $m\measuredangle ADC = 120° + \theta$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CDQ = 60° - \theta$$

- Luego: $\Delta DCQ \cong \Delta BQC$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CBQ = 60° - \theta$$

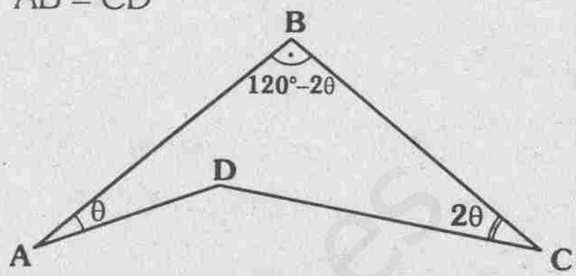
- También: $m\measuredangle ABQ = 60° - \theta$

- $\Delta ABQ \cong \Delta CBQ$ (ALA)

$$\therefore \quad a = b$$

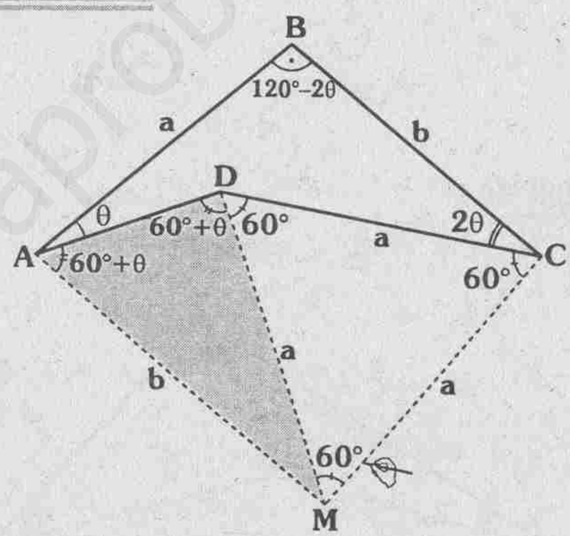
TEOREMA

Si $AB = CD$



Se cumple: $\boxed{BC = AB}$

Demostración:



- Se traza: $\overline{CM} // \overline{BA}$ tal que $CM = a$

$$\Rightarrow \quad \overline{BC} // \overline{AM} \quad y \quad AM = b$$

- Como $CD = CM$ y $m\measuredangle DCM = 60°$, entonces el ΔDCM es equilátero.
- Como: $\overline{AM} // \overline{DC}$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle DAM = 60° + \theta$$

$$m\measuredangle ADC = 120° + \theta$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ADM = 60° + \theta$$

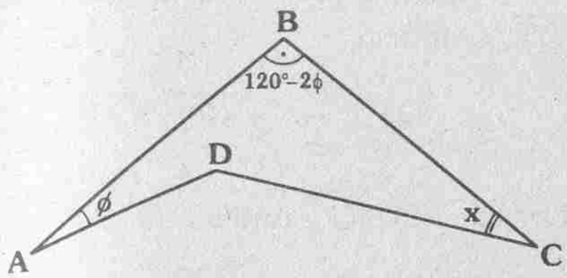
- Luego: ΔADM es isósceles

$$\therefore \quad a = b$$

Los dos siguientes teoremas son análogos a los anteriores, quedan como ejercicio para el lector:

TEOREMA

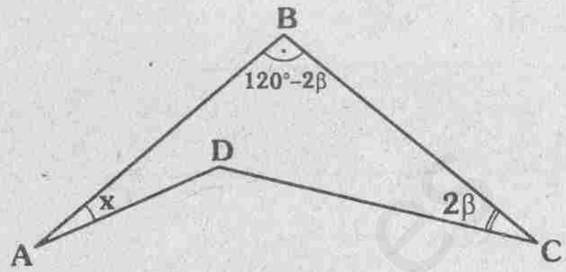
Si $AB = BC = CD$



Se cumple: $\boxed{x = 2\phi}$

TEOREMA

Si: $AB = BC = CD$

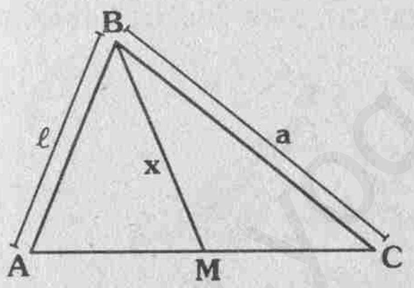


Se cumple: $\boxed{x = \beta}$

ALGUNAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

TEOREMA

En el gráfico, sea $a \geq \ell$ y $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

$$\boxed{\frac{a-\ell}{2} < x < \frac{a+\ell}{2}}$$

Demostración:

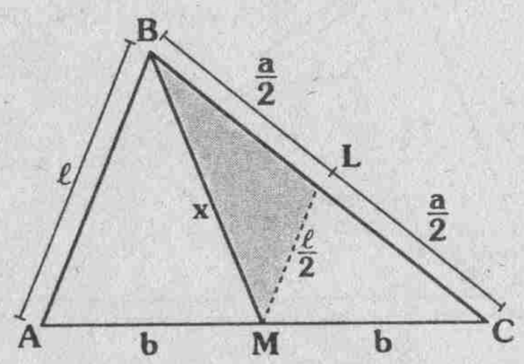
- Se traza la base media $\overline{ML}$, entonces :

$$LM = \frac{AB}{2} \Rightarrow LM = \frac{\ell}{2} \quad y \quad BL = \frac{a}{2}$$

- ΔBLM, por existencia de triángulos:

$$\frac{a}{2} - \frac{\ell}{2} < x < \frac{a}{2} + \frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{a-\ell}{2} < x < \frac{a+\ell}{2}$$



TEOREMA

Sea el triángulo ABC, con AB=c, BC=a y AC=b; m_a, m_b y m_c son las longitudes de las tres medianas relativas a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se cumple:

$$\boxed{\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c}$$

Demostración:

- Por el teorema anterior:

$$m_a < \frac{b+c}{2} \quad \text{... (I)}$$

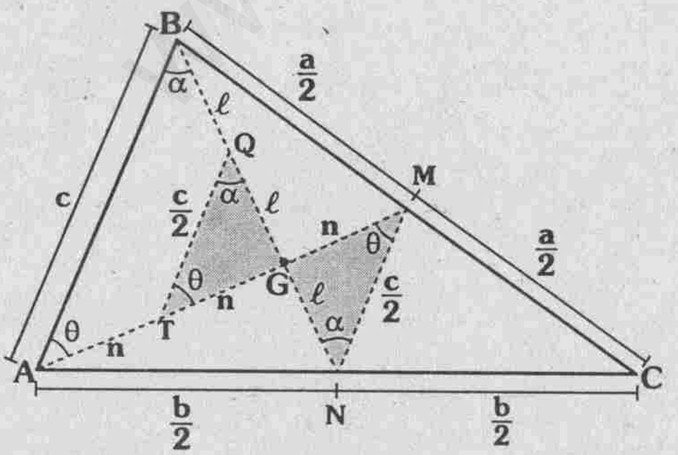
$$m_b < \frac{a+c}{2} \quad \text{... (II)}$$

$$m_c < \frac{a+b}{2} \quad \text{... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$m_a + m_b + m_c < a+b+c \quad \text{... } (*)$$

- Para la otra parte, demostremos previamente que cada dos medianas se cortan en la razón de 2 a 1, desde el vértice.



- En el ΔABC, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son medianas

$\Rightarrow$ Por el teorema de la base media:

$$MN = \frac{c}{2} \quad y \quad \overline{MN} // \overline{AB}$$

- En el ΔAGB se traza la base media $\overline{QT}$, entonces:

$$QT = \frac{c}{2} \quad y \quad \overline{QT} // \overline{AB}$$

- Luego: $\Delta TQG \cong \Delta MNG$ (ALA)

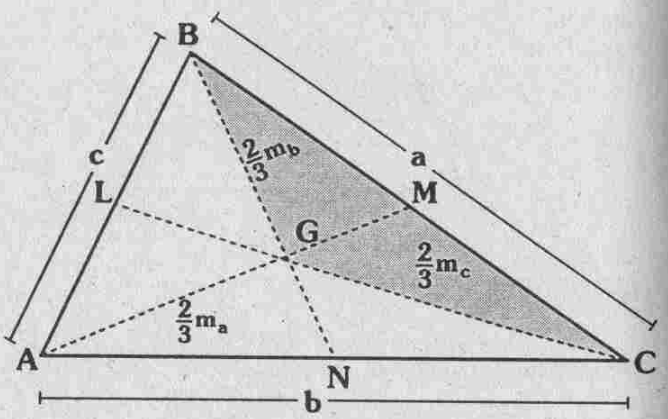
$$\Rightarrow \quad GM = n \quad y \quad GN = \ell$$

- Es decir:

$$AG = 2(GM) \quad y \quad BG = 2(GN)$$

$$\Rightarrow \quad AG = \frac{2}{3}(AM) \quad y \quad BG = \frac{2}{3}(AN)$$

- Como cada dos medianas, se cortan en la razón de 2 a 1, desde el vértice, veamos para las tres medianas.



- Sea:

$$AM = m_a \; ; \; CL = m_c \quad y \quad BN = m_b$$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}m_a \; ; \; CG = \frac{2}{3}m_b \; ; \; BG = \frac{2}{3}m_b$$

- En el ΔAGB, ΔAGC y ΔBGC por existencia:

$$b < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c \qquad \ldots (\alpha)$$

$$c < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \qquad \ldots (\beta)$$

$$a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \qquad \ldots (\gamma)$$

- Sumando (α), (β) y (γ):

$$a + b + c < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c \quad \ldots (**)$$

- De $(*)$ y $(**)$, se tiene:

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c$$

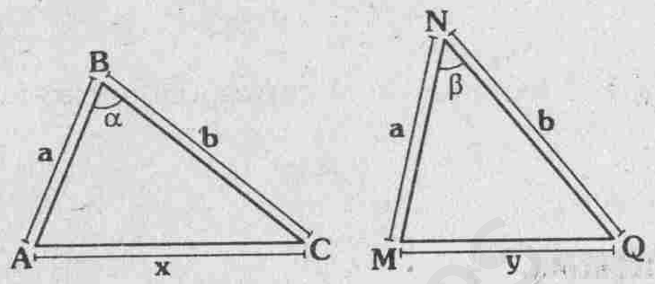
Observación

Al punto de concurrencia de las medianas se le llama baricentro, como se ve la publicación de Puntos Notables (Fascículo N° 7).

TEOREMA

(Teorema de Charnela)

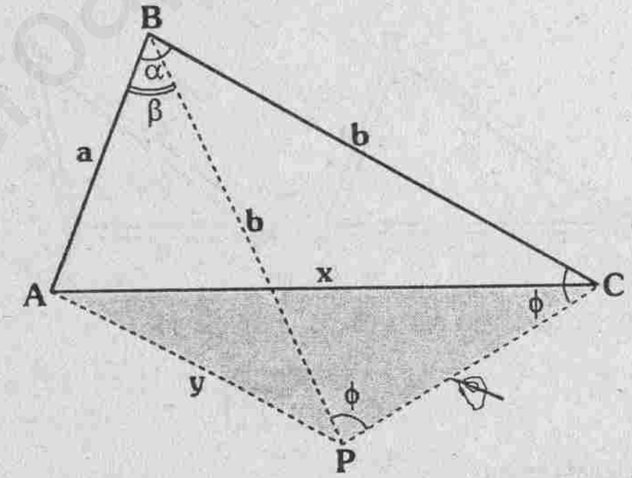
Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con los lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que en el tercer lado del segundo triángulo.



En el gráfico si: $\quad \alpha > \beta$

$$\Rightarrow \boxed{x > y}$$

Demostración:



- Se considera el ΔABC, como $\alpha > \beta$ se traza $\overline{BP}$ tal que $m\measuredangle ABP = \beta$ y $BP = b$.

- $\Delta ABP \cong \Delta MNQ \quad (ALA)$

$$\Rightarrow AP = y$$

- Como:

$$PB = BC \Rightarrow \Delta PBC : \text{isósceles}$$

- En $\triangle APC$:

$$m\measuredangle APC > \phi \Rightarrow m\measuredangle ACP < \phi$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle APC > m\measuredangle ACP$$

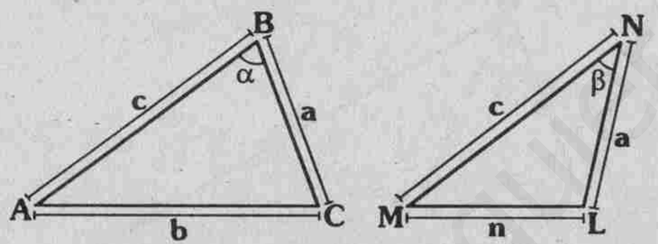
- Por teorema de la correspondencia:

$$x > y$$

TEOREMA

(Recíproco del teorema de charnela)

Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo.



En el gráfico se cumple si $b>n$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha > \beta}$$

Demostración:

- Para la demostración de este teorema se puede usar del mismo modo que el anterior, buscar alguna construcción, pero optemos por el método del absurdo.
- Es decir, supongamos que no se cumple $\alpha > \beta$, entonces

$$\alpha = \beta \quad \text{ó} \quad \alpha < \beta$$

- Si $\alpha = \beta \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNL \quad (LAL)$

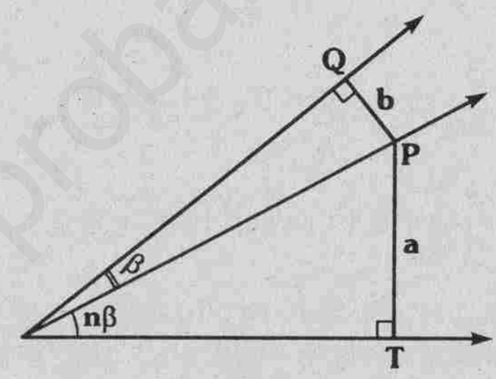
Luego $b = n$ (contradicción pues $b>n$)

- Si $\alpha < \beta \Rightarrow$ por el teorema anterior $b < n$ (contradicción pues $b > n$)
- Vemos que no se cumple: $\alpha \leq \beta$
- Por lo tanto:

$$\alpha > \beta$$

TEOREMA

En el gráfico, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$

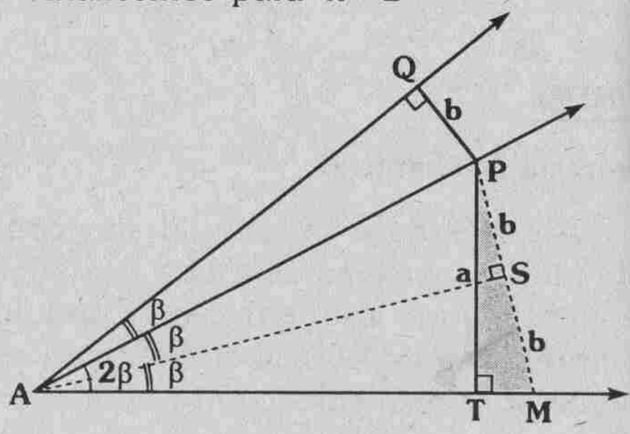


Se cumple:

$$\boxed{a < nb}$$

Demostración:

- Para la demostración de este teorema, usemos el método de inducción, pues $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.
- Analicemos para $n = 2$



- Como $m\measuredangle TAP = 2(m\measuredangle PAQ)$, se traza la bisectriz del ángulo PAT, se traza luego $\overline{PS} \perp \overline{AS}$ y se prolonga hasta que corte a $\overrightarrow{AT}$ en M.

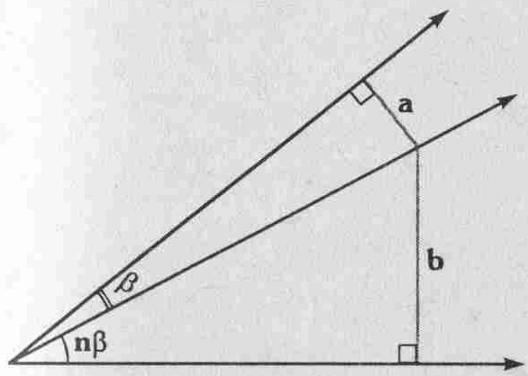
- Por teorema de la bisectriz:

$$PS = PQ = b$$

- $\triangle PAM$: isósceles $\Rightarrow$ $PS = SM = b$

- En $⊿PTM$: $a < 2b$

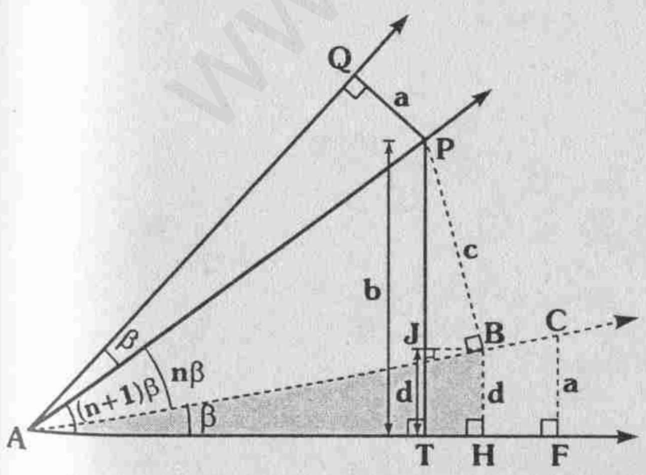
- El segundo paso de la inducción es suponer que el teorema cumple para "n", $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.



- Hipótesis inductiva:

$$b < na$$

- Ahora demostremos que el teorema cumple para "n + 1".



- Sea:

$$m\measuredangle PAT = (n+1)m\measuredangle QAP$$

se traza $\overrightarrow{AB}$ tal que $m\measuredangle PAB = n\beta$, luego se traza $\overline{PB} \perp \overline{AB}$, por hipótesis inductiva:

$$c < na \qquad \ldots \textbf{(I)}$$

- Como:

$$m\measuredangle BAH = \beta \quad y$$

$$AP > AB$$

- Se ubica C en $\overrightarrow{AB}$, tal que $AC = AP$ y se traza $\overline{CF} \perp AT$.

- Luego: $⊿AQP \cong ⊿AFC$

$$\Rightarrow \quad CF = a$$

- Tenemos entonces:

$$d < a \qquad \ldots \textbf{(II)}$$

- En $⊿PJB$:

$$b - d < c \qquad \ldots \textbf{(III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$c + d + (b - d) < na + a + c$$

$$\therefore \quad b < a(n+1)$$

- Con lo cual queda concluída la demostración.

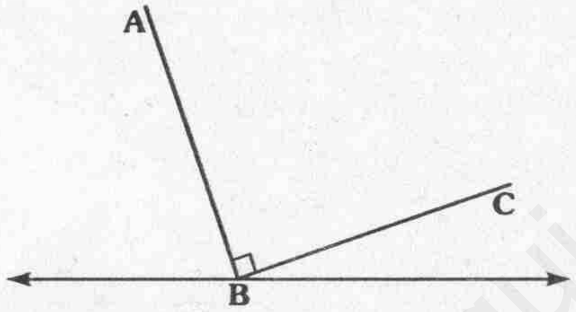
ACERCA DE LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN O DE TRAZOS AUXILIARES

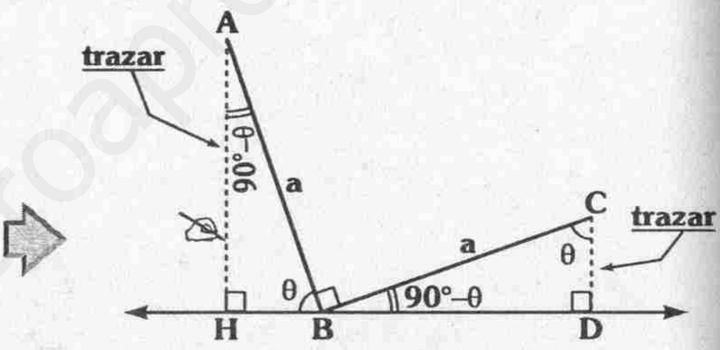
Al resolver diferentes ejercicios nos encontraremos frente a diversas situaciones, en algunos de ellos se resolverán con solo analizando la figura o "completando" ángulos, pero en algunos será necesario hacer algún trazo adicional (o varios). Este capítulo esta orientado a conocer algunos criterios sobre construcciones o trazos auxiliares, los hay desde los más sencillos hasta los más difíciles, algunos de ellos ya fueron expuestos en nuestra publicación de "TRIÁNGULOS".

Los trazos son producto del razonamiento, buscando generalmente congruencia o ángulos que se repitan, los presentados aquí no son las únicas, el lector puede encontrar sus propios criterios.

A continuación, algunos criterios:

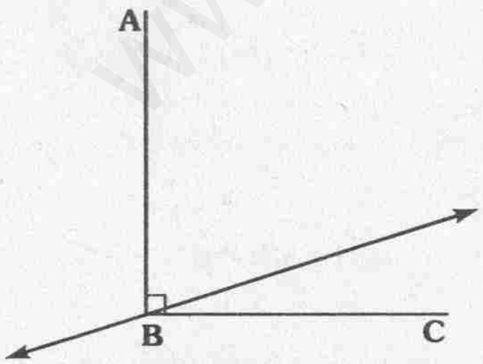
■ Si $AB = BC$ — Se te sugiere:

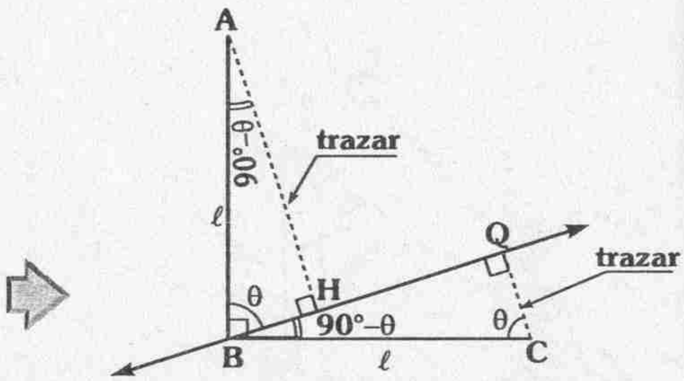




Se aprovecha: $\boxed{⊿ABH \cong ⊿BCD}$

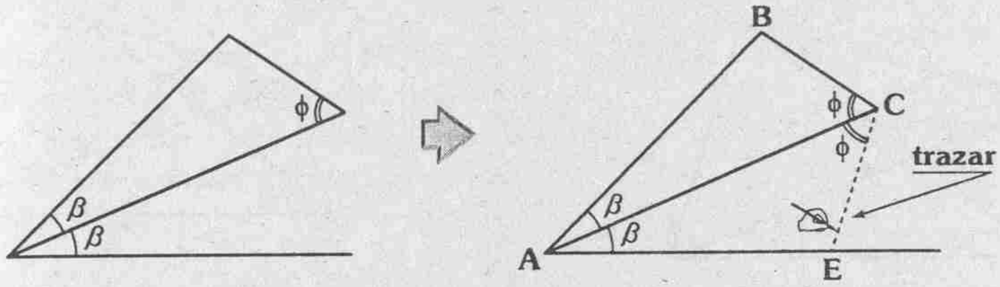
■ Si $AB = BC$





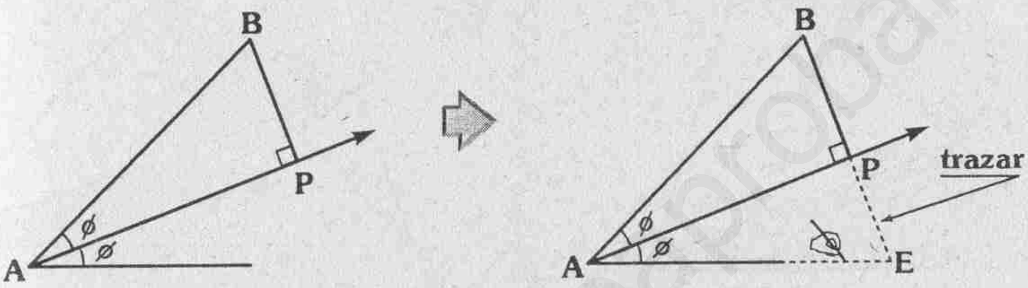
Se aprovecha: $\boxed{⊿ABH \cong ⊿BCQ}$

■ Si en algún ejercicio, se presenta alguna bisectriz, por ejemplo:



Se aprovechará: $\boxed{\Delta ACB \cong \Delta ACE \Rightarrow BC = CE \text{ y } AB = AE}$

Observación

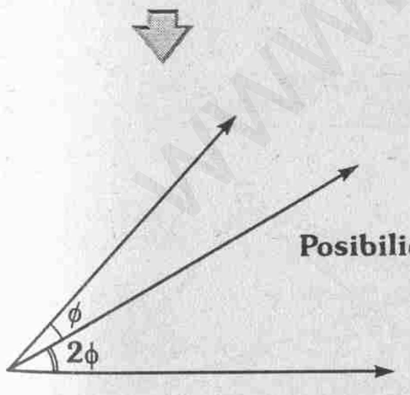


Este trazo es muy útil, como veremos en la resolución de muchos problemas.

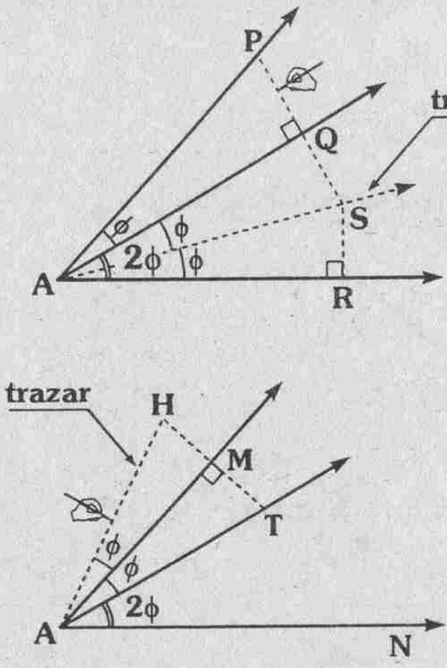
Aprovechamos que el ΔABE *será isósceles, entonces:*

$AB = AE$ y $BP = PE$

■ Si se muestra un ángulo con la siguiente característica:



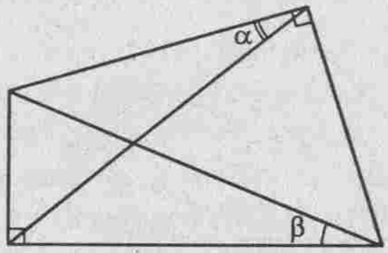
Posibilidades



Se aprovecharía:
$PQ = QS = SR$

Se aprovecharía:
$\overrightarrow{AT}$ es bisectriz del $\measuredangle HAN$ y $HM = MT$

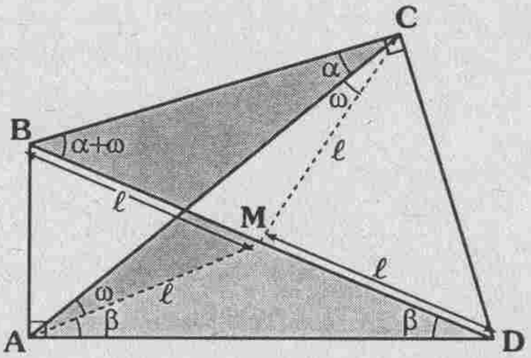
■ $\measuredangle_s$ rectángulos con igual hipotenusa.



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

Prueba:



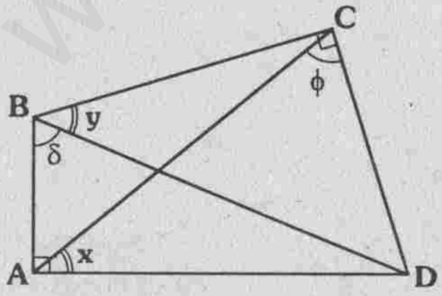
- Como los triángulos rectángulos ABD y BCD tienen la misma hipotenusa, en ambos se traza la mediana relativa a la hipotenusa, entonces por teorema:

$$AM = BM = MD = MC$$

- ΔAMC isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MAC = m\measuredangle ACM$
- En la parte sombreada:

$$2\beta + \omega = \alpha + \alpha + \omega \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha$$

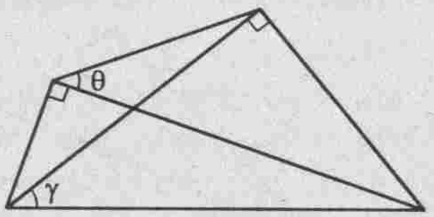
Observación



También se cumple:

$$\boxed{x = y \ \wedge \ \phi = \delta}$$

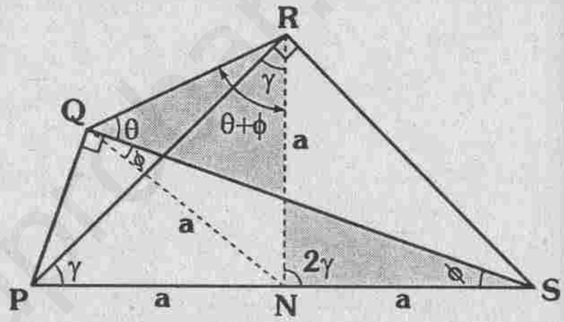
También:



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{\theta = \gamma}$$

Prueba:



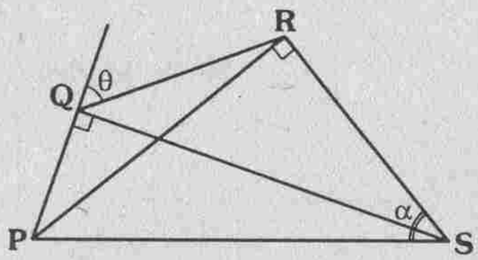
- Análogo al ejercicio anterior, se traza las medianas $\overline{QN}$ y $\overline{RN}$ en los triángulos PQS y ARS, por teorema.

$$QN = NP = NS = NR$$

- ΔQNR : isósceles
- En la parte sombreada:

$$\phi + 2\gamma = \theta + \theta + \phi \quad \Rightarrow \quad \gamma = \theta$$

Observación



También se cumple:

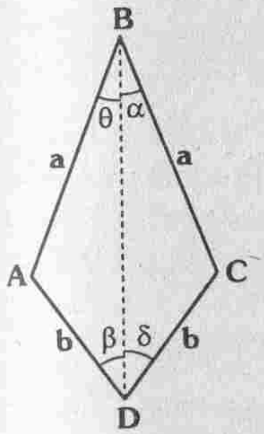
$$\boxed{\theta = \alpha}$$

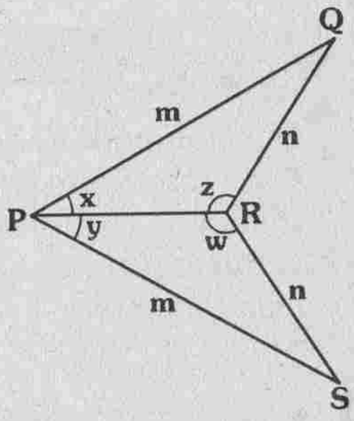
Nota

Los dos casos anteriores, es decir los cuadriláteros ABCD y PQRS, son objeto de un estudio más general, a los cuales se les denomina cuadrilátero inscriptible.

Se hizo mención, pues para los casos expuestos teniamos dos triángulos rectángulos con hipotenusa común.

■ En los gráficos mostrados:





- Se cumple: $\theta=\alpha$; $\beta=\delta$; $x=y$; $z=w$

Prueba:

- En el primer gráfico, notar

$$\Delta BAD \cong \Delta BCD \quad (LAL)$$

- En el segundo gráfico:

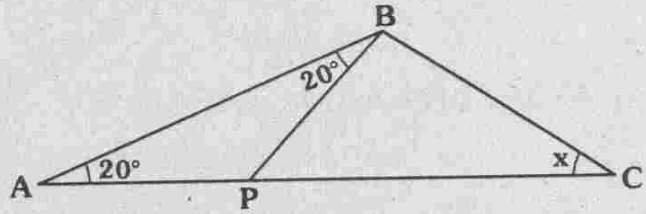
$$\Delta PRQ \cong \Delta PRS \quad (LAL)$$

APLICACIÓN

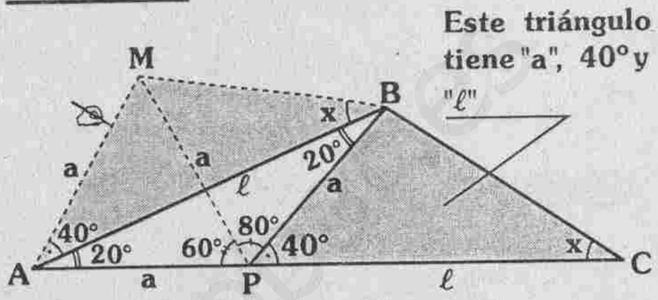
A continuación se resolveran dos problemas de construcción de distintas formas (con trazos auxiliares), para ilustrar los criterios expuestos, ya en los problemas, principalmente los del tipo semestral y semestral intensivo veremos más aplicaciones .

Problema N° 1

En el gráfico $AB=PC$. Calcule x



Resolución 1



- Se busca un Δ que tenga "a", "40°" y "ℓ", para ello: se traza $\overline{AM}$, tal que $MA=AP=a$ y $m\sphericalangle BAM=40°$
- $\Delta MAB \cong \Delta BPC$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle MBA=m\sphericalangle PCB=x$$

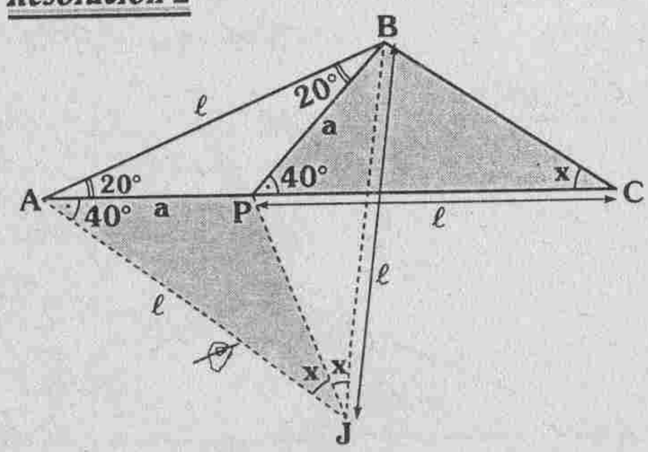
- ΔMAP : equilátero $\Rightarrow$ $MP=a$
- ΔMPB : isósceles , como:

$$m\sphericalangle MPB=80° \Rightarrow \underbrace{m\sphericalangle PBM}=50°$$

$$x+20°=50°$$

$$\therefore \ \mathbf{x=30°}$$

Resolución 2



- Se traza $\overline{AJ}$ tal que $m\sphericalangle PAJ = 40°$ y $AJ = \ell \Rightarrow \Delta JAP \cong \Delta CPB$ (LAL)

$\Rightarrow m\sphericalangle AJP = x$

- Como $AB = AJ$ y $m\sphericalangle BAJ = 60°$

$\Rightarrow \Delta ABJ$ es equilátero

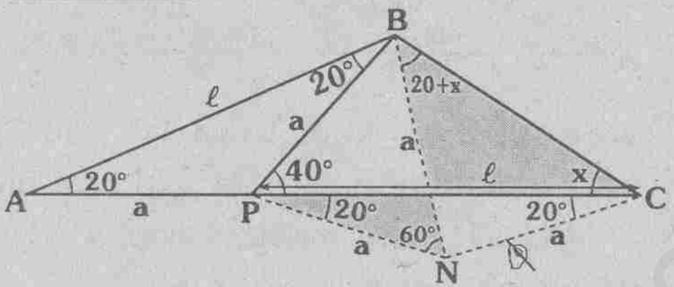
$AJ = JB$ y $PA = PB$

$\Rightarrow m\sphericalangle BJP = m\sphericalangle AJP = x$

$\Rightarrow 2x = 60°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 30°}$

***Resolución* 3**



- Se traza $\overline{PN}$ tal que $m\sphericalangle NPC = 20°$ y $NP = a \Rightarrow \Delta BAP \cong \Delta CPN$ (LAL)

$\Rightarrow NC = a$ y $m\sphericalangle ACN = 20°$

- Como $NP = PB$ y $m\sphericalangle NPB = 60°$

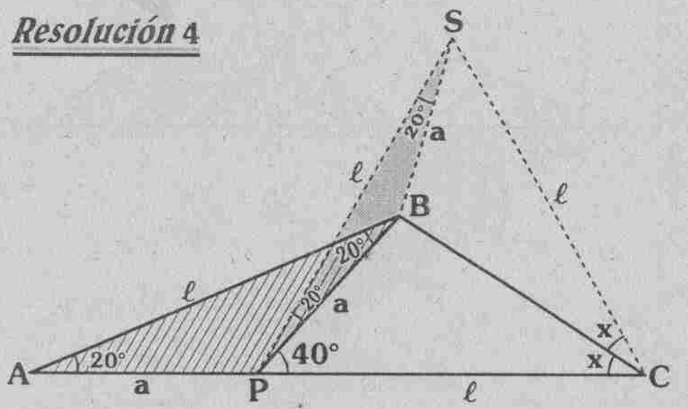
$\Rightarrow \Delta NPB$ es equilátero

- ΔBCN : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle NBC = 20 + x$
- En la parte sombreada:

$x + 20° + x = 60° + 20°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 30°}$

***Resolución* 4**



- Tracemos $\overline{PS}$ tal que $m\sphericalangle BPS = 20°$ y $PS = a$.
- $\Delta APB \cong \Delta PBS$ (LAL)

$\Rightarrow PS = a$ y $m\sphericalangle PSB = 20°$

- Como: $PS = PC$ y $m\sphericalangle CPS = 60°$

$\Rightarrow \Delta SPC$: equilátero

$PC = CS$ y $PB = BS \Rightarrow m\sphericalangle BCS = x$

$\Rightarrow 2x = 60°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 30°}$

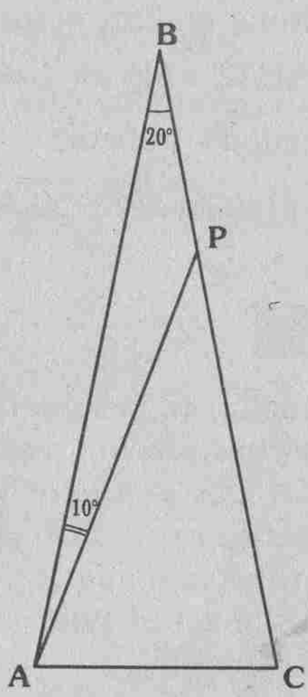
Nota

El estudiante debe verificar que en cada resolución planteada buscamos triángulos congruentes partiendo de la condición que habían dos lados de igual longitud.

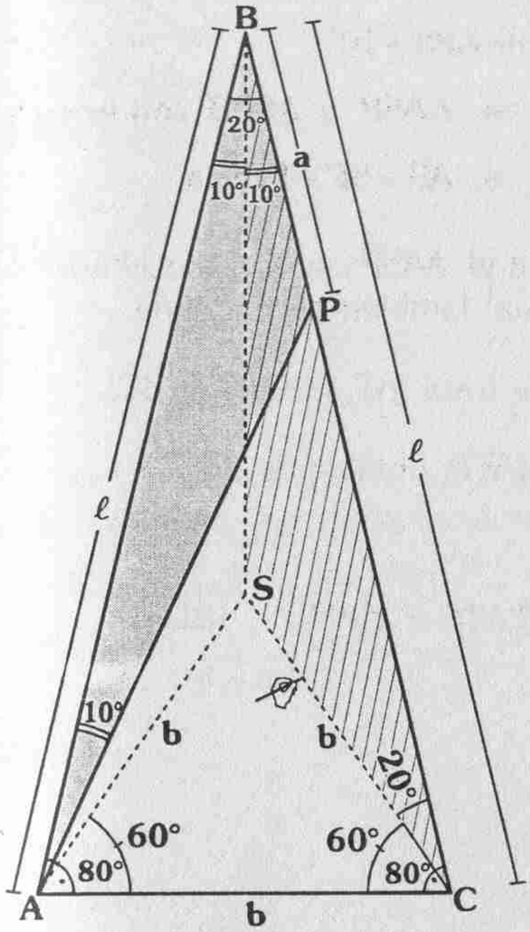
Problema N° 2

En el gráfico, $AB = BC$

Demuestre que $BP = AC$



Resolución 1



- Sea:

$$PB = a \quad y \quad AC = b$$

- ΔABC : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = 80°$$

- Busquemos un Δ que tenga "10°", "ℓ" y "20°" para ello: se ubica S en la región interior de ABC, tal que:

$$SC = b \quad y \quad m\sphericalangle SCB = 20°$$

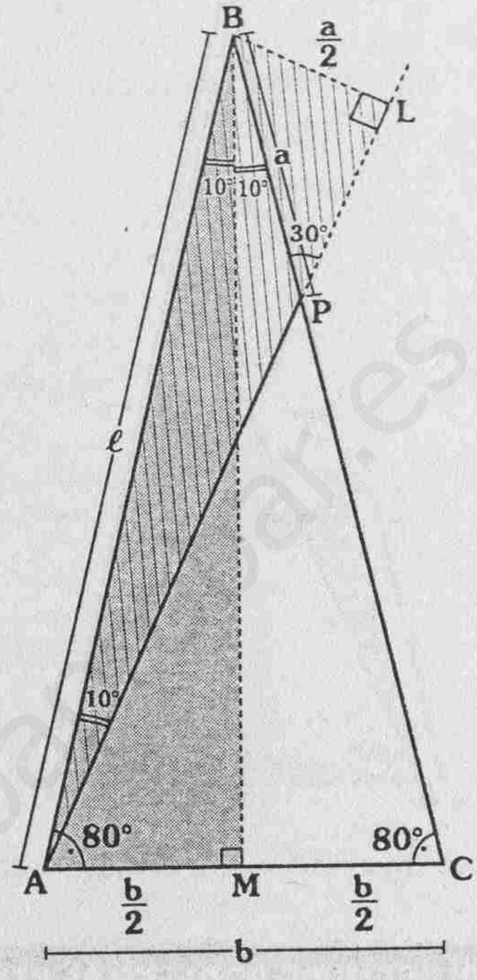
- ΔASC : equilátero
- Como $AS = SC \quad y \quad AB = BC$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABS = m\sphericalangle CBS = 10°$$

- $\Delta BCS \cong \Delta ABP \quad$ (ALA)

$$\therefore \; a = b$$

Resolución 2



- Como $AB = BC$, al trazar la altura $\overline{BM}$, se tendrá:

$$AM = MC \quad y \quad m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CBM = 10°$$

- Se traza $\overline{BL} \perp \overline{AP}$
- ⊿PBL: notable de 30°

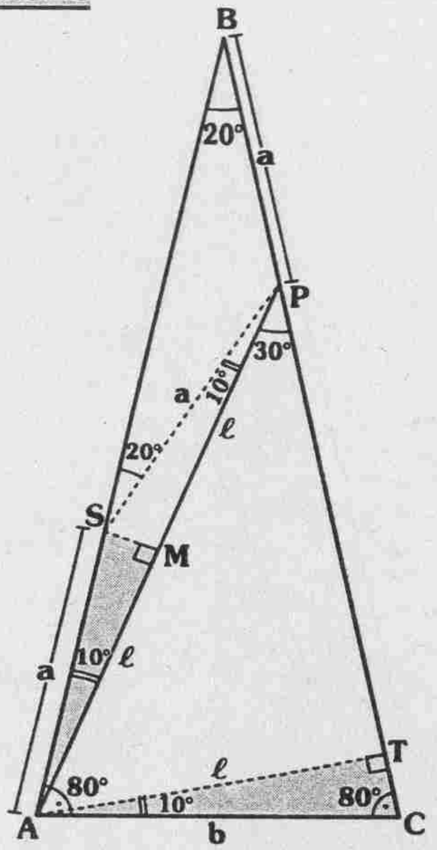
$$\Rightarrow \quad BL = \frac{a}{2}$$

- ⊿ALB ≅ ⊿BMC

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \; a = b$$

Resolución 3



- Como m∢PBA = 2(m∢PAB) , trazamos

$\overline{PS}$ (S en $\overline{AB}$) tal que:

m∢APS = 10°

⇒ ΔASP y ΔSPB son isósceles .

⇒ AS = SP = PB = a

- En el ΔASP , se traza la altura $\overline{SM}$, la cual también es mediana.

- Se traza AT ⊥ BC (T en $\overline{BC}$) .

⊿ATP: notable de 30°

⇒ AP = 2(AT)

⊿ ATC ≅ ⊿AMS (ALA)

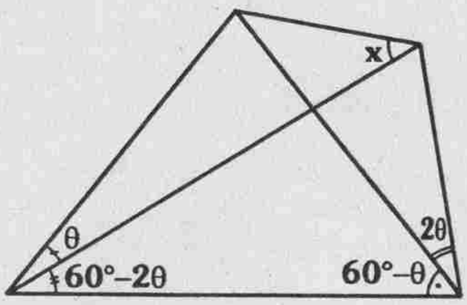
∴ a = b

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GENÉRICOS

Para complementar los criterios dados sobre construcción en triángulos se resolverá un grupo de problemas denominados genéricos, también se da un intervalo de la variable tal que el lector tenga casos particulares a partir del inicial.

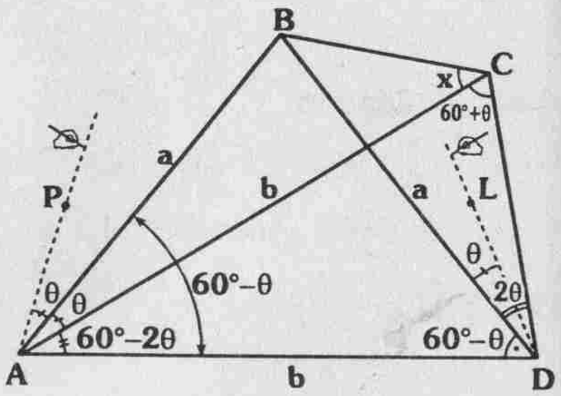
Problema N° 1

En el gráfico, $\theta \in \langle 0°;30° \rangle$, calcule x



Resolución

Paso I



- El primer paso en éste tipo de problemas es la observación y completar medidas angulares en base a ellos ensayar posibles trazos.

- Notemos:

$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BDA = 60° - \theta \Rightarrow AB = BD$

$m\sphericalangle ACD = m\sphericalangle ADC = 60° + \theta \Rightarrow AC = AD$

- Como: $m\sphericalangle BAD = 60° - \theta$ y

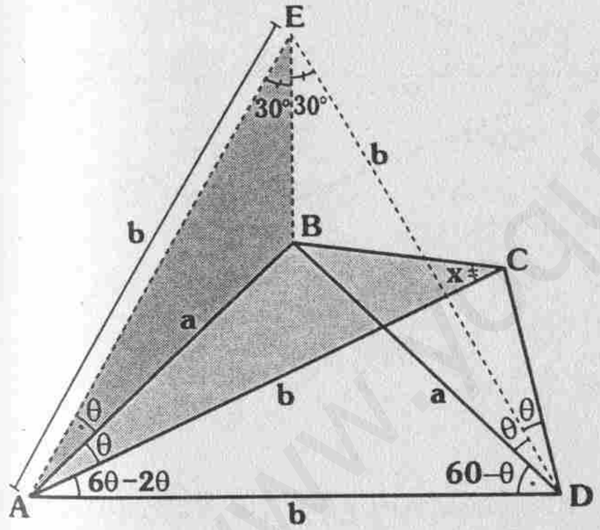
$m\sphericalangle ADC = 60° + \theta$

nos da la idea de buscar algún triángulo equilátero, para ello trazamos:

$\overline{AP}$, tal que $m\sphericalangle PAB = \theta$

$\overline{DL}$, tal que $m\sphericalangle BDL = \theta$

Paso II



- Tenemos ahora el ΔAED es equilátero.
- Como:

$AE = ED$ y $AB = BD$

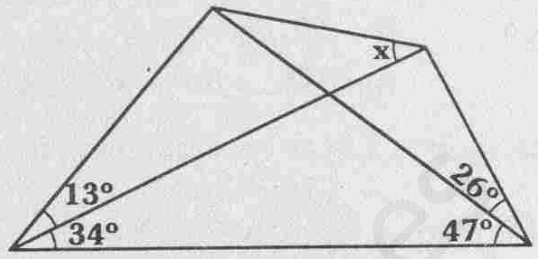
$m\sphericalangle AEB = m\sphericalangle BED = 30°$

- También: $\Delta EAB \cong \Delta CAB$ (LAL)

$\Rightarrow x = 30°$

Observación

Se pueden presentar casos particulares, por ejemplo si $\theta = 13°$ se tendría:

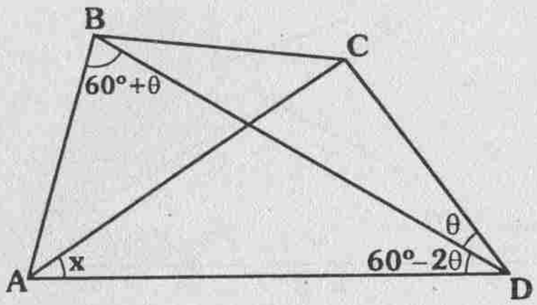


Su resolución es análoga.

Problema Nº 2

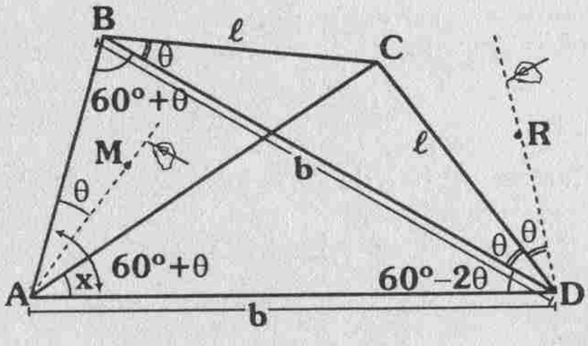
En el gráfico, $BC = CD$ y $\theta \in \langle 0; 30° \rangle$

Calcule x.



Resolución

Paso I



- Reconocemos inicialmente que:

$$BC = CD \quad y \quad BD = AD$$

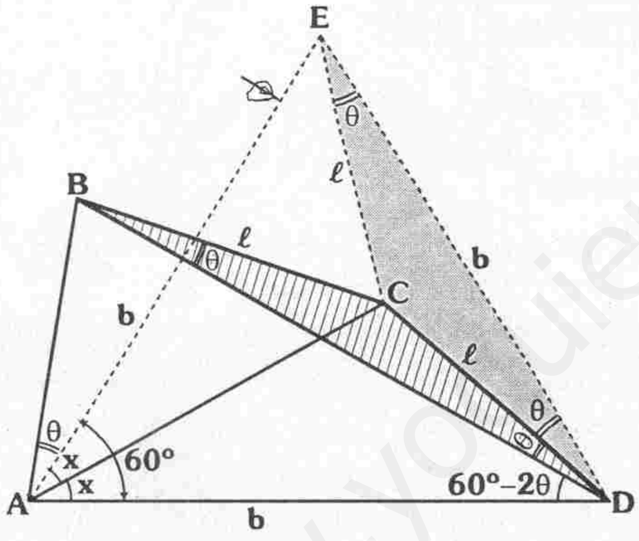
por ser los triángulos BCD y ADB isósceles.

- Como: $m\sphericalangle BAD = 60° + \theta$ y
$m\sphericalangle ADC = 60° - \theta$

nos sugiere hacer los siguientes trazos.

- $\overline{AM}$ tal que $m\sphericalangle MAB = \theta$
- $\overline{DR}$ tal que $m\sphericalangle CDR = \theta$

Paso II



- Completando los trazos tenemos que el triángulo AED es equilátero.
- Luego $\Delta BDC \cong \Delta EDC$ (LAL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle CED = \theta$$

- El triángulo ECD resulta ser isósceles

$$\Rightarrow \quad CE = CD$$

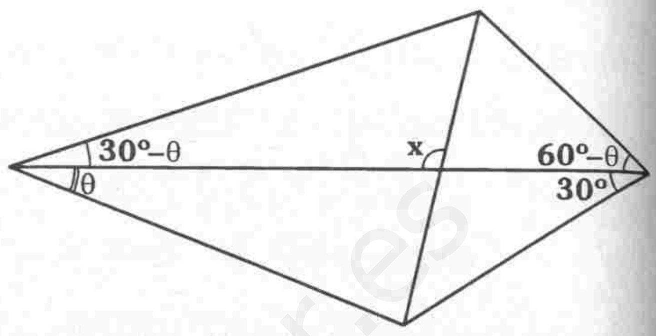
- Como $AD = AE \Rightarrow m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle EAC$

$$\Rightarrow \quad 2x = 60°$$

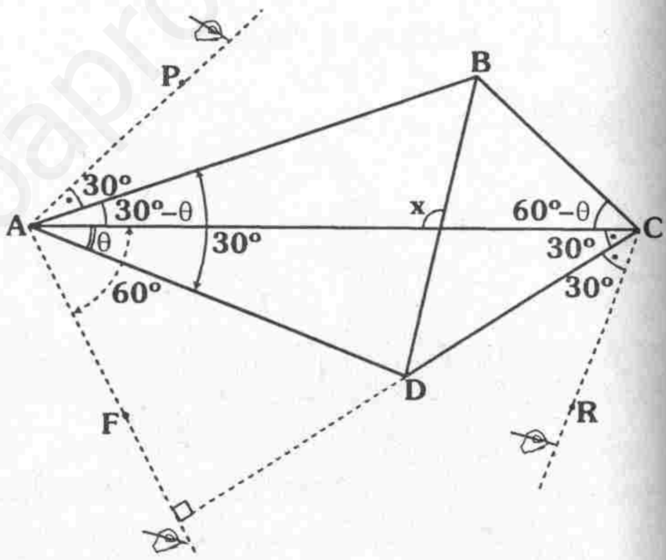
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema N° 3

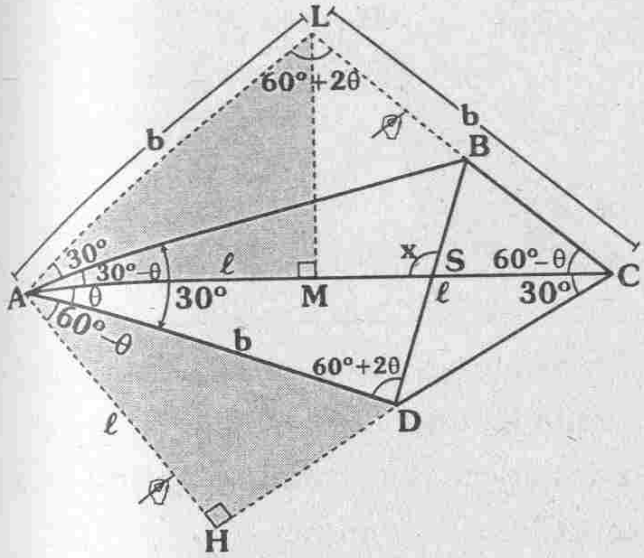
En el gráfico, $0° < \theta < 30°$. Calcule x en función de θ.



Resolución



- Para la resolución de este problema notamos que al "completar ángulos" no encontramos triángulos con "lados iguales" lo que si se puede aprovechar es la presencia del 30°, lo cual nos llevaría a completar el triángulo equilátero trazando $\overline{CR}$ y $\overline{AF}$, **otra posibilidad** es ubicar el 30° en un triángulo rectángulo. Optemos por lo último, aunque con la primera construcción también se llega al resultado.



- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AL}$, para obtener el ΔALC, el cual es isósceles.
- En el ΔALC se traza la altura $\overline{LM}$

$$\Rightarrow \quad AM = MC$$

- Luego:

$$\measuredangle AML \cong \measuredangle DHA \quad \Rightarrow \quad AD = b$$

- También: $\Delta LAB \cong \Delta DAB$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ADB = 60° + 2\theta$$

- En ΔADS:

$$x = \theta + 60° + 2\theta$$

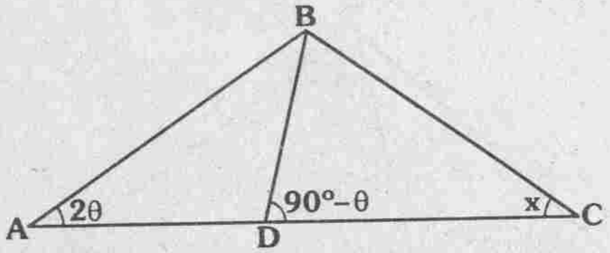
$$\therefore \quad \mathbf{x = 60° + 3\theta}$$

Problema N° 4

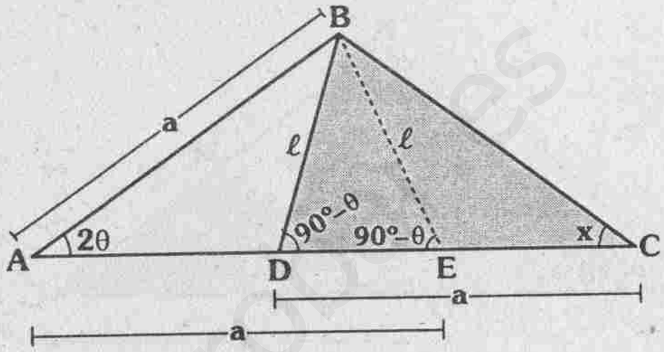
En el gráfico:

$$AB = CD \quad , \quad \theta < 30° \quad y \quad AB = DC$$

Calcule x en función de θ.



Resolución



- De acuerdo a los criterios estudiados es recomendable trazar $\overline{BE}$, tal que:

$$m\measuredangle BEA = 90° - \theta$$

entonces el ΔDBE y ΔABE son isósceles

$$\Rightarrow \quad AB = AE \quad y \quad DB = BE$$

- Luego: $\Delta BDC \cong \Delta AEB$ (LAL)

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2\theta}$$

Observación

Además se demuestra que:

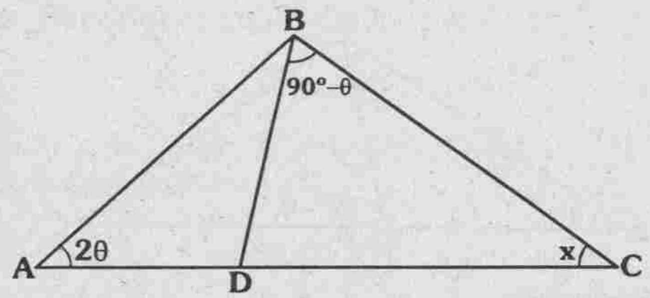
$$BC = a$$

Problema N° 5

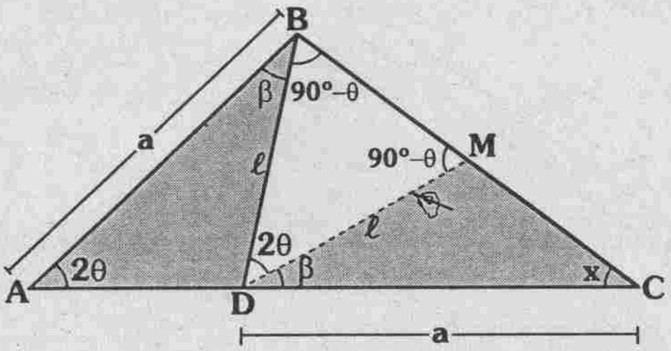
En el gráfico:

$$\theta < 30° \quad y \quad AB = CD$$

Calcule x, en función de θ.



Resolución



- Lo que se busca en este problema es que las medidas de "2θ" y "$90° - \theta$" se ubiquen en un mismo triángulo. Para ello se traza $\overline{DM}$ tal que $m\sphericalangle BDM = 2\theta \Rightarrow \Delta DBM$ es isósceles.
- Luego: $\Delta ABD \cong \Delta CDM$ (LAL)

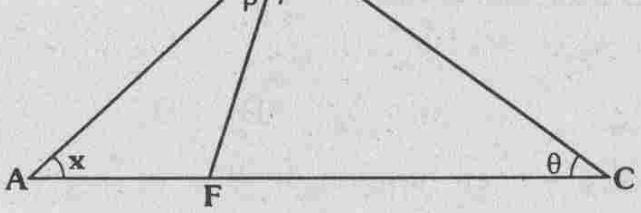
$$\therefore\ \mathbf{x = 2\theta}$$

Nota

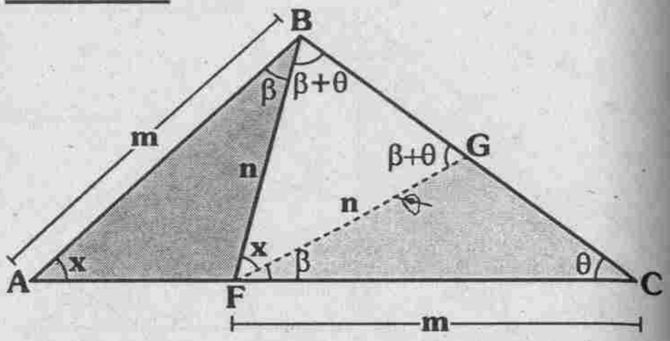
Como $x = 2\theta$, *el triángulo* ABC *resulta isósceles con* $AB = BC$.

Problema N° 6

En el gráfico, $AB = CF$, calcule x en función de θ.



Resolución

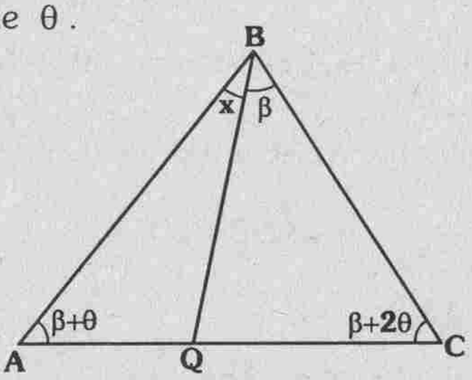


- En este caso buscamos ahora que se repita en un mismo triángulo "$\beta + \theta$", para lo cual trazamos $\overline{FG}$ tal que $m\sphericalangle CFG = \beta$, entonces:
  - ΔFBG : isósceles $\Rightarrow FB = FG$
  - $\Delta ABF \cong \Delta CFG$ (LAL)

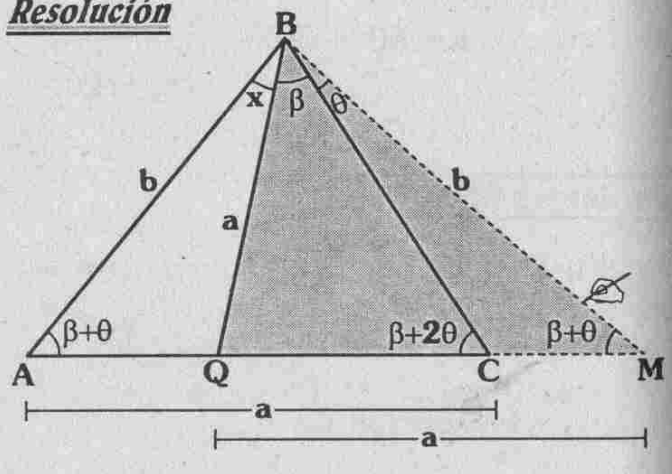
$$\therefore\ \mathbf{x = \theta}$$

Problema N° 7

En el gráfico, $BQ = AC$, calcule x en función de θ.



Resolución



- Debido a las medidas de "$\beta + 2\theta$", "$\beta + \theta$" y "β", buscamos que se repitan algunas de ellas en un mismo triángulo.

- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle BMC = \beta + \theta$
  $\Rightarrow$ ΔABM es isósceles $(AB = BM)$.

- También:

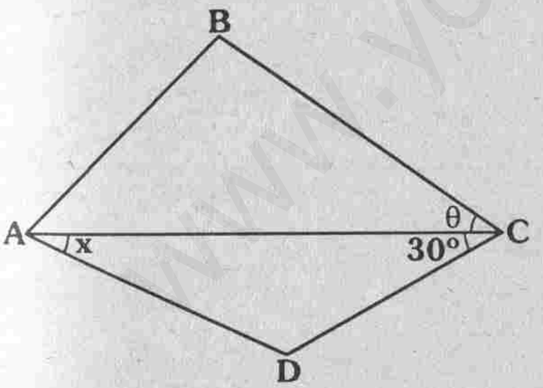
$$m\measuredangle QBM = m\measuredangle QMB = \beta + \theta$$
$$\Rightarrow \quad QM = QB$$

- Finalmente:

$$\Delta QMB \cong \Delta CAB \text{ (LAL)}$$
$$\Rightarrow \quad x + \beta = \theta + \beta$$
$$\therefore \quad \mathbf{x = \theta}$$

Problema N° 8

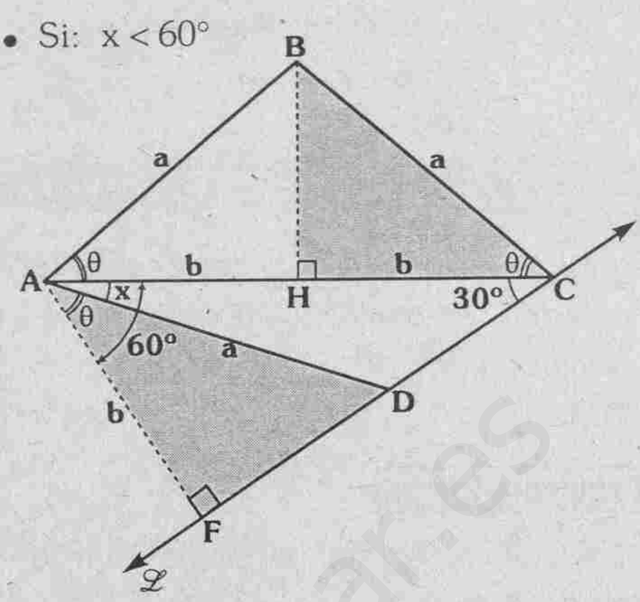
En el gráfico, $AB = BC = AD$, calcule x en función de θ.



Resolución

- Antes de resolver este problema, notemos que D es un punto sobre la recta $\mathscr{L}$, tal que AD=AB, se presenta dos posibilidades.

- Si: $x < 60°$



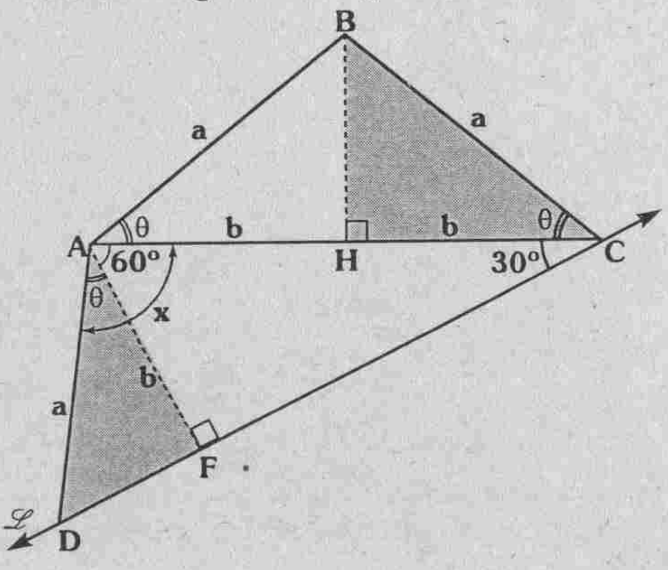
- Se traza la altura $\overline{BH}$ en el triángulo isósceles ABC $\Rightarrow$ $AH = HC = b$.
- También se traza: $\overline{AF} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- $\triangle AFC$ notable de 30°

$$\Rightarrow AF = \frac{AC}{2} = b$$

- Luego:

$$\triangle FAD \cong \triangle HCB \Rightarrow m\measuredangle FAD = \theta$$
$$\therefore \quad \mathbf{x = 60° - \theta}$$

- Si $x > 60°$
- El procedimiento es análogo, en este caso la figura nos quedará así:



- Con esta condición tenemos:

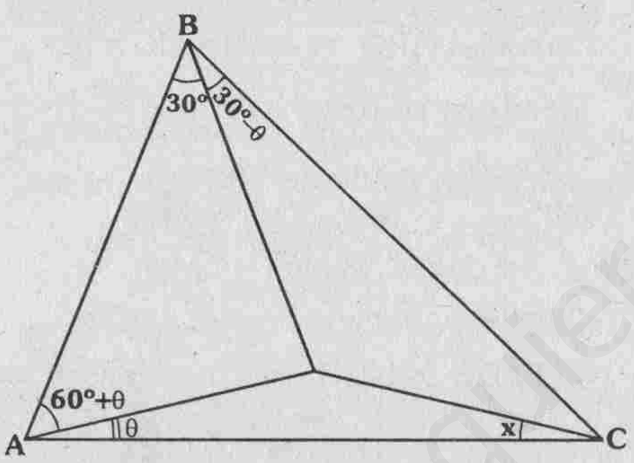
$$x = 60° + \theta$$

Nota

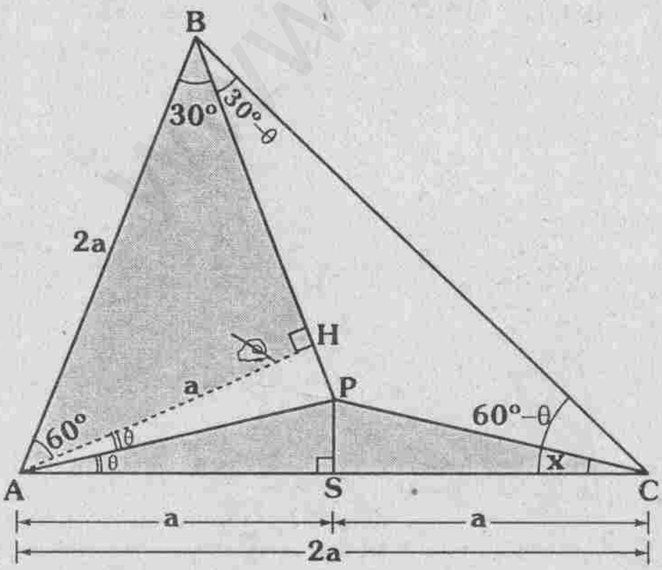
El estudiante puede verificar que $x \neq 60°$, es decir $\overline{AD}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$.

Problema N° 9

En el gráfico, $\theta < 30°$. Calcule x en función de θ.



Resolución



- Primero, notemos que el triángulo ABC es isósceles $\Rightarrow AB = AC$.
- Como $m\measuredangle BAP = 60° + \theta$, trazamos $\overline{AH}$ tal que $m\measuredangle BAH = 60° \Rightarrow \overrightarrow{AP}$ es bisectriz del $\measuredangle HAC$.
- $\triangle$AHB notable de 30°:

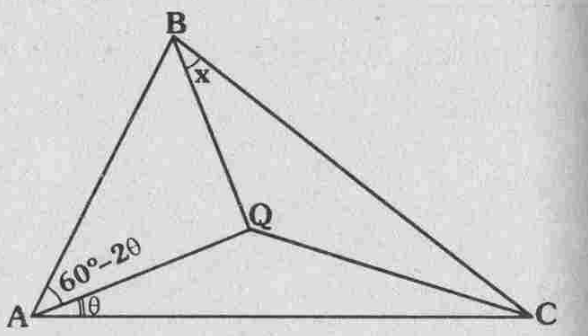
  Sea $AB = 2a \Rightarrow AH = a$
- Por teorema de la bisectriz:

  $AH = AS = a$
- Como: $AC = 2a \Rightarrow SC = a$
- Luego, el ΔAPC es isósceles:

$$\therefore \quad x = \theta$$

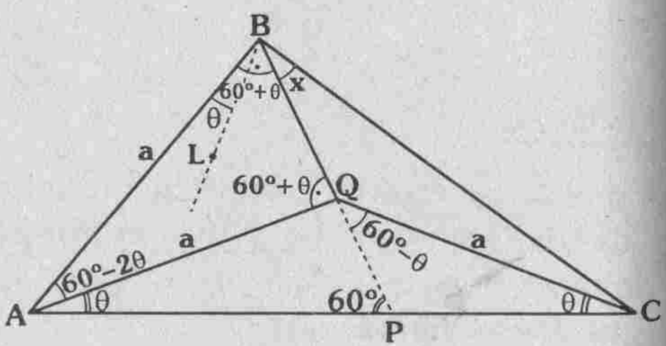
Problema N° 10

En el gráfico, $\theta < 30°$ y $AB = AQ = QC$. Calcule x.



Resolución

Paso I

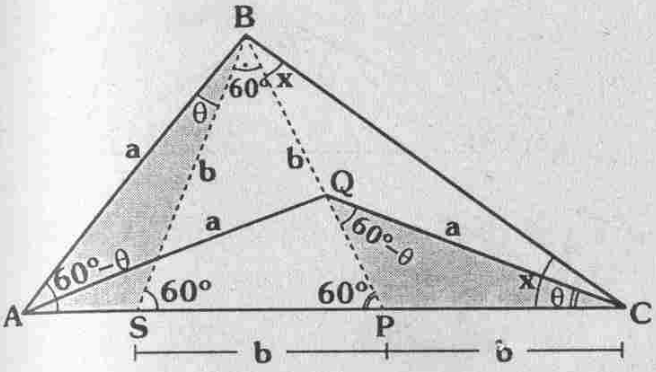


- Notemos que los triángulos ABQ y AQC son isósceles.
- Como:

$$m\measuredangle ABP = 60° + \theta \quad y \quad m\measuredangle BPA = 60°$$

nos da la posibilidad de trazar $\overline{BL}$ tal que $m\measuredangle ABL = \theta$.

Paso II



- Al completar los trazos, tenemos:
- ΔSBP es equilátero.
- $\Delta BAS \cong \Delta CQP$ (ALA)

$$\Rightarrow \quad BS = PC$$

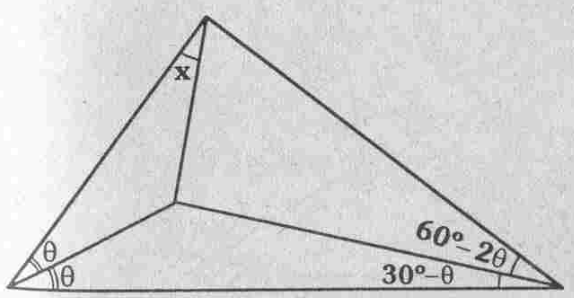
- Luego: ΔBPC es isósceles

$$\Rightarrow \quad x + x = 60°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

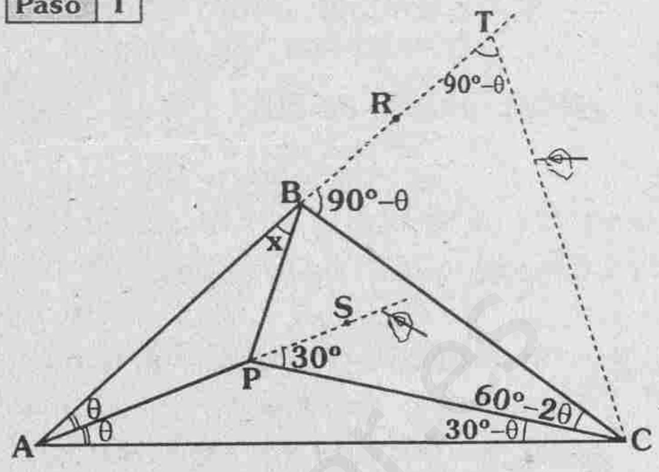
Problema N° 11

En el gráfico $\theta < 30°$, calcule x.



Resolución

Paso I



- En este problema, no observamos inicialmente triángulos isósceles ni equiláteros, sólo notamos la bisectriz $\overline{AP}$ del $\measuredangle BAC$ y también:

$$m\measuredangle CBR = 90° - \theta \quad y \quad m\measuredangle BAC = 2\theta$$

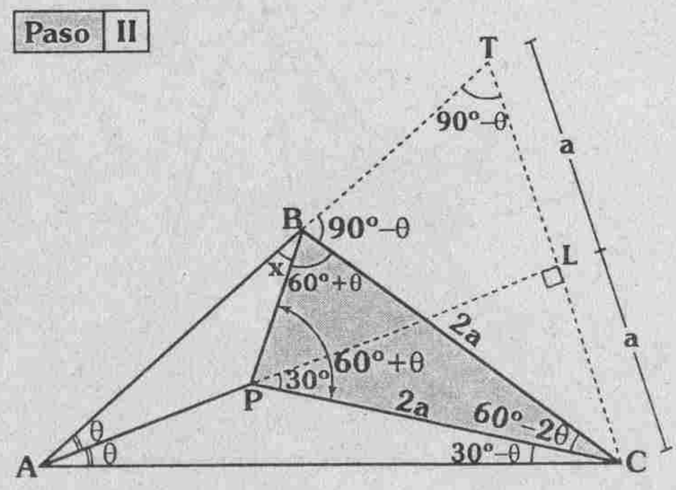
- Ello, por los criterios de construcción nos induce a trazar $\overline{CT}$ tal que:

$$m\measuredangle BTC = 90° - \theta$$

entonces ΔBCT y ΔATC son isósceles.

- También notamos: $m\measuredangle SPC = 30°$ el cual corresponde a "un $\measuredangle$ notable", busquemos la forma de aprovechar su presencia.

Paso II



- Como el ΔATC es isósceles:

  $\Rightarrow$ $\overline{AL}$ es también altura y mediana.

- $\measuredangle$PLC notable de 30°

  $$\Rightarrow \quad PC = 2(LC)$$

- Luego el ΔBCP es isósceles:

  $$\Rightarrow \quad m\measuredangle PBC = m\measuredangle BPC = 60° + \theta$$

  $$\Rightarrow \quad x + 60° + \theta + 90° - \theta = 180°$$

  $$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

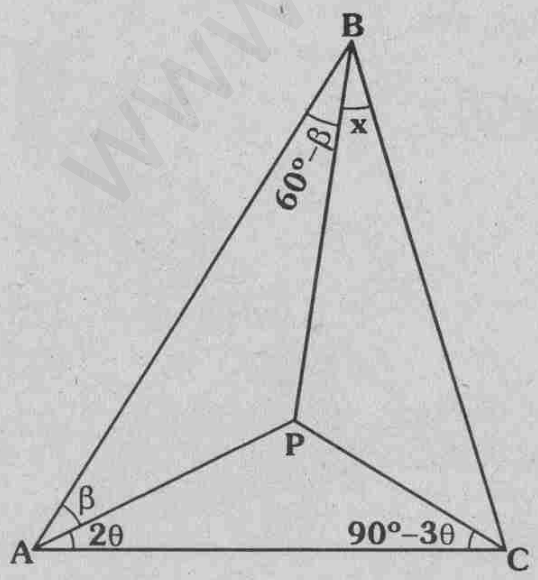
Problema N° 12

En el gráfico:

$$\theta < 30°\,,\ \beta < 60°$$

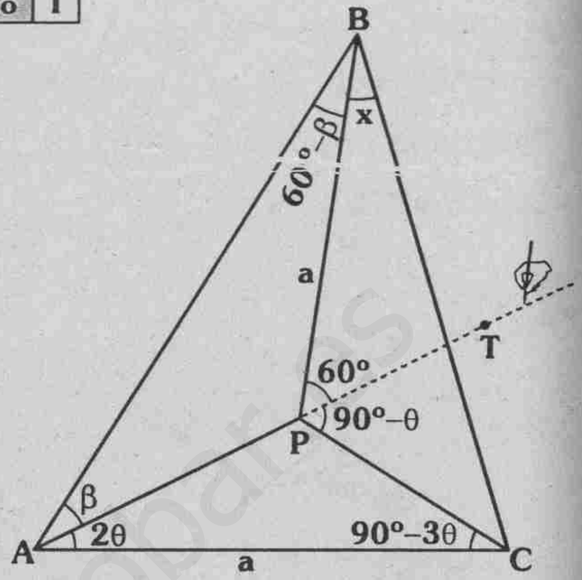
$$y \quad BP = AC$$

Calcule x en función de θ.



Resolución

Paso I



- En el gráfico tenemos que al prolongar $\overline{AP}$ se observará:

  $$m\measuredangle TPB = 60° \quad y \quad m\measuredangle TPC = 90° - \theta$$

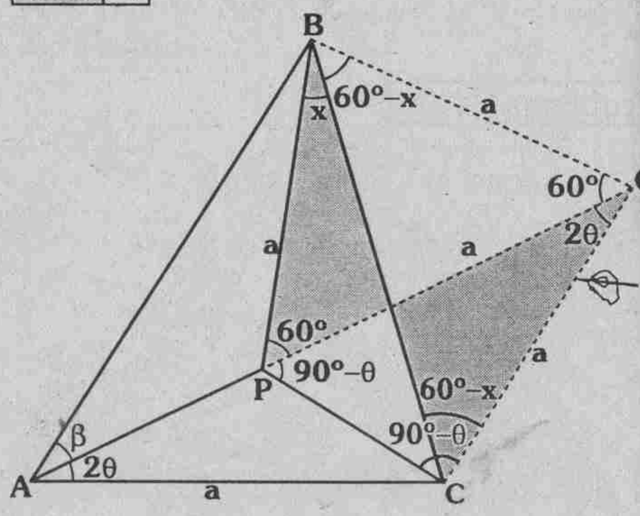
- Como: $m\measuredangle CAP = 2\theta$

  $y \quad m\measuredangle TPC = 90° - \theta$

nos da la posibilidad deacuerdo a los criterios de construcción de trazar $\overline{CQ}$ (Q en $\overrightarrow{AP}$) tal que:

$$\mathbf{m\measuredangle AQC = 2\theta}$$

Paso II



- Tenemos ahora que los $\Delta_s ACQ$ y PQC

$$\Rightarrow \quad AC = CQ = QP = a$$

- Como $PB = PQ = a$ y $m\measuredangle BPQ = 60^\circ$

$$\Rightarrow \quad \Delta PBQ \text{ es equilátero}$$

- ΔBQC es isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BCQ = 60^\circ - x$$

- En la parte sombreada:

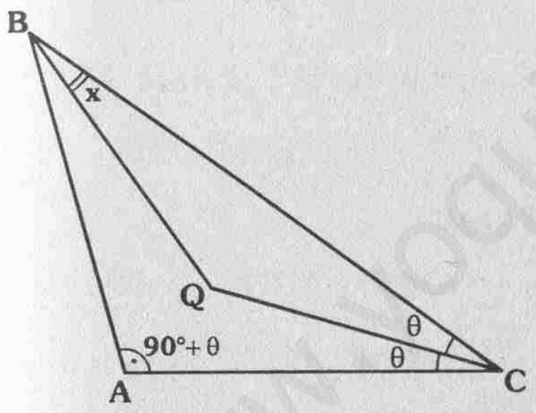
$$x + 60^\circ = 2\theta + 60^\circ - x$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \theta}$$

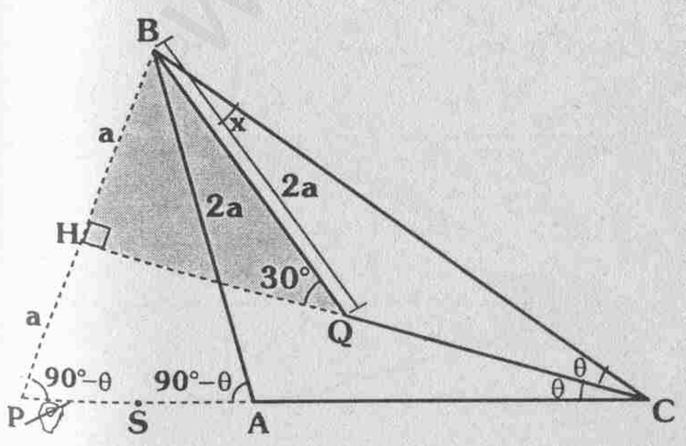
Problema N° 13

En el gráfico $\theta < 30^\circ$ y $AB = BQ$.

Calcule x en función de θ.



Resolución



- Al prolongar $\overline{CA}$, nos damos cuenta que $m\measuredangle SAB = 90^\circ - \theta$ y $m\measuredangle BCA = 2\theta$, entonces nos conviene trazar $\overline{BP}$, tal que:

$$m\measuredangle BPA = 90^\circ - \theta$$

- Luego: ΔCBP y ΔAPB son isósceles

$$\Rightarrow \quad PB = BA \quad y \quad BC = CP$$

- Como ΔBCP es isósceles $\Rightarrow \overline{CH}$ es bisectriz, mediana y altura.

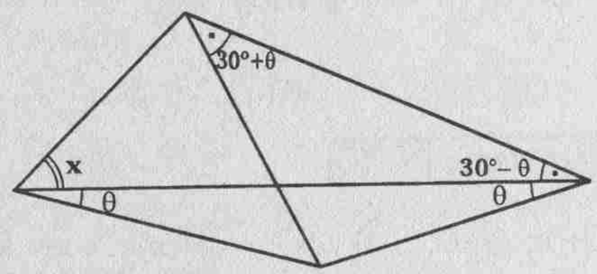
- Luego, el $\triangle BHQ$ es notable de 30°

$$\Rightarrow \quad x + \theta = 30^\circ$$

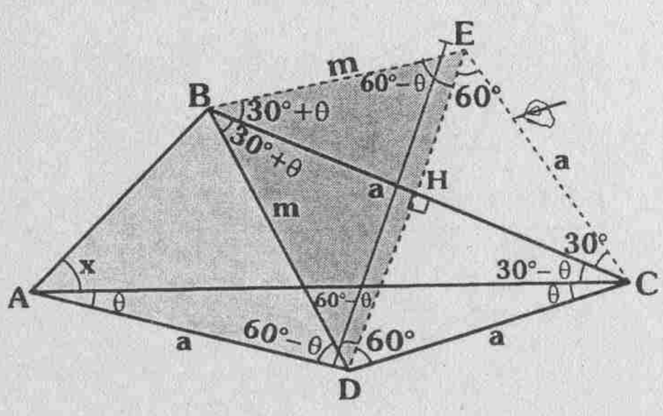
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30^\circ - \theta}$$

Problema N° 14

En el gráfico, $\theta < 30^\circ$, calcule x en función de θ.



Resolución



- Notamos primero:

ΔADC isósceles $\Rightarrow AD = DC$

$m\sphericalangle ADB = 60° - \theta$

$m\sphericalangle DCB = 30°$

- Se traza $\overline{DH} \perp \overline{BC}$ y se prolonga hasta E tal que el $DH = HE = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \Delta DEC$ es equilátero

- Como $DH = HE \Rightarrow BE = BD$

$\Delta ADB \cong \Delta EDB$ (LAL)

$\Rightarrow AB = m$

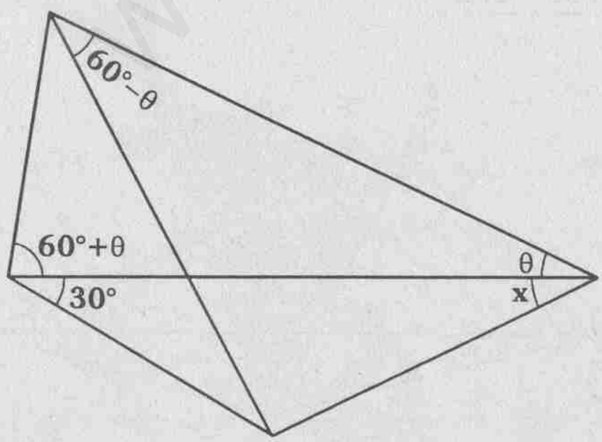
- ΔABD : isósceles

$\Rightarrow x + \theta = 60° - \theta$

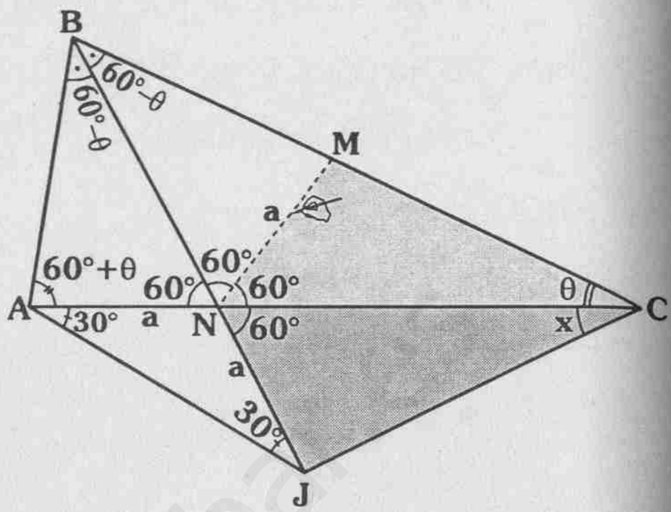
$\therefore \mathbf{x = 60° - 2\theta}$

Problema N° 15

En el gráfico, $\theta < 60°$, calcule x en función de θ.



Resolución



- Al completar ángulos, tenemos:

$m\sphericalangle AJN = 30°$

$m\sphericalangle ABJ = 60° - \theta$

$m\sphericalangle ANB = 60°$

- Como $m\sphericalangle BNC$, se traza $\overline{NM}$, tal que:

$m\sphericalangle BNM = 60°$

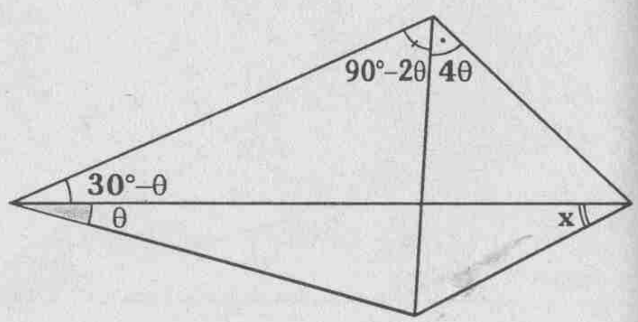
- Luego:

$\Delta ANB \cong \Delta MNB \Rightarrow NM = a$

$\Delta CNM \cong \Delta CNJ \Rightarrow \mathbf{x = \theta}$

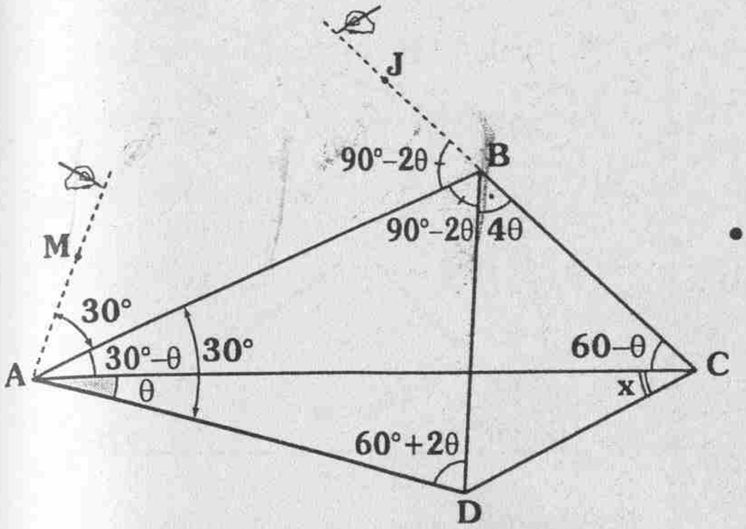
Problema N° 16

En el gráfico, $\theta < 30°$, calcule x.



Resolución

Paso I



- Cuando prolongamos $\overline{CB}$, nos damos cuenta:

$$m\sphericalangle JBA = m\sphericalangle ABD = 90° - 2\theta$$

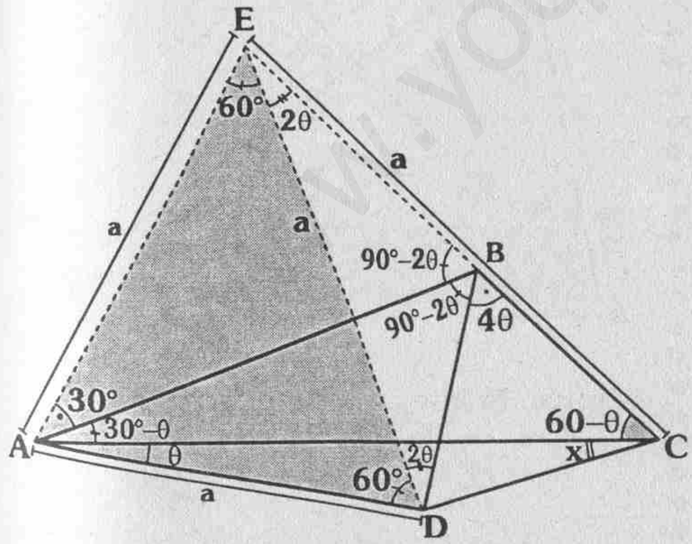
$$m\sphericalangle DAB = 30°$$

- Trazamos $\overline{AM}$ tal que:

$$m\sphericalangle BAM = 30°$$

para buscar un triángulo congruente con el ΔABD.

Paso II



- Al completar los trazos indicados tenemos:

$$\Delta BAE \cong \Delta BAD \;\Rightarrow\; AE = AD$$

- Como:

$$m\sphericalangle EAD = 60° \;\Rightarrow\; \Delta AED$$

es equilátero.

- Como:

$$m\sphericalangle EAC = m\sphericalangle ECA = 60° - \theta$$

$$\Rightarrow \;\Delta AEC \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow \;EA = EC = a$$

- ΔDEC es isósceles, como

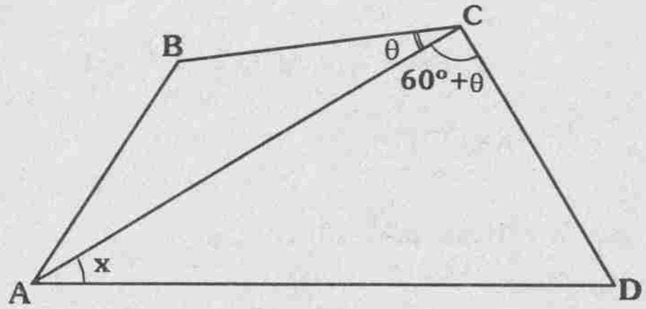
$$m\sphericalangle DEB = 2\theta \;\Rightarrow\; x + 60° - \theta = 90° - \theta$$

$$\therefore\; \mathbf{x = 30°}$$

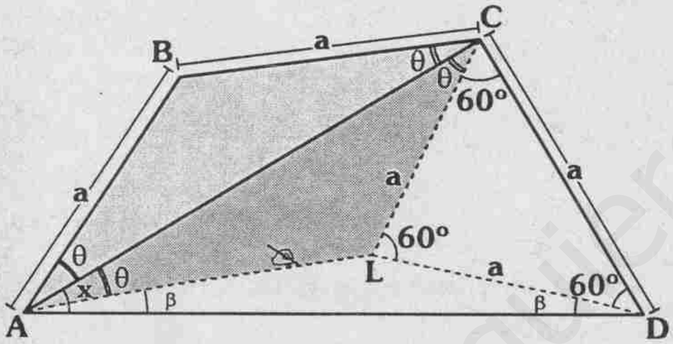
Problema N° 17

En el gráfico, $\theta < 90^\circ$ y $AB = BC = CD$

Calcule x.



Resolución



- Como $m\measuredangle ACD = 60^\circ + \theta$, trazamos $\overline{CL}$, tal que $m\measuredangle ACL = \theta$ y $CL = a$

  $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ALC$, luego: $CL = AL = a$

- Como $LC = CD$ y $m\measuredangle LCD = 60^\circ \Rightarrow$ el ΔLCD es equilátero

- ΔALD es isósceles.

- En ⩓ACLD:

$$2\theta + 2\beta = 60^\circ$$

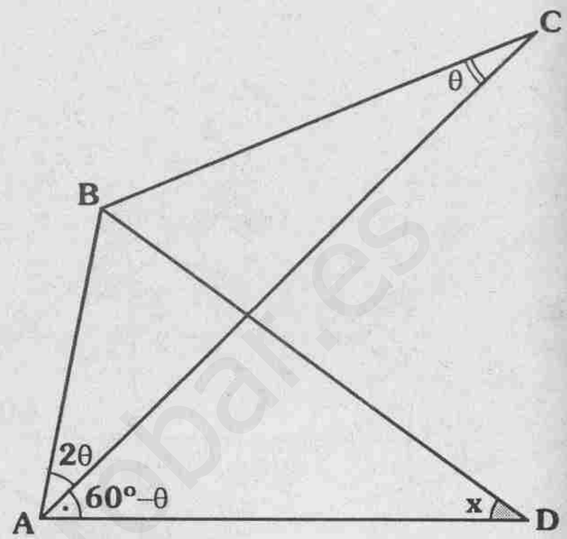
$$\Rightarrow \theta + \beta = 30^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30^\circ}$$

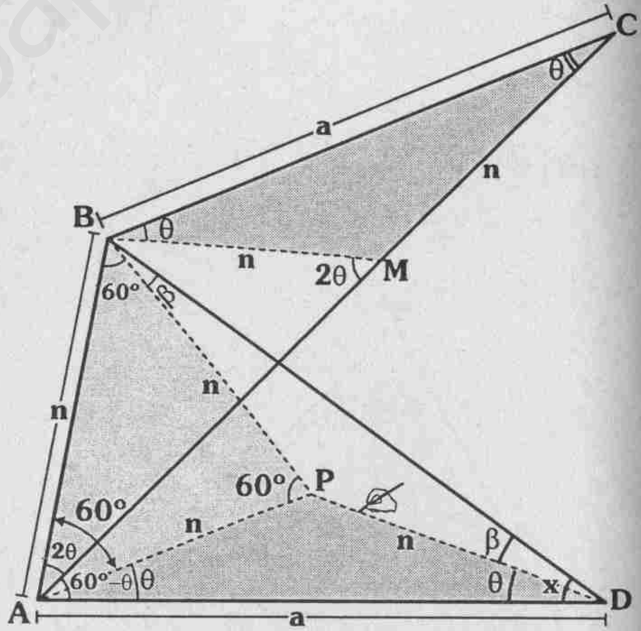
Problema N° 18

En el gráfico, $\theta < 90^\circ$, $BC = AD$.

Calcule x.



Resolución



- Inicialmente nos damos cuenta:

  $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$ y

  $m\measuredangle BAD = 60^\circ + \theta$

- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle MBC = \theta$

  $\Rightarrow \quad BM = MC = AB$

- Se traza también:

  $\overline{AP}$ tal que $m\measuredangle DAP = \theta$ y $AP = n$

- $\triangle PAD \cong \triangle MBC$ (LAL) $\Rightarrow$ $PD = n$

- Además, como:

  $AB = AP$ y $m\measuredangle BAP = 60°$

  entonces $\triangle ABP$ es equilátero.

- $\triangle BPD$ es isósceles.

- En $\measuredangle ADBP$:

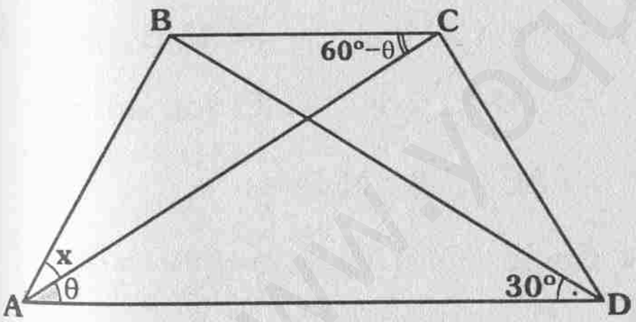
$$2\theta + 2\beta = 60°$$

$$\theta + \beta = 30°$$

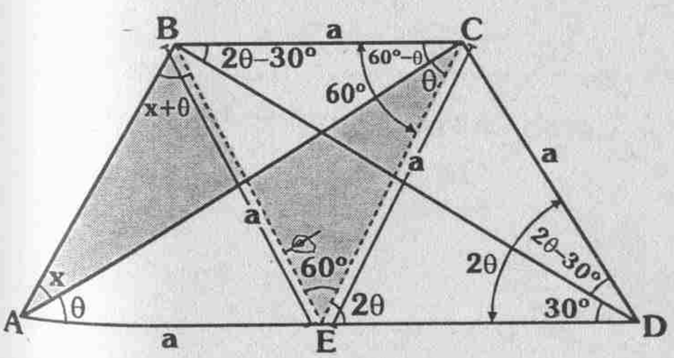
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema Nº 19

En el gráfico, $\theta < 60°$ y $BC = CD$. Calcule x.



Resolución



- Como el $\triangle BCD$ es isósceles

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle CBD = m\measuredangle CDB = 2\theta - 30°$

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ADC = 2\theta$

- En el $\triangle ACD$, se está notando :

  $m\measuredangle CDA = 2(m\measuredangle CAD)$

  $\Rightarrow$ Se traza $\overline{CE}$ tal que $m\measuredangle ACE = \theta$

  $\Rightarrow$ $CE = CD = AE$

- Como $m\measuredangle ABE = 60°$ y $BC = CE$ entonces el $\triangle BCE$ es equilátero.

- $\triangle AEB$: isósceles

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABE = x + \theta$

- En la parte sombreada:

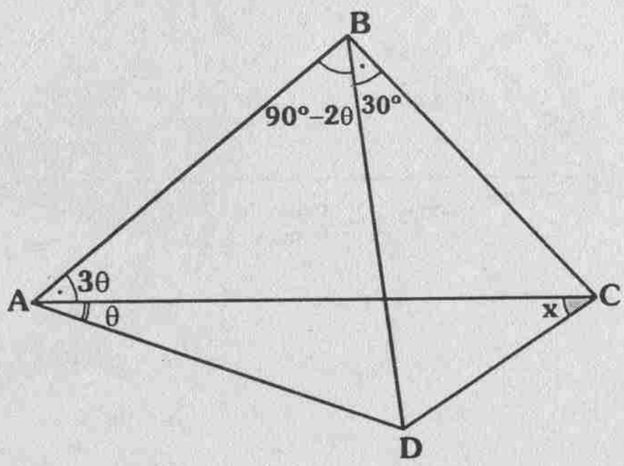
$$x + x + \theta = 60° + \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema Nº 20

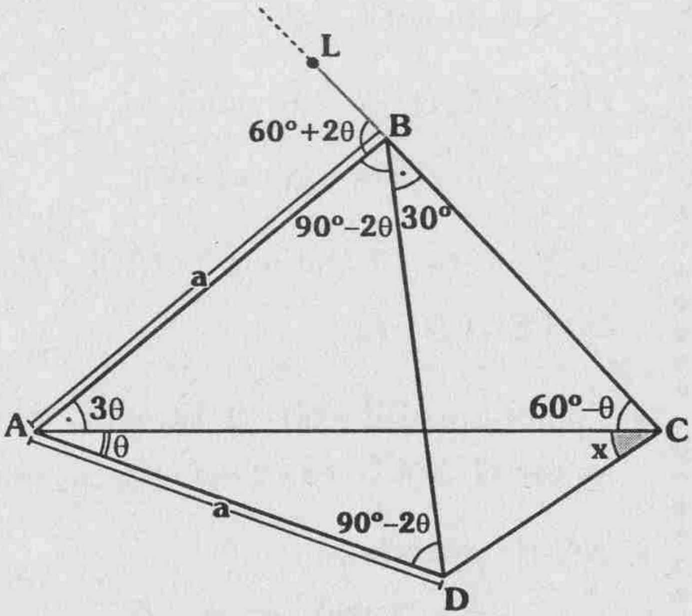
En el gráfico, $\theta < 15°$.

Calcule x.



Resolución

Paso I

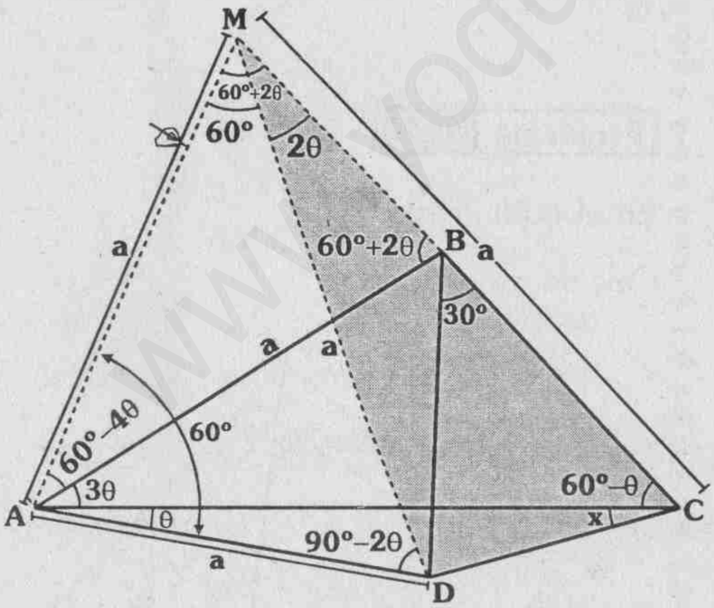


- Notamos inicialmente que el ΔABD es isósceles. También al prolongar $\overline{CB}$.
- Se nota:

$$m\measuredangle ACB = 60° - \theta \quad \text{y}$$

$$m\measuredangle LBA = 60° + 2\theta$$

Paso II



- Se traza $\overline{AM}$ tal que $m\measuredangle AMB = 60° + 2\theta$

$\Rightarrow \Delta AMB$ y el ΔAMC son isósceles

$\Rightarrow AB = AM = MC = a$

- Como $AM = AD$ y $m\measuredangle MAD = 60°$

$\Rightarrow \Delta AMD$ es equilátero

- ΔDMC: es isósceles

$\Rightarrow DM = MC = a$

- Como $m\measuredangle DMC = 2\theta$

$\Rightarrow 60° - \theta + x = 90° - \theta$

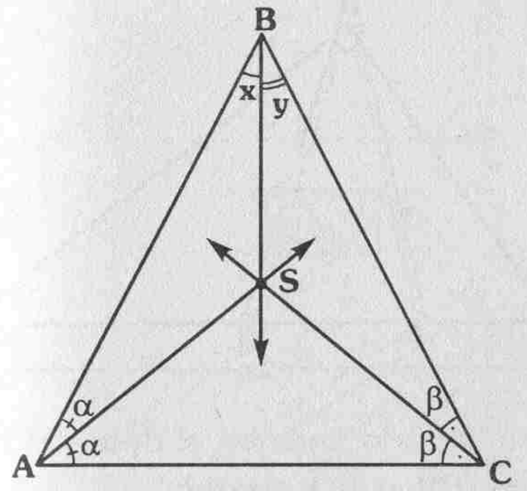
$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$

CONSIDERACIONES FINALES

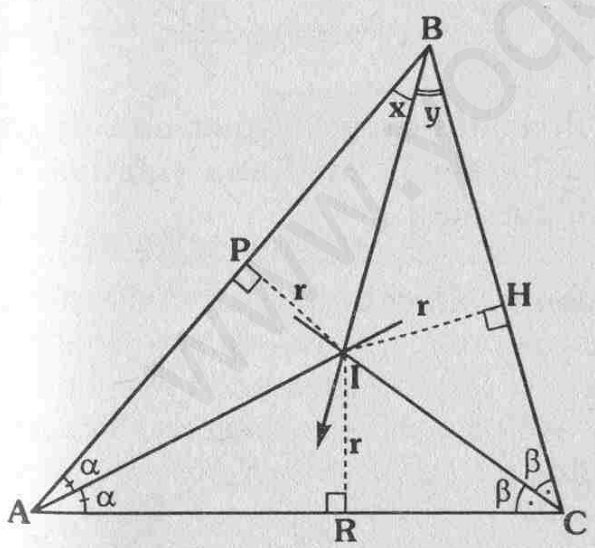
Veamos a continuación algunas situaciones comunes que el estudiante encontrará en la resolución de problemas. Aunque algunos de estos resultados, los estudiaremos en otros capítulos como puntos notables o circunferencia, los presentamos ahora, pues ellos tienen que ver con teoremas sobre congruencia.

Así tenemos:

- Si se tiene que $\overrightarrow{AS}$ y $\overrightarrow{CS}$ son bisectrices, entonces $\overrightarrow{BS}$ también es bisectriz.



Prueba:

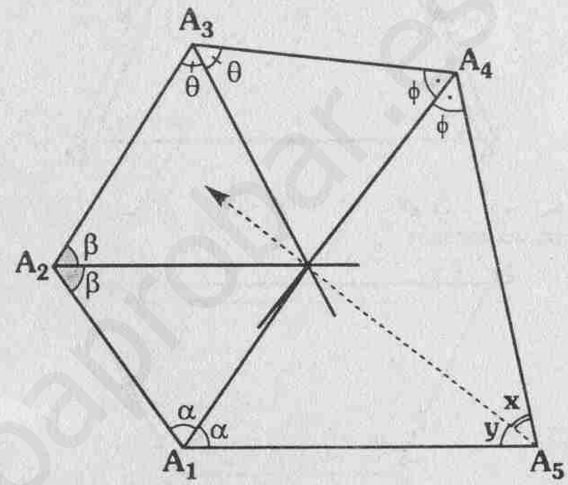


- Por teorema de la bisectriz:

$$IR = IH = IP$$

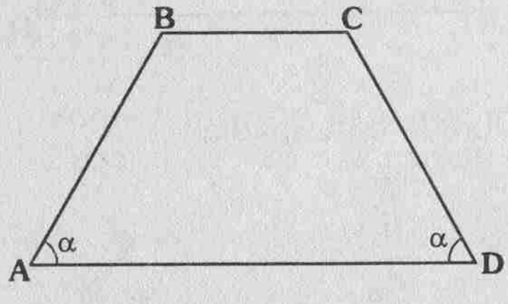
- Como: $IP = IH \Rightarrow x = y$

Generalizando:



- Consideremos un polígono de cinco vértices (puede ser de "n" vértices). Si las bisectrices desde A_1, A_2, A_3 y A_4 concurren, entonces: $x=y$

- Si $AB = DC$



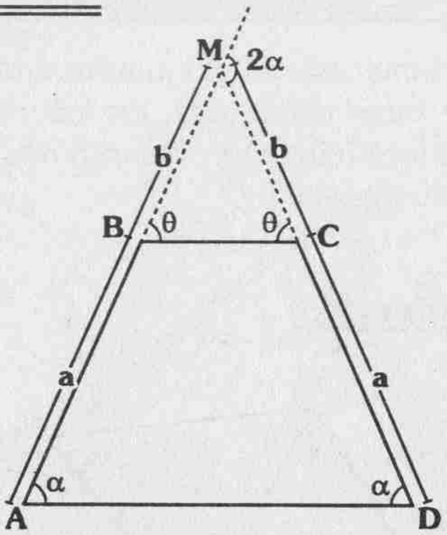
Se cumple:

$$\boxed{\overline{AD} \parallel \overline{BC}}$$

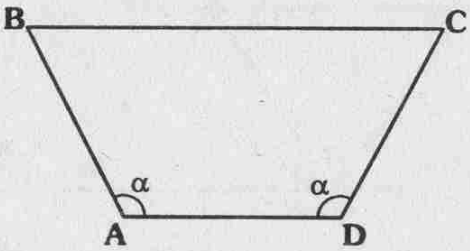
Prueba:

- Si $\alpha \neq 90°$, consideremos los siguientes casos:

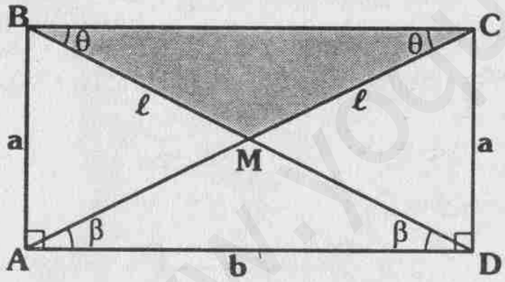
a) Si $\alpha < 90°$:



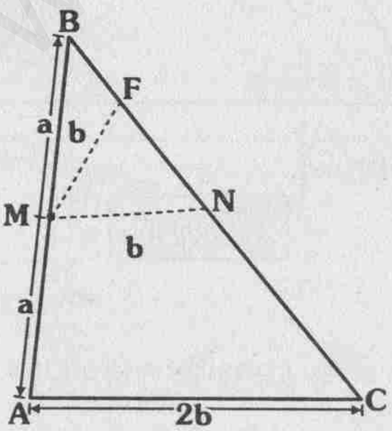
b) Si $\alpha > 90°$:



c) Si $\alpha = 90°$:



■ Sobre la base media:

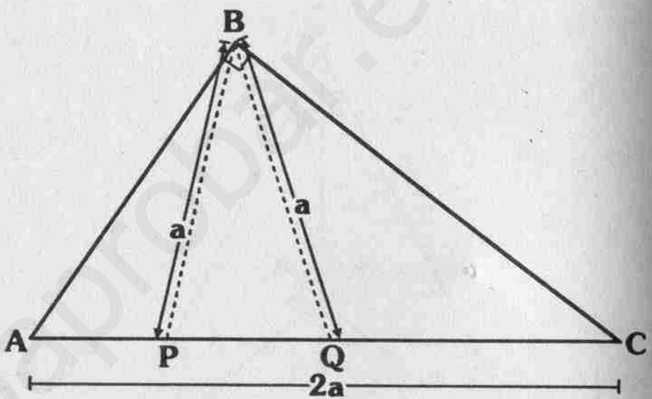


Si desde el punto medio M de $\overline{AB}$ trazamos los segmentos $\overline{MF}$ y $\overline{MN}$ tal que:

$$MF = MN = \frac{AC}{2}$$

entonces uno de ellos debe ser la base media (*no dejarse llevar por el gráfico*).

■ En el triángulo rectángulo:

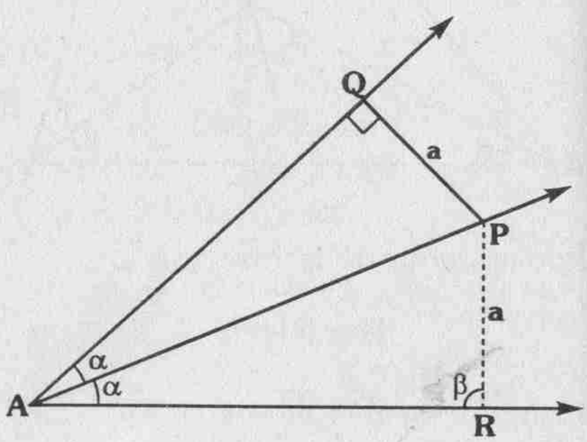


Similar a lo anterior, si desde M trazamos $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ tal que :

$$BP = BQ = \frac{AC}{2}$$

podemos asegurar que uno de ellos debe ser la mediana relativa a la hipotenusa.

■ En la bisectriz:

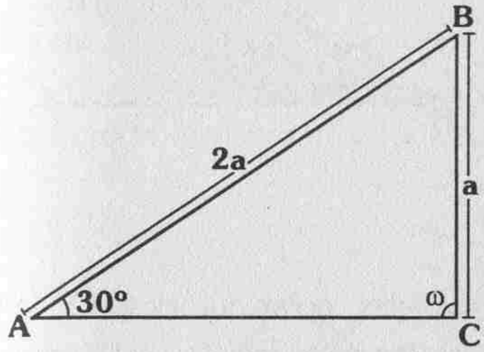


Si $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz del $\measuredangle QAR$, tal que:

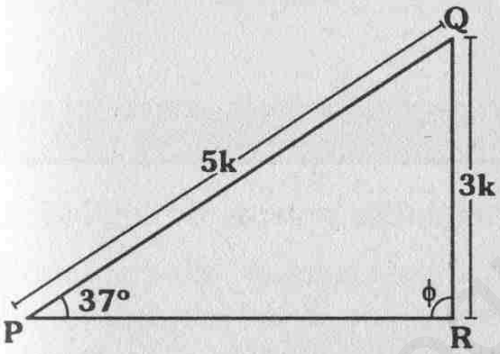
$$\overline{PQ} \perp \overline{AQ} \quad y \quad PQ = PR$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 90^\circ}$$

■ En algunos triángulos notables:



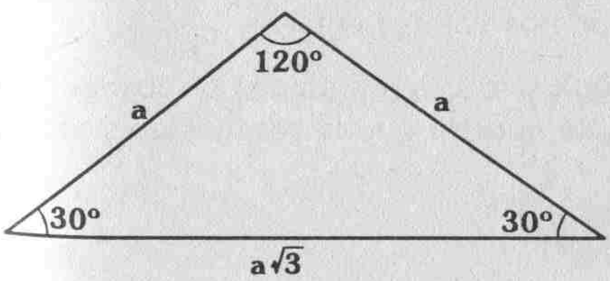
Se cumple: $\boxed{\omega = 90^\circ}$

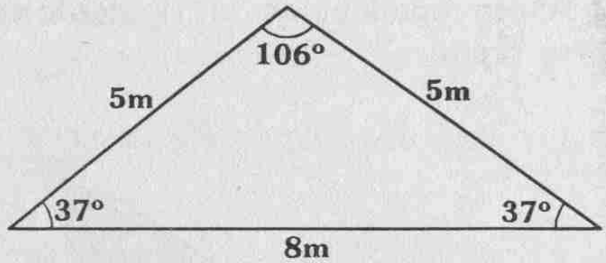


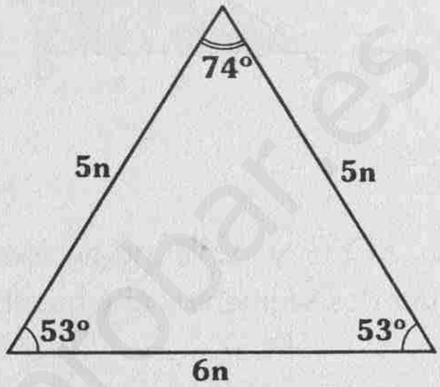
Se cumple: $\boxed{\phi = 90^\circ}$

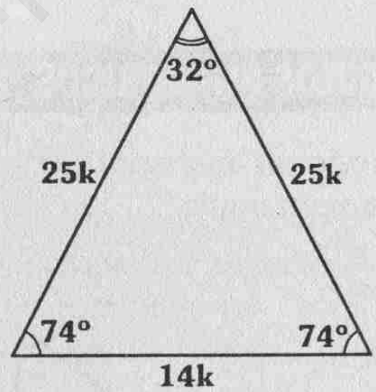
Otros triángulos notables :

Presentamos a continuación, algunos triángulos notables (*notar que no necesariamente son triángulos rectángulos*), notar que se conocen todas las medidas angulares y las razones de todos los lados.



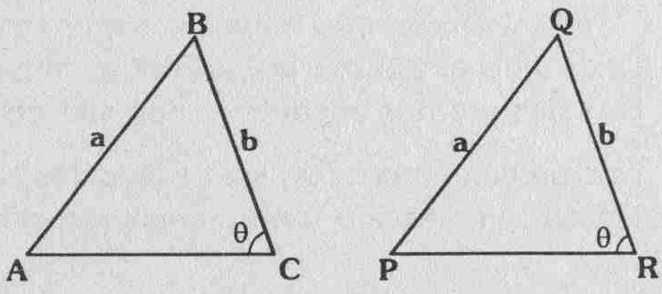






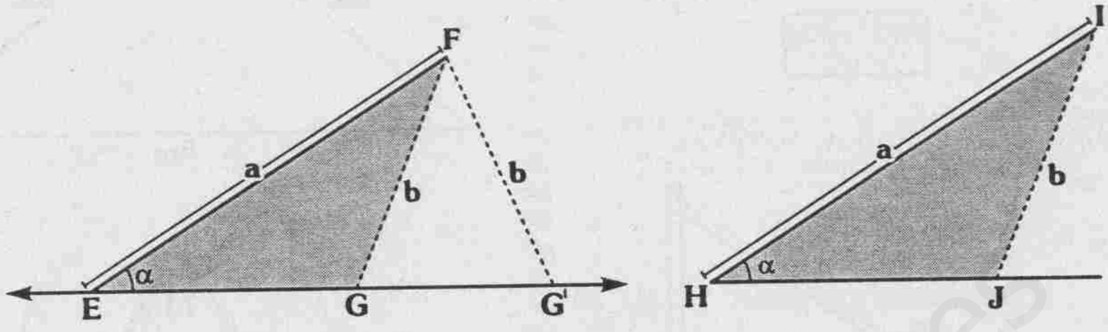
Sobre el 4to caso :

- El denominado 4to caso, estudiado en la página N° 14 nos indica:



Si $a > b \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$

- Ahora analicemos el siguiente caso en que el "ángulo opuesto" al menor lado se repita.

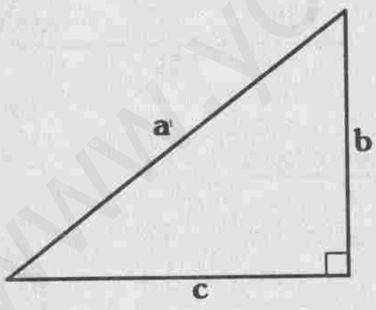


Si: $b < a$

$\Rightarrow$ Los ΔEFG y ΔHIJ no necesariamente son congruentes, notar que desde F se pueden trazar dos segmentos que miden "b", solo en uno de los casos los Δ_s serán congruentes.

TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

"Expresiones matemáticas para obtener las longitudes enteras de los lados de un triángulo rectángulo".



Pitágoras de Samos nos legó su teorema de los triángulos rectángulos, pilar fundamental de cálculos geométricos y trigonométricos, en el cual relaciona las medidas de los catetos y de la hipotenusa.

$$c^2 + b^2 = a^2 \qquad \text{... (I)}$$

Dado que al aplicar la expresión, hemos de acabar calculando una raíz cuadrada, casi siempre nos encontraremos que no obtenemos valores enteros.

Nos preguntamos si existen triángulos rectángulos, cuyas longitudes de los lados son enteros, un sencillo y muy conocido ejemplo demuestra que la respuesta es afirmativa:

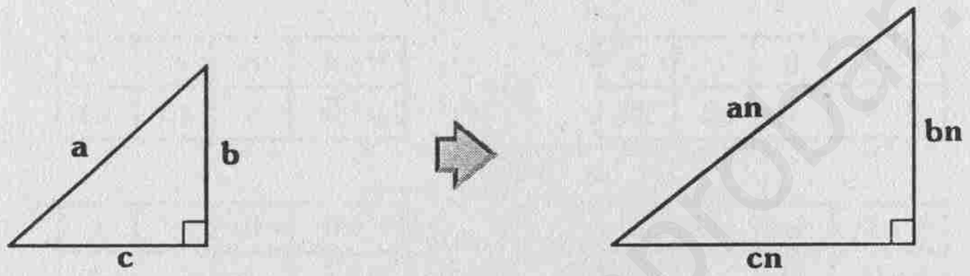
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

¿Existen otras respuestas? ¿Cómo podemos hallarlas?

En este capítulo analizaremos dichas interrogantes.

Si tenemos la solución a; b y c de (I) podemos hallar otra multiplicando cada uno de los términos a, b y c con cualquier entero.

Puesto que 3; 4 y 5 es un resultado, podemos multiplicar por 2 para obtener 6; 8 y 10. Esto nos da $6^2+8^2=10^2$; también : $9^2+12^2=15^2$. En términos generales 3n; 4n y 5n será solución si "n" es un número entero. De la misma forma, si a, b y c es una solución cualquiera, entonces an; bn y cn es también solución.



$a^2=b^2+c^2$ $\qquad$ $(an)^2=(bn)^2+(cn)^2$

$(a, b \text{ y } c \in \mathbb{Z}^+)$ $\qquad$ con "n" $\in \mathbb{Z}^+$

Esta forma de hallar nuevos resultados es muy trivial y por lo tanto de poco interés. Es más interesante encontrar soluciones básicas, y estas no pueden hallarse meramente multiplicando otro resultado por un número entero. Denominaremos "soluciones reducidas" aquellas donde a; b y c no tengan un divisor común; luego 3; 4 y 5 es un resultado reducido.

Si dos o más números no tienen un divisor común diremos que son primos entre sí. En un resultado reducido cada par formado por los números a; b y c es primo.

A continuación, sólo se indicarán los resultados para obtener el triángulo rectángulo de lados enteros (*la demostración tiene que ver con procedimientos aritméticos los cuales no mencionaremos*)

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu^2+v^2 \\ b &= \mu^2-v^2 \\ c &= 2\mu v \end{aligned}\right\}(II)$$

Con $\mu > v$ y μ y v son primos entre sí, ello para obtener "resultados reducidos".

Algunos ejemplos de números pitagóricos:

V=1	b	c	a
μ=2	3	4	5
μ=4	15	8	17
μ=6	35	12	37
μ=8	63	16	65
μ=10	99	20	101

V=2	b	c	a
μ=3	5	12	13
μ=5	21	20	29
μ=7	45	28	53
μ=9	77	36	85
μ=11	117	44	125

V=3	b	c	a
μ=4	7	24	25

V=4	b	c	a
μ=5	9	40	41

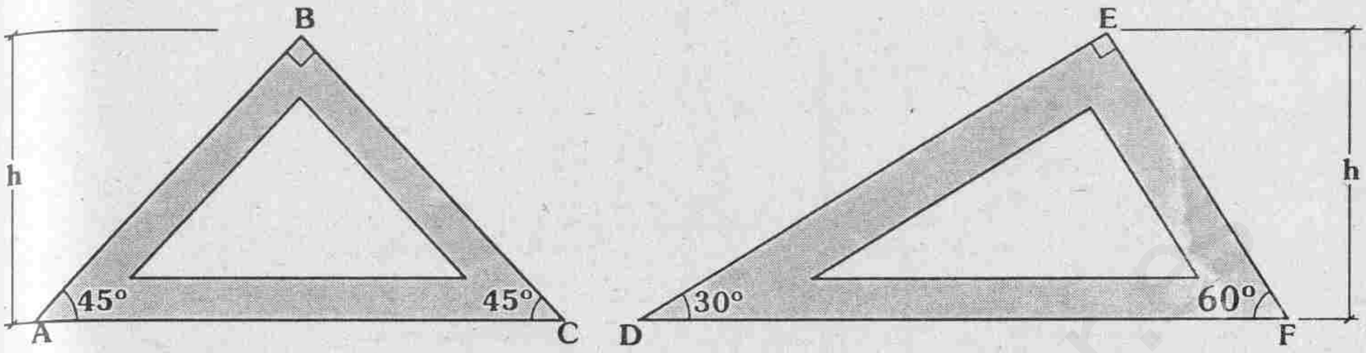
V=5	b	c	a
μ=6	11	60	61

V=6	b	c	a
μ=7	13	84	85

Nota

- *Si bien es cierto, los resultados indicados, si reemplazamos en la expresión* (II) *por enteros cualesquiera con la condición dada encontraremos triángulos de lados enteros, pero no serán resultados reducidos;*
- *En las soluciones reducidas,sólo uno es divisible por 2, más aun múltiplo de 4;*
- *Los tres valores a; b y c no pueden ser impares a la vez.*
- *Dos de los números son impares y uno par.*
- *Tampoco pueden tener un factor común impar.*

JUEGO DE ESCUADRAS



En el gráfico mostrado se tiene un juego de escuadras , representados por los triángulos rectángulos ABC *y* DEF($m\sphericalangle ABC = 90°$; $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = 45°$; $m\sphericalangle DEF = 90°$; $m\sphericalangle EDF = 30°$ *y* $m\sphericalangle DFE = 60°$) , *es interesante notar que ambos triángulos tienen la misma altura relativa a la hipotenusa y como consecuencia de ello:* $AC = DE$.

El dibujo técnico es la representación gráfica de un objeto, dicha representación se guía por normas fijas y preestablecidas para poder describir las dimensiones, formas, características y construcción de lo que se quiere producir.

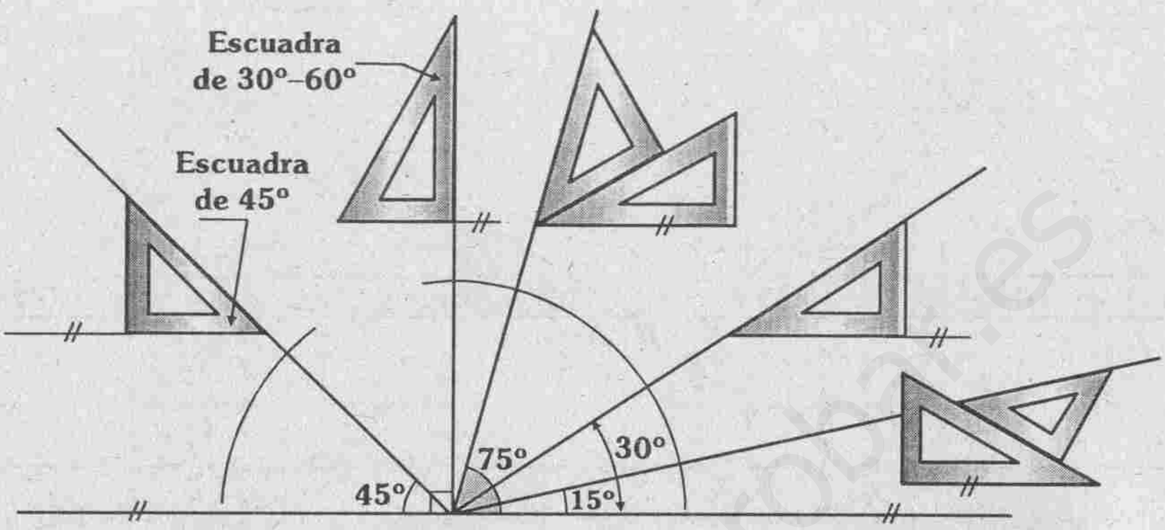
Para realizar el dibujo técnico se requiere de instrumentos de precisión, cuando no utilizamos estos instrumentos se llama dibujo a mano alzada.

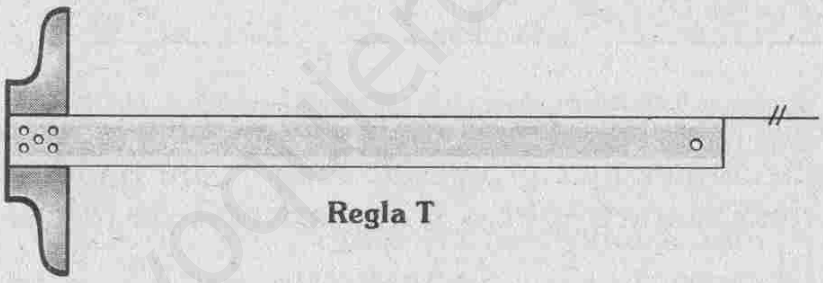
La realización de un dibujo técnico, exige cálculo, medición, líneas bien trazadas, una serie de condiciones hacen necesario el uso de buenos instrumentos, entre los principales tenemos: tablero de dibujo, regla T, transportadores, **juego de escuadras**, compás, portaminas, escalímetro, entre otros.

Entre los usos de las escuadras, se emplean para medir y trazar líneas horizontales, verticales, inclinadas y combinada con la regla T se trazan líneas paralelas, perpendiculares y oblícuas.

A la escuadra de 60° se le denomina también cartabón.

A continuación se representa algunas posiciones de diversos ángulos, lo cual nos posibilita usarlos en el diseño y trazado geométrico.





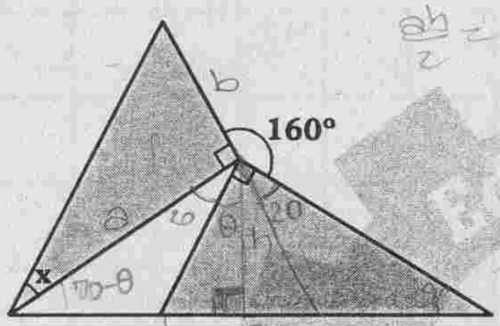
Enunciado de los Problemas Resueltos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

PROBLEMA Nº1

Según el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.

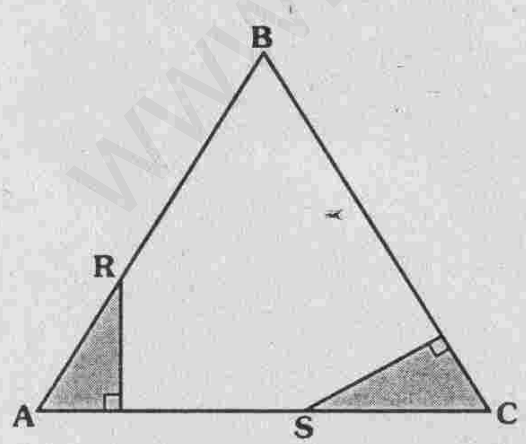


A) 10° B) 20° C) 30°

D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº2

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y el triángulo ABC es equilátero. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{BS}$ y $\overleftrightarrow{CR}$.

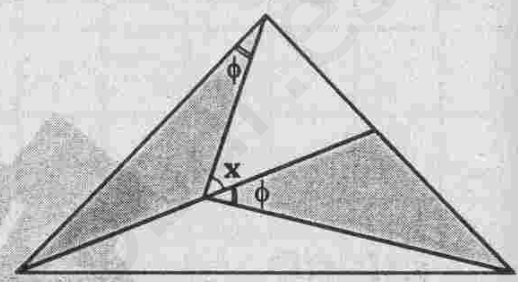


A) 30° B) 45° C) 60°

D) 75° E) 37°

PROBLEMA Nº3

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.

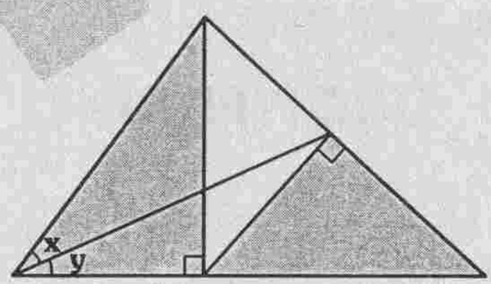


A) 60° B) 53° C) 63°30'

D) 75° E) 72°

PROBLEMA Nº4

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule $\frac{x}{y}$.

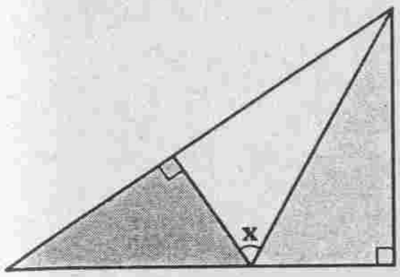


A) 2 B) 1 C) 1/2

D) 3 E) 1/3

PROBLEMA Nº5

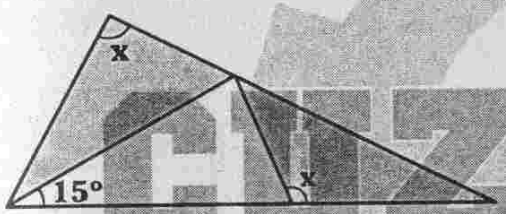
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.



A) 30° B) 60° C) 45°
D) 75° E) 53°

PROBLEMA Nº6

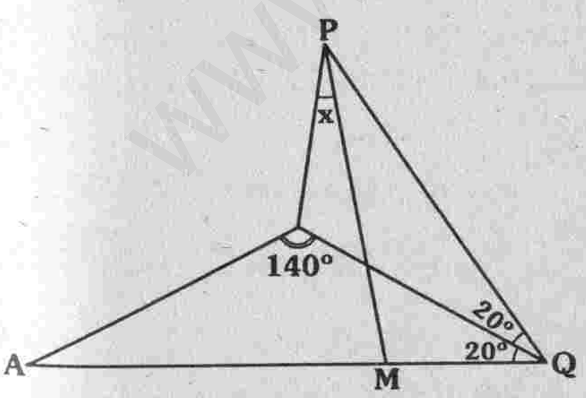
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.



A) 150° B) 135° C) 120°
D) 127° E) 143°

PROBLEMA Nº7

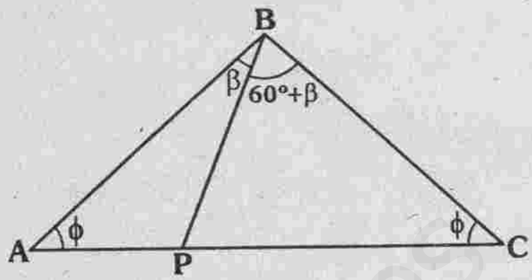
En el gráfico, $AM = PQ$. Calcule x.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº8

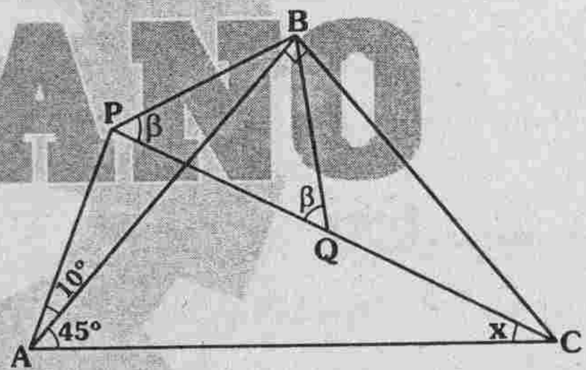
Según el gráfico, $AP = 2$ y $PC = 7$, calcule PB.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 3,5 E) 9

PROBLEMA Nº9

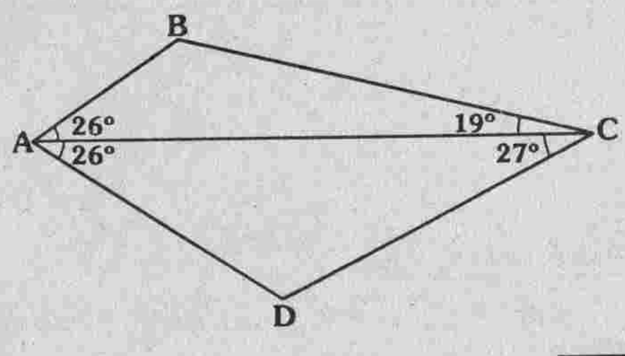
En el gráfico, $AP = QC$. Calcule x.



A) 35° B) 20° C) 15°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº10

Del gráfico, calcule $\dfrac{BC}{DC}$.



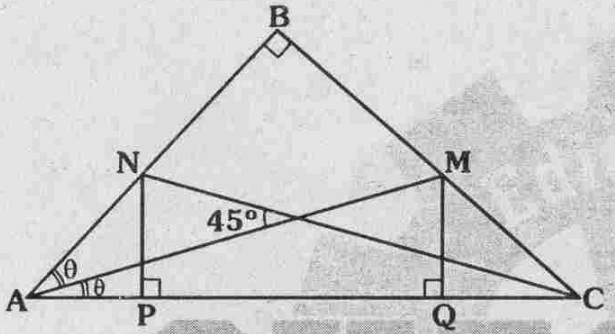
A) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

PROBLEMA Nº11

En el gráfico, $AB = 4$ y $BC = 6$.

Calcule $QC - AP$.



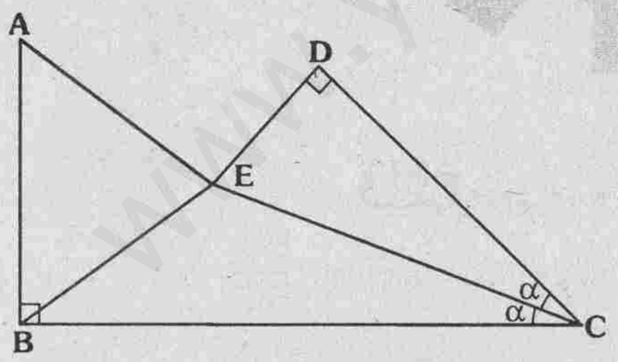
A) 4 B) 3 C) 5

D) 2 E) 1

PROBLEMA Nº12

Del gráfico, $AE = EB$ y $AB=6$.

Calcule ED.



A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 3,5

PROBLEMA Nº13

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$, la mediatriz de $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AC}$ y a la prolongación de $\overline{AD}$ en P y Q respectivamente. Si $BD = PC$, calcule $m\measuredangle AQP$.

A) 45° B) 45°/2 C) 37°/2

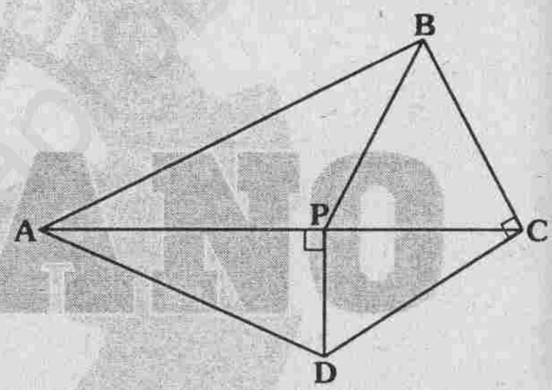
D) 37° E) 53°/2

PROBLEMA Nº14

En el gráfico:

$$BP = BC = CD \quad y \quad 2(AP) = 3(PC)$$

Calcule $m\measuredangle BAD$



A) 45° B) 53° C) 37°

D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº15

Exteriormente y relativo al cateto BC del triángulo rectángulo ABC, se ubica D, tal que:

$$m\measuredangle ADC = m\measuredangle ABC = 90°$$

$$\text{si } m\measuredangle CAD = m\measuredangle BCD = 15°$$

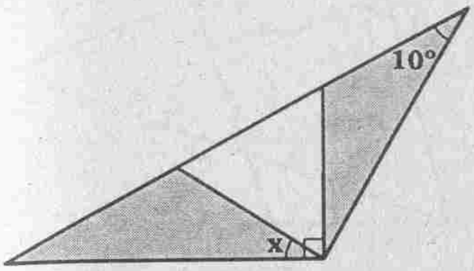
Calcule la razón entre AB y la distancia de D hacia $\overline{AB}$.

A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº16

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.

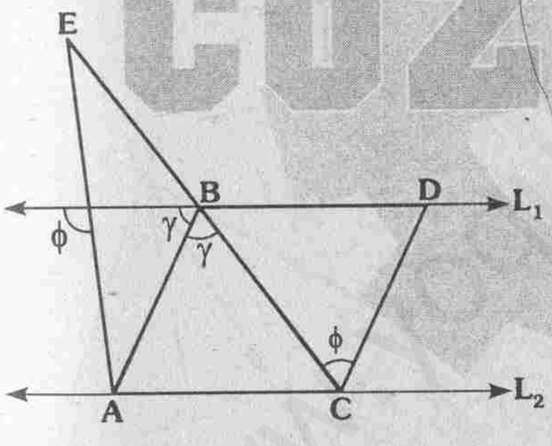


A) 20° B) 40° C) 60°
D) 80° E) 70°

PROBLEMA Nº17

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, $BD = 10$ y $AC = 7$

Calcule EB.



A) 1 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº18

En el triángulo ABC, se cumple que $m\sphericalangle ABC = 105°$ y $m\sphericalangle ACB = 25°$. Se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ y la bisectriz interior AF. Si $AB = DC$.

Calcule $m\sphericalangle BDF$.

A) 40° B) 20° C) 35°
D) 30° E) 25°

PROBLEMA Nº19

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica M en $\overline{AC}$, tal que $m\sphericalangle MBC = 60°$; $m\sphericalangle BAC = 50°$ y $BM = a$

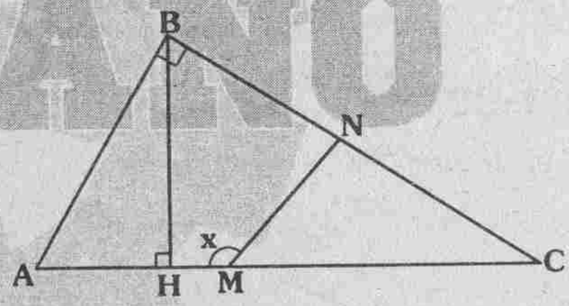
Calcule AC.

A) a B) $a\sqrt{3}$ C) 2a
D) $a\sqrt{2}$ E) $2a\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº20

En el gráfico, $AB = NC$ y $5(AH) = 3(MN)$.

Calcule x.

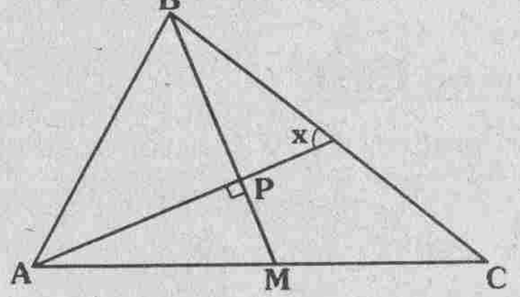


A) 120° B) 127° C) 143°
D) 135° E) 150°

PROBLEMA Nº21

En el gráfico, $AM = MC$ y $BC = 2(AP)$

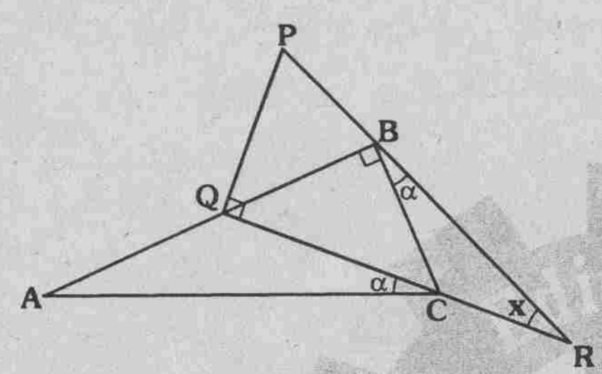
calcule x.



A) 53° B) 60° C) 75°
D) 45° E) 54°

PROBLEMA N°22

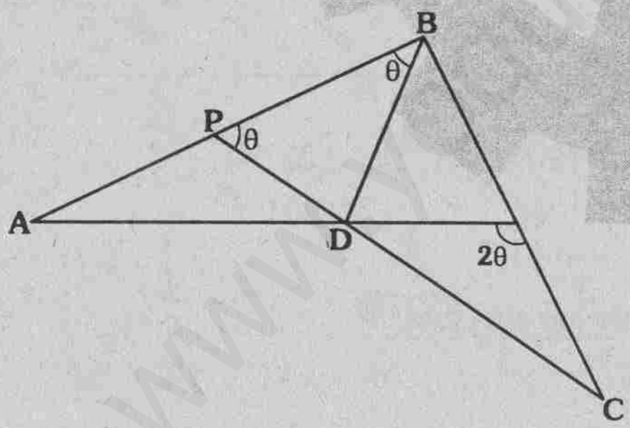
En el gráfico, los triángulos ABC y RQP son congruentes. Calcule x.



A) 30° B) 37° C) 45°/2
D) 45° E) 15°

PROBLEMA N°23

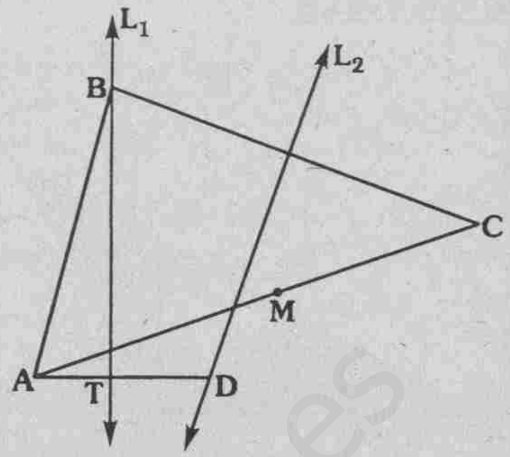
En el gráfico, $BC = AD$, calcule θ.



A) 45° B) 53° C) 74°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N°24

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $AB = 6$ y $AM = MC$. Calcule TM.

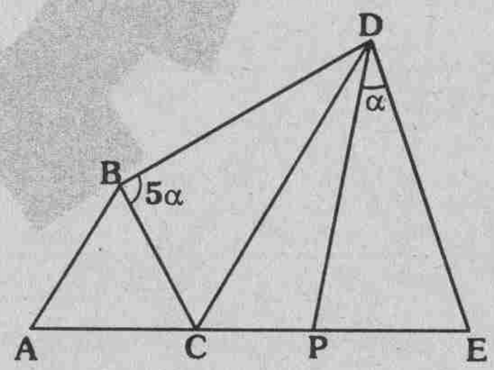


A) 6 B) 3 C) 1,5
D) 2,5 E) 4,5

PROBLEMA N°25

En el gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros y $AC = PE$.

Calcule α.



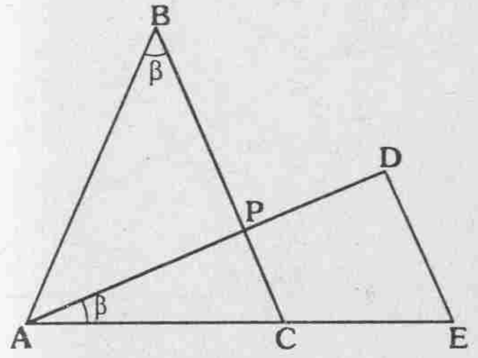
A) 20° B) 30° C) 25°
D) 40° E) 15°

PROBLEMA N°26

En el gráfico:

$\overline{BC} // \overline{DE}$, $AB = AD$, $AE = 10$ y $PC = 2$

Calcule BP.

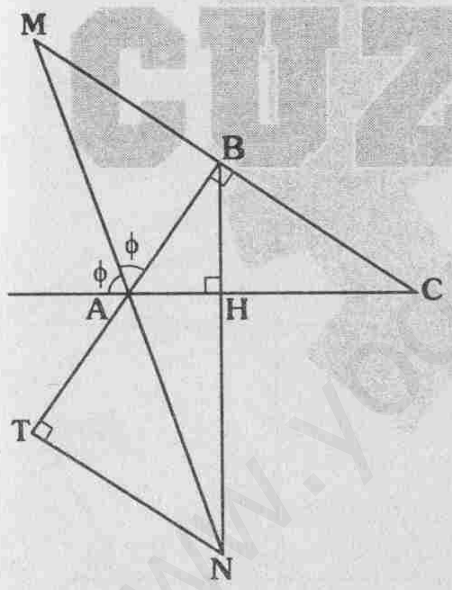


A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº27

En el gráfico, $MB=10$ y $BH=4$

Calcule TN.



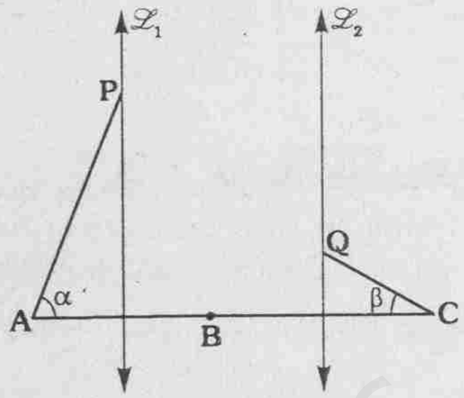
A) 5 B) 7 C) 6
D) 9 E) 8

PROBLEMA Nº28

Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Si $3(AP)=4(QC)=12$ y $\alpha+\beta=90°$

Calcule PQ.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº29

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos N y M respectivamente, tal que $m\sphericalangle NMA=90°$ y los triángulos NMA y NBC son congruentes, calcule $m\sphericalangle NCM$.

A) 53° B) 45° C) 30°
D) 74° E) 60°

PROBLEMA Nº30

En el triángulo ABC se traza la altura AH y la mediana BM que se intersecan en N. Si $AN=BC$, calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 37° E) 50°

PROBLEMA Nº31

En el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a $\overline{AC}$ en Q, tal que:

$$AB=2(QC) \quad y \quad m\sphericalangle ACB=45°$$

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 16° B) 45° C) 53°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA N°32

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y en el triángulo ABM la altura BH, si $3(AC)=5(BH)$. Calcule $m\sphericalangle MAC$.

A) 60° B) 45° C) 30°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA N°33

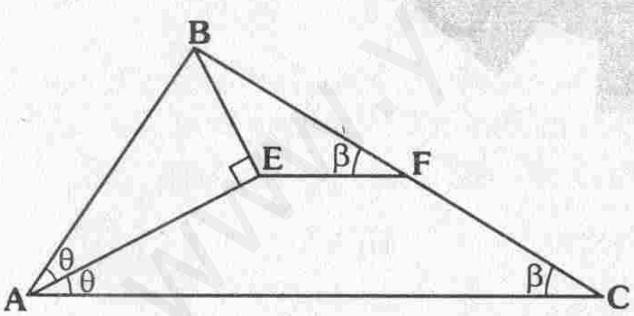
En el triángulo ABC, obtuso en B se cumple $m\sphericalangle BAC=8°$ y $AB=5(BC)$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 53° B) 45° C) 5°
D) 46° E) 60°

PROBLEMA N°34

En el gráfico, $AB=5$ y $AC=13$.
Calcule EF.



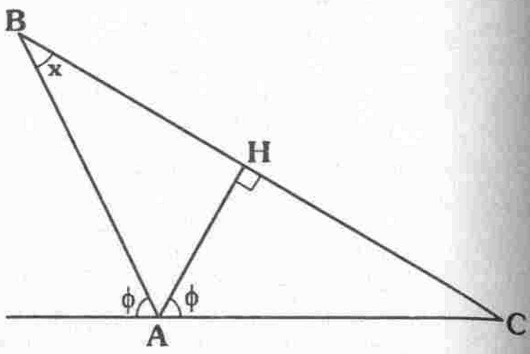
A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA N°35

En el gráfico, $BH=HC$.

Calcule x.

A) 30°
B) 60°
C) 40°
D) 45°
E) 20°



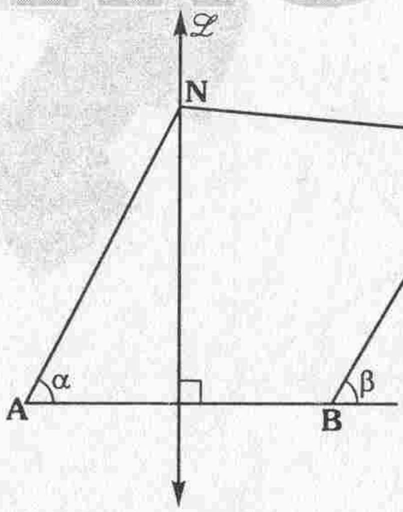
PROBLEMA N°36

En el triángulo ABC recto en B se cumple $AC=6\sqrt{2}$ y $m\sphericalangle ACB<45°$. Calcule el mayor valor entero de AB.

A) 3 B) 4 C) 7
D) 5 E) 6

PROBLEMA N°37

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, $AN=BC=5$ y $\beta+\alpha=120°$. Calcule NC.

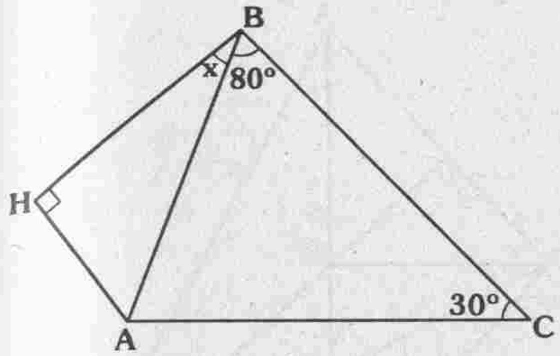


A) 4 B) 5 C) 6
D) $5\sqrt{3}$ E) 10

PROBLEMA N°38

En el gráfico, $BC=2(BH)$.

Calcule x.

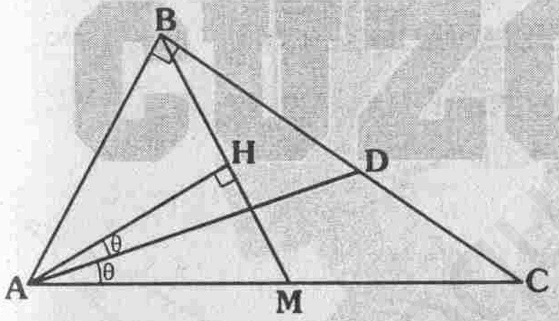


A) $10°$ B) $20°$ C) $15°$
D) $16°$ E) $25°$

PROBLEMA Nº39

En el gráfico, $AM = MC$ y $7(AB) = 4(BC)$, calcule $\dfrac{DC}{BD}$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) $\dfrac{4}{3}$
E) $\dfrac{3}{4}$



PROBLEMA Nº40

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, la cual se prolonga hasta E y en $\overline{AD}$ se ubica el punto medio M. Si $\overline{ME} // \overline{BC}$ y $EM = 2$. Calcule AB

A) 4 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

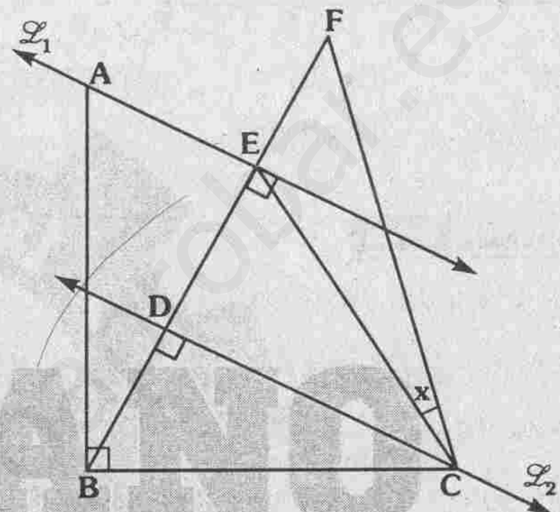
PROBLEMA Nº41

En el triángulo rectángulo ABC se traza $\overline{CD}$ perpendicular a la bisectriz del ángulo BAC. Si $BC = 6$, calcule la distancia de D a $\overline{AC}$.

A) 3 B) 6 C) 4,5
D) 1,5 E) 2

PROBLEMA Nº42

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{DF}$ y $\overline{EB}$ respectivamente y $AB = BC$. Calcule x.



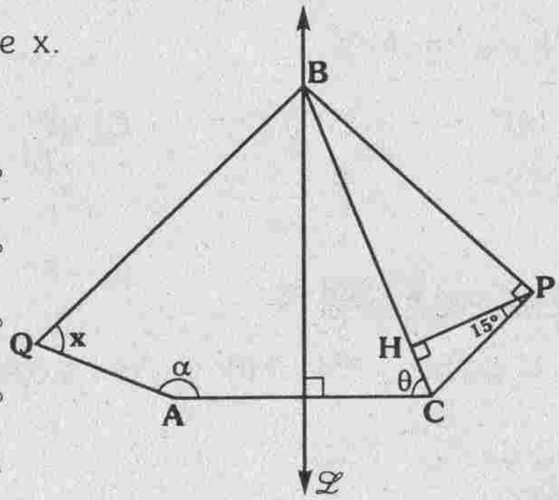
A) $22°30'$ B) $18°30'$ C) $26°30'$
D) $15°$ E) $30°$

PROBLEMA Nº43

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, $AQ = 3(PH)$ y $\alpha - \theta = 90°$.

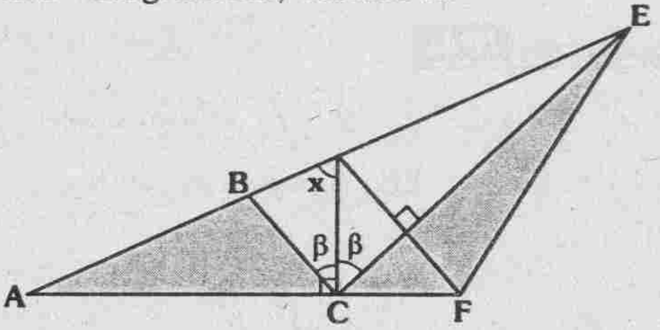
Calcule x.

A) $45°$
B) $37°$
C) $53°$
D) $75°$
E) $60°$



PROBLEMA N°44

En el gráfico, los triángulos ABC y ECF son congruentes, calcule x.



A) 60° B) 75° C) 67°30'
D) 63°30' E) 72°30'

PROBLEMA N°45

En el triángulo ABC se cumple:

$m\measuredangle ABC = 90° + m\measuredangle BAC$ y $AC = 3(BC)$

Calcule $m\measuredangle CAB$

A) 18°30' B) 37° C) 53°
D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA N°46

Se tiene el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AM y en el triángulo AMC la ceviana interior MN. Si $AM = 4$; $NC = 6$; $m\measuredangle NMC = 90°$ y $m\measuredangle BAM = m\measuredangle MCA$.

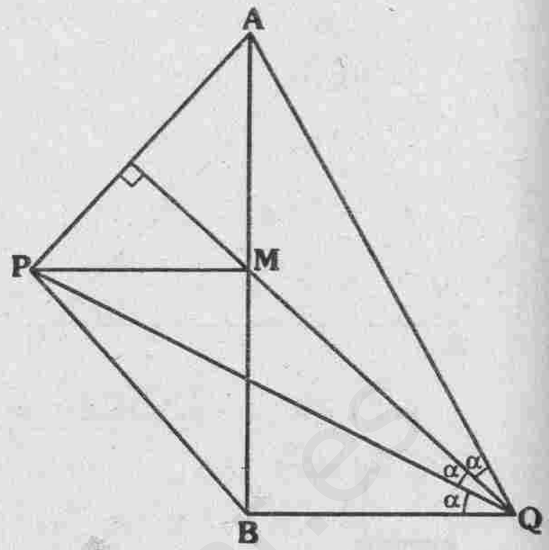
Calcule $m\measuredangle MAC$.

A) 30° B) 37° C) 60°
D) 15° E) 53°/2

PROBLEMA N°47

En el gráfico, $AM = MB$ y $PB = \sqrt{2}(AM)$.

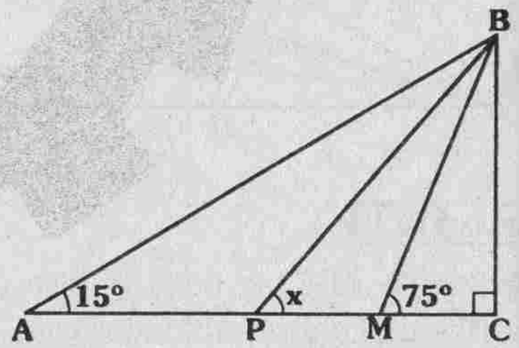
Calcule $\dfrac{BQ}{AP}$



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 1
D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

PROBLEMA N°48

En el gráfico, $12(PB) = 5(AC + MC)$.
Calcule x.



A) 37° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 45°

PROBLEMA N°49

En el triángulo ABC $(AB < BC)$, la mediatriz de la bisectriz exterior $\overline{BE}$ interseca a $\overline{AE}$ en F de modo que $AB = FE$ y $FC = 8$.

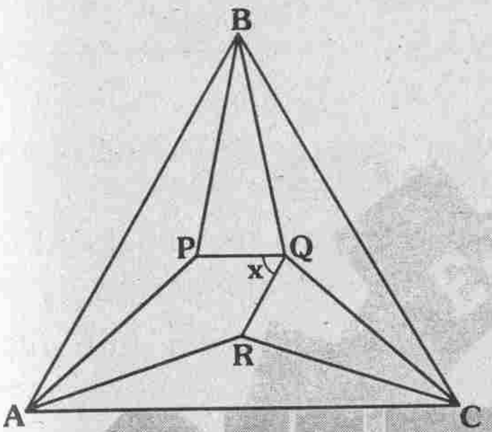
Calcule BC.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 4 E) 12

PROBLEMA Nº50

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Calcule x, si :

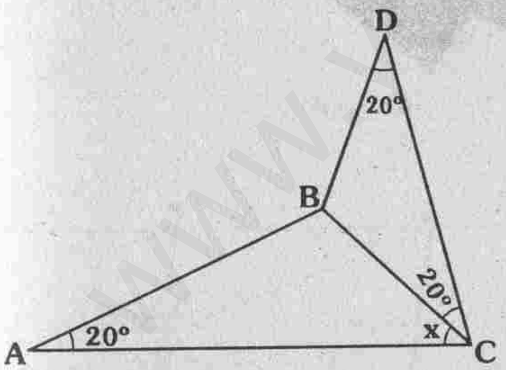
$$AP = PB = QC = RA = RC = QB$$



A) 60° B) 45° C) 90°
D) 53° E) 75°

PROBLEMA Nº51

En el gráfico, $AB = CD$, calcule x.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 35° E) 45°

PROBLEMA Nº52

Se tienen los triángulos rectángulos ABC y ADC ambos de hipotenusa $\overline{AC}$, $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{P\}$. Si $m\sphericalangle BAD = 45°$ y $AC = 10$, calcule BD.

A) 5 B) $5\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{2}$
D) 10 E) $10\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº53

En el triángulo equilátero ABC se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que $MB = 2$, $NC = 5$ y $m\sphericalangle MNC = 90°$. Calcule CM.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{13}$
D) $\sqrt{13}$ E) 4

PROBLEMA Nº54

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior BF, tal que:

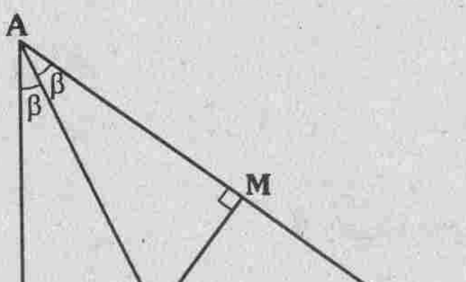
$$AB = CF \quad y$$
$$m\sphericalangle FBC = 2(m\sphericalangle ABF) = 2(m\sphericalangle ACB)$$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 18° C) 22°30'
D) 26°30' E) 36°

PROBLEMA Nº55

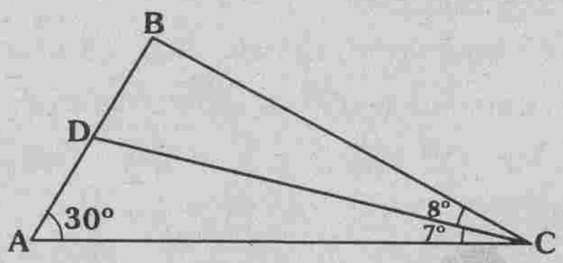
En el gráfico, $AM = MC$ y $PC = 18$. Calcule MN.



A) 6 B) 7 C) 9
D) 4,5 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°56

En el gráfico, $AC = 12$, calcule BD.

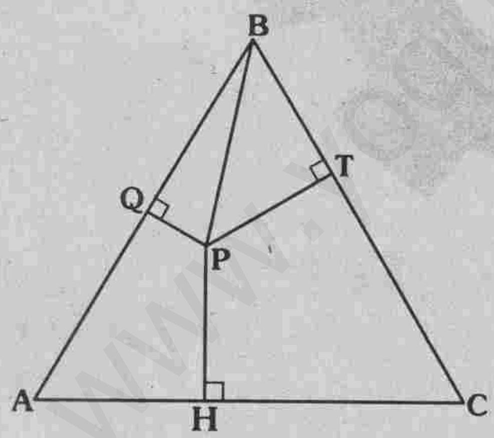


A) 1 B) 2,5 C) 1,5
D) 3 E) 2

PROBLEMA N°57

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $PH = PB$, $PQ = 2$ y $TP = 11$.

Calcule PH.



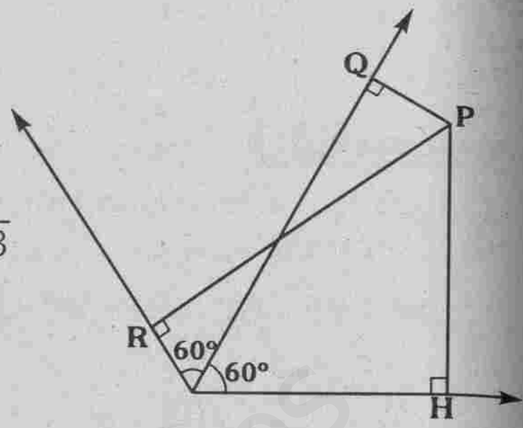
A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 12

PROBLEMA N°58

En el gráfico, $PQ = 1$ y $PH = 7$.

Calcule PR.

A) 8
B) $8\sqrt{3}$
C) $16\sqrt{3}$
D) 16
E) $4\sqrt{3}$



PROBLEMA N°59

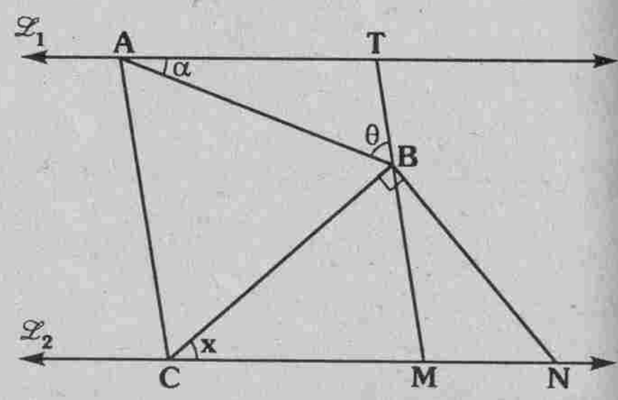
Dado el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica D, cumpliéndose que $AC = 10$, $DC = 3$ y $BD = 5$.

Calcule $m\sphericalangle BAD$.

A) 30° B) 37° C) 18°30'
D) 26°30' E) 45°

PROBLEMA N°60

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $MN = BT$; $\theta - \alpha = 30°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 37°
D) 36° E) 15°

Problemas Resueltos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº61 [1er. Seminario 99-I]

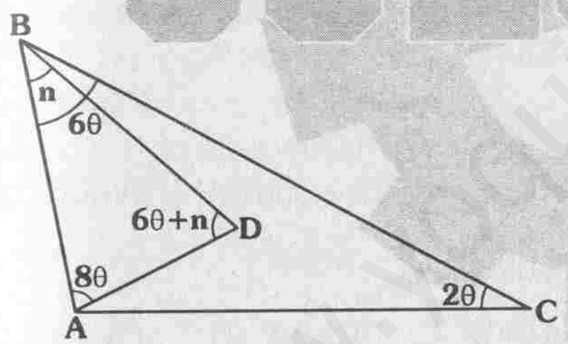
Dado el triángulo ABC, $m\sphericalangle B = 80°$, $R \in \overline{AC}$, las mediatrices de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en Q, $AB = CR$ y $m\sphericalangle BCA = 3(m\sphericalangle ACQ)$. Calcule $m\sphericalangle ACQ$.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 18°

PROBLEMA Nº62 [1er. Seminario 99-I]

En el gráfico, $AD = 1$ y $AC = 7$

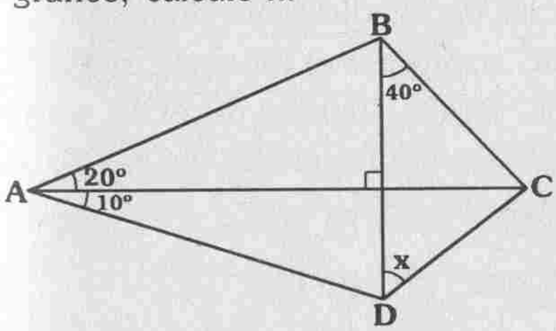
Calcule BC.



A) 8 B) 9 C) 6
D) 11 E) 12

PROBLEMA Nº63 [1er. Seminario 99-I]

Del gráfico, calcule x.



A) 81° B) 45° C) 46°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº64 [1er. Seminario 99-I]

En el triángulo isósceles ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 90°$, se considera el punto Q en su interior, con la condición siguiente:

$$m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle QBC = m\sphericalangle QCA$$

Calcule $m\sphericalangle BCQ$.

A) 37° B) 37°/2 C) 53°/2
D) 30° E) 15°

PROBLEMA Nº65 [1er. Seminario 99-I]

En el triángulo obtusángulo ABC obtuso en B, el ángulo en B mide 150° y el ángulo en C mide 10°, la distancia de C a la bisectriz interior del ángulo A mide 4. Calcule AB.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº66 [1er. Seminario 99-I]

Se tiene el triángulo ABC, se traza $\overline{BD}$ ($D \in \overline{AC}$), $E \in \overline{BD}$ tal que:

$$AB = AE = BC$$

$$m\sphericalangle BAE = 2(m\sphericalangle BCE)$$

Calcule $m\sphericalangle BDA$.

A) 50° B) 52° C) 54°
D) 58° E) 60°

PROBLEMA N°67 [1er. Seminario 99-I]

Sea el triángulo rec ngulo ABC recto en B, se construye exteriormente el triángulo equilátero BMC. P y Q son puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
Si $AM = 8$, calcule PQ.

A) 4 B) 6 C) 2
D) 8 E) 1

PROBLEMA N°68 [1er. Seminario 99-I]

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C) = 30°$$

Se traza la mediana $\overline{BM}$, calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 25° B) 15° C) 30°
D) 45° E) 22°50'

PROBLEMA N°69 [1er. Seminario 99-I]

Se tiene el triángulo ABC, $m\sphericalangle C = 36°$ y $m\sphericalangle B = 96°$, N y E están en $\overline{AC}$, tal que AN=NE, M es punto medio de $\overline{BC}$ y CE=AB.

Calcule $m\sphericalangle MNC$.

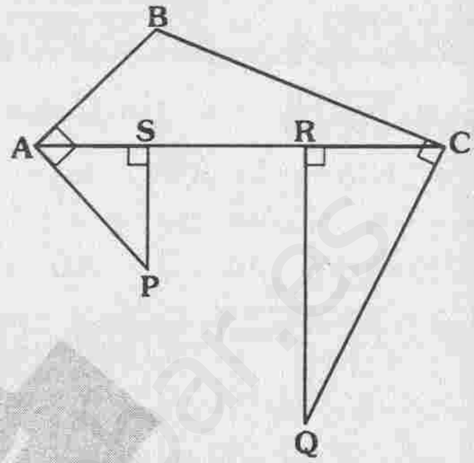
A) 24° B) 26° C) 20°
D) 30° E) 32°

PROBLEMA N°70 [1er. Seminario 99-I]

Dado el ángulo AOB y el punto exterior P, se trazan $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ por perpendiculares a los lados del ángulo, demostrar que la recta que une los puntos medios de $\overline{OP}$ y $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{EF}$.

PROBLEMA N°71 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $AB = AP$, $BC = QC$, $PS = 3$ y $RQ = 5$. Calcule AC.



A) 6 B) 10 C) 8
D) 9 E) 10,5

PROBLEMA N°72 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana BD, tal que:

$AB = DC$ y

$$2(m\sphericalangle ABD) = 5(m\sphericalangle A) = 10(m\sphericalangle C)$$

Calcule $m\sphericalangle C$.

A) 10° B) 20° C) 12°
D) 18° E) 36°

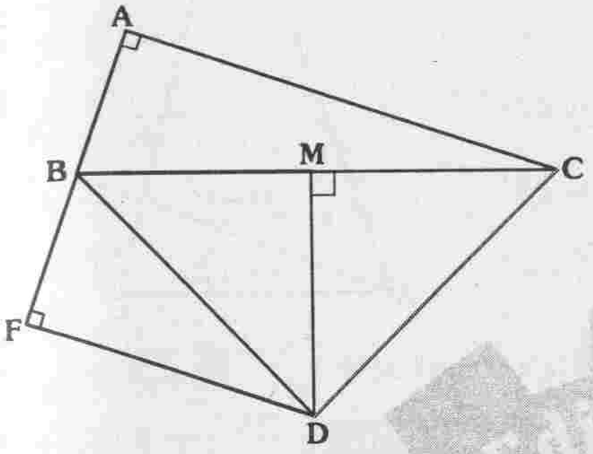
PROBLEMA N°73 [1er. Seminario 98-II]

Por el vértice B del triángulo ABC se trazan las perpendiculares $\overline{BA'}$ a $\overline{BA}$ y $\overline{BC'}$ a $\overline{BC}$ exteriores al triángulo, si $BA' = BA$ y $BC' = BC$. Calcule $m\sphericalangle AOC$, siendo O el punto de intersección de $\overline{A'C}$ y $\overline{AC'}$.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº74 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $BM = MC = MD$. Si $AB = 10$ y $DF = 14$, calcule AC.



A) 24 B) 18 C) 22
D) 30 E) 28

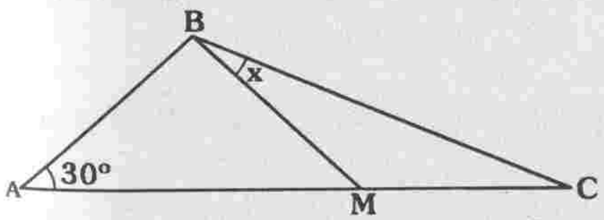
PROBLEMA Nº75 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior BD y la mediatriz de $\overline{AD}$, la cual corta a la bisectriz del ángulo BDE en F (E es el punto de intersección de la mediatriz trazada con $\overline{AB}$).
Si $m\measuredangle CBD = \theta$. Calcule $m\measuredangle DFE$.

A) $45° - \theta$ B) $\theta/2$ C) $90° - \theta/2$
D) $45° + \theta/2$ E) $45° - \theta/2$

PROBLEMA Nº76 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $BC = AM$ y $BM = MC$
Calcule x.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº77 [1er. Seminario 98-II]

Dado el triángulo ABC, $m\measuredangle B = \beta > 90°$, $m\measuredangle C = \alpha$, $P \in \overline{AC}$, $AB = CP$, las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ se cortan en R. Calcule $m\measuredangle ACR$.

A) $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ B) $\beta - \alpha$
C) $\beta - 2\alpha$ D) $\dfrac{\beta - 2\alpha}{2}$
E) $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$

PROBLEMA Nº78 [1er. Seminario 98-II]

Dado una recta y tres puntos consecutivos sobre ella A, B y C, se construyen dos triángulos equiláteros ABE y BFC a un mismo lado de la recta AE. Sean M y N los puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$.

Demostrar que el triángulo MNB es equilátero.

PROBLEMA Nº79 [1er. Seminario 98-II]

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\measuredangle C = 15°$. Sobre $\overline{BC}$ se ubica un punto cuyas distancias a la hipotenusa y a la mediana relativa a la hipotenusa miden "a" y "b".

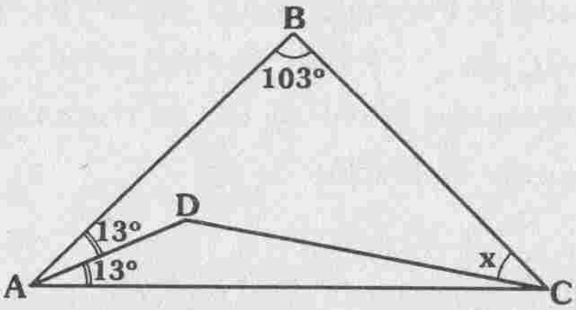
Calcule la longitud de la hipotenusa.

A) $a + b$ B) $2(a + b)$
C) $4(a + b)$ D) $4\sqrt{a^2 + b^2}$
E) $\sqrt{a^2 + b^2}$

PROBLEMA Nº80 **[1er. Seminario 97-I]**

En el gráfico, $BC = CD$.

Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 36°
D) 40° E) 34°

PROBLEMA Nº81 **[1er. Seminario 2008-I]**

En un triángulo ABC, $m\measuredangle ABC = 45°$ y $m\measuredangle ACB = 30°$. Si M es punto medio de $\overline{AC}$, entonces la $m\measuredangle ABM$ es:

A) 22,5° B) 30° C) 36°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA Nº82 **[1er. Seminario 2007-II]**

En un triángulo ABC, $(AB < BC)$ se traza la altura BH y la mediana BM de modo que el ángulo B quede trisecado. Entonces, la $m\measuredangle BCA$ es:

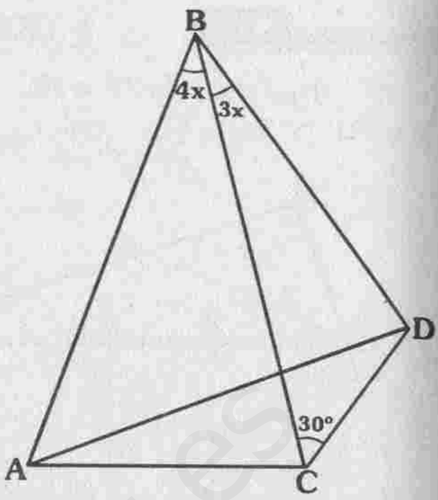
A) 15° B) 22,5° C) 28°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA Nº83 **[1er. Seminario 97-I]**

En el gráfico:

$AB = BC$ y $AD = BD$

Calcule $m\measuredangle ABC$.

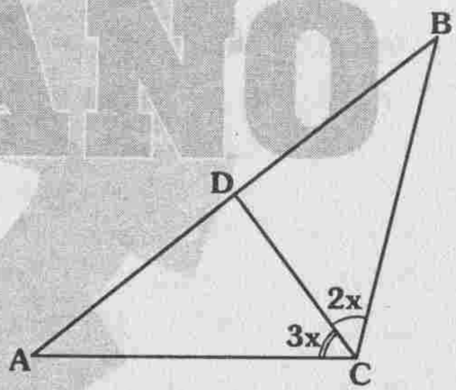


A) 18°
B) 20°
C) 66°
D) 24°
E) 26°

PROBLEMA Nº84 **[1er. Seminario 97-I]**

En el gráfico, $AD = DB$ y $BC = 2(CD)$.

Calcule x.



A) 15° B) 18° C) 22,5°
D) 10° E) 30°

PROBLEMA Nº85 **[1er. Seminario 2006-I]**

En un triángulo ABC, $AB < BC$, $AB = k_1$, la mediatriz de AC interseca a la bisectriz exterior del ángulo B en T. Se traza $\overline{TH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$, si $BH = k_2$. Halle BC.

A) $3k_1 + k_2$ B) $k_1 + \dfrac{k_2}{2}$ C) $k_1 + 2k_2$
D) $2k_1 + k_2$ E) $k_1 + k_2$

PROBLEMA Nº86 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo acutángulo ABC sobre $\overline{BC}$ se ubica E de modo que $AB = EC$. Si $m\measuredangle ABC = 60°$ y $AB = 18$. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº87 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo ABC, se cumple $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$ y p es el semiperímetro, se trazan desde A perpendiculares a las bisectrices de los ángulos interiores en B y C. Calcule la longitud del segmento que une los pies de las perpendiculares.

A) p B) $a-b$ C) $(b+c)/2$
D) $p-a$ E) $p-b$

PROBLEMA Nº88 [Texto CEPRE - UNI]

Desde un punto P interior a un triángulo equilátero ABC, se trazan las perpendiculares $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Hallar $\dfrac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}$.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1/2
D) 1 E) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

PROBLEMA Nº89 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$ de modo que $\overline{AE} \cong \overline{BC}$ y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle AEB = 3(m\measuredangle EBC)$. Calcule $m\measuredangle ABE$.

A) 90° B) 120° C) 75°
D) 60° E) 150°

PROBLEMA Nº90 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), exterior a $\overline{AC}$ se ubica M de modo que $m\measuredangle ACM = m\measuredangle ACB$,

$m\measuredangle MAC = 2(m\measuredangle ACM)$ y

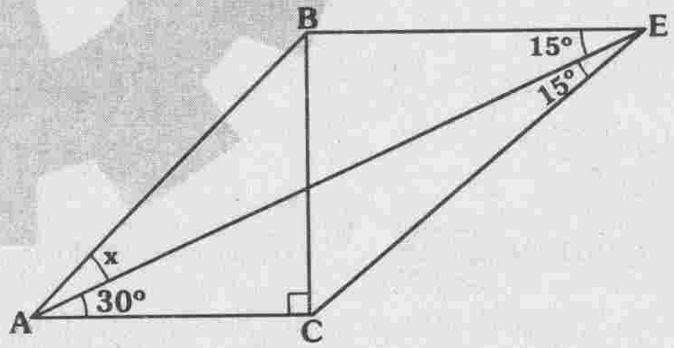
$m\measuredangle MBC = 3(m\measuredangle ACB)$.

Calcule $m\measuredangle ACM$.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 18,5°

PROBLEMA Nº91 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, calcule x.



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº92 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, obtuso en B, por B se traza $\overline{QB} \perp \overline{BC}$, $Q \in \overline{AC}$. Si $AB = a$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$.

Calcule QC.

A) a B) $\frac{a}{2}$ C) 2a

D) 3a E) $\frac{a}{3}$

PROBLEMA N°93 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo rectángulo ABC, se traza la mediana BM, relativa a la hipotenusa, la mediatriz de $\overline{BM}$ interseca a $\overline{MC}$ en F, si $\overline{BC} \cong \overline{MF}$, halle $m\measuredangle BAC$.

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 21°

PROBLEMA N°94 [1er. Seminario 2001-II]

En el triángulo rectángulo MNP recto en N, se traza la bisectriz interior NQ ($Q \in \overline{MP}$), por Q se traza una perpendicular a $\overline{MP}$ intersectando a la prolongación del cateto MN en T. Si $m\measuredangle NPM = \phi$, halle $m\measuredangle NTP$.

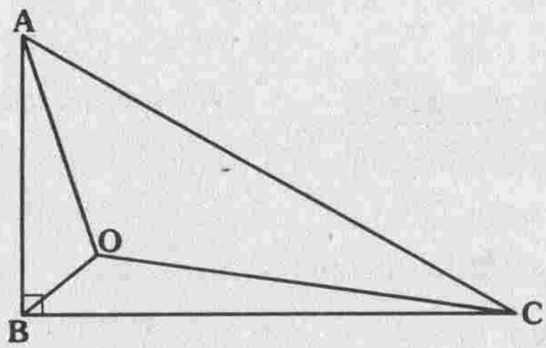
A) 45° B) 60° C) $\phi + 45°$

D) $\phi + 30°$ E) $\phi + 15°$

PROBLEMA N°95 [1er. Seminario 2001-I]

En el gráfico, $m\measuredangle OBC = 3(m\measuredangle BCO)$, $m\measuredangle OAC = 2(m\measuredangle BCO)$ y $m\measuredangle BAO = m\measuredangle OCB$

Calcule $m\measuredangle OCB$.



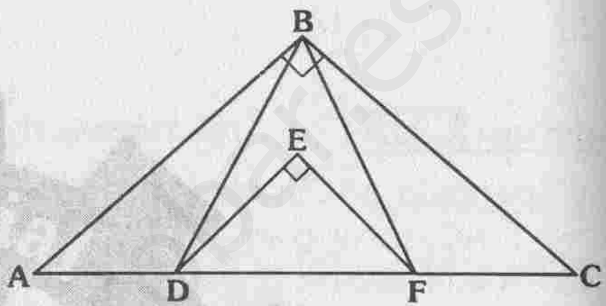
A) 5° B) 9° C) 15°

D) 18° E) 20°

PROBLEMA N°96 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, AB = BC ; AD = DE ; EF = FC.

Calculemos $m\measuredangle DBF$.



A) 75° B) 60° C) 53°

D) 45° E) 30°

PROBLEMA N°97 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC, donde $m\measuredangle BAC = 90°$, se traza la ceviana $\overline{AP}$ y resulta que:

$$m\measuredangle PAC = 36° \quad y \quad m\measuredangle APB = 84°$$

Si $BC = \ell$, calcule AP.

A) $\ell/3$ B) $2\ell/3$ C) $\ell/2$

D) $\ell/4$ E) $2\ell/5$

PROBLEMA N°98 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, recto en A, se ubica D en $\overline{BC}$, tal que AB = CD, $m\measuredangle ABD = 3\theta$ y $m\measuredangle DAC = \frac{9\theta}{2}$. Halle θ.

A) 5° B) 15° C) 18°

D) 22,5° E) 27°

PROBLEMA N°99 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC (recto en A), $\overline{AM}$ es mediana, $\overline{BN}$ es ceviana interior, $\measuredangle BCN \cong \measuredangle CBN$ y $m\measuredangle ABN = 38°$. Si L es punto medio de $\overline{BN}$. Calcule $m\measuredangle LAM$.

A) 38° B) 26° C) 13°

D) 27° E) 52°

PROBLEMA N°100 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC (recto en B), se tiene $m\measuredangle A = 2(m\measuredangle AMB)$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $AC = 22cm$. Calcule AB

A) 10 cm B) 16cm C) 12cm

D) $\frac{22}{3}$ cm E) 14cm

PROBLEMA N°101 [1er. Seminario 2001-I]

En un triángulo ABC se traza la ceviana BP ($P \in \overline{AC}$). Si $AB = CP$; $m\measuredangle PBC = 5\alpha$; $m\measuredangle BAC = 4\alpha$ y $m\measuredangle BCA = 3\alpha$.
Calcule $m\measuredangle PBC$.

A) 40° B) 30° C) 50°

D) 45° E) 65°

PROBLEMA N°102 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle A = \alpha$. Se traza la bisectriz interior BP y la mediatriz de $\overline{BP}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AC}$ en Q. Calcule $m\measuredangle QBC$.

A) α B) $\frac{\alpha}{2}$ C) $\frac{\alpha}{3}$

D) $\frac{3\alpha}{2}$ E) $\frac{2\alpha}{3}$

PROBLEMA N°103

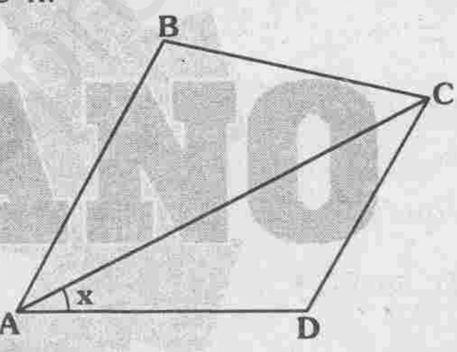
El ángulo interior de B del triángulo ABC mide 72°, Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en L y a $\overline{AC}$ lo intersecan en E y F respectivamente.
Calcule $m\measuredangle FBE$.

A) 12° B) 17° C) 9°

D) 36° E) 19°

PROBLEMA N°104 [1er. Seminario 2001-I]

En el gráfico, $AB = AD$, $m\measuredangle BAC = 57°$, $m\measuredangle BCA = 22°$ y $m\measuredangle ACD = 11°$.
Calcule x.



A) 15° B) 16° C) 19°

D) 22° E) 27°

PROBLEMA N°105 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, de modo que $BD = AC$, $m\measuredangle BAC = 100°$ y $m\measuredangle BCA = 30°$.
Calcule $m\measuredangle DBC$.

A) 9° B) 10° C) 12°

D) 15° E) 20°

PROBLEMA N°106 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo MNP se traza la ceviana interior NQ, tal que $\overline{MN} \cong \overline{QP}$.

Si $\frac{m\measuredangle MNQ}{7}=\frac{m\measuredangle NPQ}{2}=m\measuredangle QNP$

Calcule $m\measuredangle NPM$.

A) 8° B) 10° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº107 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo escaleno, se ubica el punto interior D, de modo que $\overline{AD}\cong\overline{DC}\cong\overline{BC}$. Si $m\measuredangle BCD=2(m\measuredangle BAD)$

Calcule $m\measuredangle BAD+m\measuredangle ABC$.

A) 90° B) 95° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº108 [1er. Seminario 2007-II]

En el interior del triángulo ABC, se ubica D, tal que $\overline{BD}\cong\overline{AC}$,

$\frac{m\measuredangle BAD}{9}=\frac{m\measuredangle DCA}{3}=\frac{m\measuredangle DCB}{4}=m\measuredangle DBC=m\measuredangle DAC$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 60° B) 70° C) 75°
D) 80° E) 88°

PROBLEMA Nº109 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, tal que $\overline{BD}\cong\overline{AC}$.

Si $m\measuredangle ACB=4x$, $m\measuredangle ABD=x$ y

$m\measuredangle DBC=2x$, entonces x es:

A) 12° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 21°

PROBLEMA Nº110 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC (AB<BC) se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$, tal que $\overline{PB}\cong\overline{QC}$, las mediatrices en F, entonces BF es:

A) Perpendicular a $\overline{PQ}$.

B) Perpendicular a $\overline{AC}$.

C) Pasa por el punto medio de $\overline{AC}$.

D) Bisectriz del ángulo ABC.

E) Mediatriz de $\overline{PQ}$.

PROBLEMA Nº111 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo rectángulo isósceles (AB = BC), se ubica el punto interior D, de modo que $m\measuredangle BAD=m\measuredangle DCA$ y $\overline{AD}\perp\overline{BD}$. Si $BD=4$, entonces $\overline{DC}$ mide:

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA Nº112 [1er. Seminario 2007-II]

Exteriormente al triángulo rectángulo ABC (recto en B) y relativo a $\overline{BC}$, se ubica D.

Si $AB=n$ y

$m\measuredangle DAC=m\measuredangle BCA=m\measuredangle DCB=15°$

entonces $\overline{CD}$ mide:

A) $n\sqrt{2}$ B) $n\sqrt{3}$ C) $n\sqrt{5}$
D) $n\sqrt{6}$ E) $n\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº113 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM.

Si $m\measuredangle ACB=30°$ y

$m\measuredangle MBA=2(m\measuredangle BAC)$

entonces $m\measuredangle ABM$ es:

A) 20° B) 25° C) 12°

D) 35° E) 15°

PROBLEMA Nº114 [1er. Seminario 2007-II]

Sea el triángulo isósceles ABC (AB = BC), en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y H respectivamente, tal que $BP = BQ$; $m\measuredangle QHC = 40°$ y $HA = HQ + HC$. Calcule $m\measuredangle PHA$.

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº115 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC, donde $AB = BC$ y $m\measuredangle ABC = 40°$. En el interior se ubica Q tal que:

$$QB = AC \quad y \quad m\measuredangle ABQ = 10°$$

Calcule $m\measuredangle QAB$

A) 15° B) 18° C) 20°

D) 24° E) 16°

PROBLEMA Nº116 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se trazan las alturas BH y CQ. M es punto medio de $\overline{BC}$. Si $m\measuredangle BAC = \omega$, entonces $m\measuredangle HMQ$ es:

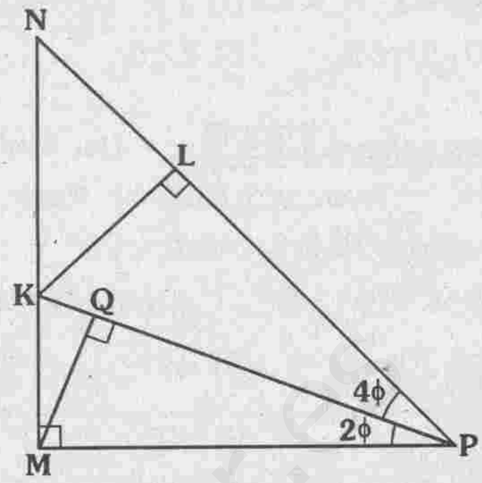
A) $90° - \frac{\omega}{3}$ B) $90° + \frac{\omega}{2}$

C) $180° - 2\omega$ D) $90° - \frac{\omega}{2}$

E) $180° - 3\omega$

PROBLEMA Nº117 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $KL = \ell$ entonces QM es:



A) $\frac{3}{4}\ell$

B) $\frac{2}{3}\ell$

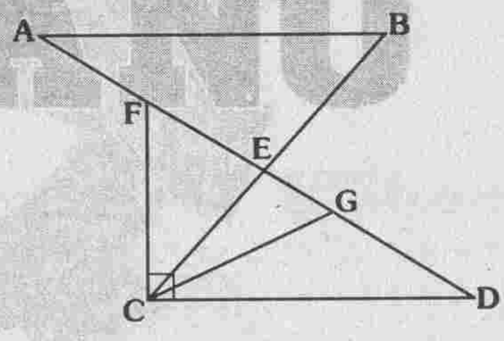
C) $\frac{1}{2}\ell$

D) $\frac{1}{3}\ell$

E) $\frac{1}{4}\ell$

PROBLEMA Nº118 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $\overline{AB} // \overline{CD}$ y E es punto medio de $\overline{BC}$. Si $AF = m$, $FE = n$ y G es punto medio de $\overline{FD}$, entonces $\overline{GC}$ mide:



A) $\frac{m}{2} + 3n$ B) $\frac{m}{2} + n$ C) $\frac{n-m}{2}$

D) $\frac{n+m}{3}$ E) $2m + \frac{m}{3}$

PROBLEMA Nº119 [1er. Seminario 2009-II]

Se tiene el triángulo isósceles ABC (AB=BC), se ubica P en la región interior, tal que:

$$CP = AB, \quad m\measuredangle PAC = x, \quad m\measuredangle PAB = \theta$$
$$y \quad m\measuredangle APC = 4x + \theta$$

Calcule x.

A) 30° B) 12° C) 15°
D) 18,5° E) 22,5°

PROBLEMA N°120 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM. Si $m\sphericalangle A = 20°$ y $m\sphericalangle C = 80°$ $AM = BM + BC$. Calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 30° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N°121 [1er. Seminario 2007-II]

Se tienen los triángulos ABC y ADC $(AB \cap DC = \{Q\})$, $m\sphericalangle BCD = 20°$, $m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle ACD = 40°$ y $AC = AD + BC$
Calcule $m\sphericalangle AQC$.

A) 100° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 130°

PROBLEMA N°122 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BQ}$.

Si: $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle ABQ)$ y

$m\sphericalangle C - m\sphericalangle ABQ = 90°$

Calcule $m\sphericalangle BQC$.

A) 15° B) 45° C) 25°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA N°123 [1ra. P. Calificada 2007-I]

Se tiene el triángulo escaleno ABC, se traza la bisectriz del ángulo ABC y la mediatriz de $\overline{AC}$ que se intersecan en Q. Calcule $m\sphericalangle ACQ$ en función del ángulo en B del triángulo ABC.

A) $\frac{2}{3}m\sphericalangle B$ B) $m\sphericalangle B$ C) $\frac{1}{2}m\sphericalangle B$
D) $\frac{1}{4}m\sphericalangle B$ E) $\frac{1}{3}m\sphericalangle B$

PROBLEMA N°124 [1ra. P. Calificada 2007-I]

En el triángulo ABC, las bisectrices de los ángulos ABC y BCA se intersecan en Q. Sea:

$$\frac{m\sphericalangle BAC}{3} = \frac{m\sphericalangle BCA}{2}$$

$$\text{y} \quad \overline{QC} \cong \overline{AB}$$

Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 50° B) 60° C) 75°
D) 80° E) 90°

PROBLEMA N°125 [1ra. P. Calificada 2006-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BQ de manera que $QC = AB$ y

$$\frac{m\sphericalangle QBC}{4} = \frac{m\sphericalangle QBA}{3} = m\sphericalangle BCA.$$

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 17° B) 18° C) 19°
D) 20° E) 21°

PROBLEMA N°126 [1ra. P. Calificada 2006-I]

Es verdadero

I. Dos triángulos son congruentes, si tienen sus respectivos lados congruentes dos a dos.

II. Dos triángulos son congruentes si tienen sus respectivos lados iguales dos a dos.

III. Dos triángulos con congruentes, si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman iguales dos a dos.

IV. Dos triángulos son congruentes, si tienen un ángulo congruente y los lados que lo determinan respectivamente congruentes dos a dos.

A) I y III B) I y IV

C) I, II, III y IV D) II

E) IV

PROBLEMA Nº127 [1ra. P. Calificada 2006-I]

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, la altura BF que interseca a la hipotenusa AC interseca a la bisectriz interior AP en E, se traza $\overline{EQ}$ paralelo a $\overline{AC}$, donde Q pertenece a $\overline{BC}$. Entonces se puede afirmar que:

A) $QC=\frac{1}{2}(BP)$ B) $QC=BP$

C) $QC=\frac{3}{2}(BP)$ D) $QC=2(BP)$

E) $QC=\frac{5}{2}(BP)$

PROBLEMA Nº128 [1ra. P. Calificada 2004-II]

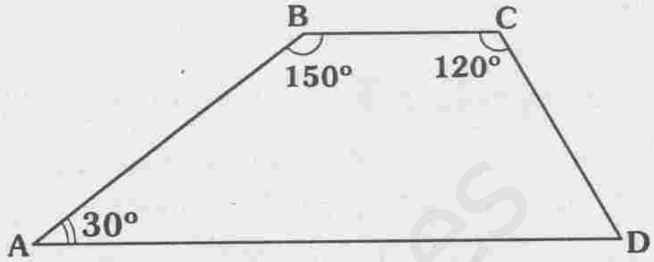
En el triángulo ABC, la distancia del punto medio de $\overline{BC}$ a $\overline{AC}$ mide 2μ. Si $AB=8\mu$ y $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle ACB)$, entonces $m\measuredangle ABC$ es:

A) 150° B) 135° C) 120°

D) 90° E) 75°

PROBLEMA Nº129 [1er. E. Parcial 2003-II]

En el gráfico $AB=24\sqrt{3}$ y $BC=16$, Calcule AD.



A) 52 B) 64 C) $32\sqrt{3}$

D) $32\sqrt{2}$ E) $64\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº130 [1er. Seminario 2001-II]

En el interior del triángulo ABC se ubica P tal que $AB=PC$, $AP=8$ $m\measuredangle ABP=2(m\measuredangle BAP)$; $m\measuredangle BAP=m\measuredangle ACP$ y $m\measuredangle APC=5(m\measuredangle ACP)$. Calcule AC

A) 12 B) 14 C) 16

D) 20 E) 24

PROBLEMA Nº131 [1er. Seminario 2001-II]

En el triángulo ABC, $AB=5$ y $BC=8$. La mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a la bisectriz exterior del ángulo trazado desde B en F, luego se traza $\overline{FH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$. Calcule BH.

A) 3 B) 1,5 C) 3,5

D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº132 [1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto exterior D relativo a $\overline{BC}$, tal que $AB=BC=CD$.

Si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle ABC)$, entonces $m\sphericalangle DAC$ es:

A) 15° B) 18° C) 22,5°
D) 30° E) 36°

PROBLEMA N°133 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersecan en D. Si $AD = BC$ y $m\sphericalangle DCA = 2(m\sphericalangle DAC)$. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 60° B) 80° C) 55°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA N°134 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se tiene el punto F de modo que $AF = 3(FC)$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N. Si $AM = 17cm$. Halle MN.

A) 1cm B) 2cm C) $\frac{3}{2}$cm
D) $\left(\frac{9}{5}\right)$cm E) $\left(\frac{17}{7}\right)$cm

PROBLEMA N°135 [1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo ABC, en el interior se ubica el punto Q. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AQ} \cong \overline{QB}$,

$m\sphericalangle QAB = m\sphericalangle QCA$ y

$m\sphericalangle QBC = 5(m\sphericalangle QAB)$

Entonces $m\sphericalangle BQC$ es :

A) 60° B) 65° C) 80°
D) 75° E) 70°

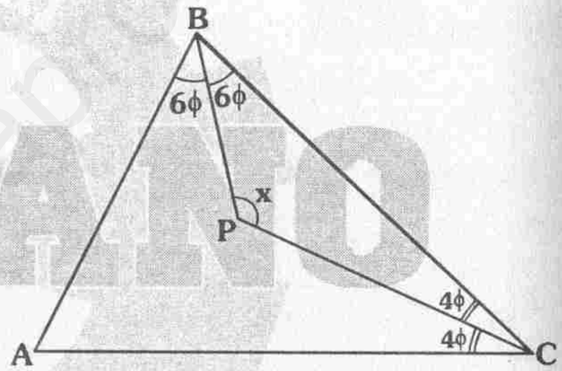
PROBLEMA N°136 [1er. Seminario 1999-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la mediana BM y se ubica Q punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en F. Si $CQ = 12$. Calcule FM.

A) 6 B) 8 C) 19
D)10 E) 12

PROBLEMA N°137 [1er. Seminario 2008-I]

En el gráfico $AB = PC$, calcule x.



A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

PROBLEMA N°138 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo MNP, obtuso en N, se cumple $m\sphericalangle N = \phi$, se construyen los triángulos equiláteros MPK y NPQ de modo que N, Q y K se encuentran en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{MP}$.

Halle $m\sphericalangle KQN$.

A) $2\phi - 30°$ B) $\phi - 30°$
C) $\phi - 60°$ D) $2\phi - 60°$
E) $\phi - 120°$

PROBLEMA Nº139 [1er. Seminario 2007-I]

En el triángulo ABC obtusángulo ($m\sphericalangle B > 90°$), se traza la mediana $\overline{BM}$, si $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C) = m\sphericalangle MBC$.

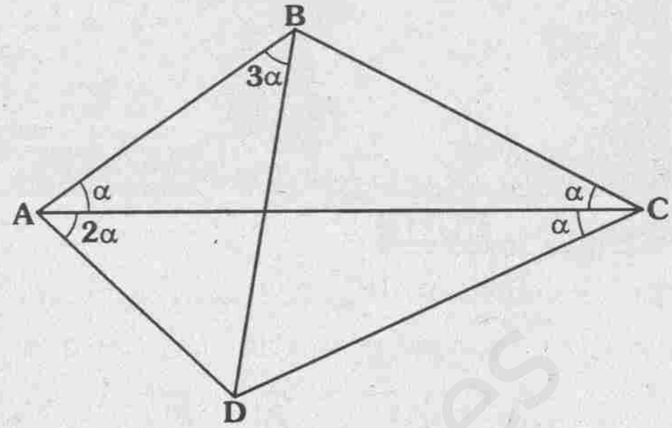
Calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 40° B) 30° C) 15°

D) 10° E) 5°

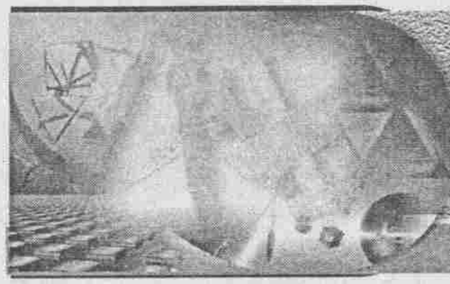
PROBLEMA Nº140 [Ciclo Repaso 2007-I]

En la figura se indica los valores de los ángulos. Halle el valor de α.



A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 20°



Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº141

En el triángulo ABC, se trazan la mediana AD y la ceviana interior BQ, tal que:

$$\overline{AD} \cong \overline{BQ} \quad y \quad \overline{AD} \perp \overline{BQ}$$

Calcule $m\sphericalangle DAC$.

A) 30° B) 45° C) 60°

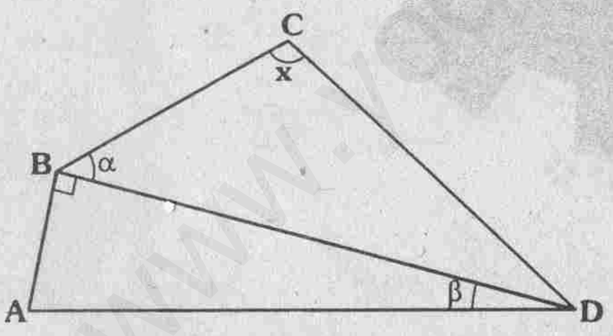
D) $\frac{53°}{2}$ E) 37°

PROBLEMA Nº142

En el gráfico:

$$\alpha + \beta = 60° \quad y \quad \frac{AD}{2} = \frac{CD}{\sqrt{2}} = BC$$

Calcule x.

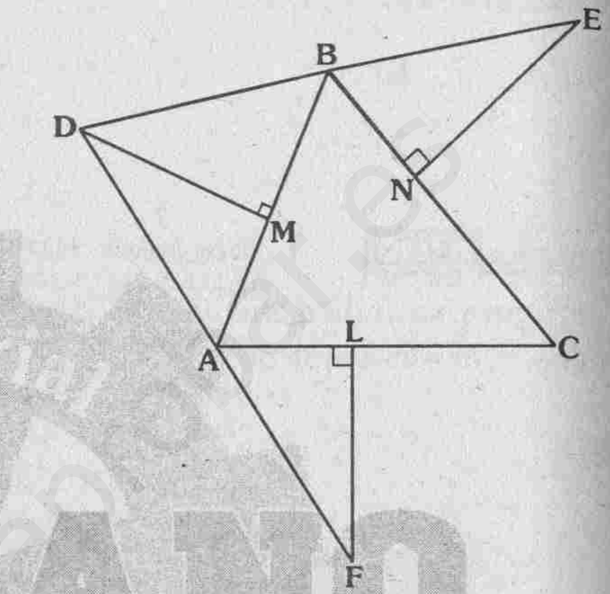


A) 90° B) 106° C) 105°

D) 115° E) 130°

PROBLEMA Nº143

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, DB = BE, DA = AF y $FL + EN - MD = 4\sqrt{3}$. Calcule AB.



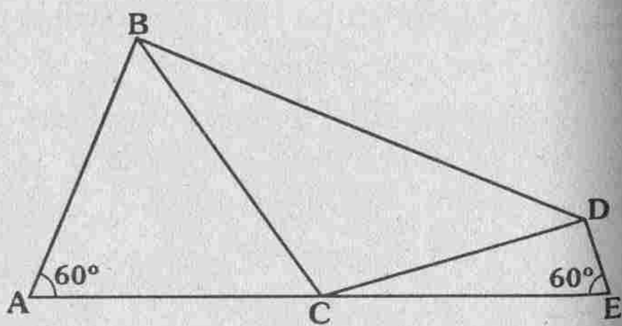
A) 4 B) 8 C) $4\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$ E) 6

PROBLEMA Nº144

En el gráfico, AC = CE = AB + DE y $BC = \ell$.

Halle BD.

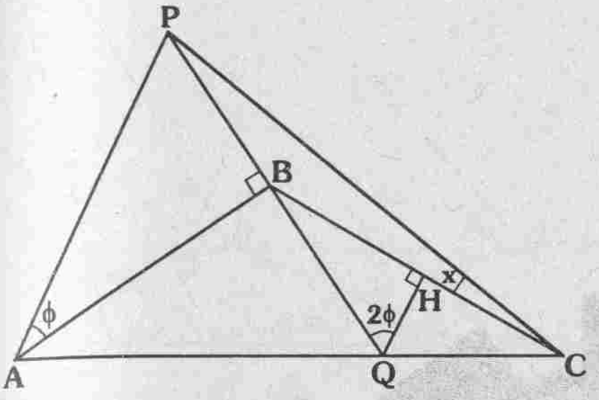


A) ℓ B) 2ℓ C) 3ℓ

D) $\ell\sqrt{3}$ E) $2\ell\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº145

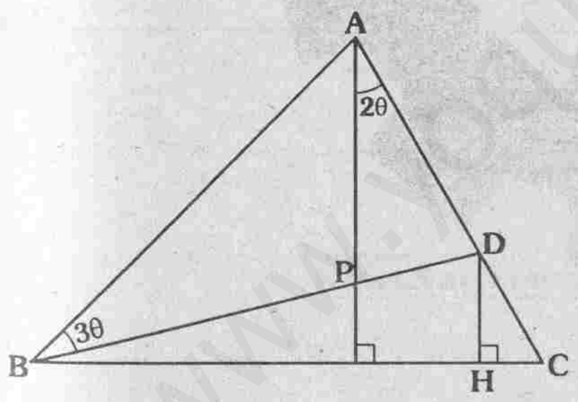
En el gráfico $AB = BC$, $PC = 25$ y $QH = 7$. Calcule x.



A) 8° B) 16° C) 14°
D) 30° E) 37°

PROBLEMA Nº146

En el gráfico, $CD = 3$, $AP = 7$ y $AB = BC$.
Calcule HC.

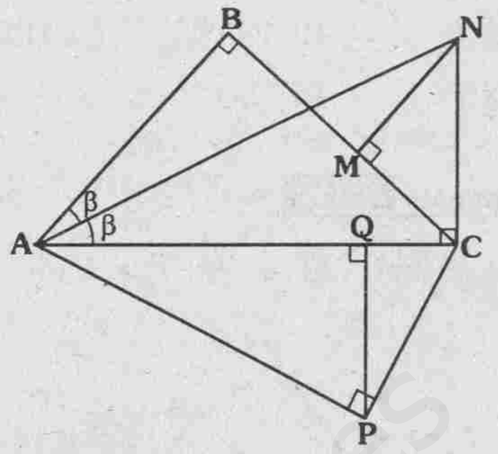


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA Nº147

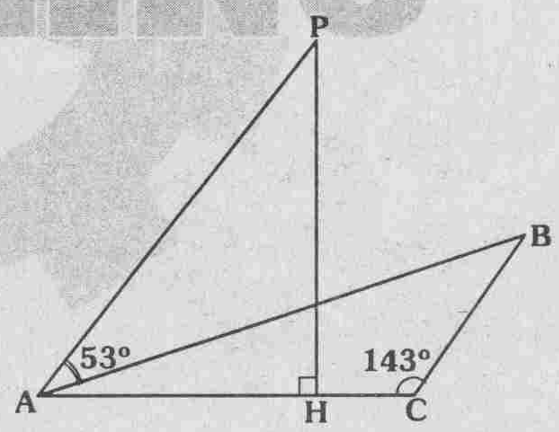
En el gráfico, $m\sphericalangle NAP = 45°$, $MN = a$ y $PQ = b$. Calcule AC.



A) $b + 2a$ B) $a + 2b$
C) $2(a + b)$ D) $3(b + a)$
E) $3(b - a)$

PROBLEMA Nº148

En el gráfico, $AP = AB$ y $AH = 6$, calcule HC.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

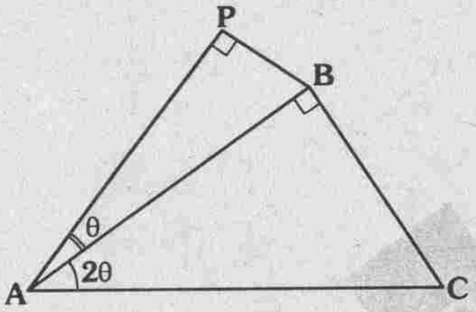
PROBLEMA Nº149

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en su región interior se ubica el punto P tal que $AB = BC$ y $(PC)^2 = 2(PB)^2 + (AP)^2$. Calcule $m\sphericalangle APB$.

A) 120° B) 135° C) 125°
D) 130° E) 150°

PROBLEMA Nº150

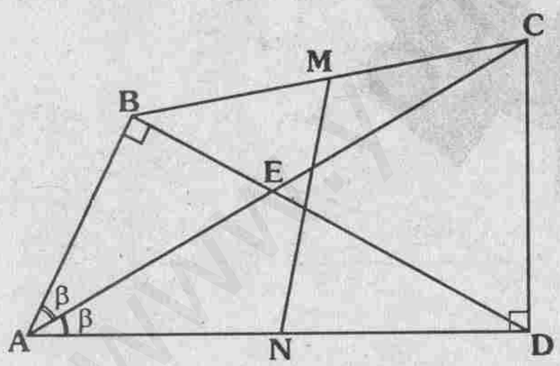
En el gráfico, $AC = 4(PB)$, calcule θ.



A) 15° B) 18° C) 21°
D) 22°30' E) 18°30

PROBLEMA Nº151

En el gráfico, $BM = MC$, $AN = ND$ y $(BE)^2 + (AD)^2 = 20$, calcule MN.



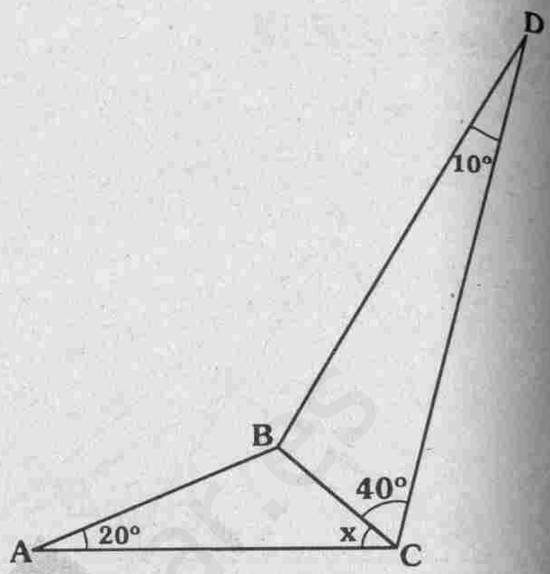
A) 4 B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº152

En el gráfico, $BD = AB + AC$.

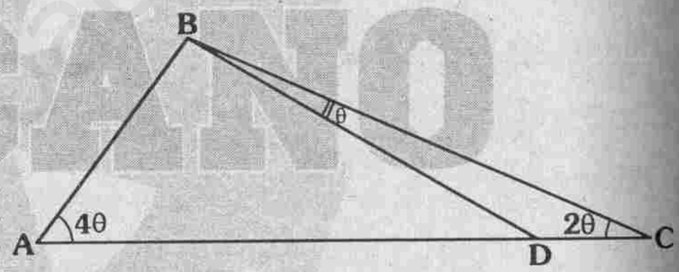
Calcule x.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 70°



PROBLEMA Nº153

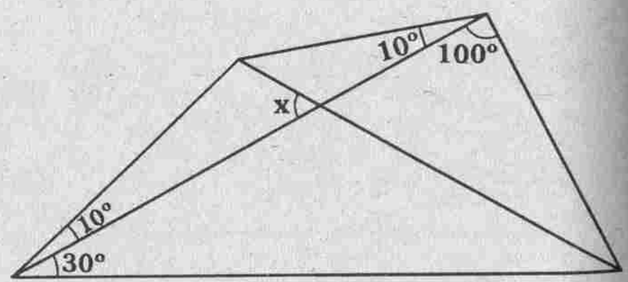
En el gráfico, $BC = AD$, calcule θ.



A) 5° B) 6° C) 7,5°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº154

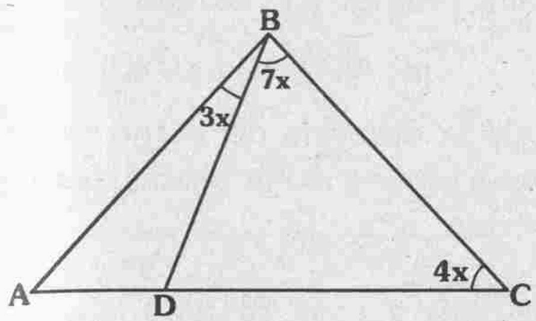
En el gráfico, calcule x.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 55°

PROBLEMA Nº155

En el gráfico, $AB = CD$, calcule x.



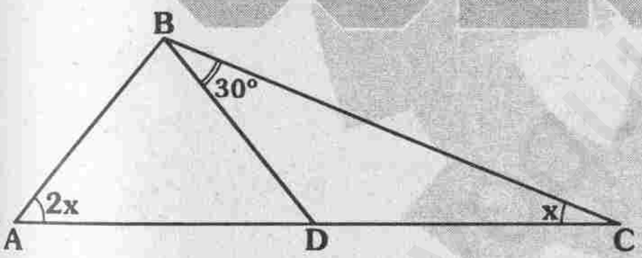
A) 10° B) 5° C) 12°
D) 8° E) 7,5°

PROBLEMA Nº156

En el gráfico:

$m\sphericalangle ABD > 90°$ y $AD = CD$

Calcule x.



A) 15° B) 30° C) 20°
D) 25° E) 10°

PROBLEMA Nº157

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BQ y en $\overline{BQ}$ se ubica P, tal que $\overline{BQ} \perp \overline{CP}$, $m\sphericalangle ACP = 15°$, $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle PAC$ y $QC = 2(PB)$. Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 15° B) 18° C) 22°30'
D) 18°30' E) 16°

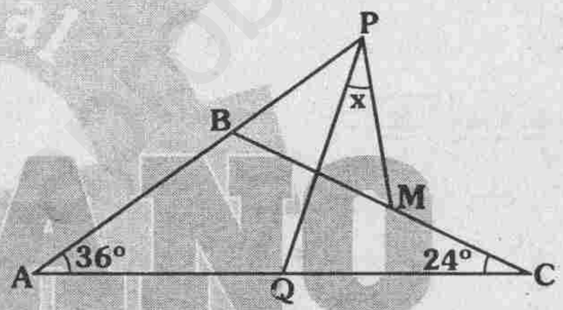
PROBLEMA Nº158

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la mediana BM, tal que $BC=8$ y $2(m\sphericalangle ABH) - m\sphericalangle HBC = 90°$. Calcule HM.

A) 2 B) 4 C) 6
D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº159

En el gráfico, $BC = 2(PB)$, $BM = MC$ y $AQ = QC$. Calcule x.

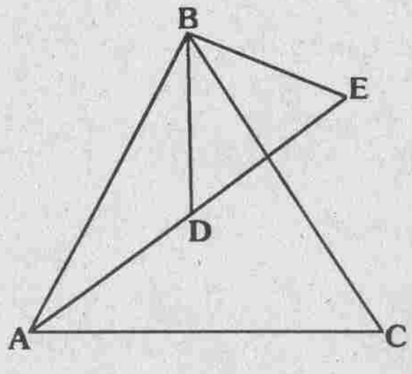


A) 12° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 20°

PROBLEMA Nº160

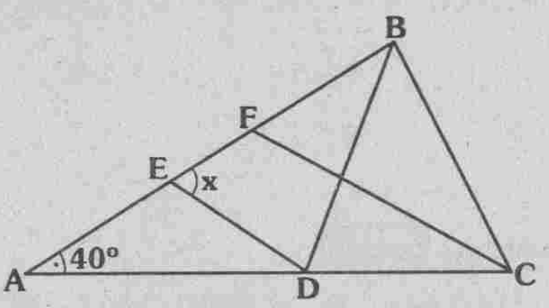
En el gráfico, los triángulos ABC y BDE son equiláteros y $AD = 22$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$.

A) 11
B) 22
C) $11\sqrt{3}$
D) $11\sqrt{2}$
E) 5,5



PROBLEMA N°161

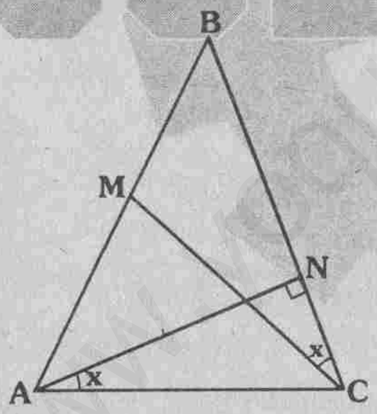
En el gráfico, BE=FC, FC=EB y BD=BC. Calcule x



A) 70° B) 80° C) 50°
D) 60° E) 77°

PROBLEMA N°162

En el el gráfico AB = BC y MB = 2(NC). Calcule x.



A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 30°

PROBLEMA N°163

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que BD = AC, $m\sphericalangle ACB = 3\theta$ y $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle ABD) = 4\theta$.

Calcule θ.

A) 10° B) 15° C) 18°
D)12° E) 24°

PROBLEMA N°164

En el triángulo isósceles ABC, AB = BC = a y AC = b, se traza la ceviana interior AP, tal que:

$$m\sphericalangle ABC = 4(m\sphericalangle CAP)$$

Calcule la distancia del punto medio de $\overline{AB}$ a la proyección ortogonal de C sobre $\overline{AP}$.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $a+b$
C) $\dfrac{a+b}{2}$ D) $2(a+b)$
E) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

PROBLEMA N°165

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ se ubica M y en $\overline{AC}$ el punto N, si MC = a, BC = b, $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $m\sphericalangle NMC = 2(m\sphericalangle BAC)$. Calcule MN.

A) $a+b$ B) $2a+b$
C) $2b+a$ D) $2b-a$
E) $2a-b$

PROBLEMA N°166

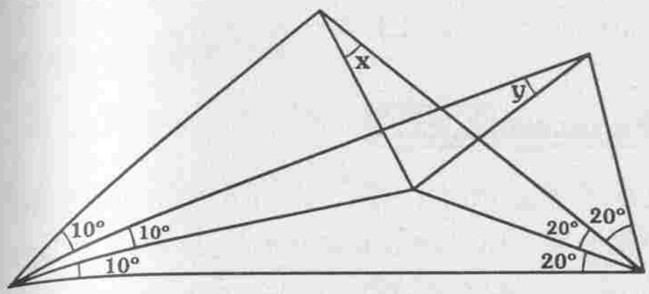
Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior $\overline{BR}$ y la ceviana exterior $\overline{BS}$ ($\overline{BR} \perp \overline{BS}$). S en la prolongación de $\overline{AC}$. Si AB = RC ; $m\sphericalangle BAC = 40°$ y $m\sphericalangle RBC = m\sphericalangle BCR + m\sphericalangle ABR$.

Calcule $m\sphericalangle BSA$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N°167

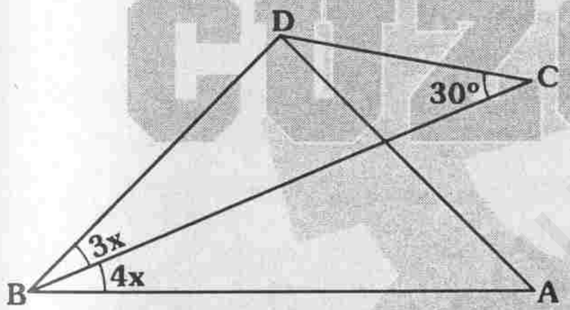
Del gráfico, calcule x+y.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA N°168

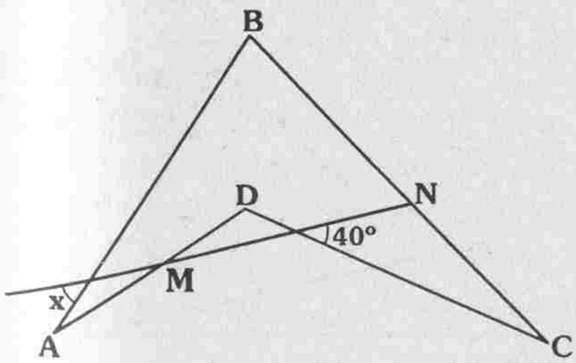
En el gráfico, $AB = BC$ y $AD = BD$. Calcule x.



A) 6° B) 5° C) 10°
D) 12° E) 7,5°

PROBLEMA N°169

En el gráfico, $AB = CD$, $AM = MD$ y $BN = NC$. Calcule x.



A) 50° B) 65° C) 80°
D) 40° E) 70°

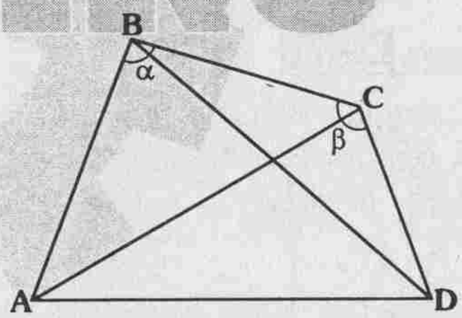
PROBLEMA N°170

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD, luego $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$) tal que $m\measuredangle HAC = 37°$; $BH = 9$ y $AC = 15$. Calcule AH.

A) 2 B) 2,5 C) 3
D) 3,5 E) 4

PROBLEMA N°171

Según el gráfico, $\alpha + \beta = 210°$, $AC = AD = BD$; $AB = 6$ y $CD = 2\sqrt{3}$. Calcule AD.



A) 8 B) 6 C) 4
D) $2\sqrt{21}$ E) $2\sqrt{13}$

PROBLEMA N°172

Exteriormente y relativo a $\overline{AC}$ del triángulo rectángulo ABC (recto en B) se ubica el punto P, sea M punto medio de $\overline{AC}$, se cumple:

$$m\measuredangle BAC = \alpha \qquad y$$

$$6(m\measuredangle MCP) = 3(m\measuredangle CMP) = 2(m\measuredangle BPM)$$

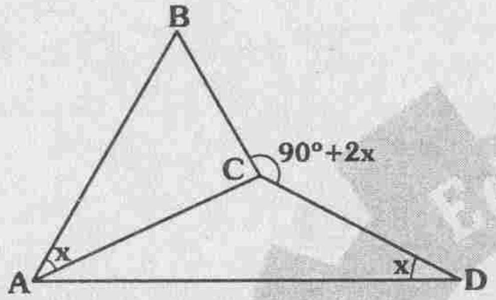
Calcule $m\sphericalangle BPC$ en función de α.

A) α B) $\dfrac{\alpha}{2}$ C) 2α

D) $90° - \alpha$ E) $45° - \alpha$

PROBLEMA Nº173

En el gráfico, $AC = CD$ y $AB + BC = AD$. Calcule x.



A) 37°/2 B) 53°/2 C) 15°

D) 30° E) 37°

PROBLEMA Nº174

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, por P se traza una recta perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{AB}$ en M.

Además $m\sphericalangle BAC = 15°$; $m\sphericalangle ABP = 30°$;

$m\sphericalangle ABC = 120°$ y $AM = 4\sqrt{2}$.

Calcule PC.

A) 4 B 8) C) 2

D) 3 E) 5

PROBLEMA Nº175

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, sea M punto medio de $\overline{BC}$. La prolongación de $\overline{MH}$ interseca a la prolongación de $\overline{BA}$ en N. Si $BC = 6$ y $3(AH) = HC$. Calcule MN.

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº176

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM y en $\overline{AC}$ se ubica el punto D de modo que $m\sphericalangle AMD = 90°$ y la distancia de B hacia $\overline{AC}$ es la mitad de AD, si $m\sphericalangle BAM = 30°$, calcule $m\sphericalangle CMD$.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

PROBLEMA Nº177

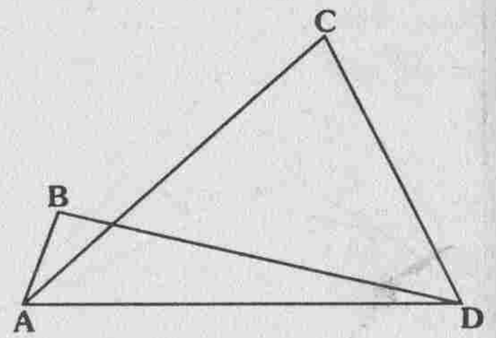
En el triángulo ABC, el ángulo ACB mide 60°, se traza la bisectriz interior BE, luego la mediatriz de $\overline{AB}$ contiene a E e interseca a lal prolongación de $\overline{BC}$ en F, calcule $m\sphericalangle BFE$.

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 15° E) 25°

PROBLEMA Nº178

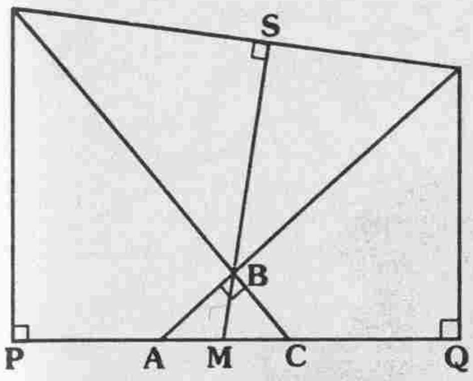
En el gráfico, $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA$; $AC = BD$, $AD = AB + CD$ y $AB \neq CD$. Calcule $m\sphericalangle CDA$.



A) 37°   B) 60°   C) 45°
D) 75°   E) 53°

PROBLEMA Nº179

Del gráfico, $AM = MC$ y $BS = 4$.
Calcule PQ.



A) 6   B) 8   C) $4\sqrt{2}$
D) 8   E) $4\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº180

En el triángulo ABC recto en B se traza la mediana BM y la ceviana interior $\overline{CN}$, $\overline{CN} \cap \overline{BM} = \{L\}$, $BL = LM$.

Calcule $\dfrac{MN}{CN}$

A) 1/3   B) 1   C) 1/2
D) 1/4   E) 2/3

PROBLEMA Nº181

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AE en cuya prolongación se ubica P, de modo que $m\measuredangle APC = 90°$, si B dista "a" de $\overline{AE}$, $PC = b$ y $m\measuredangle BCP = 2(m\measuredangle ACB)$.
Calcule BC.

A) $4a - b$ B) $2a + b$
C) $\dfrac{3a+b}{2}$ D) $2b + a$
E) $a + b$

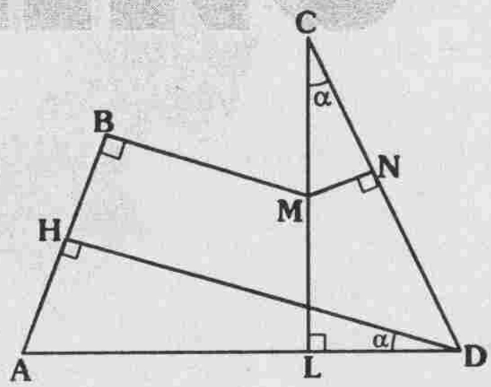
PROBLEMA Nº182

En el triángulo ABC, $m\measuredangle BAC = 50°$ $m\measuredangle BCA = 100°$, se trazan las alturas CQ y BH; si $CQ - CH = 2$. Calcular AC.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 3
D) 4   E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº183

Del gráfico, $MN = 2$, $BM = 5$, $CM = ML$.
Calcule DH.



A) 7   B) 9   C) 11
D) 13   E) 14

PROBLEMA Nº184

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$, si $AE = BC$,

$2(m\measuredangle BAE) = 3(m\measuredangle BCA)$ y

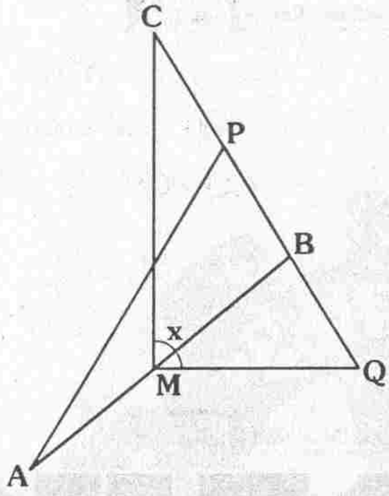
$m\measuredangle ABE = 90°$.

Calcule $m\measuredangle EBC$.

A) 26,5 B) 22,5 C) 18°
D) 14° E) 15°

PROBLEMA N°185

Del gráfico $AM = MB$; $CP = BQ$ y $AP = QC$. Calcule x.



A) 120°
B) 150°
C) 135°
D) 90°
E) 60°

PROBLEMA N°186

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el triángulo ABM se traza la altura $\overline{BH}$, donde $BH = 5$; si $AB = 2(HM)$ y $m\measuredangle ABH = 2(m\measuredangle MAC)$.

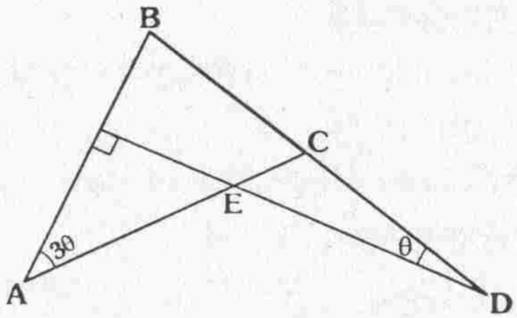
Calcule la distancia de C a $\overleftrightarrow{BH}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) $5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°187

Del gráfico, $AE = CD$ y $ED = AB$.

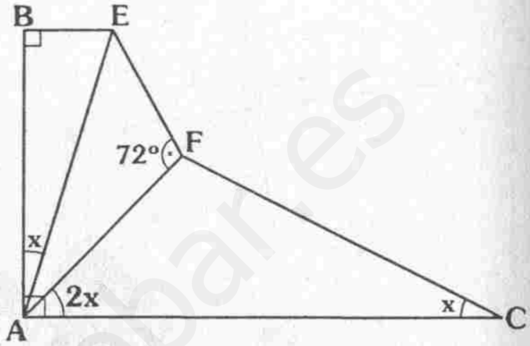
Calcule θ.



A) 15° B) 10° C) 8°
D) 18° E) 14°

PROBLEMA N°188

En el gráfico, $CF = 2(AB)$. Calcule x.



A) 15° B) 10° C) 9°
D) 18° E) 22°30'

PROBLEMA N°189

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto D, tal que:

$$\frac{m\measuredangle DCA}{3} = \frac{m\measuredangle BAC}{7} = m\measuredangle DCB = 10°$$

y $AB = DC$.

Calcule $m\measuredangle DBC$.

A) 30° B) 15° C) $\frac{45°}{2}$
D) 20° E) 75°

PROBLEMA N°190

En el triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la ceviana interior $\overline{CN}$ que interseca a $\overline{BM}$ en su punto medio H, si las distancias de C a N y a $\overleftrightarrow{BH}$ están en la razón de 5 a 3 respectivamente.

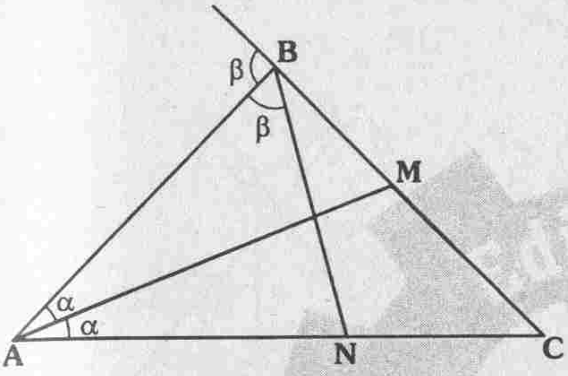
Calcule m∢NHB .

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº191

Del gráfico, $BN = CN$, $AB = 8$, $MC = 3$. Calcule AC.

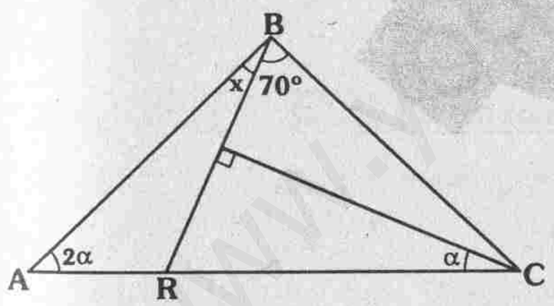


A) 5 B) 4 C) 5,5

D) 11 E) 9

PROBLEMA Nº192

Del gráfico, calcule x.



A) 120° B) 10° C) 30°

D) 25° E) 15°

PROBLEMA Nº193

En la región exterior relativo a $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se ubica el punto P, tal que:

$$m\sphericalangle APC = 90° \ ; \ m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PCA$$

Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $(AB)^2 + (AC)^2 = 36$. Calcule PM.

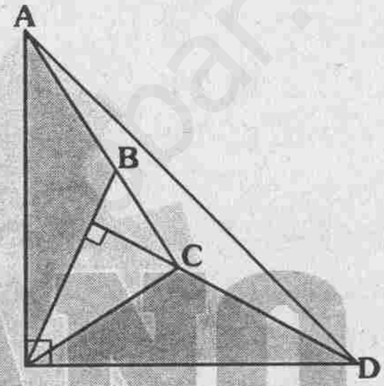
A) 4,5 B) 6 C) 4

D) 3 E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº194

Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Si AB=3 y BC=2.

Calcule AD.



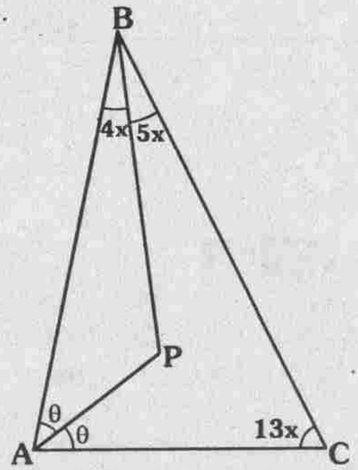
A) $2\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{6}$

D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{13}$

PROBLEMA Nº195

Del gráfico, AC=BP.

Calcule x.



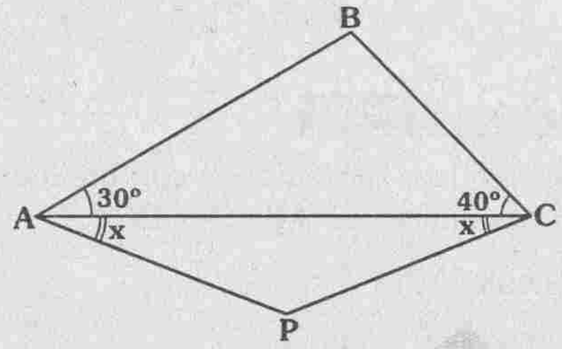
A) 4° B) 5° C) 4,5°

D) 7,5° E) 6°

PROBLEMA N°196

Del gráfico, $AP=PC=BC$.

Calcule x.

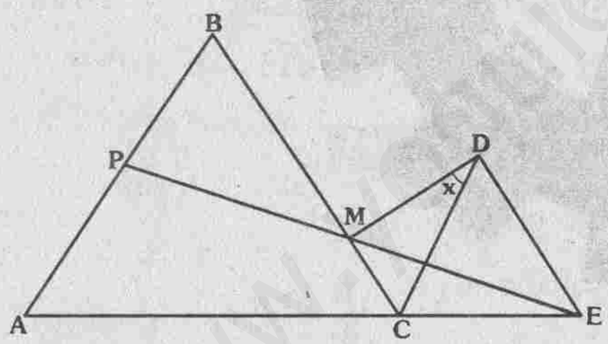


A) 10° B) 20° C) 35°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA N°197

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros; $AP=PB$ y $PM=ME$.

Calcule x.



A) 15° B) 75° C) 53°/2
D) 30° E) 37°/2

PROBLEMA N°198

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto Q tal que :

$$\frac{m\sphericalangle ABQ}{3}=\frac{m\sphericalangle QBC}{2}=\frac{m\sphericalangle BAQ}{7}=m\sphericalangle QAC=10°$$

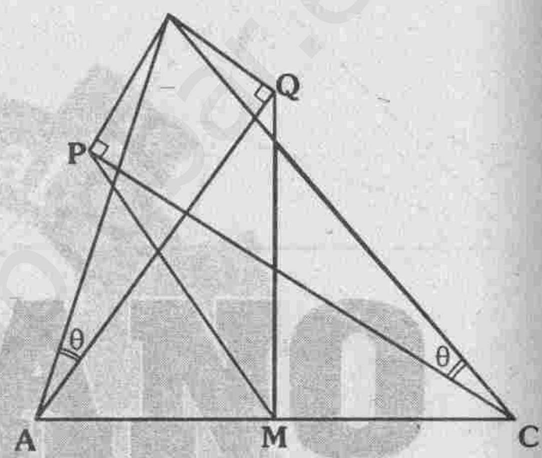
Calcule: $m\sphericalangle QCA$

A) 20° B) 30° C) 10°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA N°199

Del gráfico, $AM=MC$.

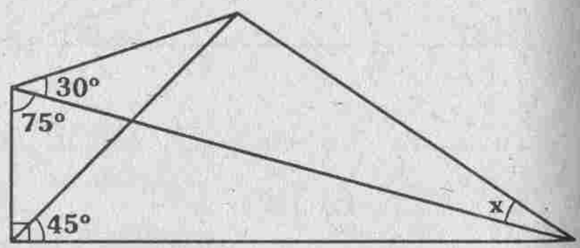
Calcule $\dfrac{PM}{QM}$



A) 1 B) 3/2 C) 5/4
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA N°200

Del gráfico, calcule x.



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 13° E) 14°

PROBLEMA Nº201

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior AQ, tal que $AC + QC = 2(AB)$. Calcule $m\sphericalangle QAC$.

A) 30° B) 22,5° C) 14°
D) 18,5° E) 26,5

PROBLEMA Nº202

Se ubica el punto P en la región interior del triángulo ABC, tal que $AP = BC$, $m\sphericalangle PAC = 22°$, $m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle ACP$ y $m\sphericalangle PBC = 79°$. Calcule $m\sphericalangle PCB$.

A) 11° B) 36° C) 22°
D) 57° E) $\dfrac{57°}{2}$

PROBLEMA Nº203

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica Q en la región interior, tal que:

$$m\sphericalangle BCQ = 10° \quad y$$

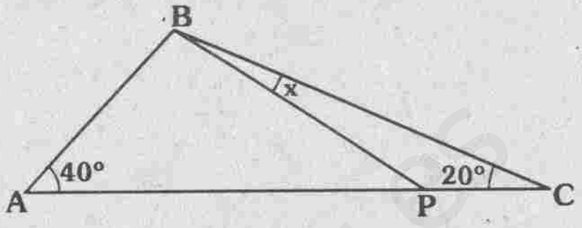
$$m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle QAC = 20°$$

Calcule $m\sphericalangle CBQ$.

A) 10° B) 30° C) 15°
D) 20° E) 15°

PROBLEMA Nº204

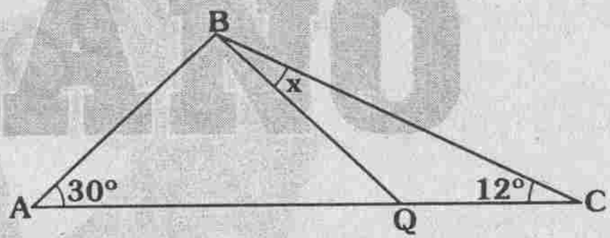
En el gráfico, $AP = BC$. Calcule x.



A) 5° B) 15° C) 30°
D) 10° E) 40°

PROBLEMA Nº205

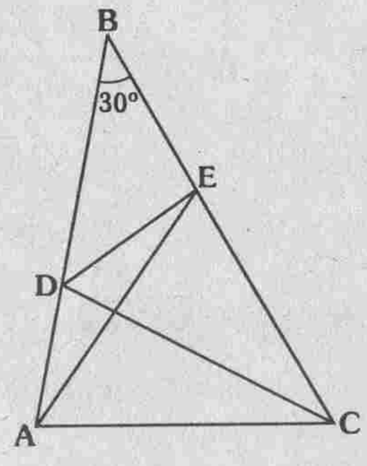
En el gráfico, BC=AQ. Calcule x.



A) 10° B) 12° C) 6°
D) 20° E) 10°

PROBLEMA Nº206

En el gráfico, $AC = AE = CD$, $AD = a$ y $EC = b$. Calcule ED



A) $\dfrac{a+b}{2}$

B) $\sqrt{a^2+b^2}$

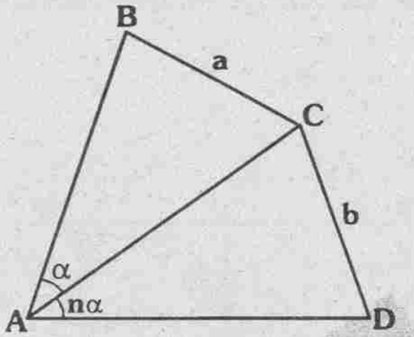
C) $\sqrt{ab}$

D) $2\sqrt{a^2+b^2}$

E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA N°207

En el gráfico, $AB = AC = AD$ y $n \in \mathbb{Z}^+ (n > 1)$, indique la proposición correcta:

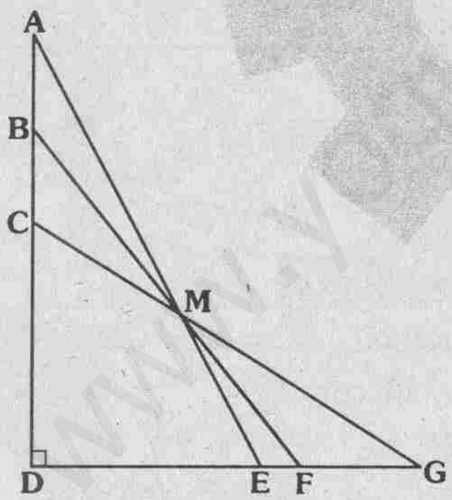


A) $a > nb$ B) $a < nb$ C) $a < 2b$

D) $a > 2b$ E) $b < na$

PROBLEMA N°208

En el gráfico, $BM = MF$; $AB = 2$; $BC = 3$; $EF = 1$ y $FG = 4$, calcule BM.



A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{190}$ C) $\sqrt{19}$

D) $2\sqrt{15}$ E) $\sqrt{35}$

PROBLEMA N°209

En la región interior del triángulo ABC se ubica D, tal que:

$AB = BC = AD$ y

$$m\measuredangle BCD = \frac{m\measuredangle DCA}{2} = \frac{m\measuredangle ADC}{9}$$

Calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 7,5° B) 10° C) 15°

D) 22,5° E) 30°

PROBLEMA N° 210

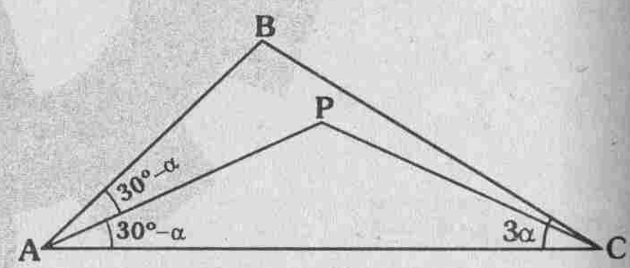
En el triángulo ABC se traza la altura BH (H en $\overline{AC}$). Si $m\measuredangle ABH = 18°$ y $BC = 2(AH) + AB$. Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 18° B) 36° C) 30°

D) 12° E) 24°

PROBLEMA N° 211

En el gráfico, $AB = AP = PC$. Calcule α.

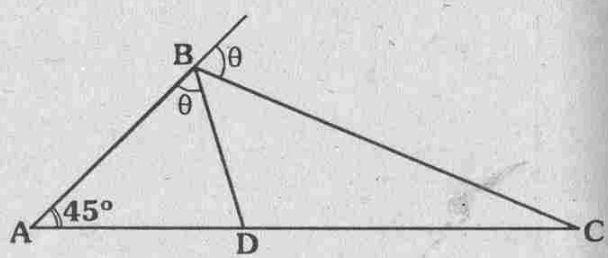


A) 20° B) 12° C) 10°

D) 25° E) 15°

PROBLEMA N° 212

En el gráfico, $CD = 3(AD)$. Calcule $\frac{BC}{AB}$.



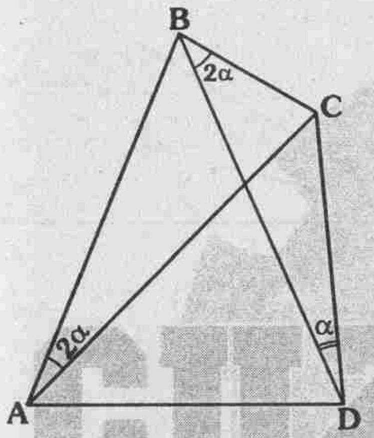
A) 3 B) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ C) $\sqrt{34}$

D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{15}$

PROBLEMA Nº 213

En el gráfico, $AB = BD$ y $AD = DC$.

Calcule α.



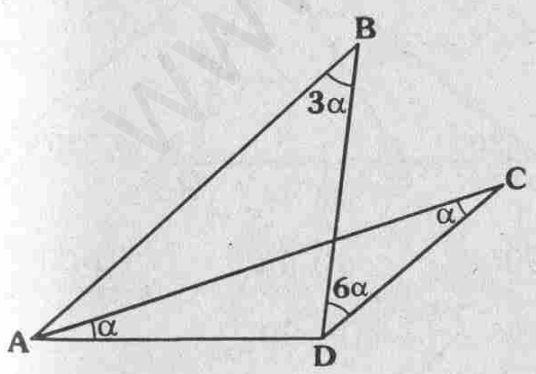
A) 5° B) 7,5° C) 10°

D) 20° E) 18°

PROBLEMA Nº 214

En el gráfico, $AB = AC$ y $AD = DC$.

Calcule α.



A) 5° B) 10° C) 12°

D) 18° E) 15°

PROBLEMA Nº 215

Interior al triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ubica P, que pertenece a la bisectriz del ángulo A.

Si $m\sphericalangle BCP = 3(m\sphericalangle ACP) = 30°$

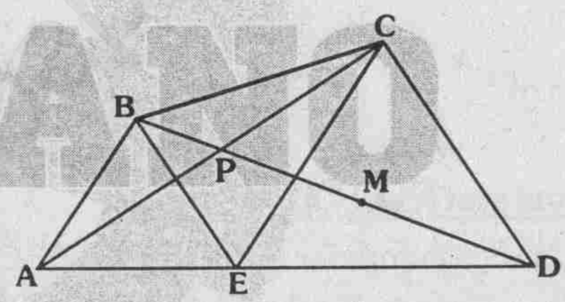
Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 70° B) 80° C) 100°

D) 120° E) 90°

PROBLEMA Nº 216

En el gráfico, calcule PM, si $BC = 8$; $AB = BE$; $EC = CD$; $AP = PC$ y $BM = MD$.

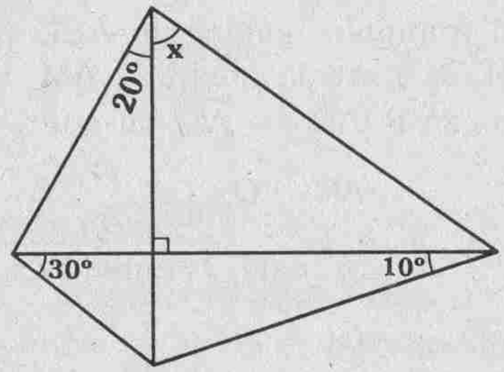


A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 217

Del gráfico, calcule x.

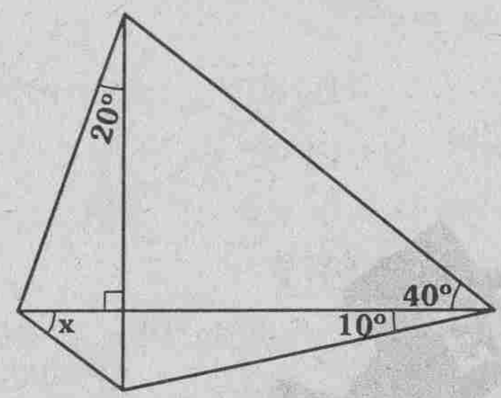


A) 80° B) 60° C) 65°

D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 218

En el gráfico, calcule x.



A) 15° B) 30° C) 7,5°

D) 10° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 219

En la región interior del triángulo ABC se ubica el punto P, tal que $AB = AP = PC$. Si $m\sphericalangle BAP = 30°$ y $m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle PCA = 15°$. Calcule $m\sphericalangle BCP$.

A) 15° B) 45° C) 37°

D) 30° E) 37°/2

PROBLEMA Nº 220

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la mediana AM, luego se ubican P y Q en $\overline{AC}$ tal que:

$$AP = PQ = QC$$

$$\text{Si } m\sphericalangle PBQ = 2(m\sphericalangle MAC)$$

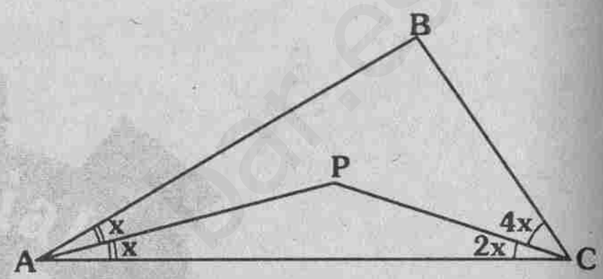
Calcule $m\sphericalangle MAP$.

A) 30° B) $\dfrac{37°}{2}$ C) 37°

D) 23° E) $\dfrac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, $BC = PC$. Calcule x.



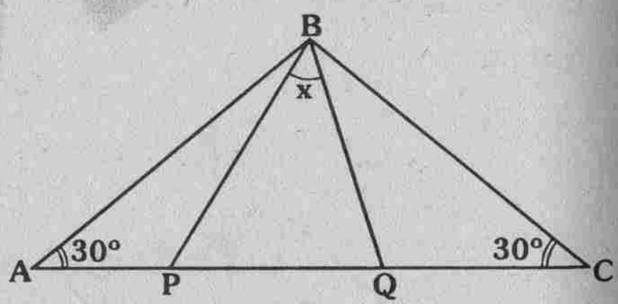
A) 8° B) 10° C) 12°

D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, $\dfrac{AP}{5} = \dfrac{PQ}{7} = \dfrac{QC}{8}$.

Calcule x.

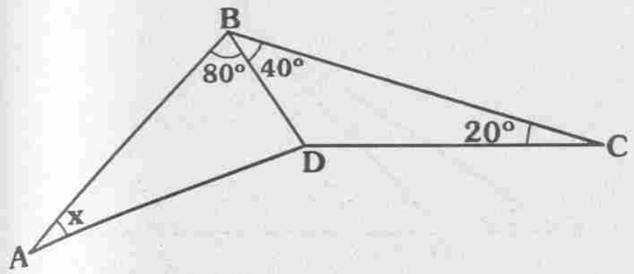


A) 90° B) 45° C) 60°

D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 223

Del gráfico, $AB = DC$. Calcule x.

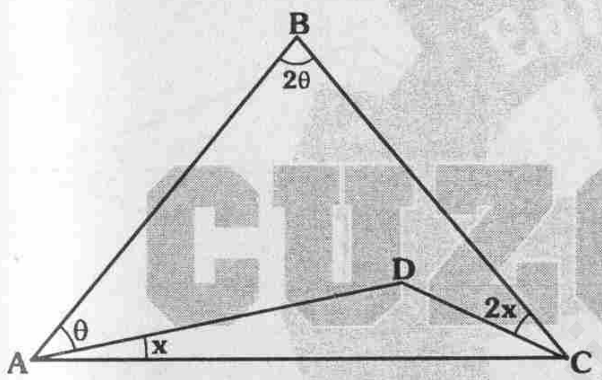


A) 140° B) 20° C) 30°

D) 25° E) 18°

PROBLEMA Nº 224

Del gráfico $AB = BC = AD$. Calcule x.

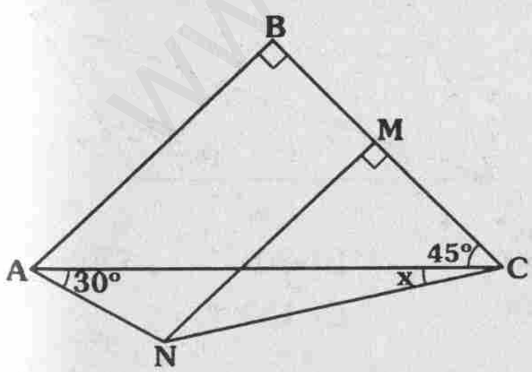


A) 10° B) 12° C) 16°

D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº 225

Del gráfico, $BM = MC$. Calcule x.



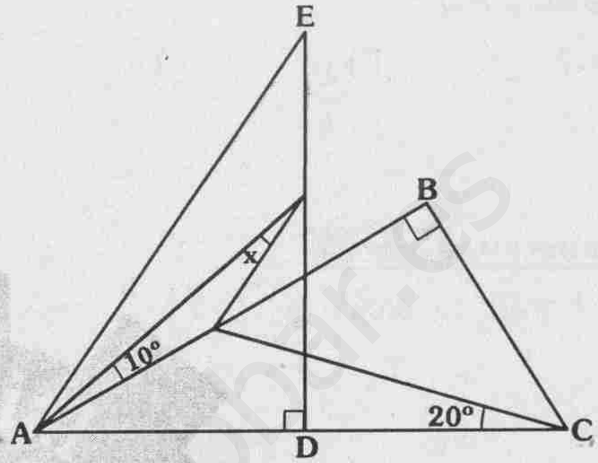
A) 5° B) 8° C) 16°

D) 15° E) 21°

PROBLEMA Nº 226

Del gráfico, los triángulos ABC y EDA son congruentes si BC=DC.

Calcule x.

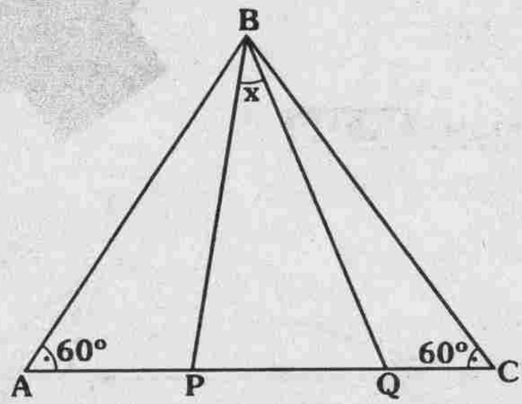


A) 10° B) 15° C) 18°

D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 227

Del gráfico, $\dfrac{AP}{5} = \dfrac{PQ}{7} = \dfrac{QC}{3}$. Calcule x.



A) 20° B) 45° C) 30°

D) 40° E) 15°

PROBLEMA Nº 228

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{AQ}$ tal que:

$$2(m\sphericalangle CAQ) + 3(m\sphericalangle BAQ) = 90° \;;$$

$$BQ = 2 \;;\; QC = 3$$

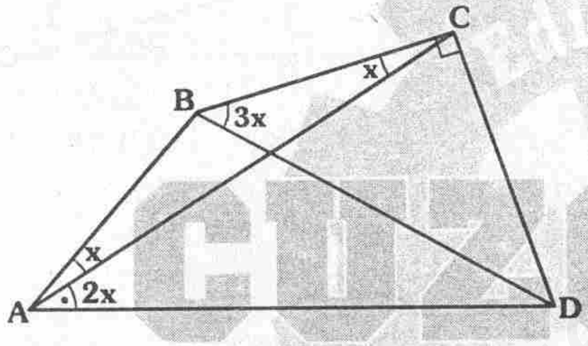
Calcule AQ.

A) 7 B) 6 C) 5

D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº 229

Del gráfico, calcule x.



A) 10° B) 20°

C) 15° D) 18°

E) 22°30'

PROBLEMA Nº 230

Del gráfico, calcule x.

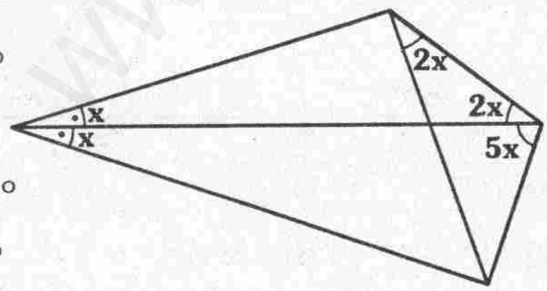
A) 10°

B) 12°

C) 8°

D) 7,5°

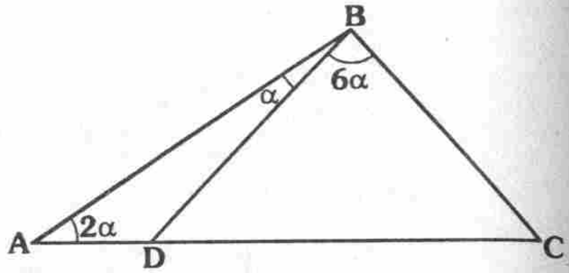
E) 15°



PROBLEMA Nº 231

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule α.

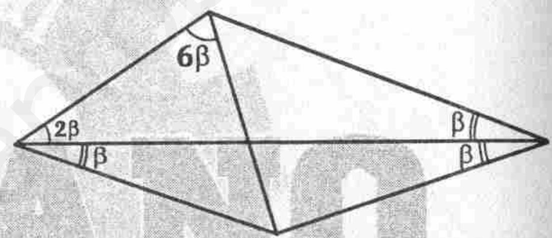


A) 8° B) 9° C) 10°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 232

Del gráfico, calcule β.

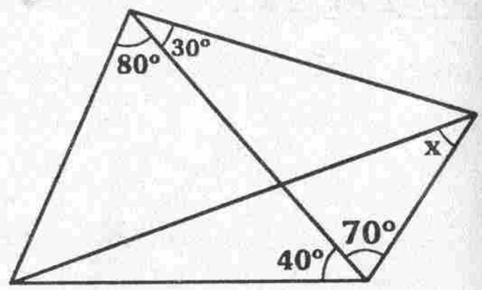


A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 233

Del gráfico, calcule x.

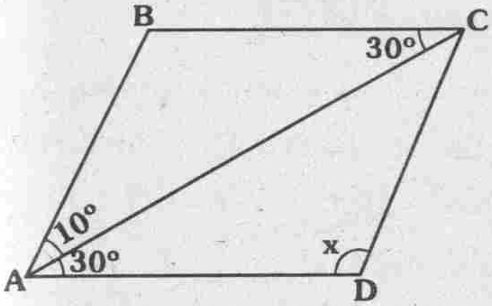


A) 50° B) 20° C) 50°

D) 25° E) 15°

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, AB=AD. Calcule x.

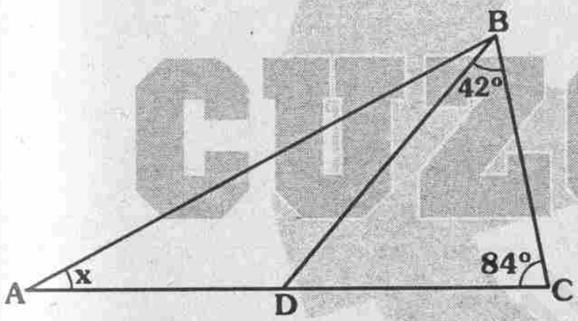


A) 105°   B) 110°   C) 135°
D) 120°   E) 100°

PROBLEMA Nº 235

En el gráfico, AD=BC.

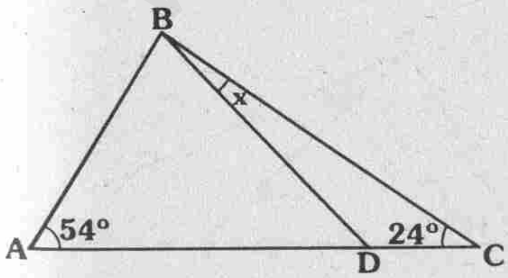
Calcule x.



A) 30°   B) 6°   C) 24°
D) 21°   E) 42°

PROBLEMA Nº 236

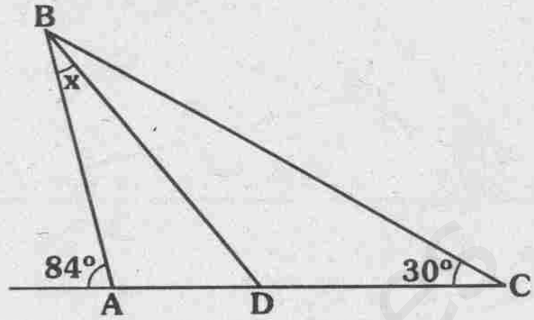
En el gráfico, AD = BC , calcule x.



A) 30°   B) 24°   C) 6°
D) 12°   E) 18°

PROBLEMA Nº 237

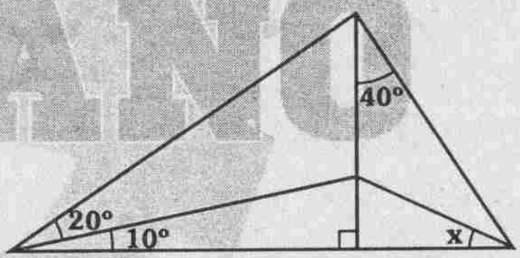
En el gráfico, AB = DC , calcule x.



A) 30°   B) 24°   C) 6°
D) 18°   E) 42°

PROBLEMA Nº 238

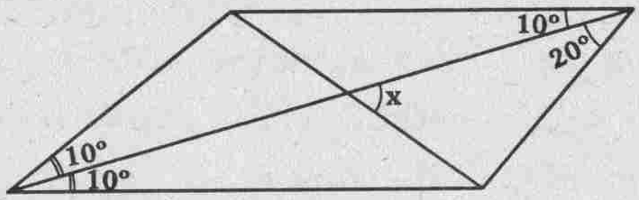
Del gráfico, calcule x.



A) 10°   B) 20°   C) 30°
D) 15°   E) 25°

PROBLEMA Nº 239

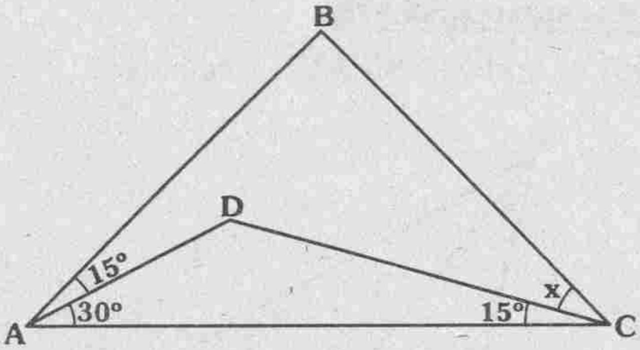
Del gráfico, calcule x.



A) 20°   B) 30°   C) 40°
D) 50°   E) 60°

PROBLEMA Nº 240

En el gráfico, AB=CD. Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 30°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 241

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\measuredangle BAC = 30° \quad y \quad m\measuredangle ACB = x$$

se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$.

Si: $AB = CD$, $\overline{BA} // \overline{CD}$,

$$m\measuredangle BDC = 30° + x$$

Calcule x.

A) 27,5° B) 30° C) 22,5°

D) 45° E) 26,5°

PROBLEMA Nº 242

Se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ en el triángulo ABC, si $m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACD = 45°$, $AB = CD$ y $m\measuredangle BDC = 45° + m\measuredangle ACB$.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 15° B) 22,5°

C) 26,5° D) 18,5°

E) 30°

PROBLEMA Nº 243

El punto D es exterior y relativo a $\overline{BC}$, tal que $m\measuredangle BAD = 45°$, $m\measuredangle CAD = 30°$, $m\measuredangle ADC = 105°$ y $AB = CD$.

Calcule $m\measuredangle ADB$.

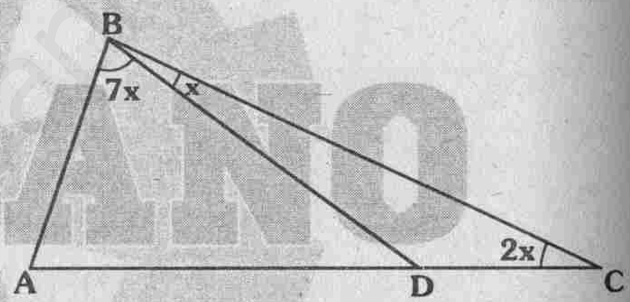
A) 10° B) 15° C) 30°

D) 53°/2 E) 37°/2

PROBLEMA Nº 244

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule x.



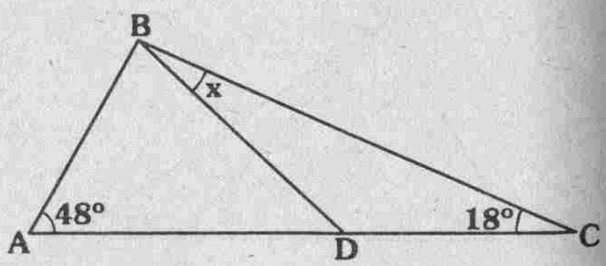
A) 10° B) 20° C) 12°

D) 7,5° E) 15°

PROBLEMA Nº 245

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule x.



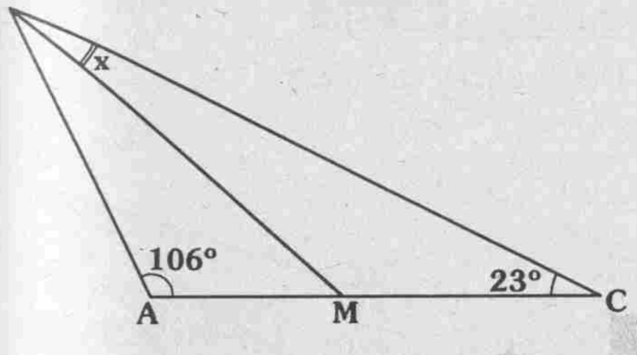
A) 10° B) 20° C) 18°

D) 45°/2 E) 12°

PROBLEMA Nº 246

En el gráfico, AM=MC.

Calcule x



A) 30° B) 23° C) 37°
D) 14° E) 17°

PROBLEMA Nº 247

En el triángulo ABC en su región interior se ubica el punto P, tal que:

$m\sphericalangle PAC = 20°$, $m\sphericalangle PBC = 10°$

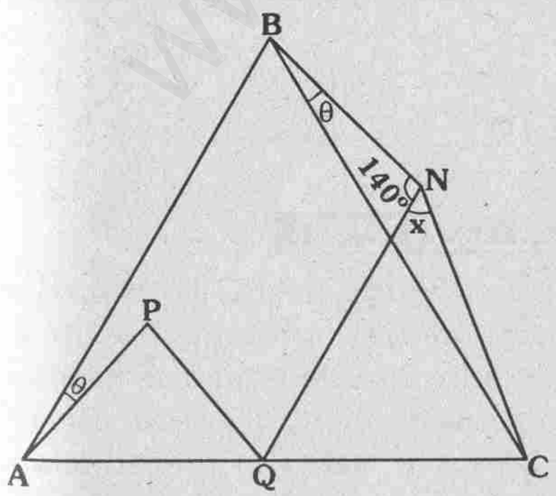
y $m\sphericalangle PCB = 40°$, $BP = AP + AC$

Calcule $m\sphericalangle PCA$.

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 248

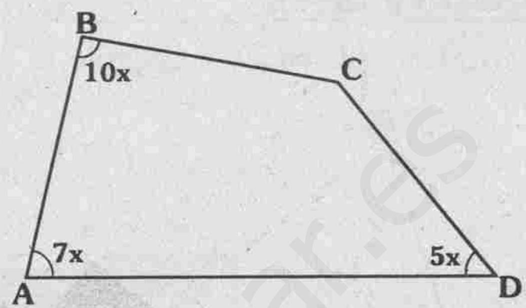
Del gráfico, AB = BC , BN = PQ y el triángulo APQ es equilátero. Calcule x.



A) 30° B) 50° C) 40°
D) 70° E) 20°

PROBLEMA Nº 249

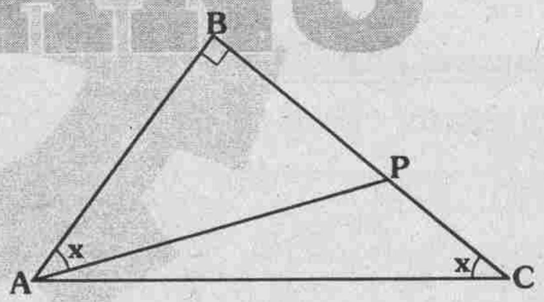
Del gráfico, AB = BC = CD . Calcule x.



A) 10° B) 8° C) 9°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 250

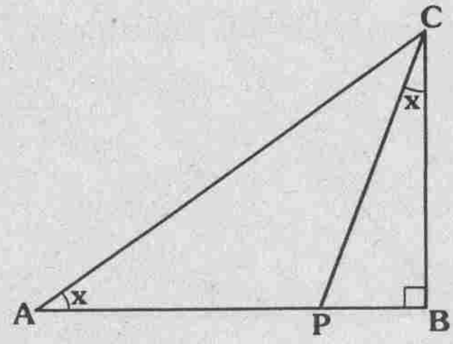
Del gráfico, AB = 2(PC) . Calcule x.



A) 53°/2 B) 24° C) 18°
D) 37° E) 38°

PROBLEMA Nº 251

Del gráfico, AP=BC, calcule x.

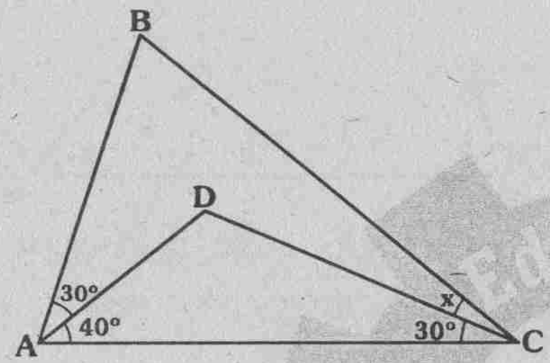


A) 36°   B) 18°   C) $\frac{37°}{2}$

D) 14°   E) $\frac{127°}{4}$

PROBLEMA Nº 252

Del gráfico, $AB = CD$. Calcule x.



A) 10°   B) 20°   C) 15°

D) 7°   E) 12°

PROBLEMA Nº 253

Del gráfico, calcule α.

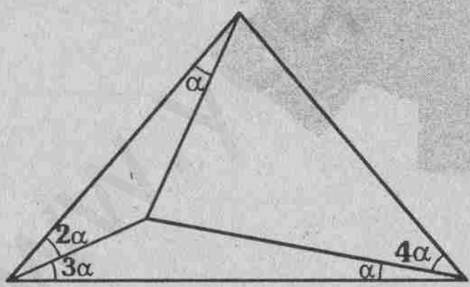
A) 10°

B) 20°

C) 15°

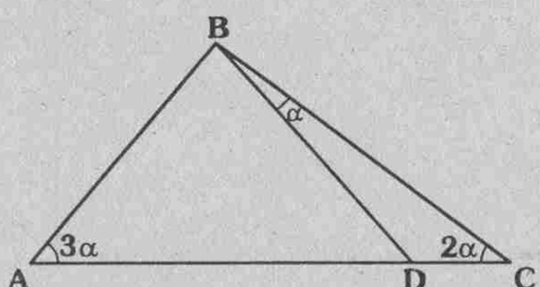
D) 12°

E) 9°



PROBLEMA Nº 254

Del gráfico $AD = BC$, calcule α.

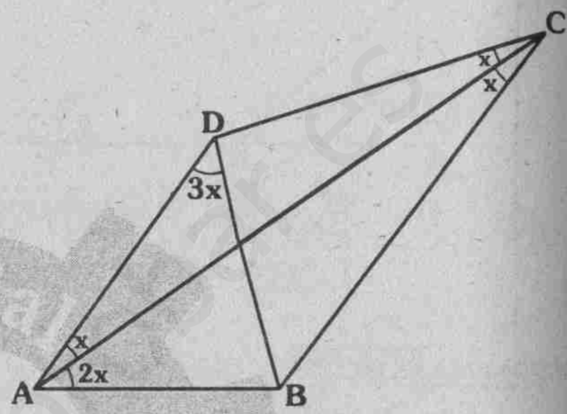


A) 15°   B) 10°   C) 20°

D) 9°   E) 12°

PROBLEMA Nº 255

Del gráfico, calcule x.

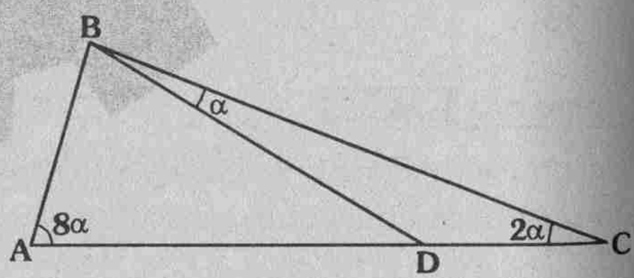


A) 9°   B) 12°   C) 10°

D) 15°   E) 20°

PROBLEMA Nº 256

Del gráfico, $AB = CD$, calcule α.



A) 20°   B) 10°   C) 15°

D) 12°   E) 18°

PROBLEMA Nº 257

En un triángulo ABC se traza las tres bases medias, obteniendo un nuevo triángulo, en este último se hace el mismo procedimiento y así sucesivamente se hace "n" veces el procedimiento, si

M es el perímetro de ABC y N el perímetro del último triángulo.

Indique: $\frac{N}{M}$.

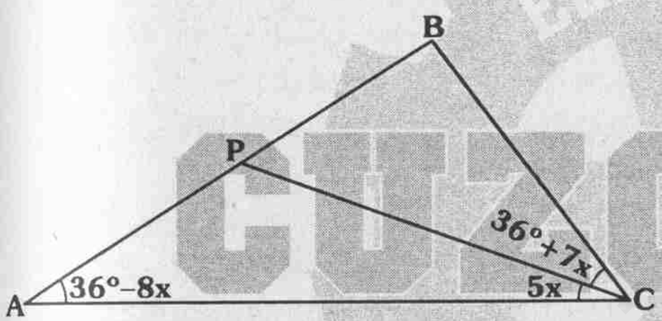
A) n B) n^n

C) n^2 D) 2^n

E) 2^{-n}

PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, AP=BC. Calcule x.

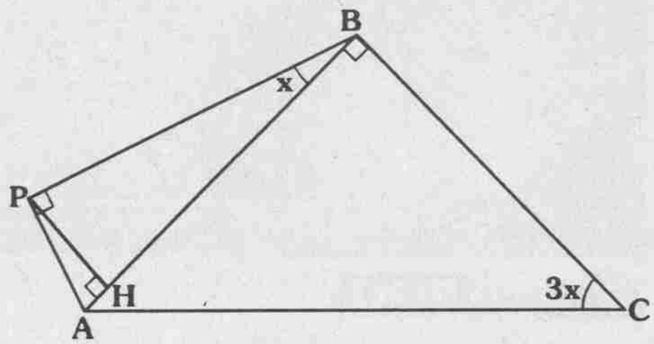


A) 1° B) 2° C) 3°
D) 4° E) 2,5°

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, $BC=4(PH)$.

Calcule x.

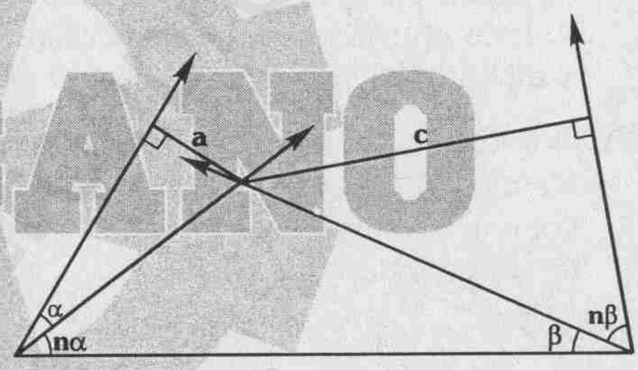


A) 10° B) 15° C) 18°

D) 16° E) 20°

PROBLEMA Nº 260

En el gráfico, n y $m \in \mathbb{N}$ indique la relación correcta $(n>1 \wedge m>1)$.



A) $c>nma$ B) $c<nma$

C) $a<nm$ D) $a<nmc$

E) $\frac{a}{n}=\frac{c}{m}$

Problemas Resueltos
Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos triángulos que tienen en común un ángulo interior de igual medida, su lado opuesto y el perímetro, son congruentes.

II. Dos triángulos que tienen en común un ángulo interior de igual medida, su lado opuesto y la mediana relativa a dicho lado, son congruentes.

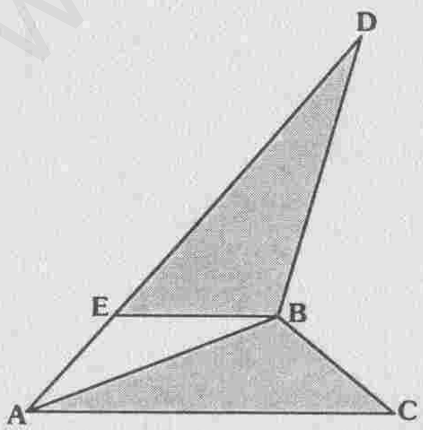
III. Dos triángulos tienen entre lados y ángulos internos, cinco elementos en común, entonces son necesariamente congruentes.

A) VFV B) FVF C) FFF
D) VFF E) VVV

PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $ED = AC$, calcule $\dfrac{AB}{BD}$.

A) 2
B) 1
C) 3
D) 5
E) 7



PROBLEMA Nº 263

En el triángulo ABC, se ubica M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que $AM = NM$, $AB = NC$ y $m\sphericalangle MBC = m\sphericalangle MCN = 40°$.

Calcule $m\sphericalangle NMB$.

A) 20° B) 10° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 264

En el triángulo ABC, se ubica Q en la región interior, tal que $AB = AC$; $AQ = QC$ y $m\sphericalangle ABQ + 2(m\sphericalangle QBC) = 90°$.

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 53° E) 90°

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica Q, tal que:

$$\frac{m\sphericalangle AQB}{4} = \frac{m\sphericalangle QBC}{3} = \frac{m\sphericalangle ABC}{2} = m\sphericalangle BCQ$$

Calcule $m\sphericalangle BCQ$.

A) 10° B) 9° C) 18°
D) 20° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 266

En el triángulo ABC se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$ y se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ corta a $\overline{BC}$ en P tal que:

$$m\measuredangle PCA = 15^\circ \quad y \quad \frac{AP}{BP} = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$$

Calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 30° B) 53°/2 C) 15°
D) 14° E) 18°

PROBLEMA Nº 267

En el triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{AM}$, tal que $m\measuredangle ACM = 60^\circ - 2(m\measuredangle MAC)$ y $AH = MC$.

Calcule $m\measuredangle BAM$.

A) 10° B) 15° C) 30°
D) 8° E) 20°

PROBLEMA Nº 268

En los lados AB, BC y AC del triángulo ABC se ubican los puntos D, E y H se ubican los puntos D, E y H, tal que $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA) = 2(m\measuredangle BDE)$, si $DB = 2(AH)$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 37°
D) 45° E) 33°

PROBLEMA Nº 269

Los lados de un triángulo miden 15, $n+7$ y $10+n$. Calcule la medida del ángulo opuesto al menor lado, sabiendo que "n" es el menor valor entero, con $n \neq \{0;1\}$.

A) 53° B) 16° C) 74°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA Nº 270

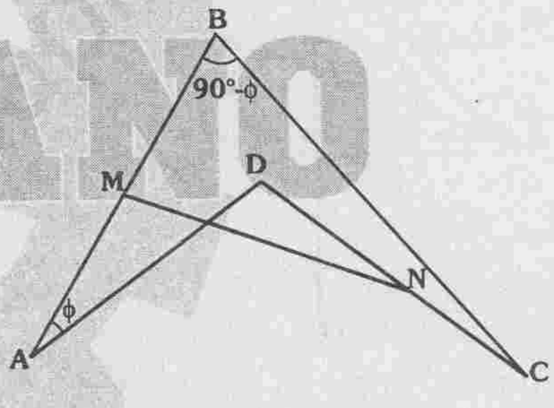
En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BD}$ tal que $AD = BC$ y $m\measuredangle ABD = 45^\circ$.

Calcule, $m\measuredangle BCD$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 37°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 271

En el gráfico, $AM = MB$, $CN = ND$, $BC = 16$ y $AD = 12$. Calcule MN.



A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 5

PROBLEMA Nº 272

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($m\measuredangle ABC > 90^\circ$), se traza la ceviana interior BM, tal que $m\measuredangle MBC = 90^\circ$, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica P y se traza $\overline{PS}$ y $\overline{PR}$ perpendiculares a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Si BM=2; PS=4 y PR=1.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 15° B) 22,5° C) 30°
D) 26,5° E) 18,5°

PROBLEMA Nº 273

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AD, tal que $DC = 2(BD)$, se prolonga $\overline{AD}$ hasta E tal que $AC = 2(BE)$ y $AD = 2\sqrt{3}$. Calcule ED.

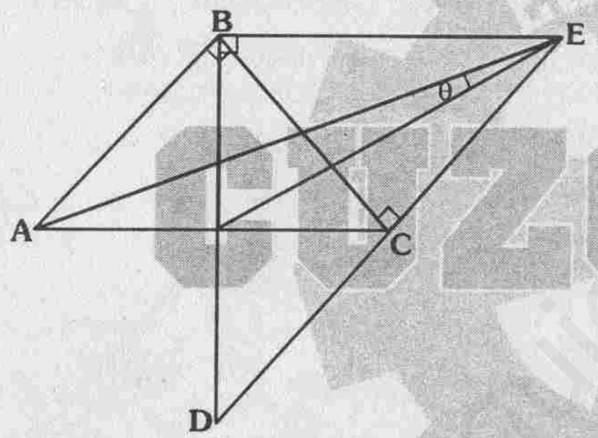
A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 274

En el gráfico, $AB = BC$ y $DC = CE$.

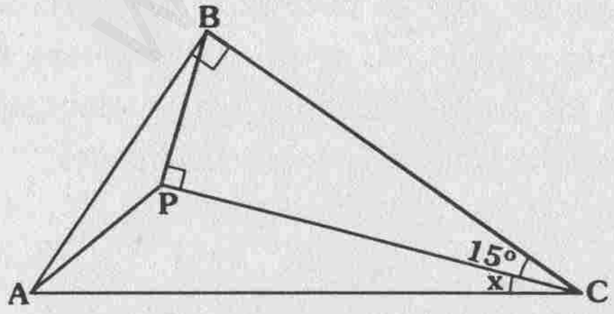
Calcule θ.



A) 8° B) 14° C) 16°
D) 37° E) 37°/2

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico, $AP = PB$, calcule x.

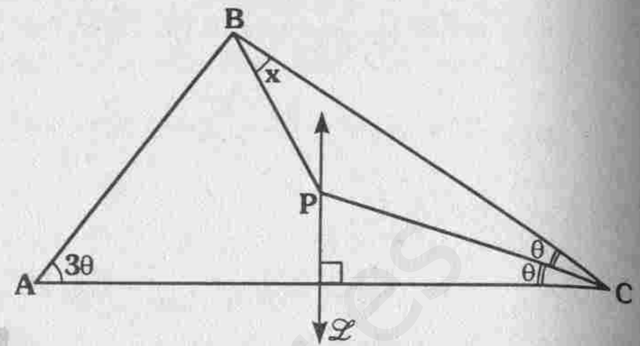


A) 3°30' B) 12°30' C) 7°30'

D) 11°30' E) 15°

PROBLEMA Nº 276

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $AB = PC$, calcule x.



A) 30° B) 26,5° C) 36°
D) 18,5° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 277

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $m\sphericalangle BAC = 32°$, $m\sphericalangle ACB = 23°$ y $m\sphericalangle ABP = 72°$.

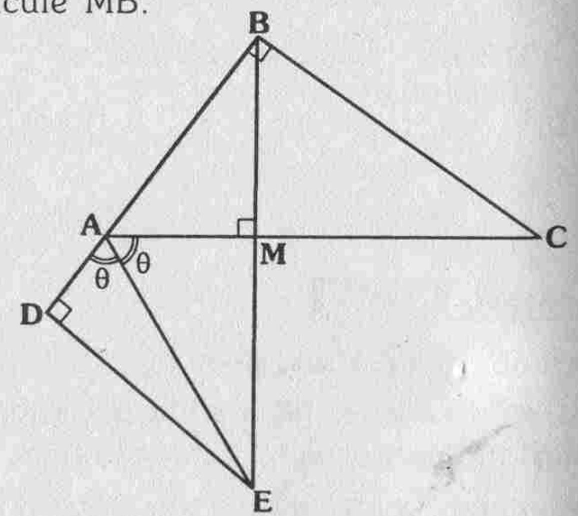
Calcule $\dfrac{PB}{BC}$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}/2$ C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3/2}$ E) 2/5

PROBLEMA Nº 278

En el gráfico, $AB + AM = 12$ y $EM = 5$, calcule MB.

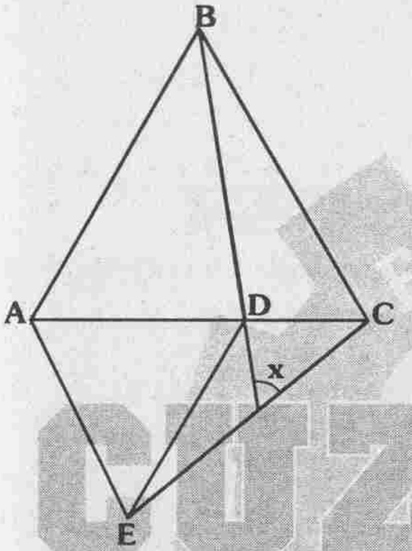


A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 279

Del gráfico los triángulos ABC y ADE son equiláteros.

Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 280

En un triángulo ABC se ubican los puntos M y N en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ respectivamente, si $AB = MC$, $AC = MN$; $\overline{AB} // \overline{MN}$, $m\measuredangle BNM = 35°$.

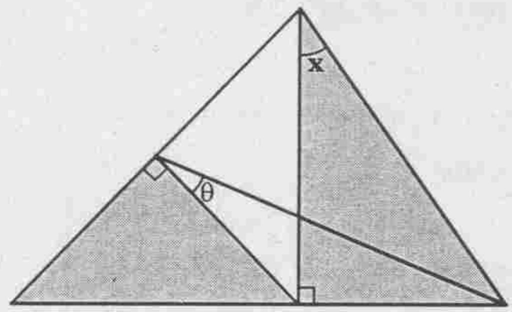
Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 35° B) 55° C) 70°
D) 45° E) 20°

PROBLEMA Nº 281

Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes.

Calcule x en función de θ.



A) θ B) $\theta + 30°$
C) 2θ D) $90° - \theta$
E) $90° - 2\theta$

PROBLEMA Nº 282

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $BD = AC$ $m\measuredangle BCA = 50°$ y $m\measuredangle CBD = 30°$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 80° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 283

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AP}$ tal que $AP = PC$, luego se ubica H en $\overline{AP}$ tal que :

$$m\measuredangle AHB = 90° ;\quad BH = 12$$

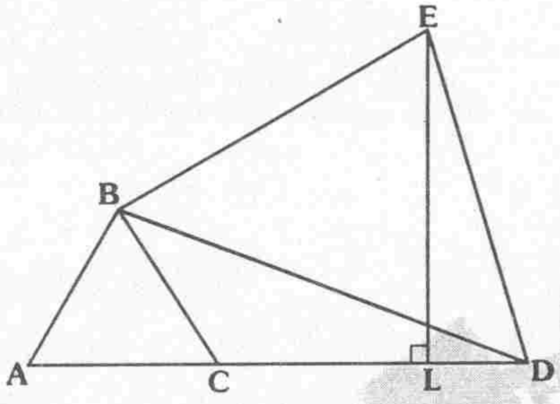
$$y \quad BP = 13$$

Calcule PC.

A) 25 B) 23
C) 20 D) 18
E) 16

PROBLEMA Nº 284

Del gráfico, los triángulos ABC y BED son equiláteros $AD=6$.
Calcule EL.



A) 3 B) $6\sqrt{3}$

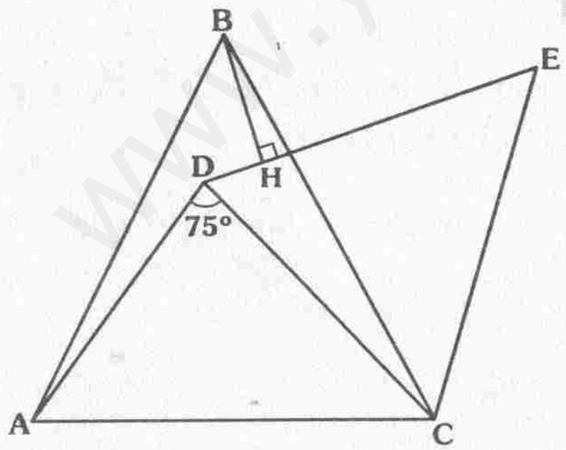
C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

E) 4

PROBLEMA Nº 285

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros; $AD=8$.

Calcule la distancia de H a $\overline{BE}$.



A) 8 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

PROBLEMA Nº 286

En la región interior de un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B se ubica el punto P, tal que:

$$6(PC)=3(PB)=2(PA)$$

Calcule $m\sphericalangle BPC$.

A) 30° B) 105° C) 120°
D) 135° E) 150°

PROBLEMA Nº 287

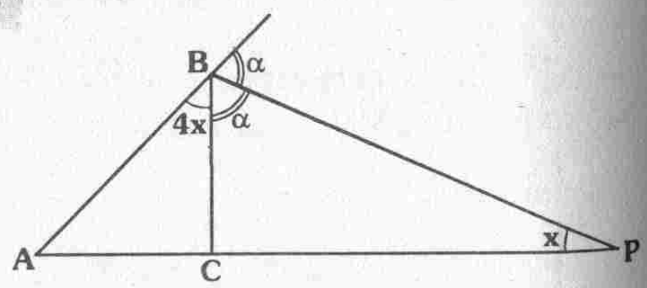
En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $m\sphericalangle BAD = 2(m\sphericalangle ABD)$ y $AB=DC$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 15° B) 45° C) 30°
D) 20° E) 60°

PROBLEMA Nº 288

Del gráfico, $CP=AB+BC$.
Calcule x.

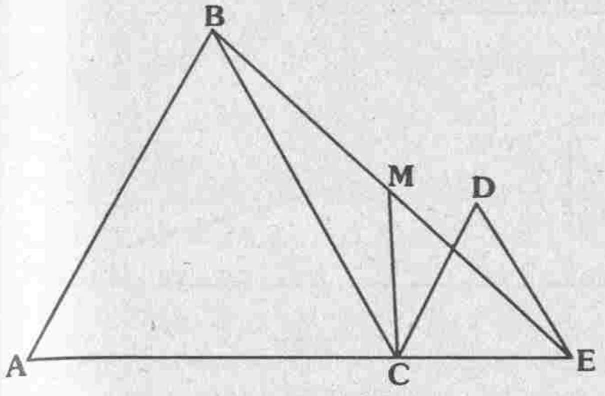


A) 10° B) 18° C) 9°
D) 15° E) 36°

PROBLEMA Nº 289

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros, $BM=ME$ y $BD=6$.

Calcule CM.

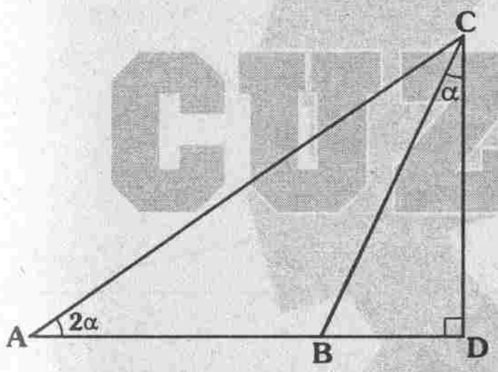


A) 4 B) 2 C) 3

D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 290

Del gráfico, AB = CD . Calcule α



A) 37° B) 30° C) 53°

D) 37°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 291

En el triángulo ABC , se ubica un punto interior P, tal que BC = AP , $m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle PAC = \dfrac{m\sphericalangle ABP}{5}$.

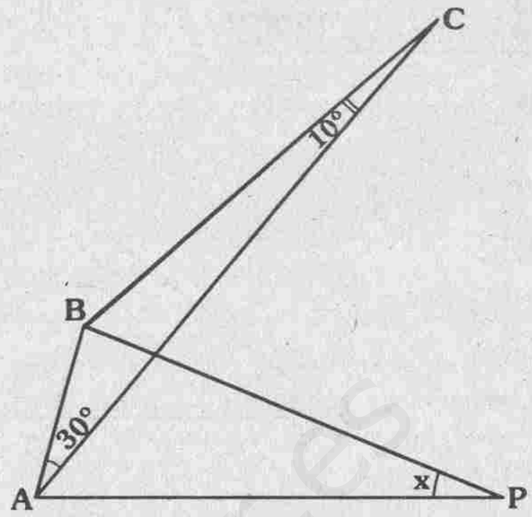
Calcule $m\sphericalangle BAP$.

A) 30° B) 20° C) 40°

D) 15° E) 50°

PROBLEMA Nº 292

Del gráfico, BC=AP=BP. Calcule x



A) 10°

B) 15°

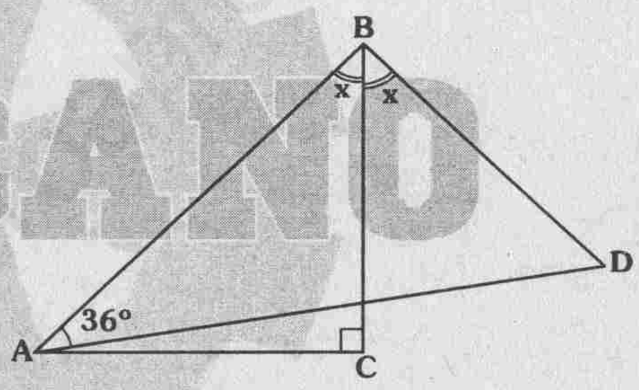
C) 30°

D) 12°

E) 20°

PROBLEMA Nº 293

Del gráfico, AD = 2(BC) . Calcule x.



A) 40° B) 42° C) 46°

D) 48° E) 36°

PROBLEMA Nº 294

En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos Q y P respectivamente tal que AQ = PC , las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en L (punto interior al triángulo ABC), si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle BCL)$.

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

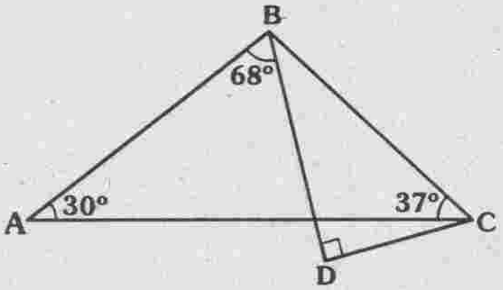
A) 30° B) 45° C) 53°

D) 60° E) 20°

PROBLEMA Nº 295

En el gráfico, $AB = 12\sqrt{2}$, calcule BD.

A) 8
B) 9
C) 10
D) $5\sqrt{2}$
E) $6\sqrt{2}$

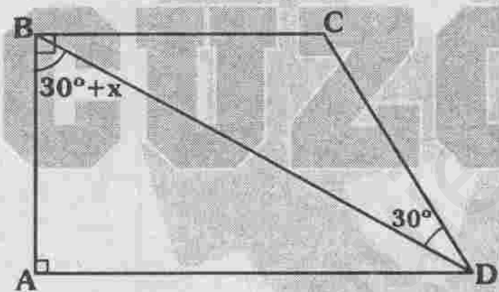


PROBLEMA Nº 296

En el gráfico, $3(BC) = 2(AD)$.

Calcule x.

A) 15°
B) 22°30'
C) 30°
D) 26°30'
E) 18°30'



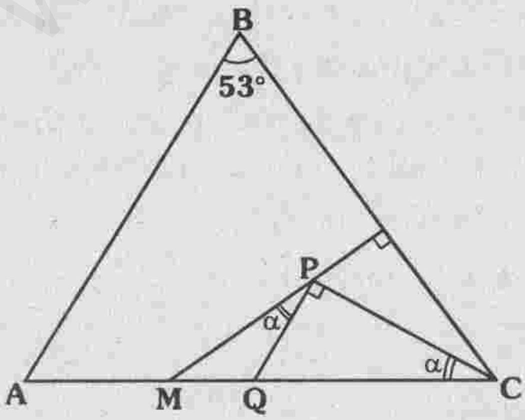
PROBLEMA Nº 297

En el gráfico, se tiene que:

$$AB = 10 \quad y \quad BC = QC = 6$$

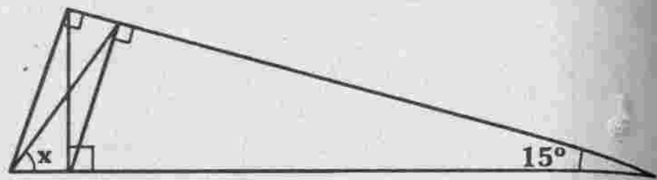
Calcule MP.

A) 2
B) 3
C) 6
D) 4
E) 5



PROBLEMA Nº 298

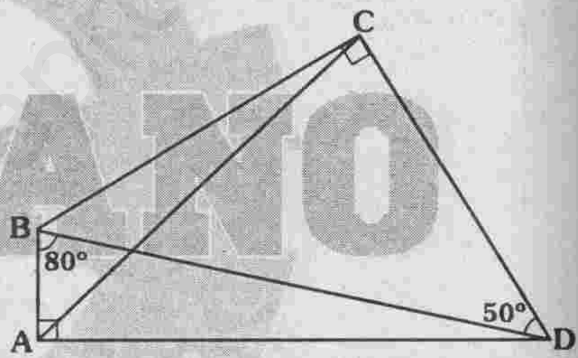
Del gráfico, calcule x.



A) 70° B) 69° C) 61°
D) 58° E) 53°

PROBLEMA Nº 299

Del gráfico, calcule $\dfrac{AC}{BD}$.

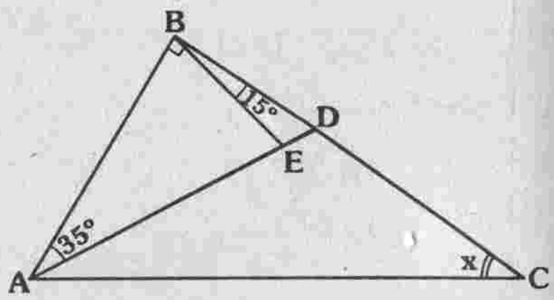


A) 1/2 B) 1/3 C) $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{3}/2$

PROBLEMA Nº 300

Del gráfico $DC = 2(BE)$.

Calcule x.



A) 275° B) 17,5° C) 22,5°
D) 16° E) 18°

Problemas Resueltos Olímpicos

Esta breve sección está dirigido a estudiantes que deseen afianzar aún más sus conocimientos de geometría, sobre congruencia de triángulos. Contiene diversos problemas de Olimpiadas Matemáticas y de algunos foros geométricos. Tomar en cuenta que además de los conocimientos básicos es importante una adecuada argumentación.

PROBLEMA Nº1

VIII olimpiada del cono sur 2007-exámen selectivo, Argentina

Dado un triángulo equilátero ABC, sea M punto del lado BC, con $M \neq B$ y $M \neq C$. Se considera el punto N tal que el triángulo BMN sea equilátero y A y N estén en distintos semiplanos respecto de $\overline{BC}$. Sean P, Q y R puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ respectivamente. Demostrar que el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMA Nº2

38° international mathematical Olympiad (Mar de Plata-Argentina)/ 35° imo(1994)

Se tiene el triángulo isósceles $(AB = BC)$, en la prolongación de la altura BH se toma el punto M tal que $\overline{MC} \perp \overline{BC}$, en $\overline{BC}$ se toma E y en la prolongación de $\overline{BA}$ el punto F, tal que $\overline{EF}$ interseca a $\overline{AC}$ en N. Demostrar que $\overline{MN} \perp \overline{EF}$ si y sólo si $EN = NF$.

PROBLEMA Nº3

(6° th Russian 1998 problems)

En el triángulo ABC, M es el punto medio de $\overline{CA}$ y $\overline{BL}$ es la bisectriz angular de B, la línea paralela a $\overline{BC}$ por L encuentra a $\overline{BM}$ en E y la línea a través de M paralela a $\overline{BA}$ encuentra a $\overline{BL}$ en D, demostrar que $\overline{ED}$ es perpendicular a $\overline{BL}$.

PROBLEMA Nº4

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Demostrar que el ángulo BCA mide 60° si y solo si $AE + BD = AB$.

PROBLEMA Nº5

Se tiene el triángulo equilátero ABC, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $\overline{PQ} // \overline{AC}$, M es punto medio de $\overline{AQ}$ y O es centro del triángulo PBQ.

Demostrar que $m\sphericalangle OMC = 90°$.

PROBLEMA Nº6

Se tiene el triángulo ABC de circuncentro O, se ubica, M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MON$.

Demuestre que AC es menor o igual que el perímetro del triángulo MBN.

PROBLEMA N°7

En el cuadrilátero convexo ABCD, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros AMB, BNC y CSD. Si P, Q y R son puntos medios de $\overline{MN}$, $\overline{NS}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Demuestre que el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMA N°8

P es un punto interior del triángulo ABC, tal que $m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle PBC$; las perpendiculares de P, trazadas a $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ cortan a estos en L y M respectivamente. Demuestre que $DL = DM$, cuando D es punto medio de $\overline{AB}$.

PROBLEMA N°9

Canadá 1998

En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle BAC = 40°$ y $m\sphericalangle ABC = 60°$, X es un punto en el interior del triángulo tal que $m\sphericalangle XBA = 20°$ y $m\sphericalangle XCA = 10°$. Demuestre que $\overline{AX}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

PROBLEMA N°10

En un triángulo ABC, la mediana BB' y la altura CF son congruentes y $m\sphericalangle CBB' = m\sphericalangle FCB$. Demuestre que el triángulo ABC es equilátero.

PROBLEMA N°11

Olimpiada de mayo 2008

Se tiene el rectángulo ABCD, se ubica P en $\overline{BC}$ tal que $m\sphericalangle APD = 90°$. En los triángulos ABP y PDC se trazan las alturas $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ respectivamente. Probar que el centro del rectángulo está en $\overline{QR}$.

PROBLEMA N°12

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP y la mediana CQ, tal que $m\sphericalangle BQC = m\sphericalangle PBQ$ y $AP = 2(PC)$. Demuestre que $m\sphericalangle ABC = 90°$

PROBLEMA N°13

Sea el triángulo equilátero ABC, ubiquemos P un punto en la región interior, desde el cual se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{PR} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PS} \perp \overline{AC}$, con $Q \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$ y $S \in \overline{AC}$, indique la región en la cual PQ, PR y PS son las longitudes de los lados de un triángulo.

PROBLEMA N°14

XLIX Olimpiada Nacional de Matemáticas (tercera ronda-Bulgaria 2000)

Dado el cuadrilátero convexo ABCD, tal que $m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle CDA$, la bisectriz del ángulo ABC interseca al segmento CD en E, probar que $m\sphericalangle AEB = 90°$ si y solo sí $AB = AD + BC$.

PROBLEMA N°15

En el triángulo ABC se ubica D en $\overline{AC}$ tal que AC=BD y

$$\frac{m\sphericalangle BAC}{3} = \frac{m\sphericalangle DBC}{2} = \frac{m\sphericalangle ACB}{4}$$

Halle $m\sphericalangle BAC$.

SOLUCIONARIO

Ciclos

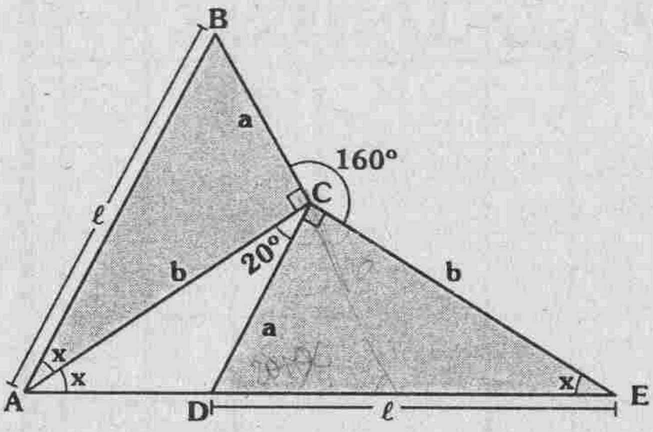
- **ANUAL**
- **CEPRE-UNI**
- **SEMESTRAL**
- **SEMESTRAL INTENSIVO**
- **REPASO**
- **OLIMPIADAS**

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Solucionario

Ciclo Anual

RESOLUCIÓN Nº 1



- Nos piden **x**.
- Dato: ⊿ ACE ≅ ⊿ECD
- Lo primero que debemos hacer es reconocer que lados tienen igual longitud (no dejarse llevar por el gráfico, sino por razonamientos lógicos).
- Sea: AC = b y BC = a
- Para $\overline{CD}$ (cateto), sólo hay dos posibilidades, que mida "a" o "b".
- Si CD = b , habría contradicción pues:

$$m\sphericalangle ADC > 90°$$

- Luego:

$$CD = a \quad y \quad CE = b$$

- Como:

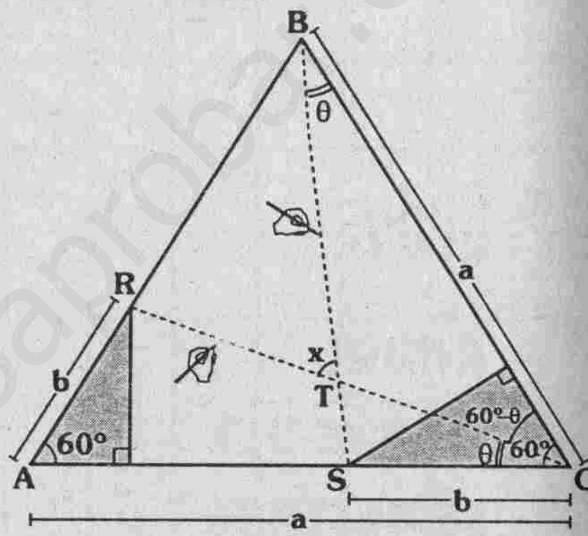
$$⊿ ACB \cong ⊿ ECD \Rightarrow m\sphericalangle CED = x$$

- Δ ACE: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle CAD = x$
- Δ ACE: $x + x + 110° = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 35°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 2



- Nos piden x.
- Como los triángulos rectángulos son congruentes, aprovechamos que las hipotenusas tienen igual longitud, AR=SC.
- ΔABC : equilátero, luego notamos:
- $\Delta RAC \cong \Delta SCB$ (LAL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle ACR = m\sphericalangle CBS = \theta$$

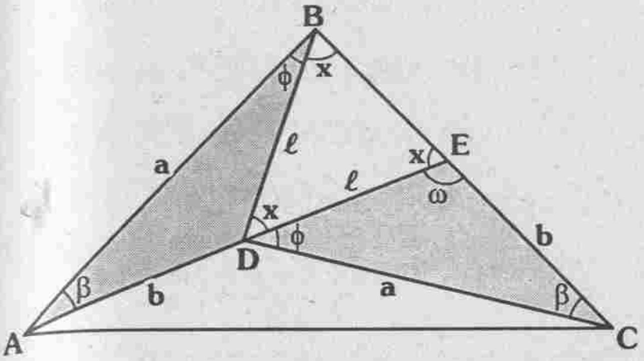
- También: $m\sphericalangle BCT = 60° - \theta$
- En ΔTCB :

$$x = \theta + 60° - \theta$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 3



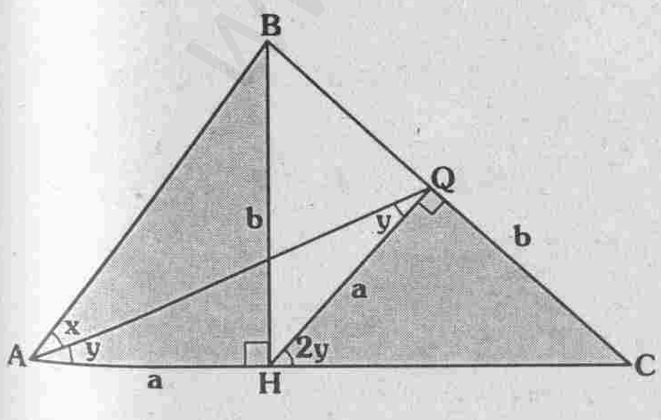
- Se nos pide **x**.
- Por dato: $\Delta ABD \cong \Delta CDE$
- Primero hay que reconocer que lados y ángulos se repiten en ambos triángulos.
- Sea $m\sphericalangle BAD = \beta$, se observa $x > \beta$
- En ΔDEC : $\omega > x \Rightarrow \omega \neq \beta$

  $\Rightarrow m\sphericalangle DCE = \beta$
- Como: $\beta + \phi = x \Rightarrow m\sphericalangle DEB = x$
- Por la congruencia: $DB = DE$
- Luego: ΔDEB es equilátero.

$$\therefore \ \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 4



- Piden: **x/y**.
- Tenemos: $\triangle AHB \cong \triangle HQC$
- Sea $AH = a$ y $BH = b$, en

  $\triangle BHQ$: $b > HQ \Rightarrow HQ = a$
- Luego: ΔAHQ : isósceles

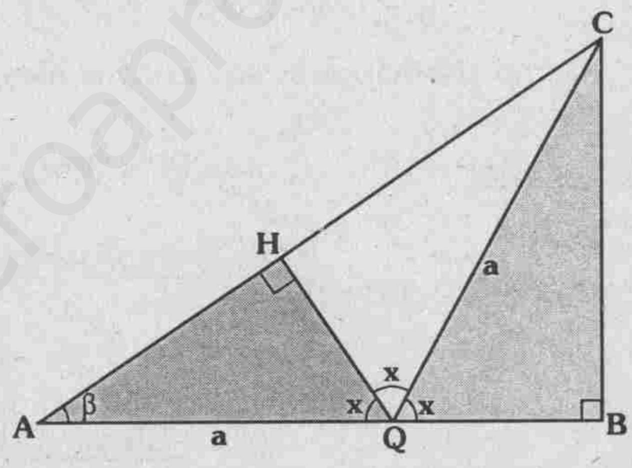
  $\Rightarrow m\sphericalangle QHC = 2y$
- Por la congruencia:

  $2y = x + y \Rightarrow x = y$

$$\therefore \ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 5



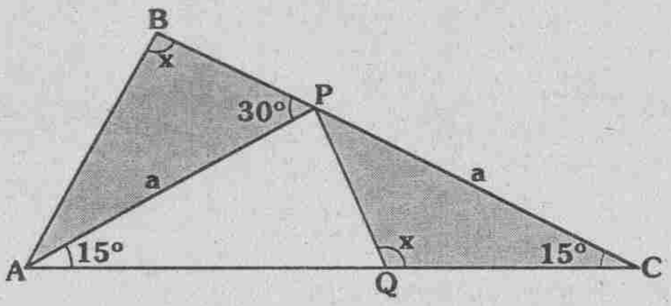
- Piden **x**
- Dato: $\triangle AHQ \cong \triangle CBQ$
- Reconocemos rápidamente $AQ = QC$.
- Es decir ΔAQC es isósceles, entonces:

  $AH = HC$ y $m\sphericalangle AQH = m\sphericalangle HQC$
- Como: $m\sphericalangle CQB > \beta \Rightarrow m\sphericalangle CQB = x$
- En Q : $x + x + x = 180^\circ$

$$\therefore \ \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 6



- Piden **x**.
- Dato: $\Delta ABP \cong \Delta PQC$

$\Rightarrow AP = PC$, es decir ΔAPC es isósceles.

- En ΔAPC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BPA = 30°$$

- Como los triángulos son congruentes, entonces:

$$m\sphericalangle BAP = 15° \quad y \quad m\sphericalangle QPC = 30°$$

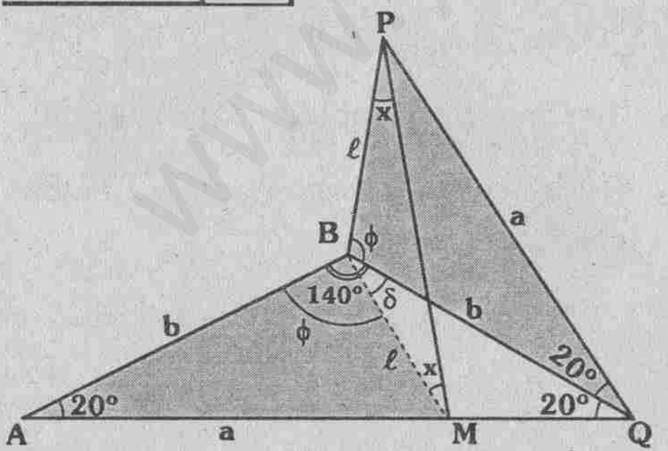
- Luego:

$$x + 30° + 15° = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 135°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 7



- Piden **x**.
- Al completar "ángulos", nos damos cuenta que el, ΔABQ es isósceles.
- Se traza $\overline{BM}$, pues:

$\Delta BAM \cong \Delta BQP$ (LAL)

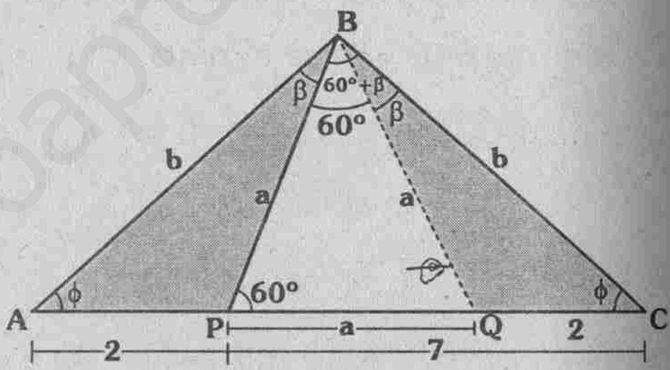
$\Rightarrow$ BM=MP, luego el ΔMBP es isósceles

- También: $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle PBQ = \phi$
- Como: $\phi + \delta = 140°$
- ΔMBP: $x + x + \underbrace{\phi + \delta}_{140°} = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 20°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 8



- Se nos pide: **a**.
- Del gráfico, tenemos que el ΔABC es isósceles, entonces AB=BC.
- Se traza $\overline{BQ}$ tal que $m\sphericalangle QBC = \beta$
- Luego: $m\sphericalangle PBQ = 60°$
- Como: $\phi + \beta = 60° \Rightarrow \Delta PBQ$ es equilátero

$$\Delta ABQ \cong \Delta QBC \ \Rightarrow \ QC = 2$$

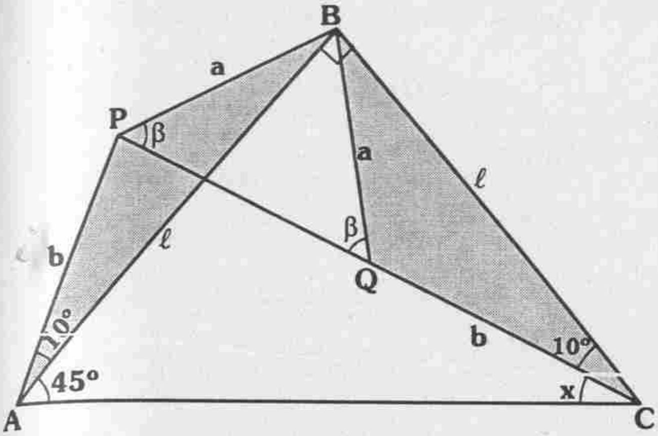
Finalmente:

$$a + 2 = 7$$

$$\therefore \ \mathbf{a = 5}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 9



- Se nos pide **x**.
- Nos damos cuenta rápidamente:

  ΔPBQ y ΔABC son isósceles

  $\Rightarrow PB = BQ$ y $AB = BC$

  $\Delta APB \cong \Delta CBQ$ (LLL)

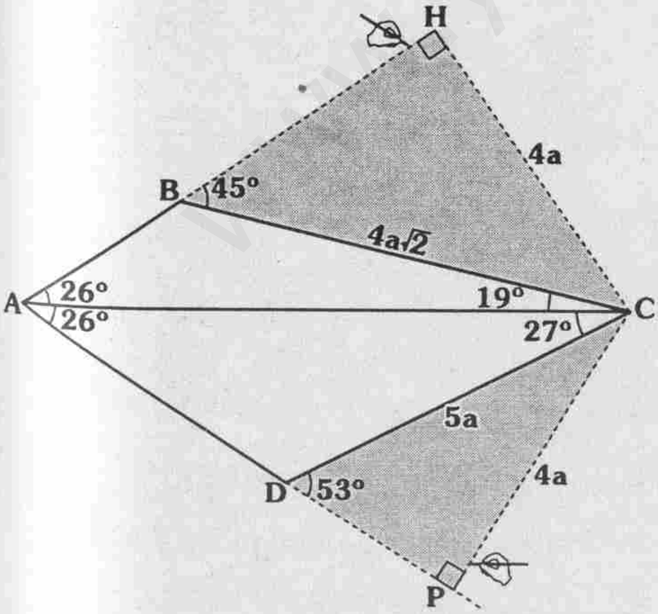
  $\Rightarrow m\measuredangle BCQ = 10°$

- Finalmente: $x + 10° = 45°$

  $\therefore \mathbf{x = 35°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 10



- Piden: $\dfrac{BC}{DC}$
- Como: $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz del $\measuredangle BAD$, se traza $\overline{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overline{CP} \perp \overrightarrow{AD}$.
- También notamos:

  $m\measuredangle CBH = 45°$ y $m\measuredangle CDP = 53°$

  ambos son notables.

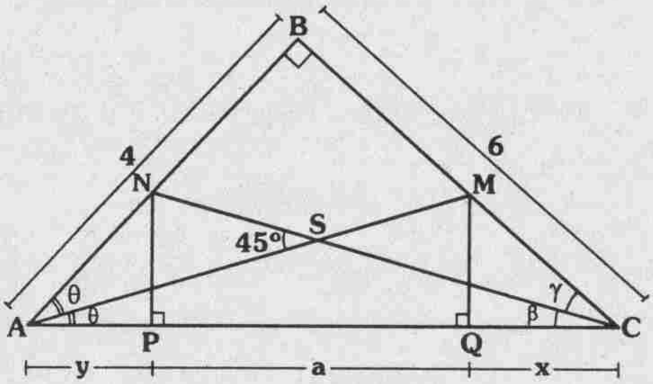
- ⊿DPC: sea $CP = 4a \Rightarrow BC = 5a$
- Por T. de la bisectriz: $CP = CH = 4a$
- ⊿BHC, como $CH = 4a \Rightarrow BC = 4a\sqrt{2}$

  $$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{4a\sqrt{2}}{5a}$$

  $$\therefore \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{DC}} = \frac{\mathbf{4\sqrt{2}}}{\mathbf{5}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 11



- Nos piden: $x - y$
- En ΔASC: $\theta + \beta = 45°$
- En ⊿ABC: $2\theta + \beta + \gamma = 90°$

  $\Rightarrow \beta = \gamma$

- Es decir $\overrightarrow{CN}$ es bisectriz del $\measuredangle ACB$
- Por teorema de la bisectriz:

$CP = CB \Rightarrow x + a = 6 \quad \ldots \text{(I)}$

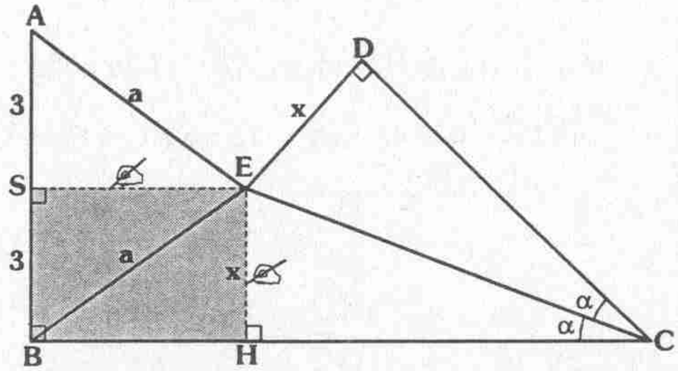
$AQ = AB \Rightarrow y + a = 4 \quad \ldots \text{(II)}$

- Restando (I) y (II):

$$\mathbf{x - y = 2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 12



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{EH} \perp \overline{BC}$, por teorema de la bisectriz:

$$EH = ED = x$$

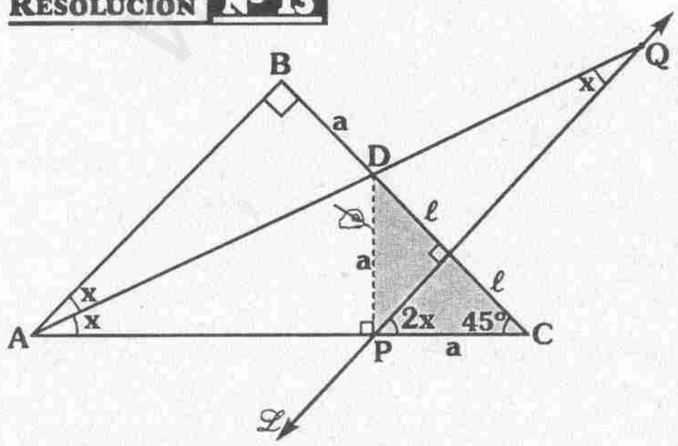
- $\triangle AEB$: isósceles, $\overline{ES}$ es altura y mediana.

$$\Rightarrow AS = SB = 3$$

$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 13



- Nos piden **x**.
- Como $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de:

$$\overline{CD} \Rightarrow PD = PC$$

- También:

  $*\ \overrightarrow{\mathscr{L}} \,//\, \overline{AB} \Rightarrow m\sphericalangle BAD = x$

  $*\ \overline{AD}$ es bisectriz del $\sphericalangle BAC$

  $\Rightarrow m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DAC = x$

- Por recíproco del teorema de la bisectriz.
- Como $DB = DP$ y $m\sphericalangle DBA = 90°$

  $\Rightarrow m\sphericalangle DPA = 90°$

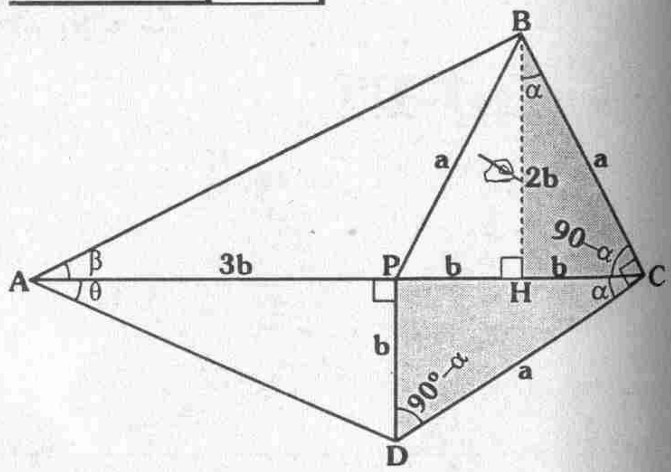
- $⊿DPC$: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle PCD = 45°$

  $\Rightarrow 2x = 45°$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 14



- Piden: $m\sphericalangle BAD$
- De los datos:

$$PC = 2b \text{ y } AP = 3b$$

- Hallemos lo que nos piden por partes:

$$m\sphericalangle BAD = \beta + \theta$$

- Para ello en el ΔPBC , que es isósceles tracemos la altura BH, con ello tendremos: $PH = PC = b$
- También:

$$⊿PDC \cong ⊿HCB \text{ (ALA)} \Rightarrow \begin{array}{l} PD = b \\ BH = 2b \end{array}$$

- $⊿APD$: $AP = 3b$ y $PD = b$

$$\Rightarrow \theta = \frac{37^\circ}{2}$$

- $⊿AHB$: $AH = 4b$ y $BH = 2b$

Es decir: $AH = 2(BH)$

$$\Rightarrow \beta = \frac{53^\circ}{2}$$

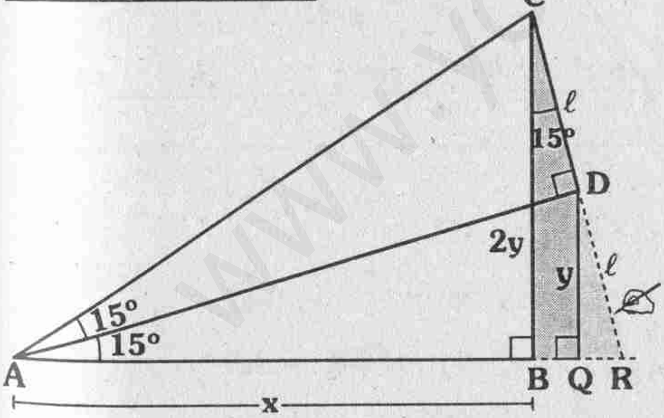
- Finalmente:

$$m\measuredangle BAD = \frac{53^\circ}{2} + \frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore \mathbf{m\measuredangle BAD = 45^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 15



- Nos piden: $\dfrac{x}{y}$
- Primero al "completar ángulos", nos damos cuenta:

$$m\measuredangle CAD = m\measuredangle DAB = 15^\circ$$

- Nos conviene prolongar $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$, pues el ΔACR será isósceles, luego:

$$CD = DR$$

- $⊿CBR$, por base media:

$$CB = 2y$$

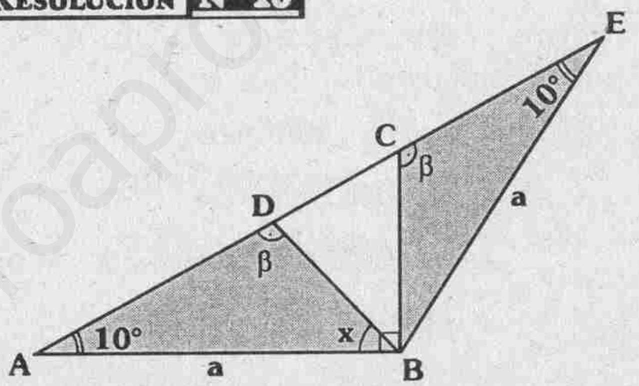
- $⊿ABR$: notable de 30° y 60°:

$$\Rightarrow \quad x = 2y\sqrt{3}$$

$$\therefore \mathbf{\frac{x}{y} = 2\sqrt{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 16



- Nos piden x.
- Tenemos por dato:

$$\Delta ABD \cong \Delta EBC$$

- Reconozcamos "lados y ángulos" iguales en ambos triángulos.
- Del gráfico: $m\measuredangle BCE > 90^\circ$
- Como los ángulos DAB y ABD son agudos, entonces:

$$m\measuredangle ADB = m\measuredangle BCD = \beta$$

$$\Rightarrow AB = BE$$

- ΔABE : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DAB = 10^\circ$
- $⊿ABC$: Por ángulo exterior:

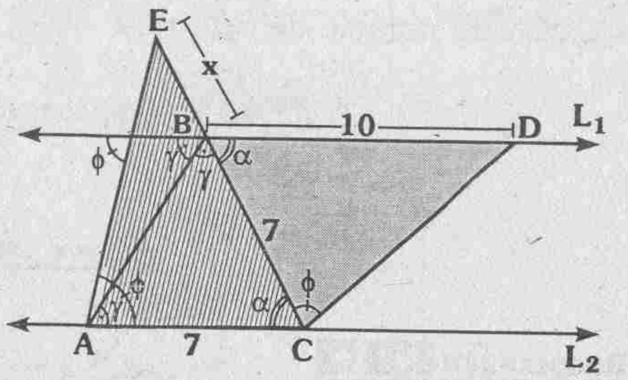
$$\beta = 90^\circ + 10 = 100^\circ$$

- En ΔADB : $x + 10° + \beta = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 70°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 17



- Piden: **x**
- Como $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, entonces:
  - $m\measuredangle BAC = \gamma$
  - $m\measuredangle ACB = m\measuredangle CBD = \alpha$
  - $m\measuredangle EAC = \phi$
- Con ello ΔABC es isósceles:

$$AC = BC = 7$$

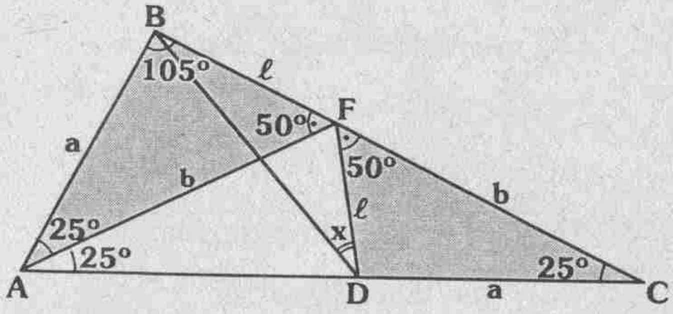
$$\Rightarrow \Delta EAC \cong \Delta DCB \ \ (LAL)$$

$$\Rightarrow \ x + 7 = 10$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 3}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 18



- Piden **x**.
- Completando ángulos, tendremos:

$$m\measuredangle FAD = m\measuredangle ACE = 25°$$

$$\Rightarrow \Delta AFC \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow \Delta BAF \cong \Delta DCF \ (LAL)$$

$$\Rightarrow BF = FD \quad y \quad m\measuredangle DFC = 50°$$

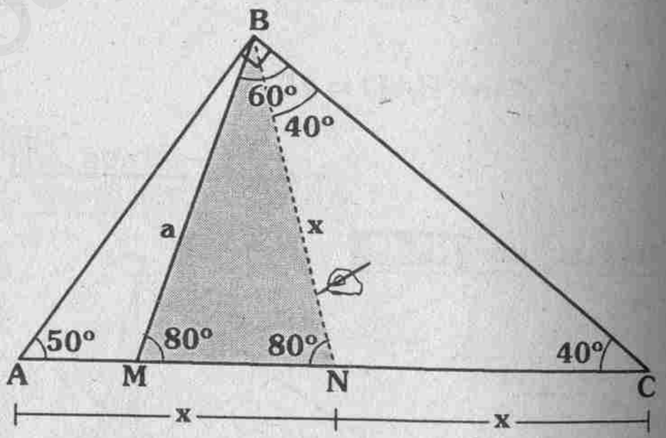
- En ΔBDF , por ángulo exterior:

$$x + x = 50°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 25°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 19



- Piden: AC
- De los datos, tenemos:

$$m\measuredangle BMC = 80°$$

- En el $\triangle ABC$ se traza la mediana BN, por teorema:

$$AN = NC = BN = x$$

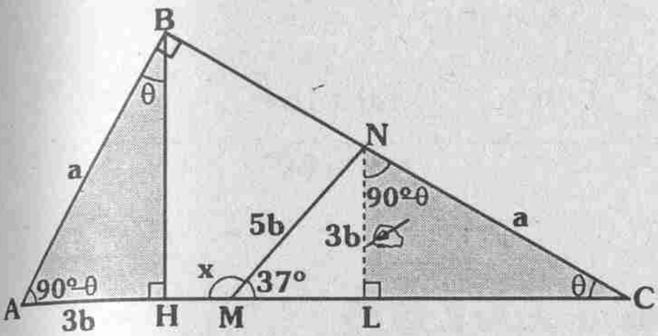
- ΔBNC : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle BNM = 80°$
- ΔMBN : $x = a$

$\Rightarrow AC = 2x$

$\therefore$ **$AC = 2a$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 20



- Nos piden **x**.
- De los datos:

  AH=3b y MN=5b
- Como:

  AB=NC y $m\measuredangle ABH = m\measuredangle NCA$
- Trazamos:

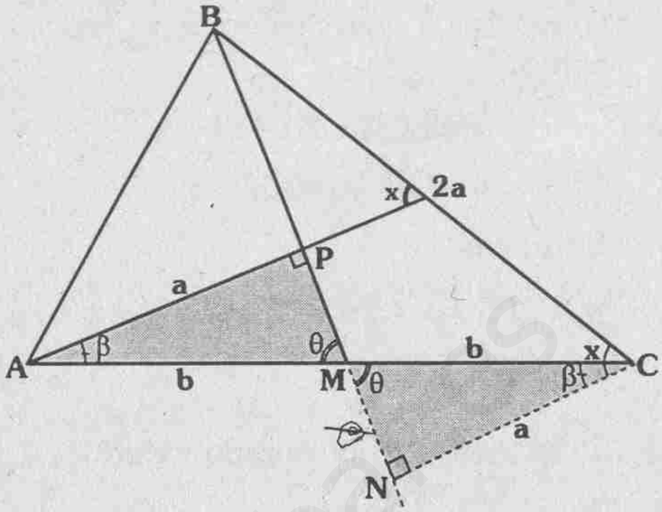
  $\overline{NL} \perp \overline{AC}$
- $\triangle$ AHB ≅ $\triangle$ NLC (LAL)

  $\Rightarrow NL = 3b$
- $\triangle$MLN notable de 37°.

  $\therefore$ **x = 143°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 21



- Piden **x**.
- Para ubicar un triángulo rectángulo donde "x" sea la medida de un ángulo interior, se prolonga $\overline{BM}$ y se traza $\overline{CN} \perp \overline{BM}$, entonces:

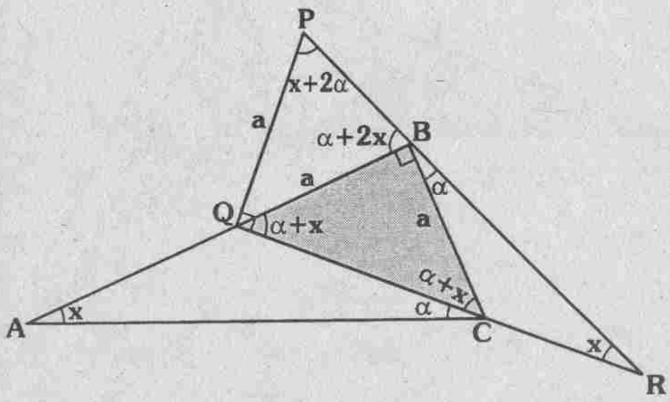
  $\triangle$ APM ≅ $\triangle$CNM (LAL)

  $\Rightarrow AP = NC = a$
- Como $\overline{AP} // \overline{NC} \Rightarrow m\measuredangle NCB = x$
- En $\triangle$BNC: BC = 2(NC)

  $\therefore$ **x = 60°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 22



- Nos piden **x**.

- Tenemos como dato que los triángulos ABC y PQR son congruentes, ahora reconozcamos que elementos se repiten como:

$$m\sphericalangle BCA = 2\alpha + x \quad y$$
$$m\sphericalangle QRC = x$$

- Entonces:

$m\sphericalangle QPR = x + 2\alpha$; $m\sphericalangle BAC = x$; y $PQ = BC$

- En el ΔAQC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BQC = \alpha + x$$

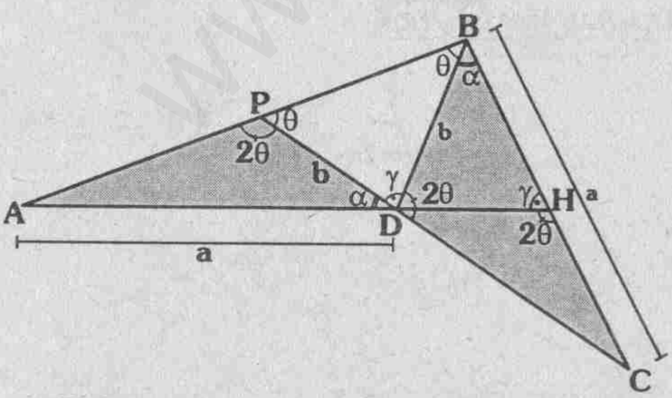
- $⊿BQC$: isósceles $\Rightarrow \alpha + x = 45°$
- También:

ΔPQB: isósceles

$$2\alpha + x = \alpha + 2x \Rightarrow x = \alpha$$
$$\Rightarrow x + x = 45°$$
$$\therefore \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 23



- Piden θ
- ΔPDB: isósceles $\Rightarrow PD = DB$
- Por ángulo exterior en ΔPDB:

$$m\sphericalangle BDC = 2\theta$$

- Luego:

$$m\sphericalangle PDB = m\sphericalangle DHB = \gamma$$
$$\Rightarrow m\sphericalangle PDA = m\sphericalangle DBC = \alpha$$

- $\Delta ADP \cong \Delta CBD$ (LAL)

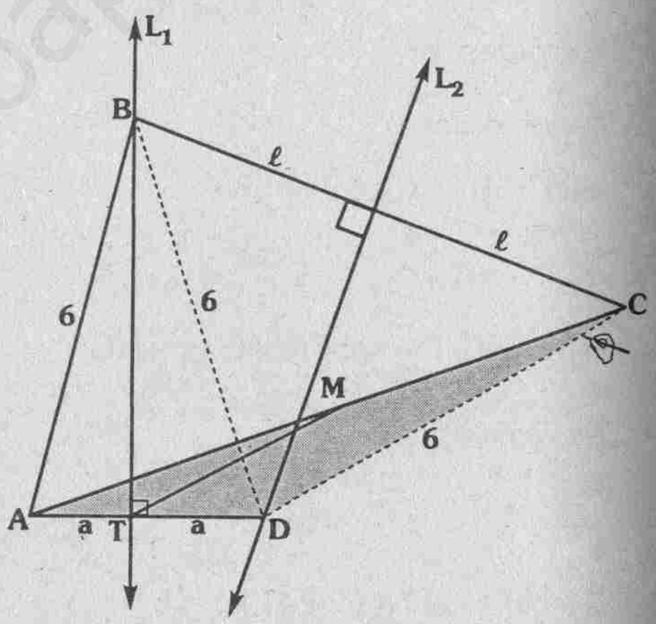
$$\Rightarrow m\sphericalangle APD = 2\theta$$

- En P: $2\theta + \theta = 180°$

$$\therefore \mathbf{\theta = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 24



- Piden: TM
- Por teorema de la mediatriz:

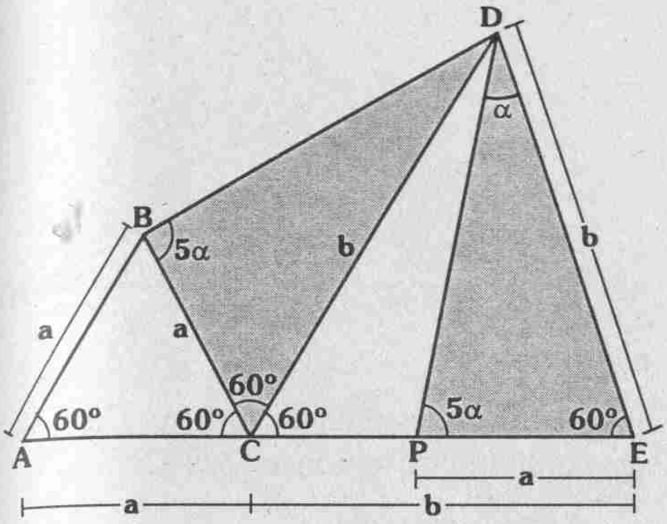
$$AB = BD = DC = 6$$

- Como AM=MC y AT=TD, en el ΔACD, $\overline{TM}$ es base media.

$$\therefore \mathbf{TM = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 25



- Piden α.
- Al completar las medidas angulares y lados de los triángulos equiláteros notamos:

$$\Delta BCD \cong \Delta PED \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle DPE = 5\alpha$$

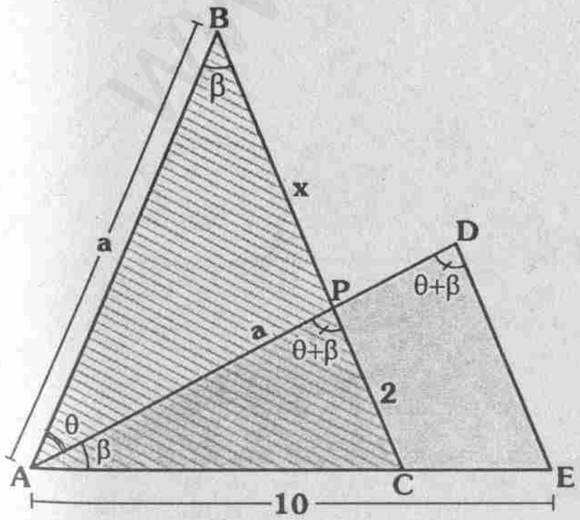
- En ΔPDE:

$$\alpha + 5\alpha + 60° = 180°$$

$$\therefore \ \alpha = 20°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 26



- Piden **x**.
- Completemos medidas angulares de la siguiente forma:

Sea: $m\measuredangle BAP = \theta$

$$\Rightarrow m\measuredangle APC = \theta + \beta$$

- Como $\overline{PC} \,//\, \overline{DE} \ \Rightarrow \ m\measuredangle ADE = \theta + \beta$

$$\Delta BAC \cong \Delta ADE \text{ (LAL)}$$

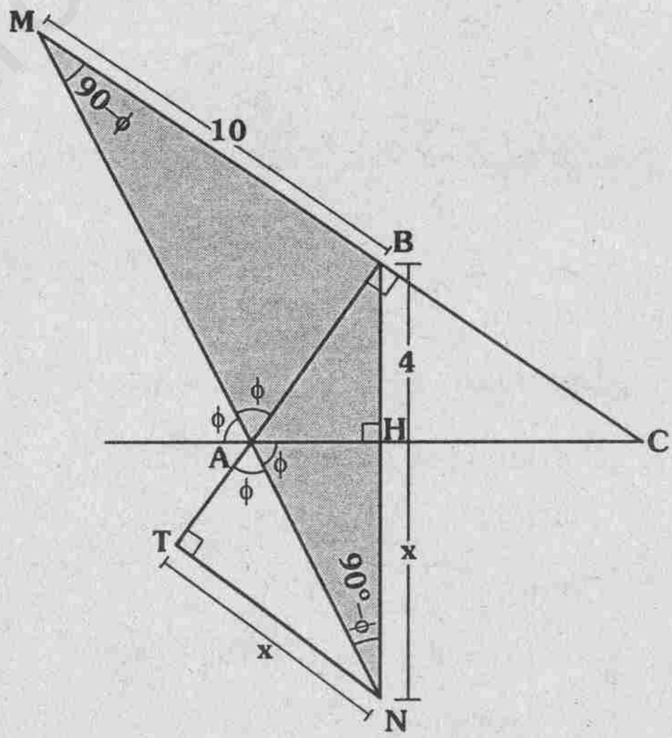
$$\Rightarrow BC = AE$$

$$x + 2 = 10$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 27



- Piden **x**.
- Por teorema de la bisectriz:

$$NT = NH = x$$

- En $\triangle$AHN y $\triangle$ABM:

$$m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle ANH = 90° - \phi$$

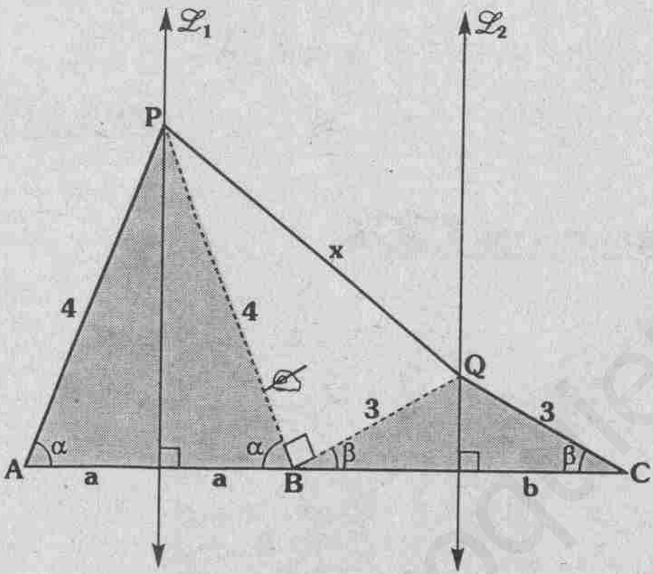
- ΔMNB : isósceles

$$\Rightarrow x + 4 = 10$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 28



- Piden **x**.
- Del dato: AP=4 y QC=3.
- Por teorema de la mediatriz:

$$AP = PB = 4 \quad y \quad BQ = QC = 3$$

- Como:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow m\sphericalangle PBQ = 90°$$

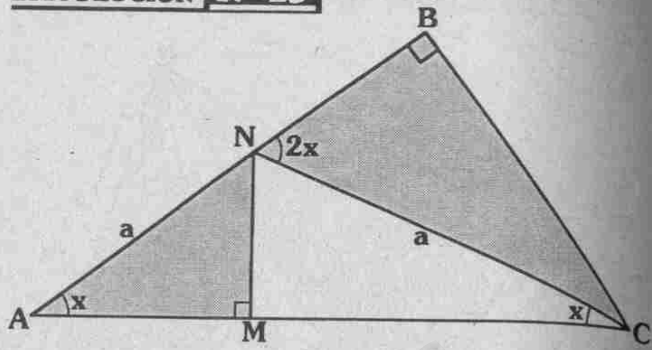
- En $\triangle$PBQ:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 29



- Piden **x**.
- Como los triángulos AMN y CBN son congruentes, entonces AN=NC.
- ΔANC : isósceles
- Por ángulo exterior en el ΔANC :

$$m\sphericalangle CNB = 2x$$

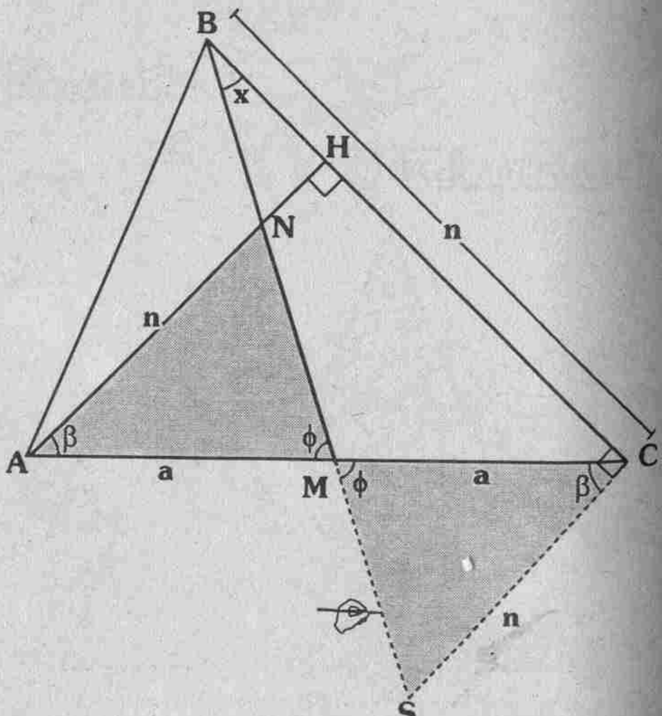
- Por la congruencia como los "ángulos" deben ser respectivamente iguales:

$$m\sphericalangle ANM = 2x \Rightarrow x + 2x = 90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 30



- Piden: **x**.
- Prolongamos $\overline{BM}$ y trazamos $\overline{CS} // \overline{AN}$ pues tendremos:

$\triangle NAM \cong \triangle SCM$ (ALA)

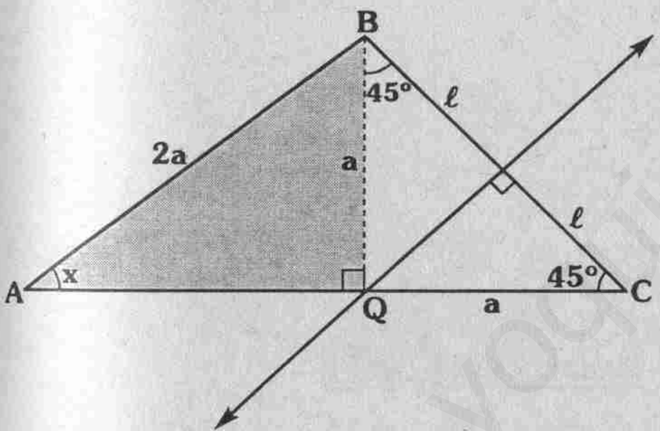
$\Rightarrow CS = n$ y $m\measuredangle BCS = 90°$

- En ⊿BCS: BC=CS

$\therefore$ **x = 45°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 31



- Piden **x.**
- Por teorema de la mediatriz:

$QC = QB$

$m\measuredangle QBC = 45°$

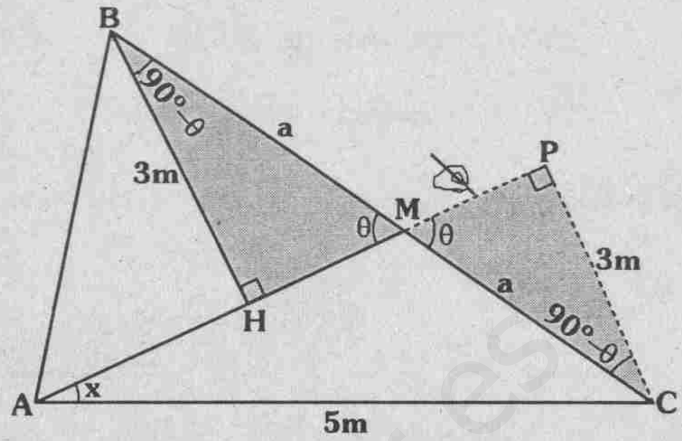
$\Rightarrow m\measuredangle BQC = 90°$

- ⊿AQB: notable, pues AB=2(BQ)

$\therefore$ **x = 30°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 32



- Piden **x**.
- Como MB=MC, se prolonga $\overline{AM}$ y se traza $\overline{CP} \perp \overline{AM}$

$\Rightarrow$ ⊿BHM ≅ ⊿CPM (LAL)

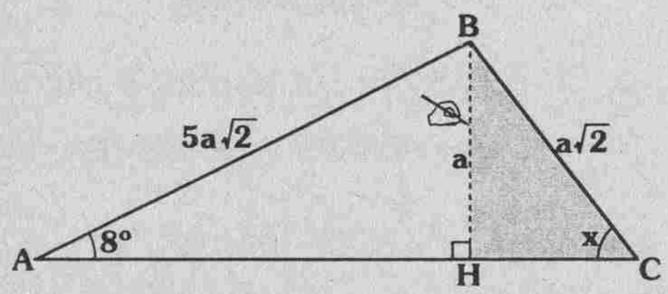
$\Rightarrow PC = BH = 3m$

- En ⊿APC, como AC=5m y PC=3m.

$\therefore$ **x = 37°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 33



- Nos piden **x**.
- Dato: $m\measuredangle ABC > 90°$; $m\measuredangle BAC = 8°$

$AB = 5(BC)$

- Convenientemente:

$AB = 5a\sqrt{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

- Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
- $\triangle$AHB: notable de 8°

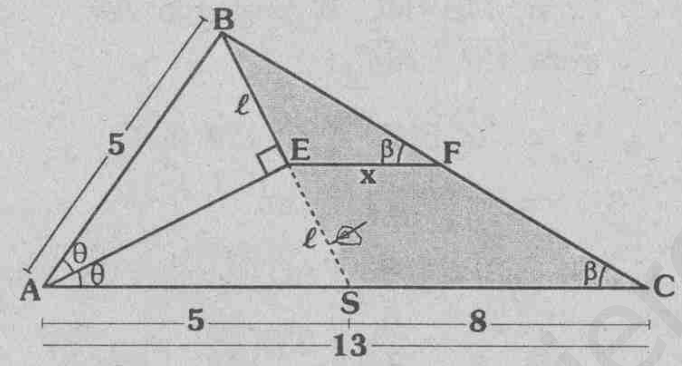
$\Rightarrow BH = a$

- $\triangle$BHC: notable:

$\therefore$ **x = 45°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 34



- Piden **x.**
- Prolongamos $\overline{BE}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en S, pues tendremos:
- En ΔABS, $\overline{AE}$ es bisectriz y altura

$\Rightarrow AB = AS$ y $BE = ES$

- Ahora en ΔBSC, $\overline{EF} // \overline{SC}$ y como $BE = ES$

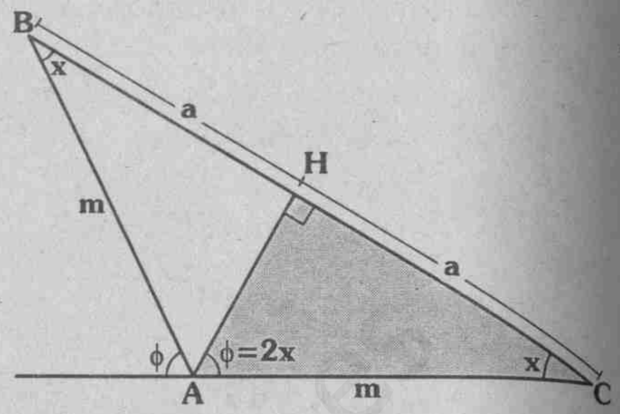
$\Rightarrow \overline{EF}$ es base media

- Como $AC = 13 \Rightarrow SC = 8$

$\therefore$ **x = 4**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 35



- Piden **x**.
- Como $\overleftrightarrow{AH}$ es mediatriz de $\overline{BC}$

$\Rightarrow AB = AC$, luego el ΔABC es isósceles.

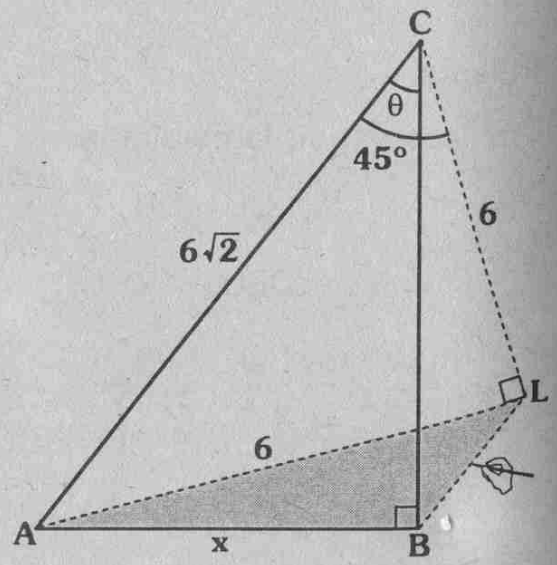
$\Rightarrow \phi = 2x$

- En $\triangle$AHC: $x + 2x = 90°$

$\therefore$ **x = 30°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 36



- Nos piden: el mayor valor entero de x.

- Como $\theta < 45°$, ubicamos L en la región exterior relativa a $\overline{BC}$.
- Tal que: $m\sphericalangle ACL = m\sphericalangle CAL = 45°$
- $\triangle$ALC: notable de 45°

$$\Rightarrow AL = LC = 6$$

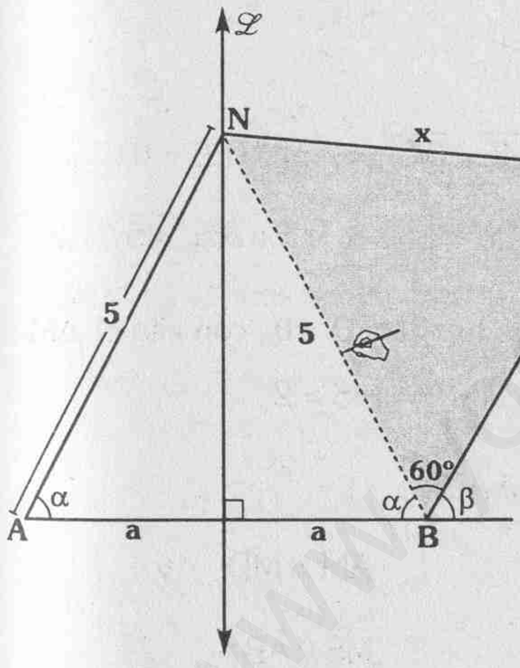
- En ΔALB, como $m\sphericalangle ABL > 90°$

$$\Rightarrow x < 6$$

$$\therefore \mathbf{x_{máx.\ entero} = 5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 37



- Piden **x**.
- Dato: $\alpha + \beta = 120°$ y $AN = BC = 5$
- Por teorema de la mediatriz :

$$AN = NB = 5$$

- ΔANB : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle NAB = m\sphericalangle ABN = \alpha$$

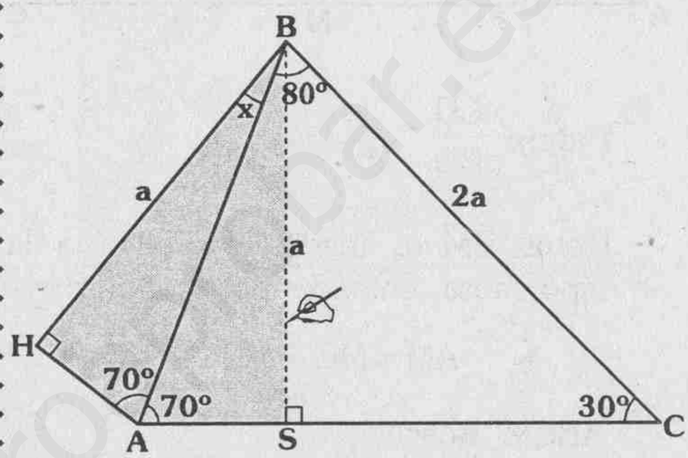
- Luego: $m\sphericalangle NBC = 60°$

$$\Rightarrow \Delta NBC \text{ es equilátero}$$

$$\therefore \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 38



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BS} \perp \overline{AC}$ (S en $\overline{AC}$).
- $\triangle$BSC notable de 30°

$$\Rightarrow BS = a$$

- Como BH=BS, por el recíproco del teorema de la bisectriz.

$$m\sphericalangle SAB = m\sphericalangle HAB = 70°$$

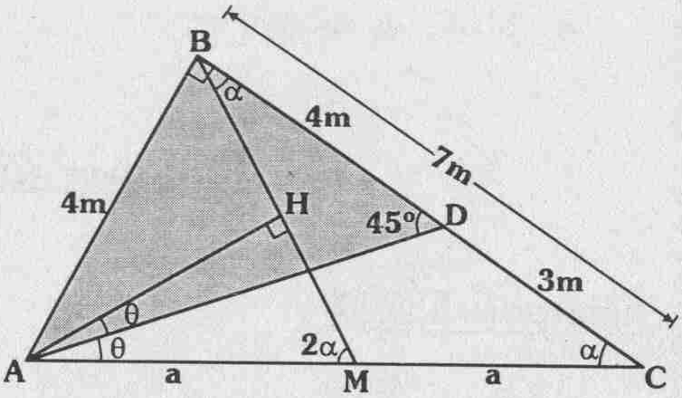
- En $\triangle$AHB:

$$x + 70° = 90°$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 39



- Piden: $\dfrac{CD}{BD}$
- Como $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa, entonces por teorema:

$$AM = MC = MB$$

- ΔBCM isósceles
- $\measuredangle AHM$: $2\alpha + 2\theta = 90°$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 45°$$

- En ΔADC, por ángulo exterior:

$$m\measuredangle ADB = \alpha + \theta = 45°$$

- $\measuredangle ABD$: notable de 45°:

$$AB = BD = 4m$$

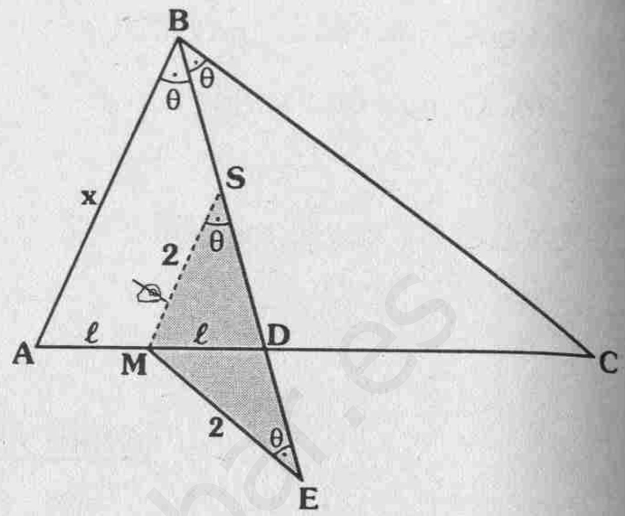
$$\Rightarrow DC = 3m$$

- Finalmente:

$$\mathbf{\frac{CD}{BD} = \frac{3m}{4m} = \frac{3}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 40



- Nos piden **x**.
- Como:

  * $\overline{ME} // \overline{BC} \Rightarrow m\measuredangle MEB = \theta$

  * $AM = MD \Rightarrow$ se traza $\overline{MS} // \overline{AB}$

- Luego: $m\measuredangle MSD = \theta$, con ello el ΔMSE isósceles $\Rightarrow MS = 2$.
- En ΔABD:

$$AM = MD \quad y$$

$$\overline{MS} // \overline{AB}$$

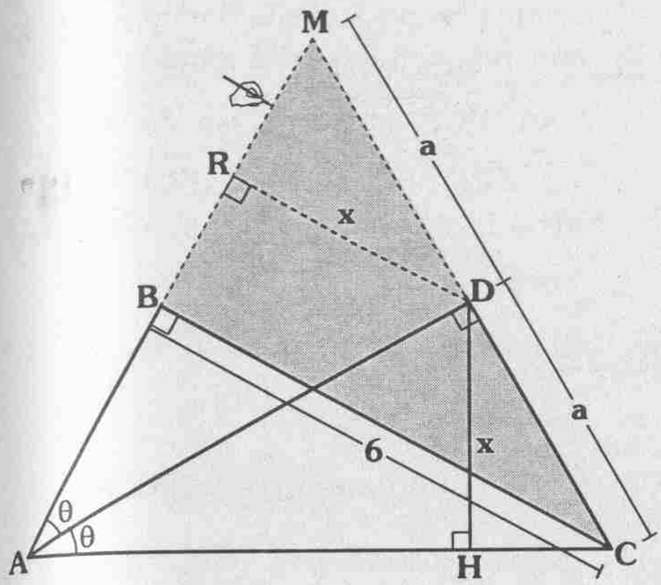
$\Rightarrow \overline{MS}$ es base media, por teorema:

$$MS = \frac{AB}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 41



- Piden **x.**

- Como $\overline{AD}$ es bisectriz del $\measuredangle CAB$ y $m\measuredangle ADC = 90°$, nos conviene prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, pues así tendremos:

  ΔMAC es isósceles, como $\overline{AD}$ es altura, también es mediana

  $$\Rightarrow CD = DM$$

- Por teorema de la bisectriz:

  $$DH = DR = x$$

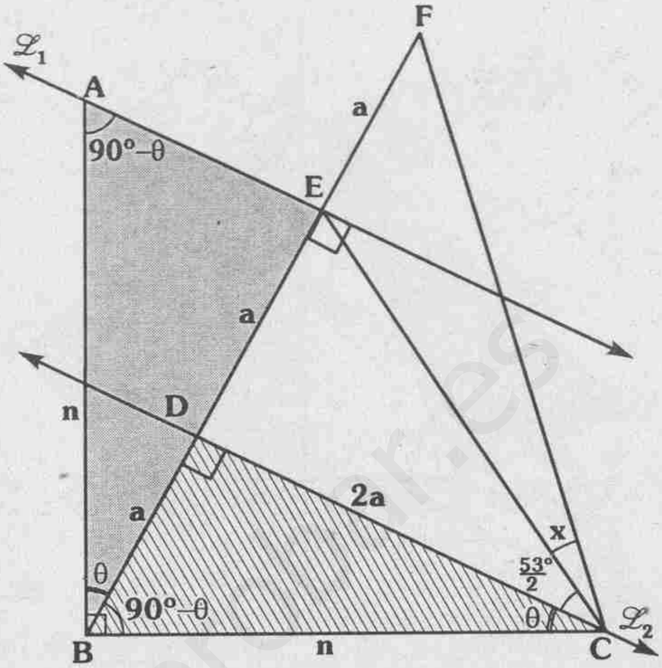
- $\triangle MBC$: $\overline{DR}$ es base media

  $$\Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

  $$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 42



- Piden **x.**

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{DF}$ y $\overline{EB}$ respectivamente, entonces:

  $$BD = DE = EF = a$$

- Como:

  $$AB = BC \quad y \quad m\measuredangle ABC = 90°$$

  $$\Rightarrow \triangle AEB \cong \triangle BDC \text{ (ALA)}$$

  $$\Rightarrow DC = 2a$$

- Con ello:

  $\triangle EDC$: notable de $53°/2$

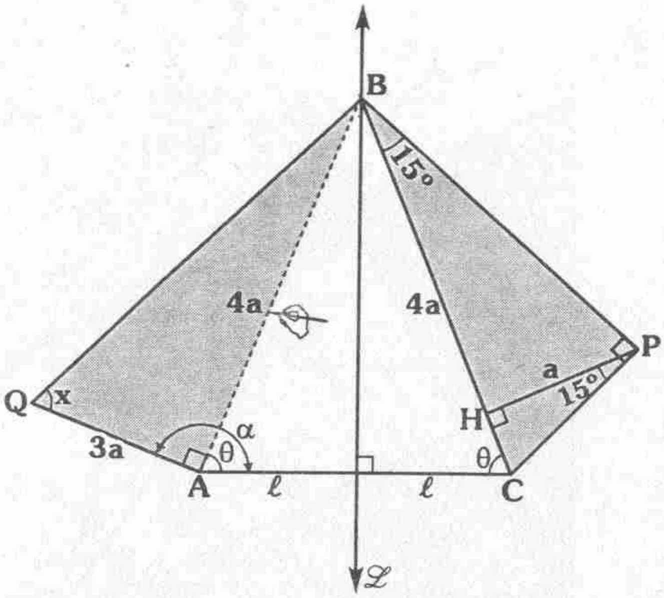
  $\triangle FDC$: notable de $45°$

  $$\Rightarrow x + \frac{53°}{2} = 45°$$

  $$\therefore \mathbf{x = \frac{37°}{2} = 18°30'}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 43



- Piden **x**.
- En ⊿BPC, por el teorema del triángulo de 15° y 75°:

$$BC = 4(PH) = 4a$$

- Por teorema de la mediatriz:

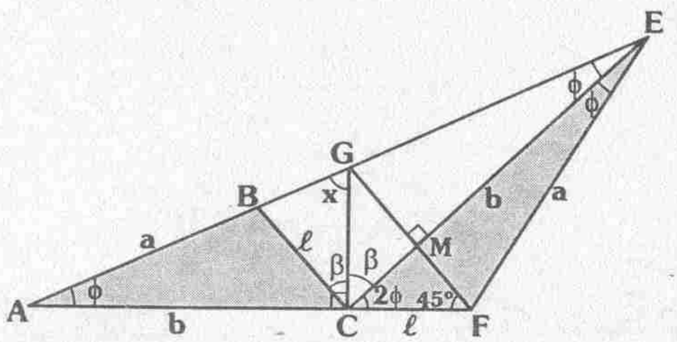
$$BC = AB = 4a$$

- Como $\alpha - \theta = 90° \Rightarrow m\sphericalangle QAB = 90°$
- En ⊿QAB: $QA = 3a$ y $AB = 4a$ entonces

$$\mathbf{x = 53°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 44



- Piden **x**.
- Tenemos por dato $\Delta ABC \cong \Delta EFC$, debemos reconocer que lados y ángulos son respectivamente iguales.

$$m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle FCE \Rightarrow AB = EF$$

$CE \neq BC$, pues en el ΔBCE, $\overline{CG}$ es bisectriz (si $CE = BC$, $x = 90°$ pero $x \neq 90°$)

- Ahora tenemos: $AC = CE$ y $BC = CF$

$\Rightarrow$ ΔACE : isósceles

De la congruencia: $m\sphericalangle CEF = \phi$

ΔGEF : isósceles $\Rightarrow$ $GM = MF$

$\Rightarrow$ ⊿GCF: isósceles

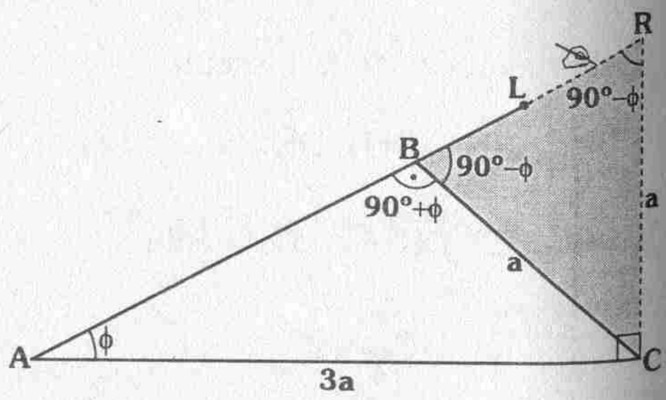
$$2\phi = 45° \Rightarrow \phi = \frac{45°}{2}$$

- En ⊿ACG: $x + \dfrac{45°}{2} = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 67°30'}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 45



- Piden: ϕ
- Al prolongar $\overline{AB}$ nos damos cuenta:

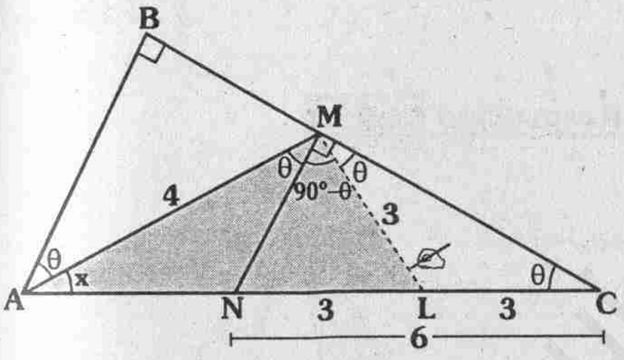
$$m\sphericalangle LBC = 90° - \phi$$

- Ahora tracemos $\overline{CR} \perp \overline{RA}$
- Pues: $m\measuredangle BRC = 90° - \phi$
- $\triangle BRC$: isósceles $\Rightarrow CB = CR$
- ⊿ACR: notable

$$\Rightarrow \phi = \frac{37°}{2} = 18°30'$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 46



- Piden **x**.
- En ⊿NMC, se traza la mediana $\overline{ML}$, entonces por teorema:

$$NL = LC = LM = 3$$

- $\triangle LCM$ es isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle LMC = \theta$$

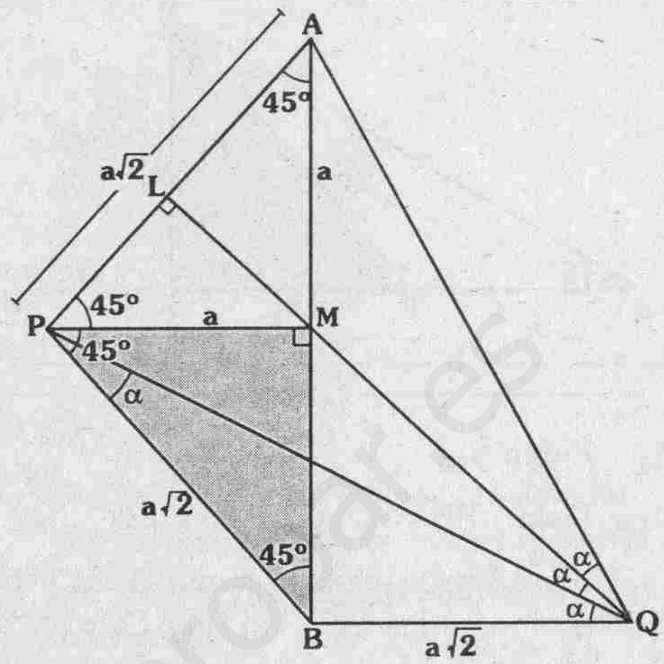
$$\Rightarrow m\measuredangle LMA = 90°$$

- ⊿AML: notable

$$\therefore \mathbf{x = 37°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 47



- Piden: $\dfrac{BQ}{AP}$
- Por dato: $AM = MB$ y $PB = (AM)\sqrt{2}$
- $\triangle PQA$ es isósceles, pues $\overline{QL}$ es bisectriz y altura, entonces $MA = MP$.
- En ⊿PMB, como $PM = MB = a$ y $PB = a\sqrt{2} \Rightarrow m\measuredangle PMB = 90°$
- ⊿PMA: $AP = a\sqrt{2}$
- Como: $m\measuredangle BPA = 90° \Rightarrow \overline{BP} // \overline{QL}$

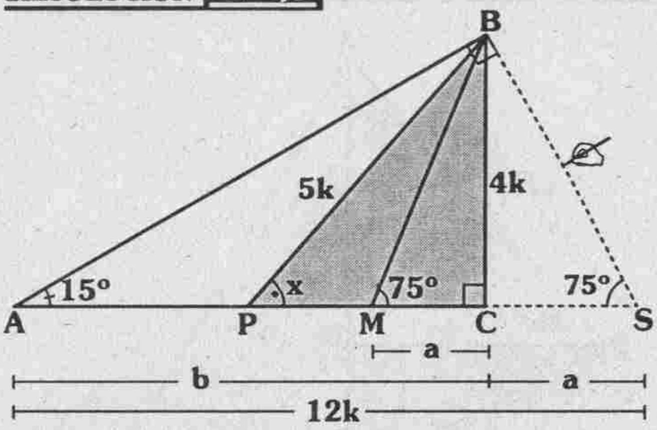
$\Rightarrow m\measuredangle BPQ = \alpha$, luego el $\triangle PBQ$ es isósceles $\Rightarrow BQ = a\sqrt{2}$

- Finalmente: $\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$

$$\therefore \ \frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{AP}} = \mathbf{1}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 48



- Piden **x**.
- Dato: PB=5k y a+b=12k
- Para aprovechar la suma de a y b, prolongamos $\overline{AC}$, tal que CS=a.

$$\Rightarrow AS = a + b = 12k$$

- ΔMBS isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle CSB = 75°$
- Luego: $m\sphericalangle SBA = 90°$
- Por teorema del triángulo de 15° y 75°:

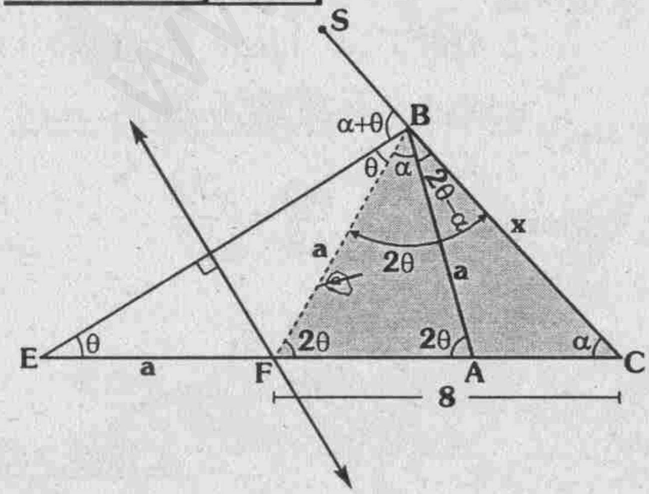
$$BC = \frac{AS}{4} \Rightarrow BC = 4k$$

- ⊿PCB: PB=5k y BC=4k

$$\therefore \ \mathbf{x = 53°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 49



- Por teorema de la mediatriz F=FB:

$$\Rightarrow \Delta AFB \text{ y } \Delta FBA \text{ son isósceles}$$

- Como $\overline{BE}$ es bisectriz exterior, entonces:

$$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle EBA = \alpha + \theta$$

- En ΔABC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle ABC = 2\theta - \alpha$$

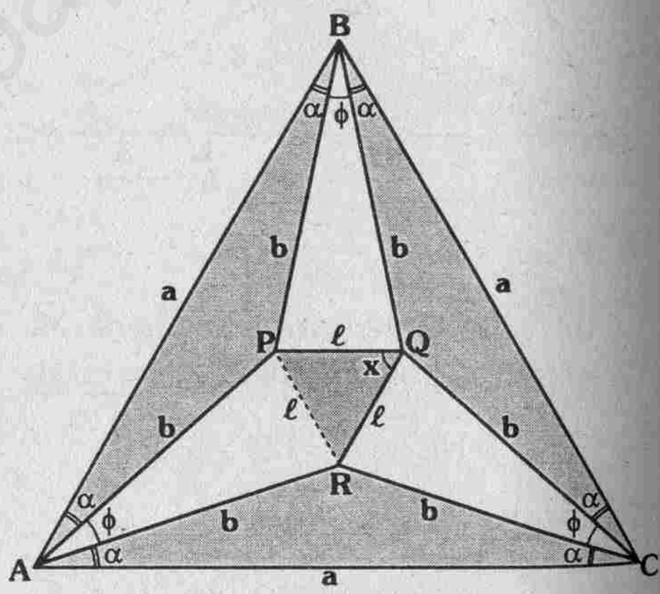
- Luego: $m\sphericalangle BFC = m\sphericalangle FBC = 2\theta$

$$\Rightarrow \Delta FBC: \text{ isósceles}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 50



- Piden **x**.
- De los datos:

$$\Delta APB \cong \Delta BQC \cong \Delta ARC \text{ (LLL)}$$

- Luego:

$$m\sphericalangle\sphericalangle RAP = m\sphericalangle PBQ = m\sphericalangle QRC = \phi$$

- Pues: $2\alpha + \phi = 60°$

- También: $\Delta PAR \cong \Delta PBQ \cong \Delta QCR$

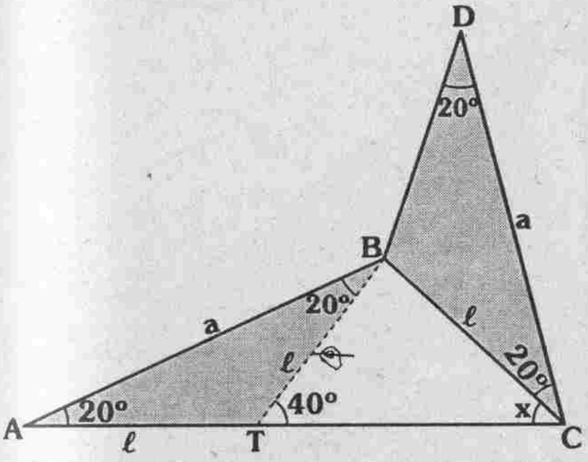
$\Rightarrow PQ = QR = PR$

$\Rightarrow \Delta PQR$: equilátero

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 51



- Piden **x**.
- Como:

$AB = BC$ y $m\sphericalangle BAC = 20°$

busquemos la congruencia, para ello, trazamos $\overline{BT}$, de tal modo que: $m\sphericalangle TBA = 20°$

$\Rightarrow \Delta ABT \cong \Delta DCB$ (ALA)

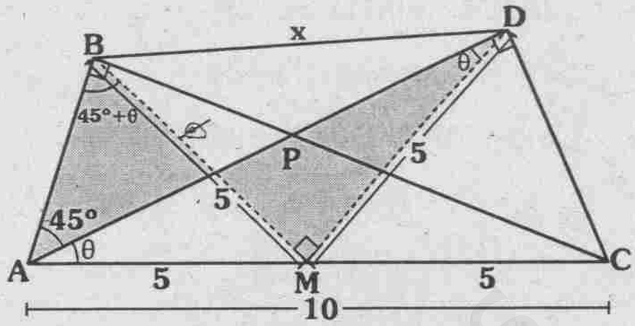
$\Rightarrow AT = TB = BC = BD$

- Luego: ΔCBT es isósceles:

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 52



- Piden **x**.
- Como $\overline{AC}$ es hipotenusa para los triángulos ABC y ADC, se traza la mediana $\overline{BM}$ entonces $\overline{MD}$ también será mediana.
- Por teorema:

$$AM = MC = BM = DM = 5$$

- En la parte sombreada:

$$45° + 45° + \theta = m\sphericalangle BMD + \theta$$

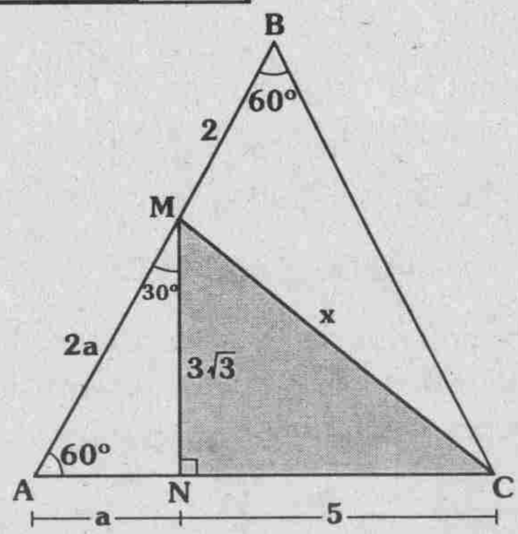
$$\Rightarrow m\sphericalangle BMD = 90°$$

- En ⊿BMD:

$$\mathbf{x = 5\sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 53



- Piden **x.**
- $\measuredangle$ANM notable de 30°
- Sea AN=a $\Rightarrow$ AM=2a
- Como ΔABC es equilátero:

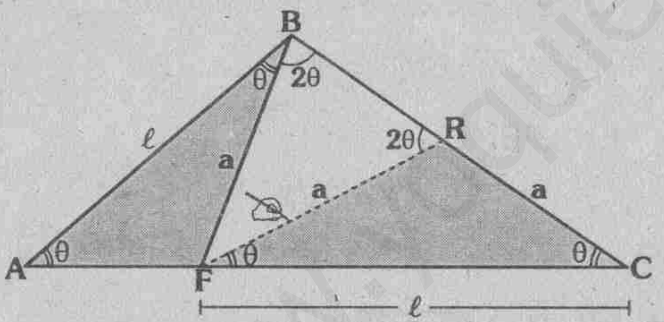
$$2a+2=a+5$$
$$\Rightarrow a=3$$

- En $\measuredangle$ANM: $MN=3\sqrt{3}$
- En $\measuredangle$MNC, por teorema de Pitágoras

$$x^2=5^2+(3\sqrt{3})^2$$
$$\therefore\ \mathbf{x=2\sqrt{13}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 54



- Piden: θ
- Como AB=PC, ello nos da la idea de buscar de alguna manera la ≅.
- También, del gráfico tenemos:

$$m\measuredangle FBC=2(m\measuredangle FCB)$$

- Por criterios de construcción, se traza $\overline{FR}$ tal que $m\measuredangle CFR=\theta$, entonces ΔFRC y ΔBRF son isósceles.
- Luego:

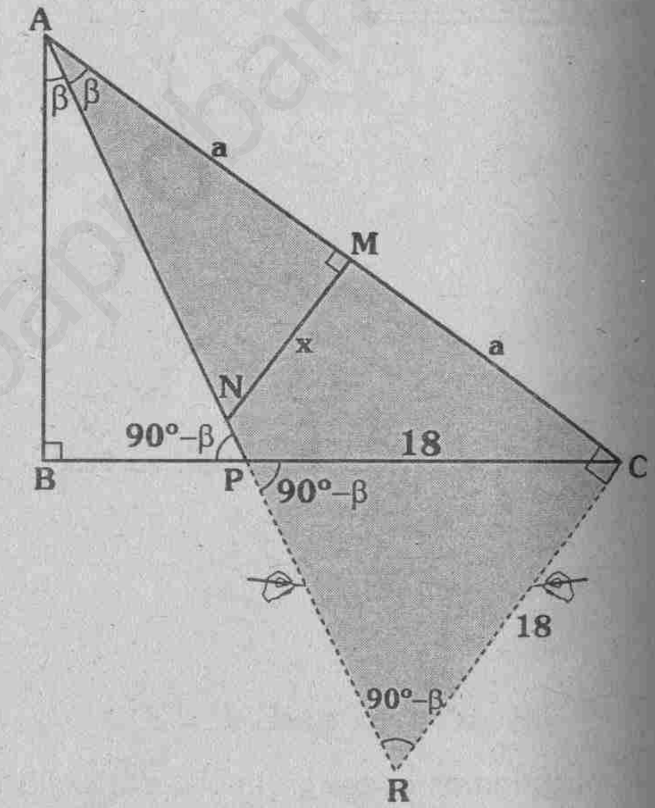
$$\Delta ABF\cong\Delta FCR\ (LAL)$$
$$\Rightarrow m\measuredangle BAF=\theta$$

- ΔABC: $\quad \theta+3\theta+\theta=180°$

$$\therefore\ \theta=\mathbf{36°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 55



- Piden: x
- Tenemos por dato que AM=MC, lo cual nos sugiere usar de alguna forma la base media.
- Para ello tracemos $\overline{CR}\,//\,\overline{MN}$ y prolongamos $\overline{AP}$, luego tendremos:

$$m\measuredangle CPR=m\measuredangle CRP=90°-\beta$$
$$\Rightarrow \Delta PCR:\text{isósceles}\Rightarrow RC=18$$

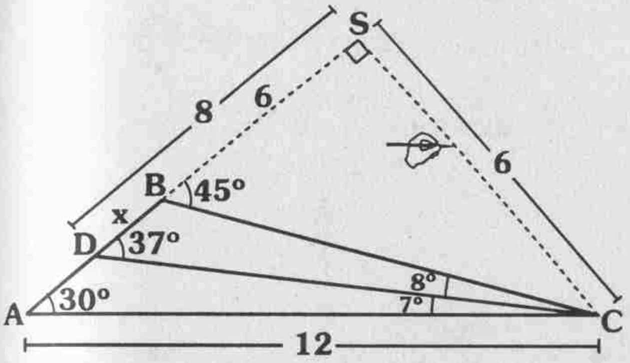
- $\triangle$ACR: $\overline{NM}$ es base media
- Por teorema:

$$x = \frac{18}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 9}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 56



- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia de los "ángulos", 30°, 37° y 45° prolonguemos $\overline{AB}$ y tracemos $\overline{CS} \perp \overline{AB}$.
- Luego:

$\triangle$ASC notable de 30° $\Rightarrow CS = 6$

$\triangle$BSC notable de 45° $\Rightarrow BS = 6$

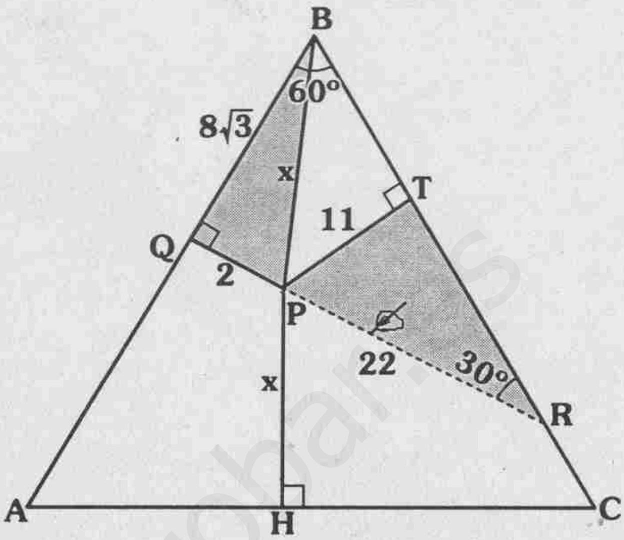
$\triangle$DSC notable de 37° $\Rightarrow DS = 8$

$$\Rightarrow x + 6 = 8$$

$$\therefore \mathbf{x = 2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 57



- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia de los ángulos rectos y del "60°", prolonguemos $\overline{QP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en R.
- $\triangle$PTR: notable de 30°

Como $PT = 11 \Rightarrow PR = 22$

- $\triangle$BQP: notable de 30°

Como $QR = 24 \Rightarrow QB = 8\sqrt{3}$

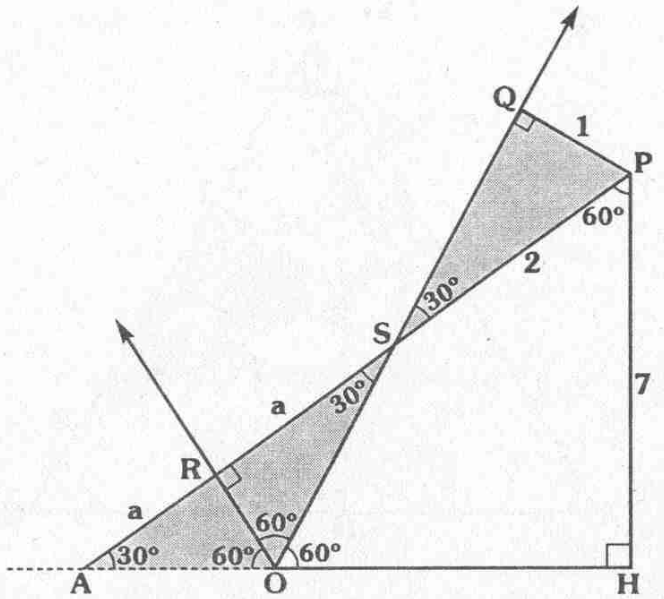
- En $\triangle$PQB:

$$x^2 = (8\sqrt{3})^2 + (2)^2$$

$$\therefore \mathbf{x = 14}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 58



- Piden RP
- Al prolongar $\overline{HD}$ y $\overline{PR}$ se cortan en A
- ΔAOS : isósceles $\Rightarrow$ AR = RS = a
- $\triangle$SQP: notable de 30° $\Rightarrow$ PS = 2
- Luego: RP = a + 2
- $\triangle$AHP: notable de 30°

$$\Rightarrow \quad 2a+2=14$$

$$\Rightarrow \quad a=6$$

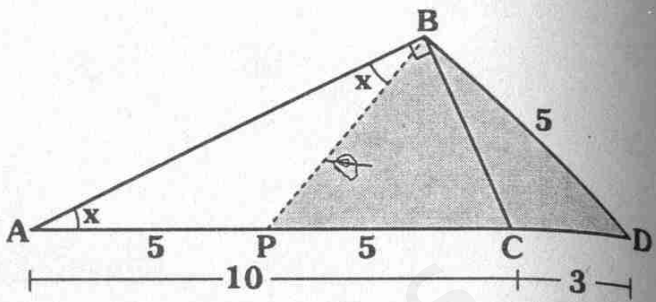
- Finalmente:

$$RP = a + 2$$

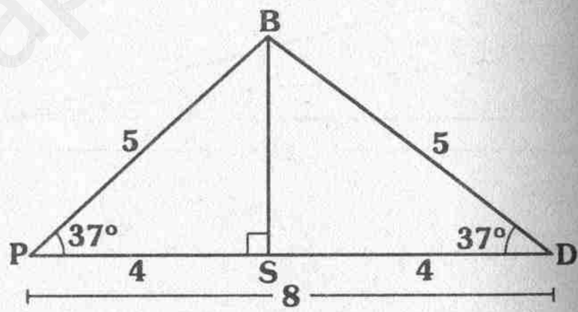
$$\therefore \; \mathbf{RP = 8}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 59



- Piden **x**.
- En $\triangle$ABC, se traza la mediana $\overline{BP}$, entonces AP = PC = BP = 5
- Analicemos el ΔPBD :



- Se traza la altura $\overline{BS}$

$$\Rightarrow PS = SD = 4$$

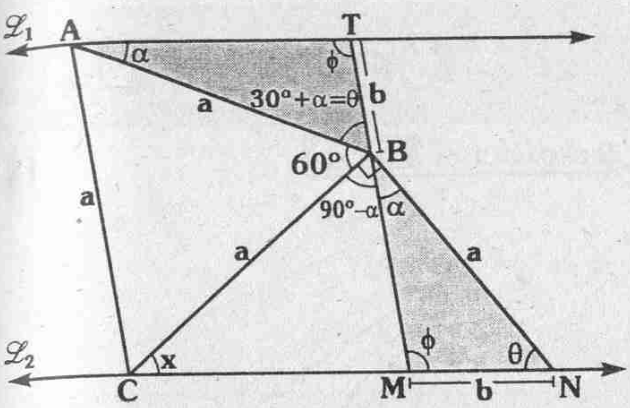
- $\triangle$PSD notable $\Rightarrow$ m$\measuredangle$SPB = 37°
- En ΔAPB :

$$x + x = 37°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \frac{37°}{2} = 18°30'}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 60



- Piden **x**.
- Dato: $\theta - \alpha = 30° \Rightarrow \theta = 30° + \alpha$

  ΔABC : equilátero

- En "B", notamos:

  $m\sphericalangle ABT = 30° + \alpha$ y $m\sphericalangle ABC = 60°$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABM = \alpha$

- Luego: $m\sphericalangle MBN = \alpha$
- Como:

  $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} \Rightarrow m\sphericalangle ATB = m\sphericalangle BMN = \phi$

  $\Delta ATB \cong \Delta DMN$ (ALA)

  $\Rightarrow BN = a$

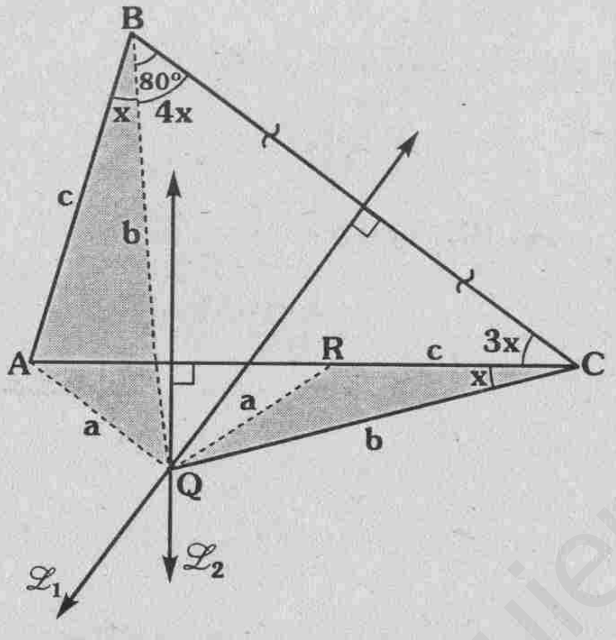
- ⊿CBN: notable

  $\therefore$ **x = 45°**

Clave B

Solucionario
Ciclo Cepre-Uni

RESOLUCIÓN Nº 61



- Piden **x**.
- Como:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es mediatriz de $\overline{BC} \Rightarrow QC = QB$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es mediatriz de $\overline{AC} \Rightarrow QA = QR$

$\Delta QAB \cong \Delta QRC$ (LLL)

$\Rightarrow m\sphericalangle RCQ = m\sphericalangle ABQ = x$

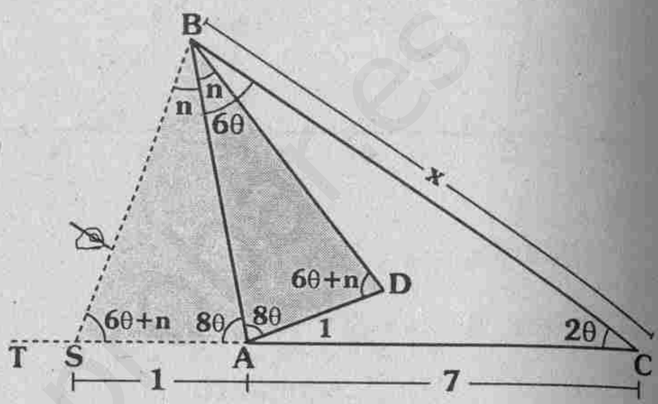
- En "B":

$$4x + x = 80°$$

$$\therefore \mathbf{x = 16°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 62



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{CA}$, por ángulo exterior tenemos:

$$m\sphericalangle BAD = 8\theta$$

- Como $\overline{AB}$ es bisectriz del $\sphericalangle TAD$, por los criterios de trazos auxiliares (pág. 56)
- Nos conviene trazar $\overline{BS}$, tal que:

$m\sphericalangle ABS = n$

$\Rightarrow \Delta SAB \cong \Delta DAB$(ALA)

$\Rightarrow SA = 1$ y $m\sphericalangle ASB = 6\theta + n$

- Notamos ahora:

$m\sphericalangle CSB = m\sphericalangle SBC = 6\theta + n$

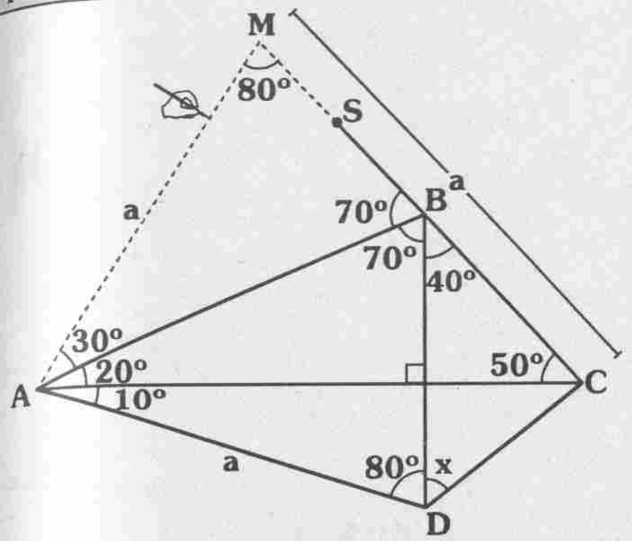
- ΔSBC: isósceles

$$\therefore \mathbf{x = 8}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 63

Paso 1



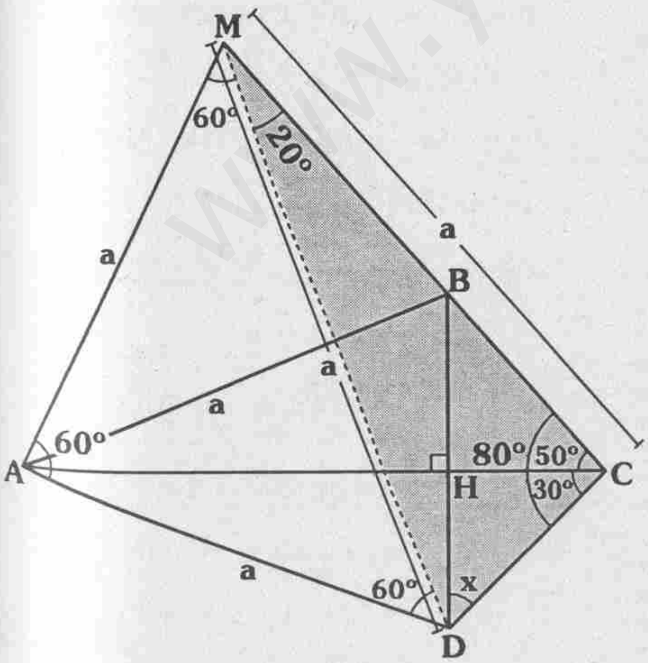
- Al prolongar $\overline{CB}$, nos damos cuenta que: $m\measuredangle SBA = m\measuredangle ABD = 70°$

- Lo cual nos sugiere trazar $\overline{AM}$, tal que $m\measuredangle MAB = 30°$, pues asi:

  $\Delta MAB \cong \Delta DAB$ (ALA)

  $\Rightarrow AM = AD$

Paso 2



- Trazamos $\overline{DM}$, pues el ΔAMD resulta ser equilátero:

  $\Rightarrow DM = a$ y $m\measuredangle DMC = 20°$

- ΔDMC : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MCD = 80°$

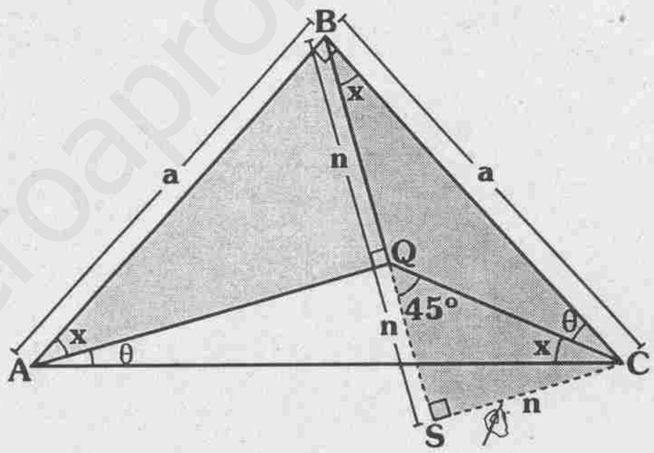
  $\Rightarrow m\measuredangle ACD = 30°$

- $⊿DHC$: $x + 30° = 90°$

  $\therefore$ **$x = 60°$**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 64



- Piden θ
- Por dato:

  $m\measuredangle BAQ = m\measuredangle QBC = m\measuredangle QCA = x$

  $\Rightarrow m\measuredangle ABQ = 90° - x \Rightarrow m\measuredangle AQB = 90°$

  y como AB=BC, el gráfico nos sugiere prolongar $\overline{BQ}$ y trazar $\overline{CS} \perp \overrightarrow{BQ}$, pues:

  $⊿AQB \cong ⊿BSC$

- Como:

  $x + \theta = 45° \Rightarrow m\measuredangle CQS = 45°$

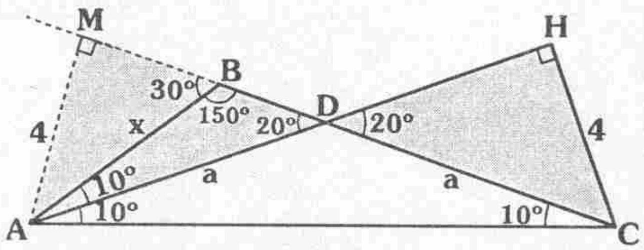
- $⊿QSC$: $QS = SC = n$

- Por la congruencia: BQ = SC = n
- ⊿BSC: notable:

$$x=\frac{53^\circ}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\mathbf{37^o}}{\mathbf{2}}$$

Clave B

Resolución Nº 65



- Piden **x**.
- Notamos ΔADC isósceles ⇒ AD = DC
- Al trazar $\overleftrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$, se tendrá:

$$⊿\, AMD \cong ⊿DHC \text{ (LAL)}$$

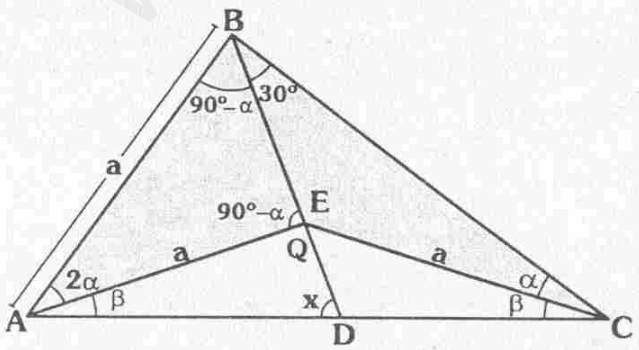
$$\Rightarrow AM = 4$$

- ⊿AMB: notable de 30°

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave C

Resolución Nº 66



- Piden **x**.
- Por teorema de cuadrilátero cóncavo (pág. 46 – 47)

$$m\sphericalangle ABC = 120^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DBC = 30^\circ$$

- $\Delta DBC: x = 30^\circ + \alpha + \beta$
- En ∡ACBE:

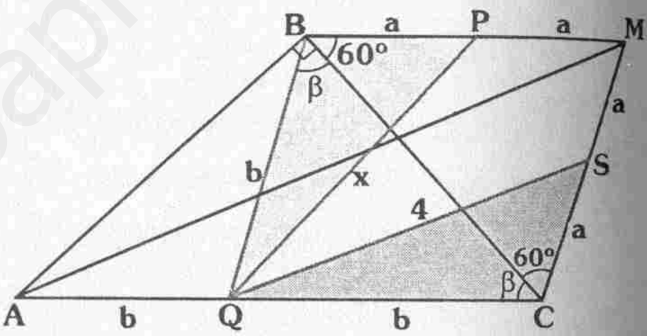
$$90^\circ - \alpha = 30^\circ + \alpha + \beta + \beta$$

$$\Rightarrow 30^\circ = \alpha + \beta$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave E

Resolución Nº 67



- Piden **x**.
- En ⊿ABC, $\overline{BQ}$ es mediana relativa a la hipotenusa ⇒ BQ = AQ = QC
- Se ubica S punto medio de $\overline{MC}$
- Como ΔBMC : equilátero ⇒ BP = CS
- Luego: ΔQBP ≅ ΔQCS (LAL)

$$\Rightarrow QS = x$$

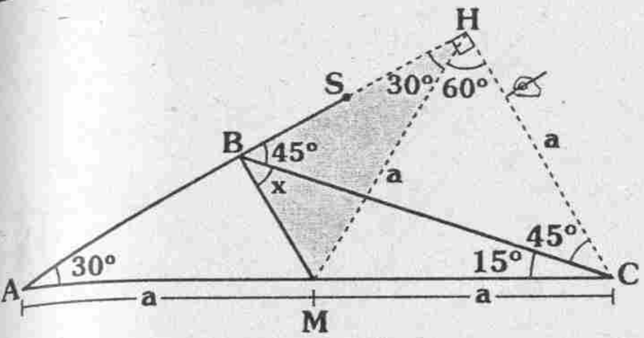
- ΔAMC : QS es base media

$$\Rightarrow QS=\frac{AM}{2}\ ;\ \text{pero } AM=8 \Rightarrow QS=4$$

$$\therefore\ \mathbf{x=4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 68



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{AB}$ verificamos:

$$m\sphericalangle CBS = 45°$$

- Para aprovechar la presencia del 30° y 45°, trazamos $\overline{CH} \perp \overline{AB}$.

$\Rightarrow$ ⊿AHC y ⊿BHC son notables

⊿AHC: $AC = 2(HC) \Rightarrow HC = a$

⊿BHC: $BH = HC = a$

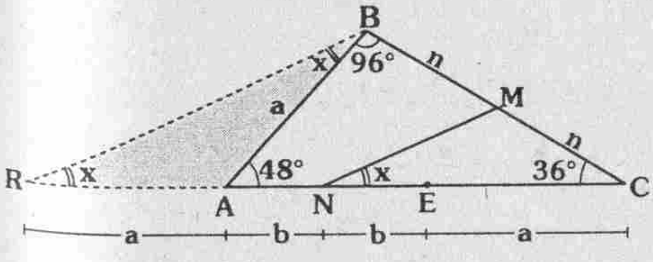
- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: HM=a
- ΔMBH : isósceles
- Como $m\sphericalangle BHM = 30° \Rightarrow m\sphericalangle HBM = 75°$

$$\Rightarrow \quad x + 45° = 75°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 69



- Piden **x**.
- Como BM=MC , busquemos otro punto medio, para ello prolonguemos $\overline{CA}$ hasta R tal que:

$$AR = a \Rightarrow RN = NC$$

- En ΔRCB , notamos que $\overline{NM}$ es base media, entonces:

$$\overline{RB} \parallel \overline{NM} \Rightarrow m\sphericalangle BRC = x$$

- ΔRAB : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle RBA = x$
- ΔBAR : $\quad x + x = 48°$

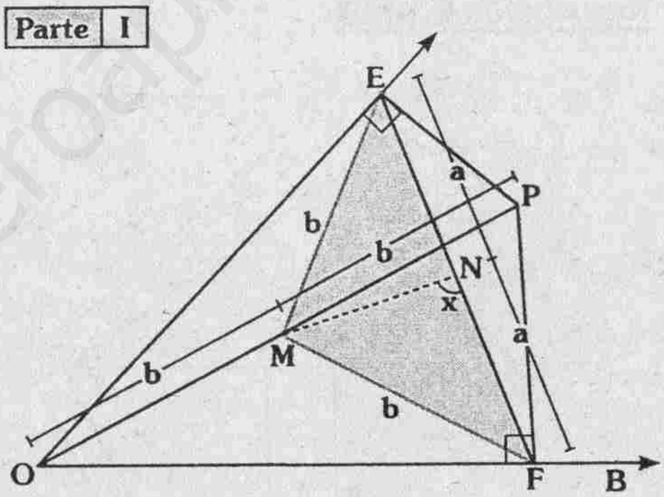
$$\therefore\ \mathbf{x = 24°}$$

Clave A

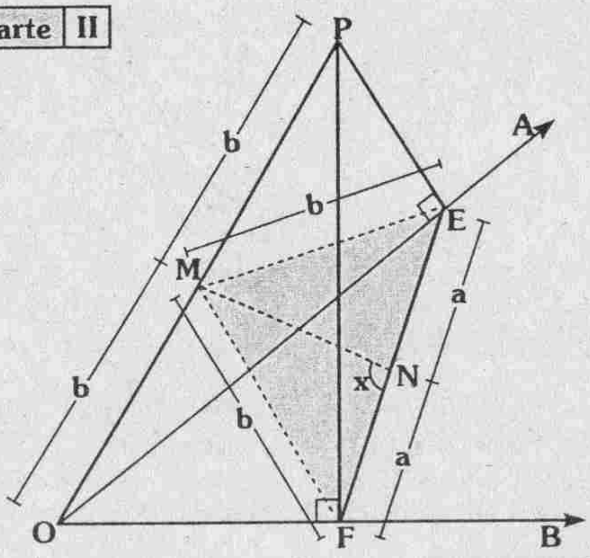
RESOLUCIÓN Nº 70

Se presentan dos posibilidades:

Parte I



Parte II



- Para ambos gráficos, como $\overline{OP}$ es hipotenusa común para los triángulos OEP y OFP, ubicamos M punto medio de $\overline{OP}$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa.

$$ME = MF = \frac{OP}{2} = b$$

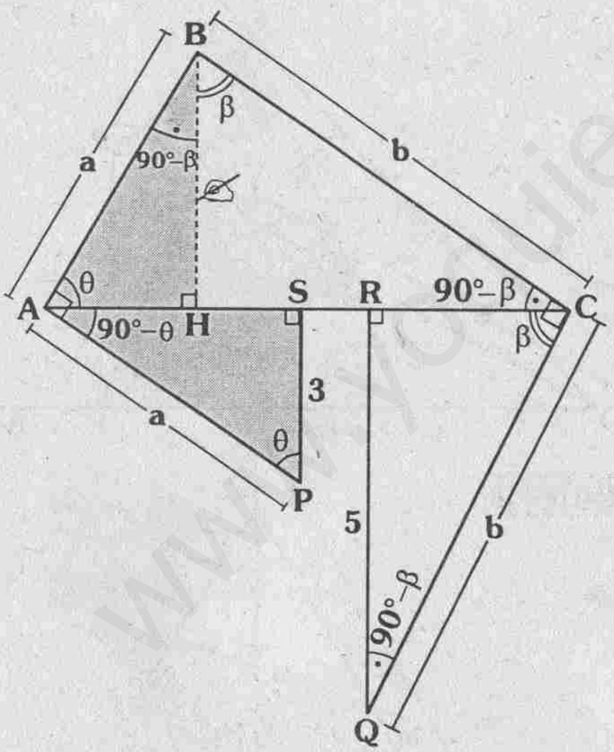
- ΔFME : isósceles

Como $EN = NF \Rightarrow \overline{MN}$ es mediana y altura

$$\Rightarrow \quad x = 90^\circ$$

$$\therefore \ \overline{\mathbf{MN}} \perp \mathbf{BF}$$

RESOLUCIÓN Nº 71



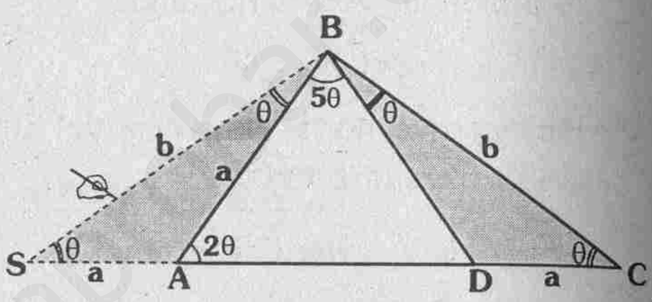
- Nos piden AC.
- Nos conviene trazar BH, pues al completar ángulos , verificamos:
- $⊿ PAS \cong ⊿ ABH$ (ALA) $\Rightarrow AH = 3$
- $⊿ BCH \cong ⊿ CQP$ (ALA) $\Rightarrow HC = 5$

$$\Rightarrow AC = AH + HC$$

$$\therefore \mathbf{AC = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 72



- Nos piden θ
- Como $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$, por los criterios de trazos auxiliares, se prolonga $\overline{CA}$ hasta "S", tal que:

$$m\measuredangle ASB = \theta$$

$\Rightarrow \Delta ASB$ y ΔBDC son isósceles

$\Rightarrow AS = AB = a$ y $SB = BC = c$

- Luego:

$$\Delta BSA \cong \Delta BCD \ (LAL)$$

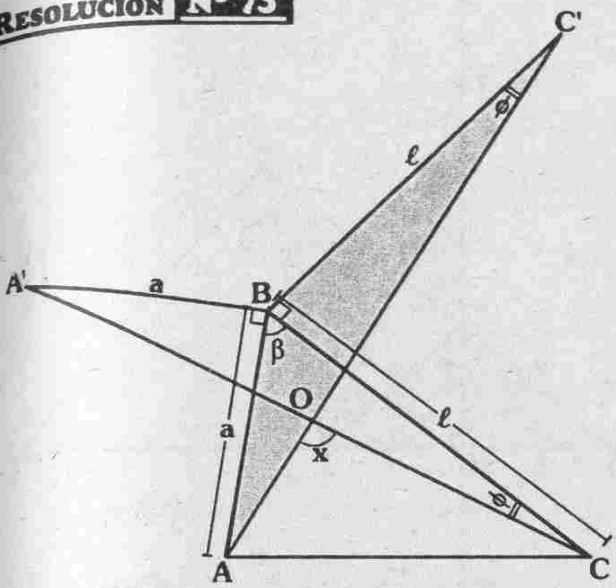
$$\Rightarrow \ m\measuredangle DBC = \theta$$

- $\Delta ABC: \ 9\theta = 180^\circ$

$$\therefore \theta = \mathbf{20^\circ}$$

Clave B

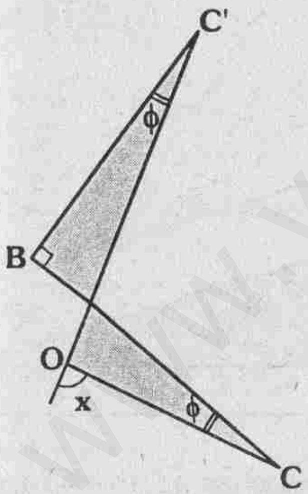
RESOLUCIÓN Nº 73



- Piden **x**.
- De acuerdo al gráfico, sea $m\measuredangle ABC = \beta$

  $\Rightarrow \quad \Delta A'BC \cong \Delta ABC'$ (LAL)

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BC'A = m\measuredangle BCA' = \phi$
- Analizando parte del gráfico:



Por teorema:

$$m\measuredangle C'OC + \phi = 90° + \phi$$

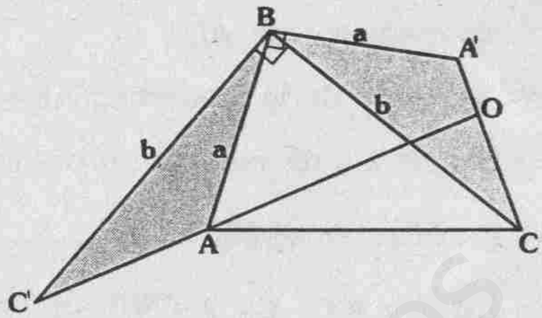
$$\Rightarrow m\measuredangle C'OC = 90°$$

$$\therefore \mathbf{x = 90°}$$

Clave C

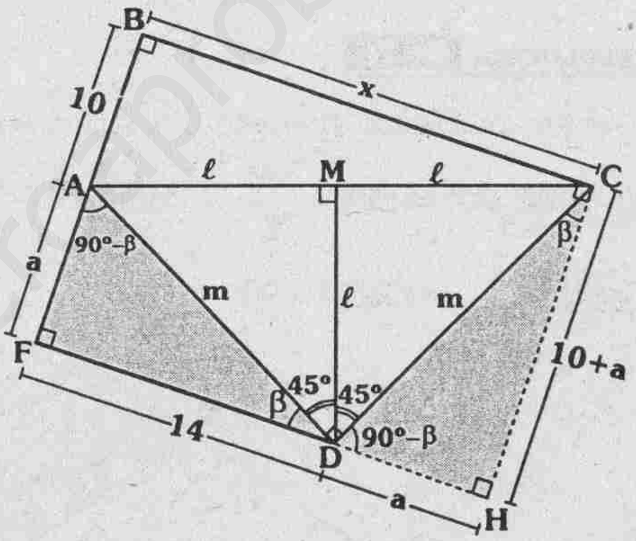
Observación

- *Si consideramos el siguiente gráfico:*



- *También se demuestra* $m\measuredangle AOC = 90°$ *lo cual queda como ejercicio para el lector.*

RESOLUCIÓN Nº 74



- Nos piden **x**.
- Como: $AM = MD = MC \Rightarrow m\measuredangle ADC = 90°$

  y $AD = DC$
- Se traza $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{FD}$ $(H \in \overleftrightarrow{FD})$
- Como: $\overline{BC} \parallel \overline{FH}$ y $\overline{FB} \parallel \overline{HC}$

  $\Rightarrow x = 14 + a$ y $HC = 10 + a$
- $\triangle AFB \cong \triangle DHC$ (ALA)

  $\Rightarrow 10 + a = 14 \Rightarrow a = 4$

$$\therefore \mathbf{x = 18}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 75

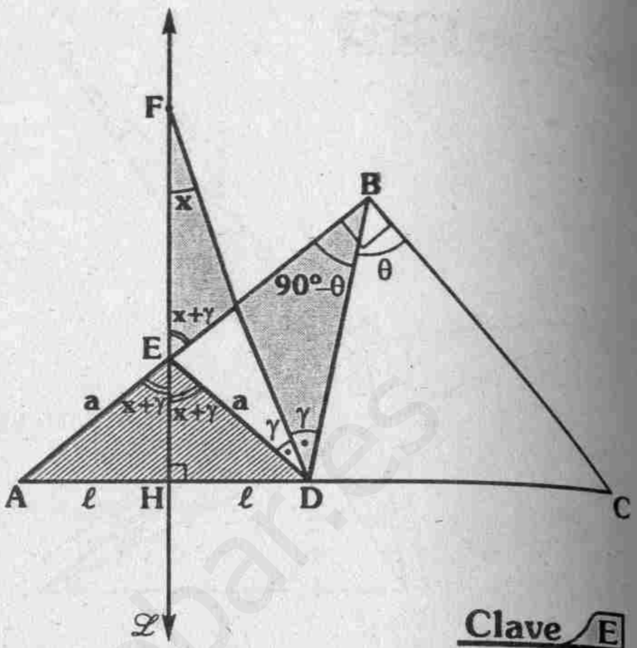
- Piden x en función de θ.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.
- Por teorema de la mediatriz: AE=ED

  $\Rightarrow \overline{EH}$ es altura, mediana y bisectriz.

  $\Rightarrow m\sphericalangle AEH = m\sphericalangle HED = x+\gamma$

- En ⧖: $x+x+\cancel{\gamma} = \cancel{\gamma}+90°-\theta$

  $$\Rightarrow \quad x = 45° - \frac{\theta}{2}$$

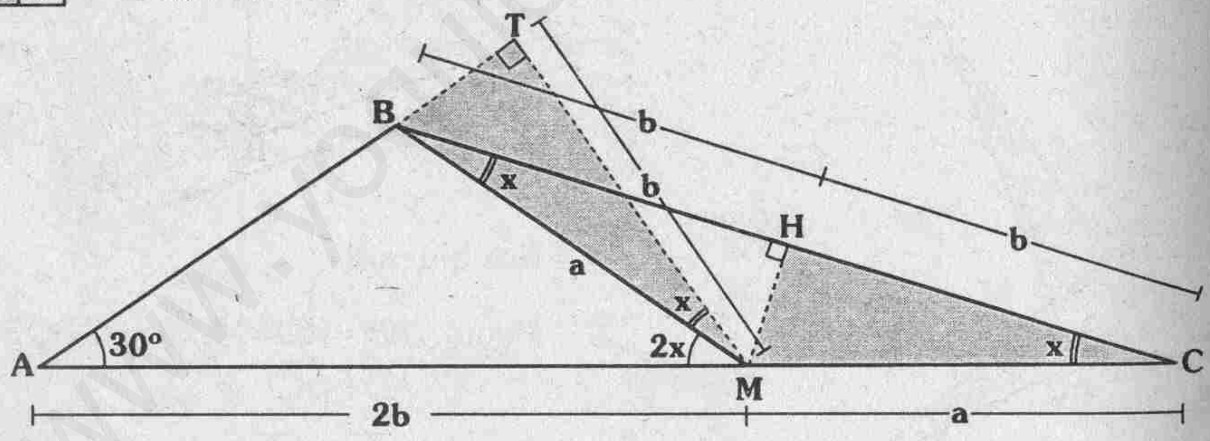


Clave E

RESOLUCIÓN Nº 76

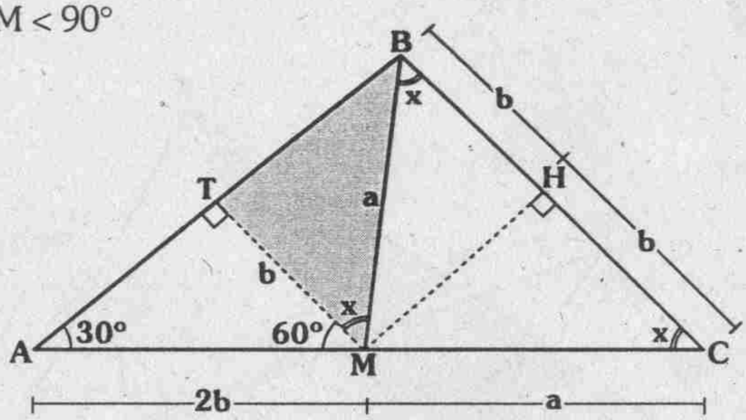
- Este problema presenta dos soluciones. Notemos primero: $m\sphericalangle ABM \neq 90°$, pues si fuera $90° \Rightarrow BM = \dfrac{AM}{2}$ y como BC=BM+MC (absurdo).

Caso 1 $m\sphericalangle ABM > 90°$



- Como $m\sphericalangle ABM > 90°$ Al trazar $\overline{MT} \perp \overleftrightarrow{AB}$ para aprovechar la medida de 30°, T estará en la prolongación de $\overline{AB}$.
- ⊿ATM: notable de 30° $\Rightarrow$ Si $AM = 2b \Rightarrow MT = b$
- Δ BMC: isósceles $\Rightarrow$ al trazar la altura MN
- Se tendrá $BH = HC = b$
- ⊿BMT ≅ ⊿MHC $\Rightarrow$ $m\sphericalangle BMT = m\sphericalangle MCH = x$
- Luego: $3x = 60°$ $\quad\therefore\ \mathbf{x = 20°}$

Caso 2 $m\sphericalangle ABM < 90°$



- En este caso la altura trazada de M está en la parte interna del ΔAMB.
- Análogamente: $⊿TMB \cong ⊿HCM \Rightarrow m\sphericalangle TMB = x$
- En ΔMBC : $x + x = 60° + x$

  $\therefore\ x = 60°$
- De ambos casos, tendríamos: $x = 20°$ ó $x = 60°$
- Sólo aparece en las claves: $20°$.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 77

- Piden x, en función de β y α.
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ respectivamente por teorema:

  $RB = RC$ y $RA = RP$

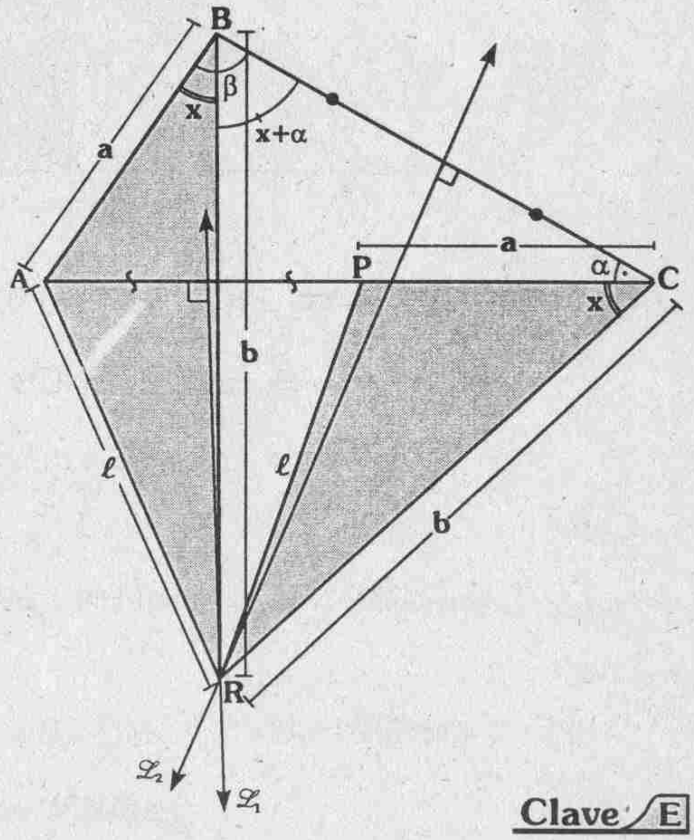
  $\Rightarrow\ \Delta ABR \cong \Delta PCR$ (LLL)

  $\Rightarrow\ m\sphericalangle ABR = x$

- ΔRBC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle RBC = x + \alpha$

  $\Rightarrow x + x + \alpha = \beta$

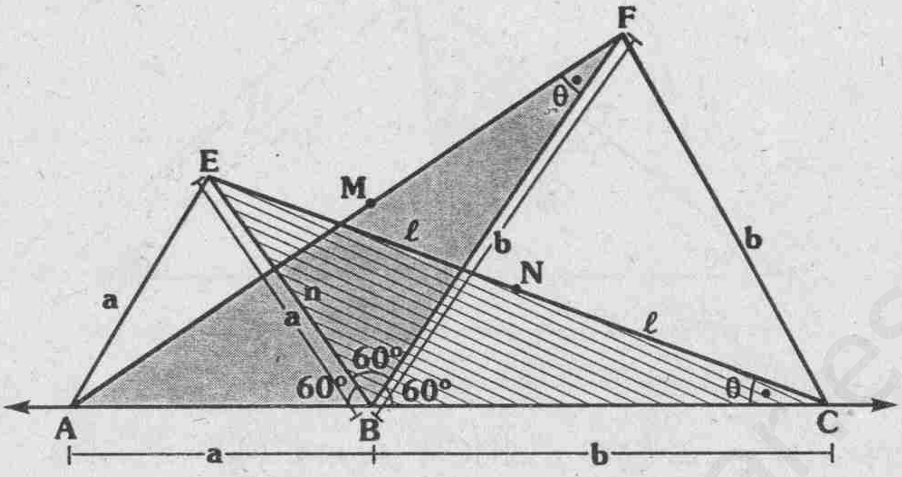
  $$\therefore\ \mathbf{x} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$



Clave E

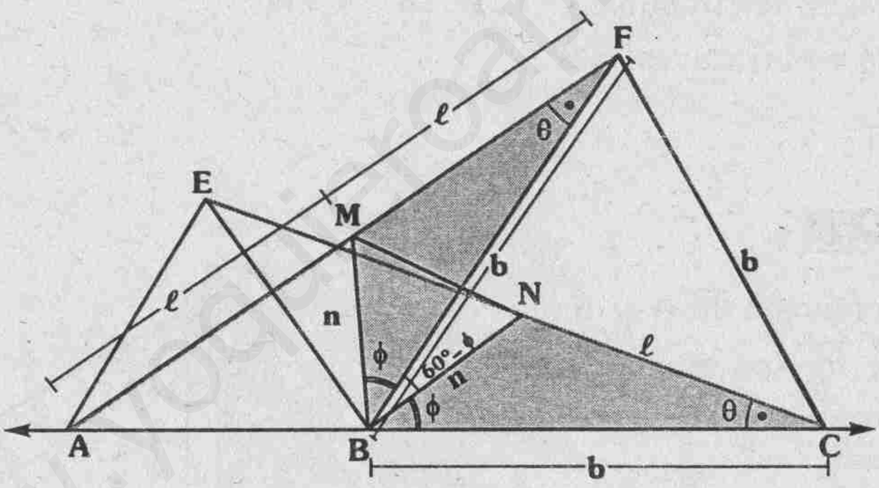
RESOLUCIÓN Nº 78

Paso 1



- $\Delta ABF \cong \Delta EBC$ (LAL) $\Rightarrow$ $AF = EC = 2\ell$ y $m\sphericalangle AFB = m\sphericalangle ECB = \theta$

Paso 2



- Como $AF = EC \Rightarrow MF = NC$ y $m\sphericalangle MFB = m\sphericalangle NCB$

$$\Rightarrow \Delta MFB \cong \Delta NCB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle NBC = m\sphericalangle MBF = \phi \quad \text{y} \quad MB = NB$$

- Como :

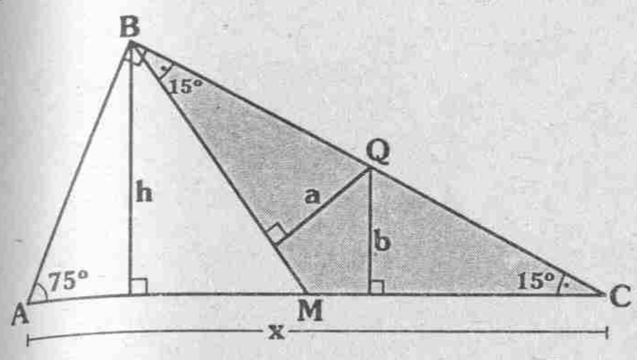
$$m\sphericalangle FBC = 60° \Rightarrow m\sphericalangle FBN = 60° - \phi$$

- Luego:

$$m\sphericalangle MBN = 60° \quad \text{y} \quad MB = BN$$

$\therefore$ **ΔMBN es equilátero.**

RESOLUCIÓN Nº 79



- Piden **x**.
- Como $\overline{BM}$ es mediana del ⊿ABC

$$\Rightarrow BM = AC = MC$$

- ΔBMC isósceles, por teorema (pág. 39 - 40)

$$\Rightarrow h = a + b$$

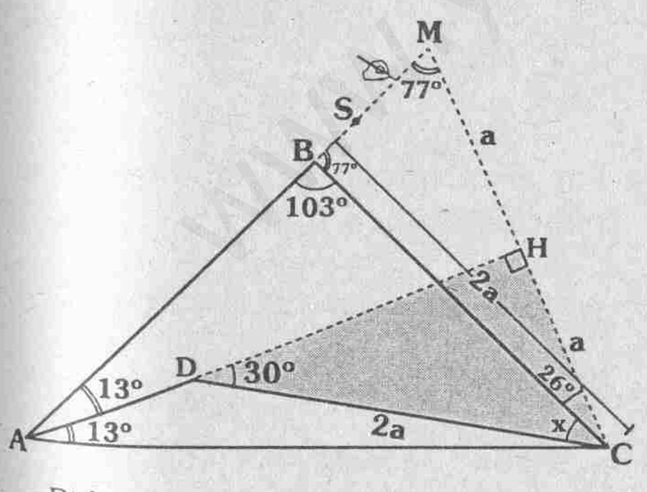
- Por teorema del triángulo de 15°:

$$x = 4h$$

$$\therefore \mathbf{x = 4(a+b)}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 80



- Piden **x**.

m∢SBC = 90° − α y m∢BAC = 2α ; para α = 13°

- De acuerdo a los criterios de construcción trazamos $\overline{CM}$, tal que $M \in \overleftrightarrow{AB}$ y m∢AMC = 77°, con ello ΔAMC y ΔBMC son isósceles.
- ΔAMC : $\overline{AH}$ es bisectriz, altura y mediana, entonces MH=MC=a
- ΔBMC : isósceles ⇒ BC = MC = 2a
- Como:

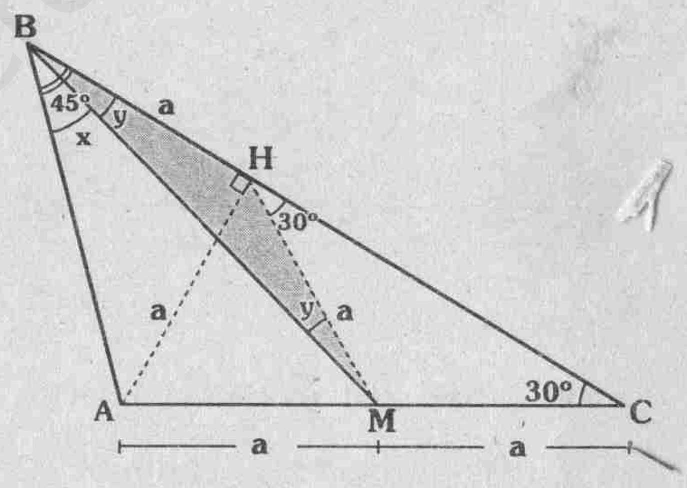
CD=2a ⇒ ⊿DHC: notable de 30°

$$\Rightarrow x + 26° = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 34°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 81



- Piden **x**
- Dato AM=MC
- Se traza la altura $\overline{AH}$ del triángulo ABC.
- Luego reconocemos que los ⊿s AHB y AHC son notables de 45° y 30° respectivamente.

- Como:

$AM = MC \Rightarrow AH = a \;\; y \;\; BH = a$

- En $⊿AHC$: $HM = a$
- $\triangle BHM$: isósceles

$\Rightarrow y + y = 30°$

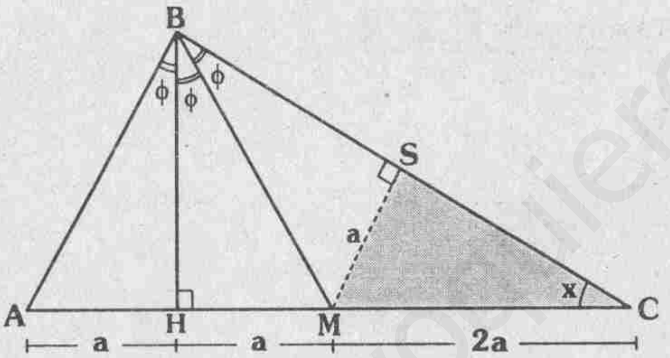
$y = 15$

- Como: $x + y = 45°$

$\therefore$ **$x = 30°$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 82



- Piden: **x**
- En el $\triangle ABM$, $\overline{BH}$ es altura y bisectriz

$\Rightarrow \triangle ABM$: isósceles, $\overline{BH}$ también es mediana $\Rightarrow AH = HM$

- Como $\overline{BM}$ es bisectriz del $\measuredangle HBS$ entonces por teorema:

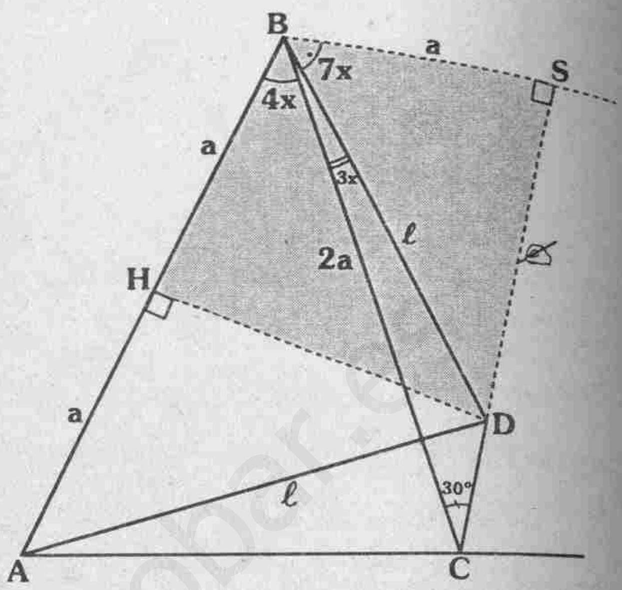
$\Rightarrow MH = MS = a$

- $⊿MSC$ notable

$\therefore$ **$x = 30°$**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 83



- Piden: $m\measuredangle ABC = 4x$
- Como $\triangle ABC$ es isósceles, trazamos la altura $\overline{DH}$, la cual también es mediana

$\Rightarrow BH = HA = a$

- Se traza $\overline{BS} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (S en $\overleftrightarrow{CD}$)
- $⊿CBS$ notable de 30°

$\Rightarrow BS = \dfrac{BC}{2} = a$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, debido a que:

$BH = BS \Rightarrow m\measuredangle DBS = 7x$

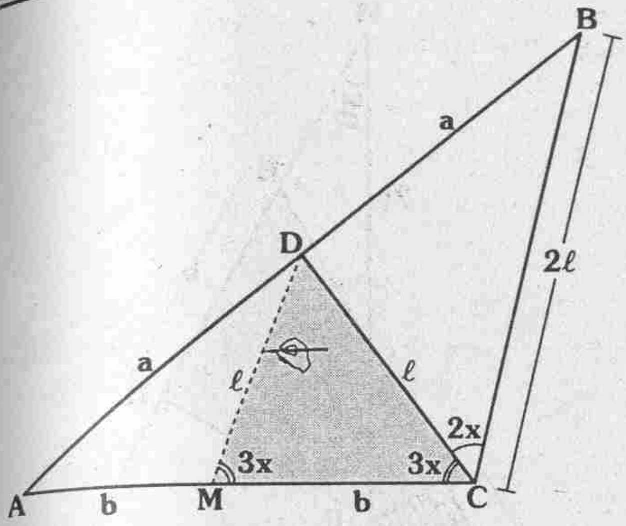
- $⊿CSB$:

$3x + 7x = 60° \Rightarrow x = 6°$

$\therefore$ **$m\measuredangle ABC = 24°$**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 84



- Piden **x**.
- Como AD=BD, es decir D es punto medio de $\overline{AB}$, trazamos la base media $\overline{DM}$ del ΔABC.

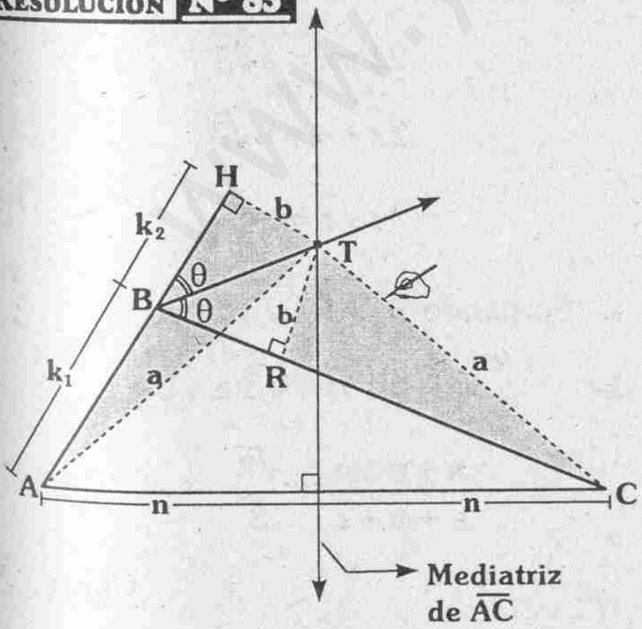
$$\Rightarrow DM = \frac{BC}{2} = \ell \quad y \quad \overline{MD} // \overline{CB}$$

- ΔMDC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle DMC = 3x$
- Como $\overline{MD} // \overline{CB} \Rightarrow 3x + 5x = 180^\circ$

$$\therefore \mathbf{x = 22,5^o}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 85



- Piden BC, en función de k_1 y k_2.
- Por teorema de la bisectriz:

$$TH = TR = b \quad y \quad BH = BR = k_2$$

- Por teorema de la mediatriz:

$$TA = TC$$

- $\triangle AHT \cong \triangle CRT$

$$\Rightarrow RC = AH = k_1 + k_2$$

- Finalmente:

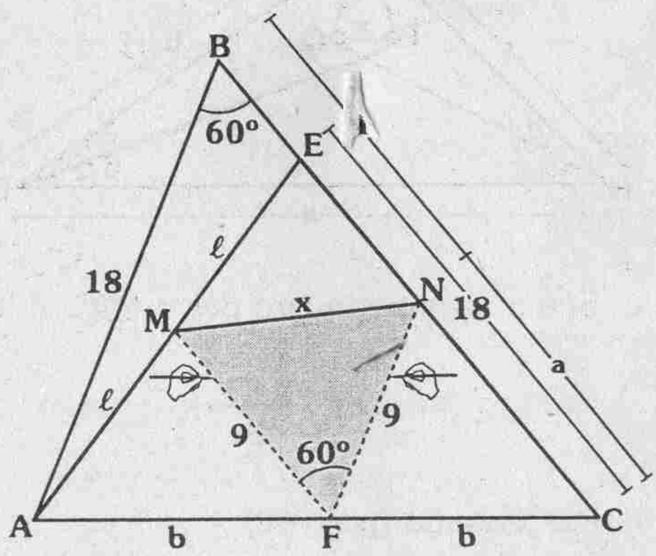
$$BC = BR + RC$$

$$\Rightarrow BC = k_2 + k_1 + k_2$$

$$\therefore \mathbf{BC = k_1 + 2k_2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 86



- Piden **x**.
- Al ubicar "F" punto medio de $\overline{AC}$, tendremos:

- ΔAEC: $\overline{MP}$ es base media:

$$\Rightarrow MF = 9 \quad y \quad \overline{MF} // \overline{EC}$$

- ΔABC: $\overline{NF}$ es base media:

$$\Rightarrow NF = 9 \quad y \quad \overline{NP} // \overline{BA}$$

- Como: $\overline{MF} // \overline{EC}$ y

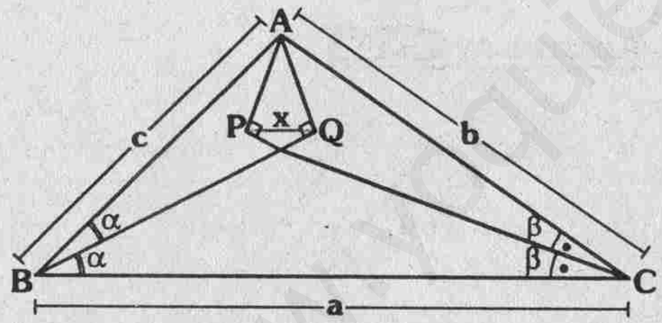
$$\overline{NP} // \overline{BA} \Rightarrow m\measuredangle MFN = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta MFN \text{ es equilátero}$$

$$\therefore \mathbf{x = 9}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 87



- Sea p: semiperímetro del ΔABC:

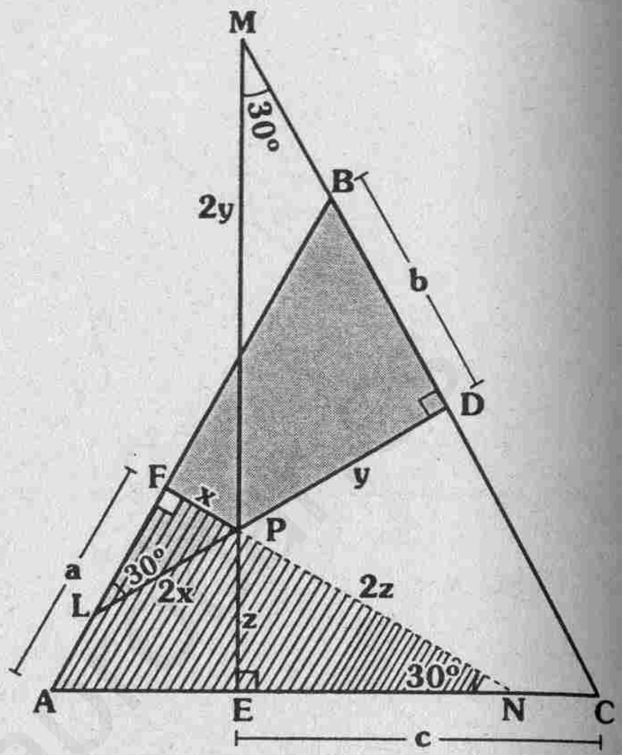
$$\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Por teorema (pág. 40)

$$\mathbf{x = p - a}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 88



- Piden: $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$

- ⊿LFP, ⊿PEN y ⊿PDM notables de 30°, entonces:

$$NP = 2z \;;\; LP = 2x \;\; y \;\; PM = 2y$$

- ⊿AFN, ⊿LDB y ⊿MEC

$$2z + x = a\sqrt{3} \quad \text{... (I)}$$

$$2x + y = b\sqrt{3} \quad \text{... (II)}$$

$$2y + z = c\sqrt{3} \quad \text{... (III)}$$

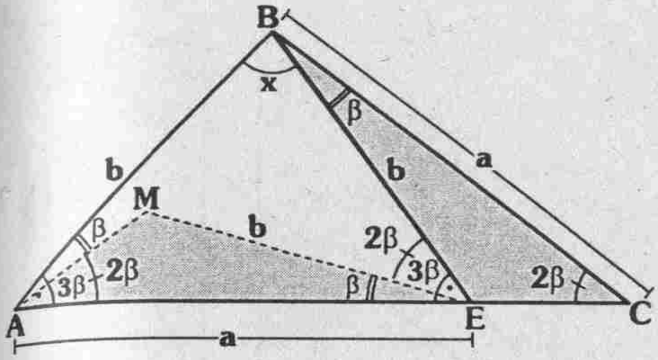
- Sumando (I), (II) y (III):

$$3(x+y+z) = \sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\therefore \mathbf{\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 89



- Piden **x**.
- En ΔABC:

$$x + 6\beta = 180° \qquad \ldots (I)$$

- Se traza $\overline{EM}$ y $\overline{AM}$ tal que:

$$m\measuredangle MAE = 2\beta \quad y$$
$$m\measuredangle AEM = \beta$$

- $\Delta MAE \cong \Delta ECB$ (ALA)

$$\Rightarrow ME = BE$$

- Por teorema del cuadrilátero cóncavo (pág. 46–47)

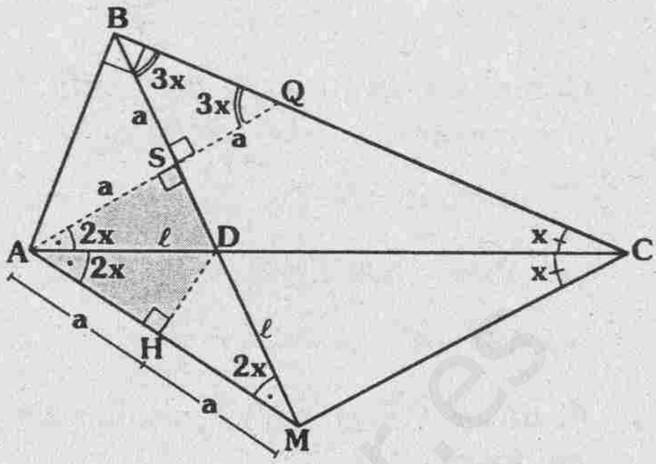
$$x = 120° - 2\beta \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$120° - 2\beta + 6\beta = 180°$$
$$\Rightarrow \beta = 15°$$
$$\therefore \mathbf{x = 90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 90



- Piden **x**.
- Al completar ángulos, tenemos:

$$m\measuredangle AMD = 2x \Rightarrow \Delta ADM: \text{isósceles}$$

- Como $\overrightarrow{CA}$ es bisectriz del $\measuredangle BCM$, nos conviene trazar $\overline{AQ}$ tal que:

$$m\measuredangle CAQ = 2x$$
$$\Rightarrow \Delta AQC \cong \Delta AMC \text{ (ALA)}$$
$$\Rightarrow AQ = AM = 2a$$

- En ⊿ABQ, como $m\measuredangle AQB = 3x$, $\overline{BS}$ es mediana, luego AS=SD.
- Al trazar $\overline{DH} \perp \overline{AM}$, tendremos AH=HM, por ser ΔADM isósceles
- Como: $AS = AH$, $\Delta SAD \cong \Delta HAD$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle ASD = 90°$
- ⊿BSQ: $3x + 3x = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 91

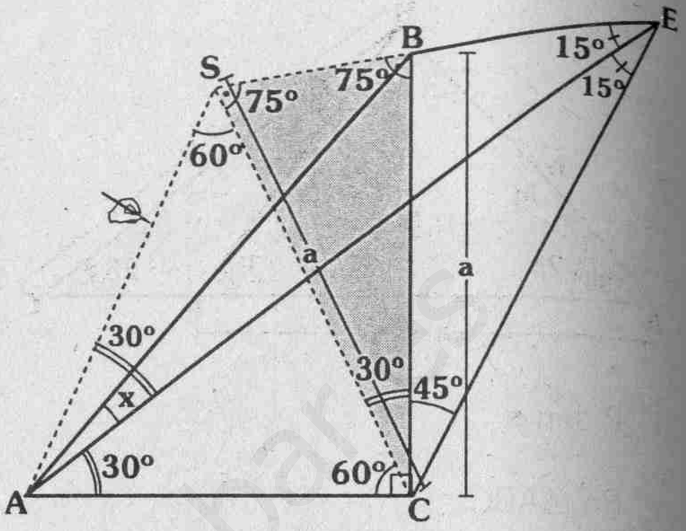
- Piden **x**.
- Como $\overrightarrow{EA}$ es bisectriz del $\measuredangle BEC$, nos conviene trazar $\overline{AS}$ tal que:

  $m\measuredangle SAE = 30°$

  $\Rightarrow \Delta SAE \cong \Delta ACE$ (ALA)

  $\Rightarrow AS = AC$

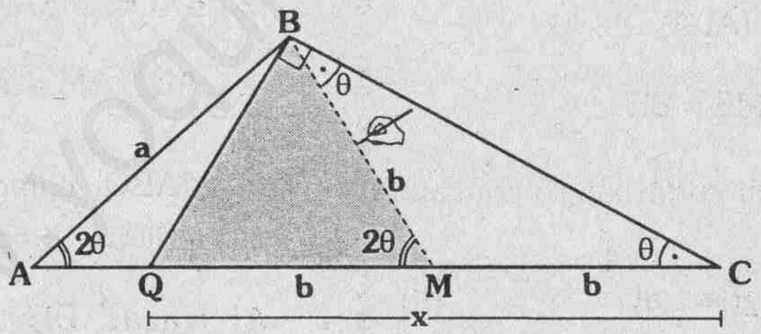
- Al trazar $\overline{CS}$ el ΔASC resultar ser equilátero.
- ΔSCB : isósceles $\Rightarrow SC = CB = a$
- $⊿ACB$: $AC = CB \Rightarrow 30° + x = 45°$



$\therefore$ **x = 15°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 92



- Piden x, en función de "a".
- En el $⊿QBC$, se traza la mediana $\overline{BM}$, entonces: $QM = MC = MB$
- ΔMBC es isósceles

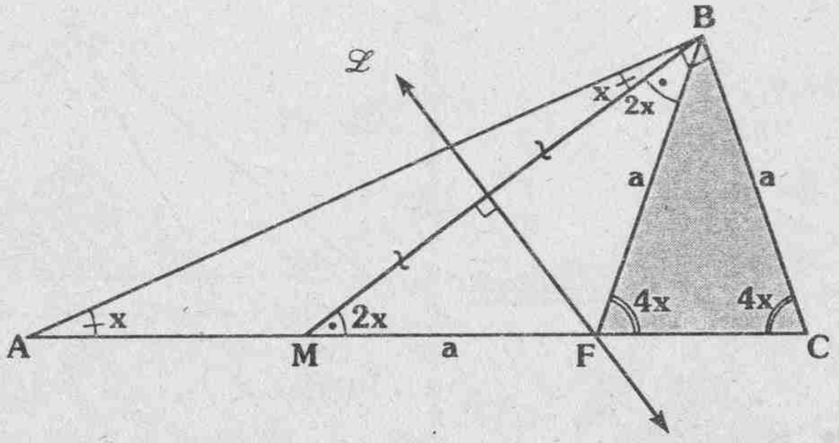
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle MBC = \theta$ y $m\measuredangle BMQ = 2\theta$

- ΔABM : isósceles $\Rightarrow a = b$

$\therefore$ **x = 2a**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 93



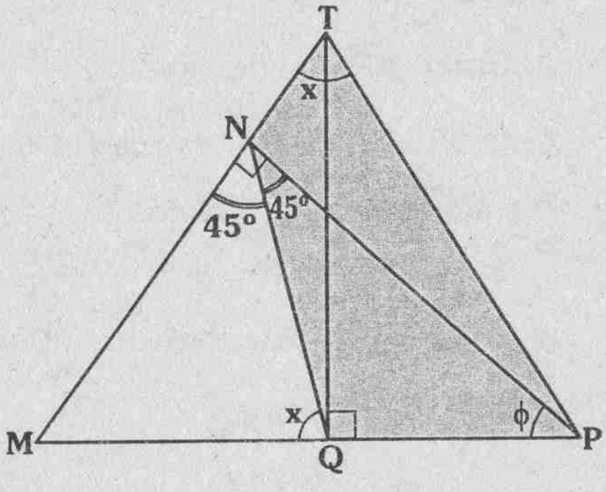
- Nos piden **x**.
- Como $\overline{BM}$ es mediana del ⊿ ABC ⇒ AM = MC = MB ,

  con ello: m∢MAB = m∢ABM = x
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{MB}$, por teorema: FM = FB
- △FBC : isósceles ⇒ m∢BFC = m∢FCB = 4x
- ⊿ABC: x + 4x = 90°

$$\therefore \mathbf{x = 18°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 94



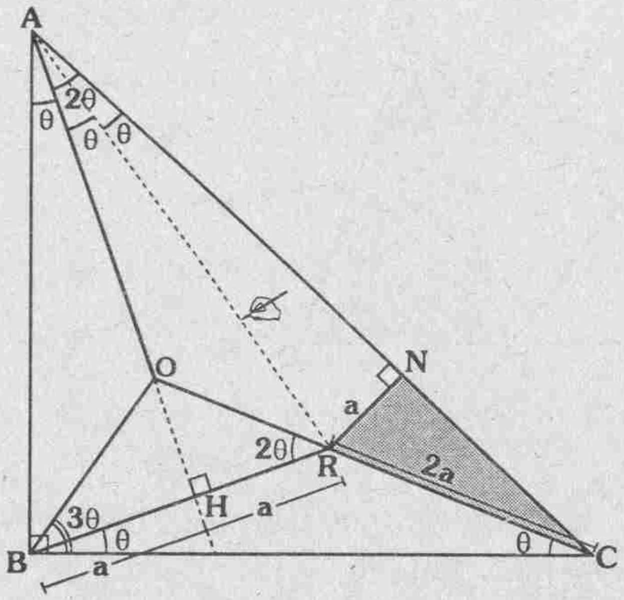
- Piden x, en función de ϕ .
- Por lo analizado en en la pág. 58
- Se tendrá:

  m∢MQN = x
- En △NQP :

  $\mathbf{x = 45° + \phi}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 95



- Piden θ.
- En $\triangle AOC$, como:

$$m\sphericalangle OBC = 3(m\sphericalangle BCC)$$

nos conviene trazar $\overline{BR}$ tal que: $m\sphericalangle CBR = \theta$, entonces: $\triangle BRC$ y $\triangle BOR$ son isósceles.

- Luego: $BR = RC$ y $BO = OR$
- Al prolongar $\overline{AO} \Rightarrow \overline{AO} \perp \overline{BR}$
- $\triangle BOC$: $BH = HR$
- Al trazar $\overline{AR}$, tendremos:

$$AB = BR \Rightarrow m\sphericalangle BAH = m\sphericalangle HAR = \theta$$

- Por teorema de la bisectriz:

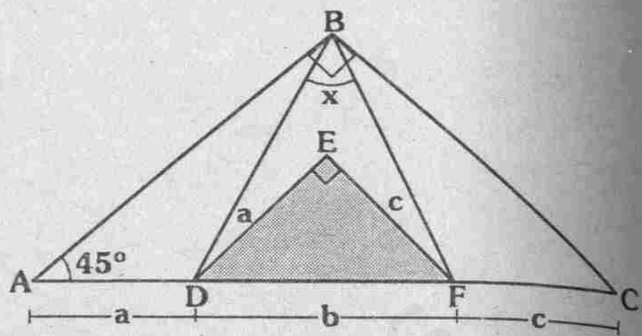
$$HR = RN = a$$

- $⊿$ RNC : notable $\Rightarrow m\sphericalangle RCN = 30°$
- $⊿$ABC: $4\theta + 30° = 90°$

$$\boldsymbol{\theta = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 96

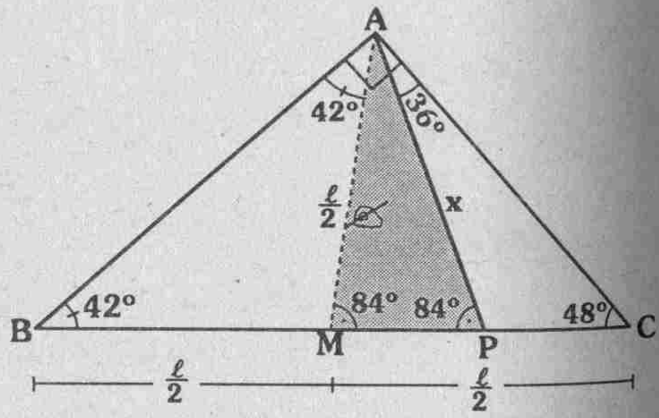


- Piden **x**.
- $⊿$DEF: $a^2 + c^2 = b^2$
- Por teorema (pág. 35 y 36)

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 97



- Piden **x**, en función de ℓ.
- En $⊿$BAC, se traza la mediana $\overline{AM}$, por teorema:

$$BM = MC = MA = \frac{\ell}{2}$$

- $\triangle AMB$, por ángulo exterior:

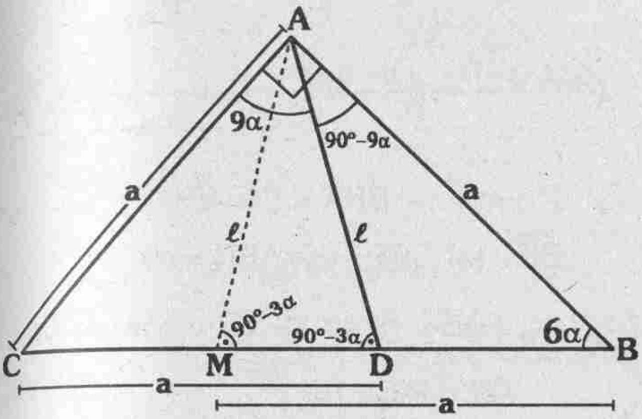
$$m\sphericalangle AMP = 84°$$

- ΔMAP : isósceles

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\ell}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 98



- Dato: $m\measuredangle ABD = 3\theta$ y

$$m\measuredangle DAC = \frac{9\theta}{2}$$

- Nos piden: θ
- Hagamos: $\theta = 2\alpha$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABD = 6\alpha \quad y$$
$$\Rightarrow m\measuredangle DAC = 9\alpha$$

- Como: $m\measuredangle ABM = 6\alpha$ y

$$m\measuredangle ADC = 90° - 3\alpha$$

- Se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\measuredangle AMD = 90° - 3\alpha$$

$\Rightarrow \Delta MAD$ y $\Rightarrow \Delta MAB$: isósceles

- Luego:

$\Delta CDA \cong \Delta BMC$ (LAL) $\Rightarrow AC = a$

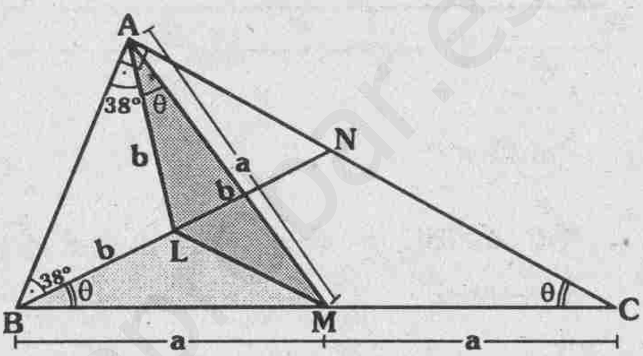
- ⊿CAB: isósceles $\Rightarrow 6\alpha = 45°$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{15°}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{\theta = 15°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 99



- Piden: $m\measuredangle LAM$
- En los triángulos ABC y ABN, $\overline{AM}$ y $\overline{AL}$ son medianas, por teorema:

$$BM = MC = AM = a \quad y$$
$$BL = LN = AL = b$$

- ΔBLA : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle LAB = 38°$$

- ΔAMB : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle LAM = \theta$$

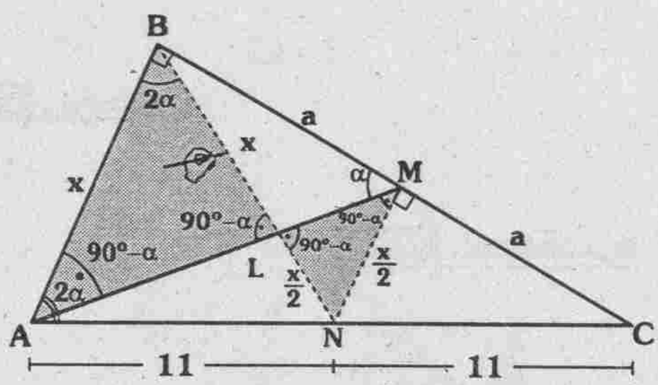
- ⊿ABC:

$$38° + 2\theta = 90°$$

$$\therefore \theta = \mathbf{26°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 100



- Piden **x**.
- En ⊿ABC, se traza la mediana $\overline{BN}$, entonces:

$$AN = NC = BN = 11$$

- También:

$$m\sphericalangle ABN = m\sphericalangle DAN = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \ \Delta ABL: \text{ isósceles} \Rightarrow BL = x$$

- En ⊿ABC, $\overline{NM}$ es base media, luego:

$$MN = \frac{x}{2} \quad y \quad \overline{MN} // \overline{AB}$$

- ΔLMN: isósceles $\Rightarrow LN = \dfrac{x}{2}$

$$x + \frac{x}{2} = 11$$

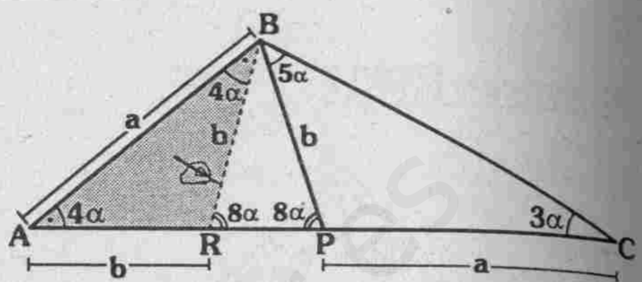
$$\therefore \ x = \frac{22}{3}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 101

Nos piden $m\sphericalangle PBC$.

Paso 1

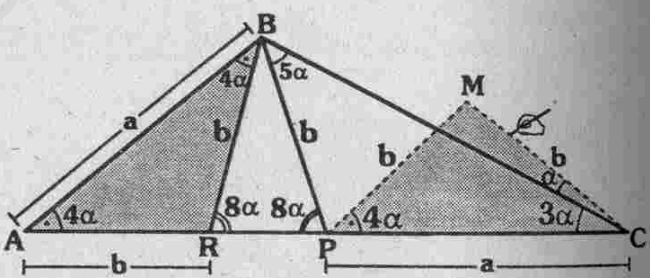


- Como $m\sphericalangle BPA = 2(m\sphericalangle BAP)$, se traza $\overline{BR}$, tal que: $m\sphericalangle ABR = 4\alpha$

$$\Rightarrow \Delta ABR \ y \Rightarrow \Delta RBP: \text{ isósceles}$$

$$AR = RB = BP$$

Paso 2

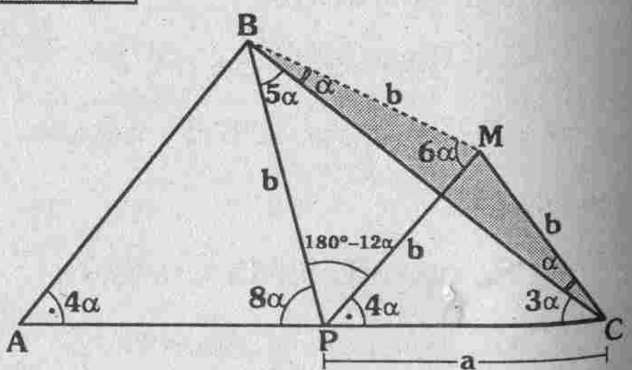


- Como $AB = PC$ entonces construimos:

$\Delta PMC \cong \Delta ARB \ \Rightarrow \ PM = MC = b \quad y$

$m\sphericalangle MPC = m\sphericalangle MCP = 4\alpha$

Paso 3



- Como $m\sphericalangle BPM = 180° - 12\alpha$ y ΔBPM es isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle PBM = m\sphericalangle PMB = 6\alpha$$

- Luego: $m\sphericalangle MBC = \alpha$

- ΔBMC : isósceles

$$\Rightarrow BM = MC = b$$

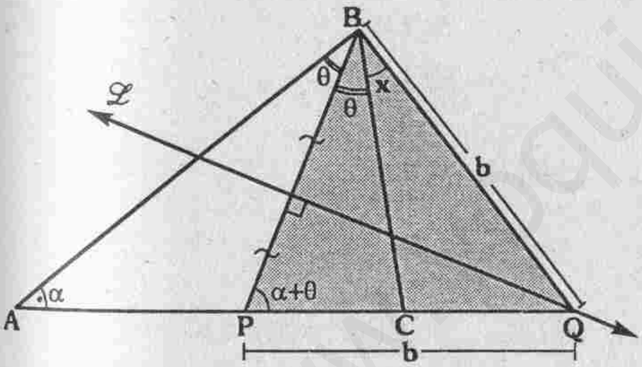
- ΔPBM : equilátero

$$\Rightarrow 6\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 10°$$

$$\therefore \mathbf{m\sphericalangle PBC = 50°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 102



- Piden **x** en función de α .

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{PB}$, por teorema:

$$QB = QP \;\Rightarrow\; \Delta PQB \text{ es isósceles}$$

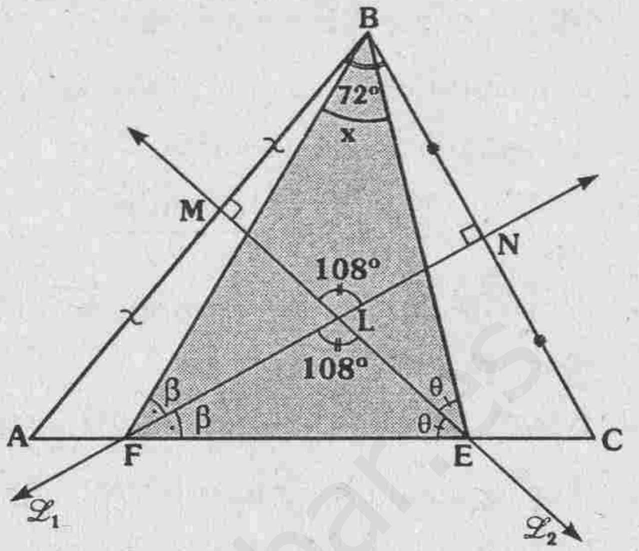
$$\Rightarrow m\sphericalangle PBQ = m\sphericalangle BPQ$$

$$x + \theta = \alpha + \theta$$

$$\therefore \mathbf{x = \alpha}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 103



- Piden **x**.

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente

$$\Rightarrow EA = EB \quad y \quad FB = FC$$

- ΔFBC y ΔAEB : isósceles $\Rightarrow \overline{EM}$ y $\overline{FN}$

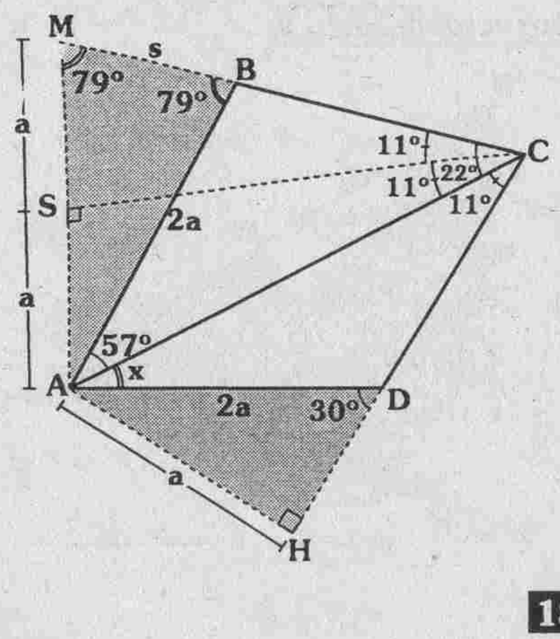
- Son también bisectrices:

- $\Delta FBC: \; 90° + \dfrac{x}{2} = 108°$

$$\therefore \mathbf{x = 36°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 104



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{CB}$ verificamos:

$$m\measuredangle SBA = 79° \quad y \quad m\measuredangle ACB = 22°$$

se tiene la siguiente forma:

$$m\measuredangle SBA = 90° - \frac{m\measuredangle ACB}{2}$$

- Por ello nos conviene trazar $\overline{AM}$ tal que: $m\measuredangle AMB = 79°$
- ΔMAB y ΔMBA : isósceles $\Rightarrow AM = AB$
- Por teorema de la bisectriz: $AS = AH$
- ⊿AHD: notable de 30°

$$\Rightarrow \quad x + 11° = 30°$$

$$\therefore \mathbf{x = 19°}$$

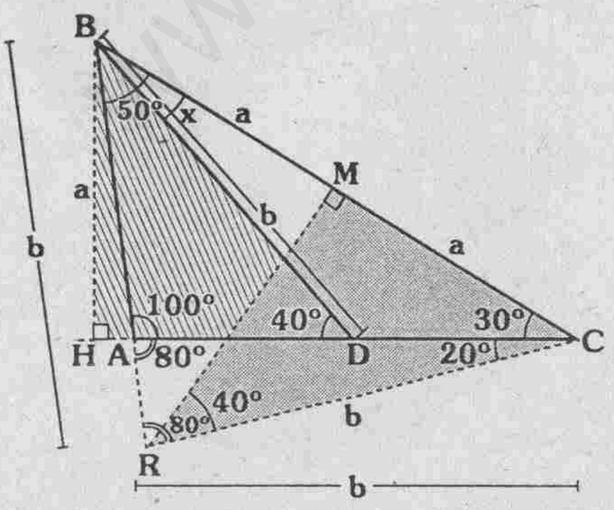
Clave C

Nota

Asi como en el problema 76 si consideramos $m\measuredangle ADC < 90°$ *tendremos otra respuesta con el mismo procedimiento.*

$$x = 139°$$

Resolución Nº 105



- Piden **x**.
- Cuando prolongamos $\overline{BA}$ nos damos cuenta:

$$m\measuredangle CAR = 80° \quad y$$

$$m\measuredangle ABC = 50°$$

aprovechemos la presencia de dichas medidas.

- Para ello, prolongamos $\overline{BA}$ hasta R tal que:

$$m\measuredangle CRA = 80° \Rightarrow \Delta CRA \text{ y } \Delta BRC$$

son isósceles, luego:

$$CA = CR = RB = b$$

- ΔBRC: se traza $\overline{RM} \perp \overline{BC}$

$$\Rightarrow BM = MC$$

- ⊿BHC: notable de 30°

$$\Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = a$$

- ⊿BHD ≅ CMR

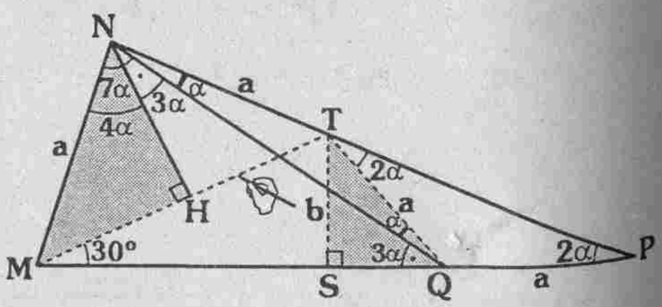
$$\Rightarrow m\measuredangle HDB = 40°$$

- ΔDBC: $x + 30° = 40°$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave B

Resolución Nº 106



- Piden: $m\sphericalangle NPM$
- En ΔQPN, como:

$$m\sphericalangle QPN = 2(m\sphericalangle QNP)$$

nos conviene trazar $\overline{QT}$ tal que:

$$m\sphericalangle TQN = \alpha$$

$\Rightarrow$ ΔNTQ y ΔTQP : isósceles

- Asi tenemos: $QP = QT = TN = NM$
- En ΔMNT se traza la altura $\overline{NH}$, la cual es bisectriz y mediana

$\Rightarrow$ $MH = HT = b$

- En ΔMTQ, se traza la altura TS, ahora tendremos:

$\measuredangle HMN \cong \measuredangle STQ \Rightarrow TS = b$

- $\measuredangle MST$: notable de 30°
- ΔMTS, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle MTN = 30° + 2\alpha$$

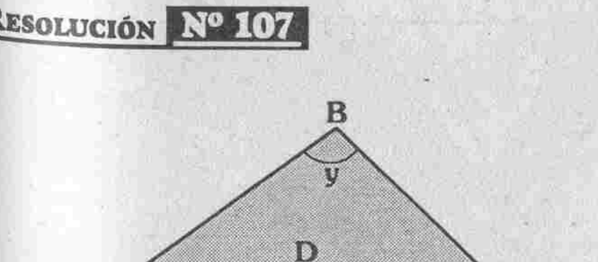
- $\measuredangle NHT$:

$$4\alpha + 30° + 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 10°$$

$\therefore$ **$m\sphericalangle NPM = 20°$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 107



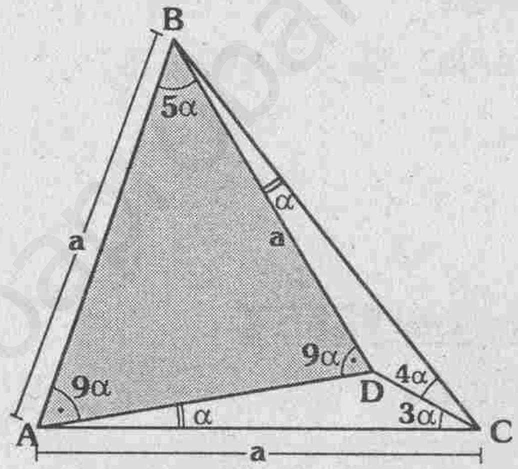
- Piden: $x + y$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo (pág 46–47):

$$y = 120° - x$$

$\therefore$ **$x + y = 120°$**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 108



- Piden: $m\sphericalangle BAC$
- En $\measuredangle ACBD$:

$$m\sphericalangle ADB = 9\alpha$$

$$\Rightarrow AB = BD$$

- ΔABC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle DB = 9\alpha$

$$\Rightarrow 9\alpha + 9\alpha + 5\alpha = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{15°}{2}$$

$\therefore$ **$m\sphericalangle BAC = 75°$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 109

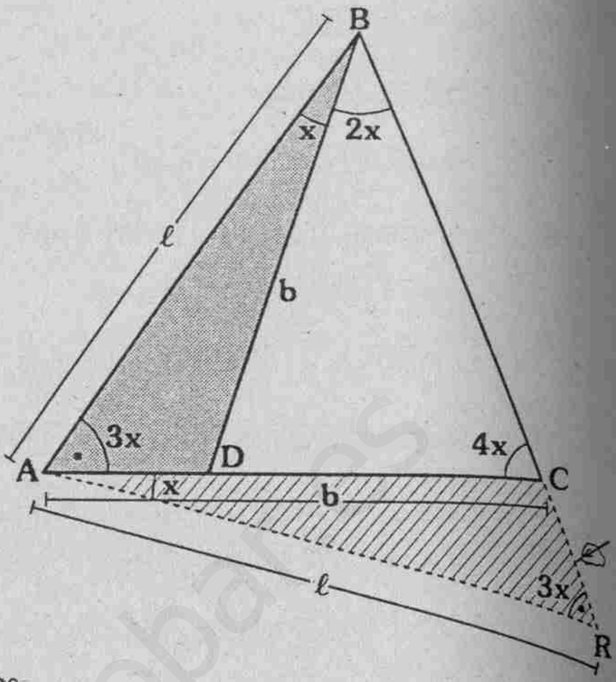
- Piden **x**.
- Como $BD = AC$ y dada la relación de medidas angulares, nos conviene prolongar $\overline{BC}$ y trazar $\overline{AR}$ tal que:

$$m\sphericalangle CAR = x \Rightarrow m\sphericalangle ARC = 3x$$

- Luego:

$$\triangle ABR:\ \text{isósceles} \Rightarrow AB = AR$$

- $\triangle ABD \cong \triangle RAC$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle DAB = 3x$
- $\triangle ABC:\ 3x + 3x + 4x = 180°$



$$\therefore\ \mathbf{x = 18°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 110

- Piden **x**.
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, por teorema:

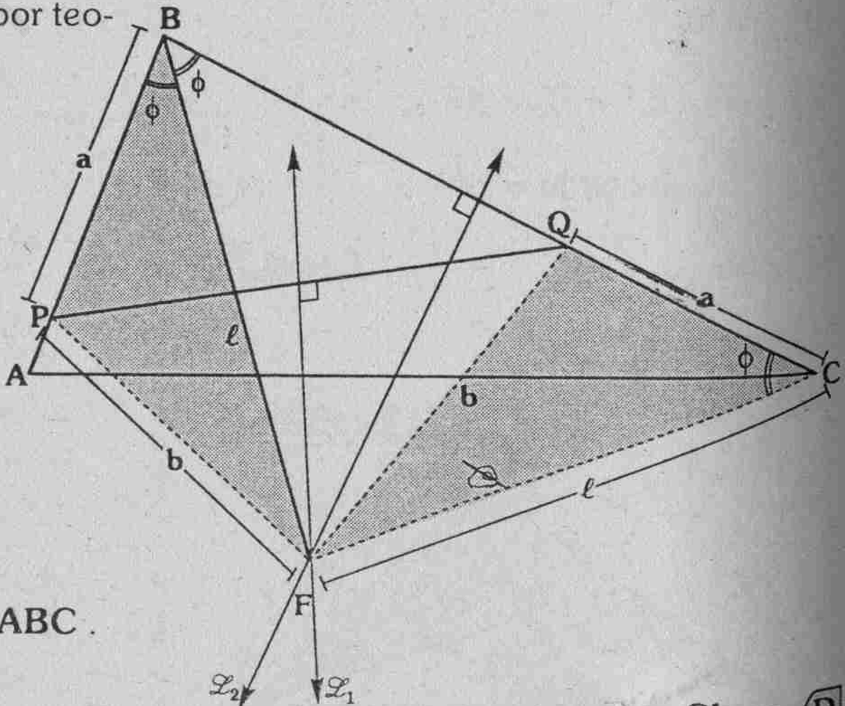
$$FP = FQ \quad \text{y}$$
$$FB = FC$$

- $\triangle FBC$: isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle FBC = m\sphericalangle FCB = \phi$$

- $\triangle PBF \cong \triangle QCF$ (LLL)

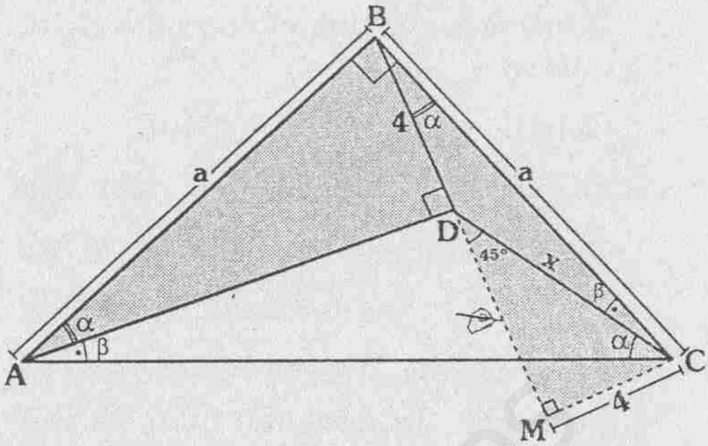
$$\Rightarrow m\sphericalangle FBP = \phi$$



$$\therefore\ \overrightarrow{\mathbf{BF}}\ \textbf{es bisectriz del} \sphericalangle \mathbf{ABC}.$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 111



- Nos piden **x**.
- De los datos: $\alpha + \beta = 45°$
- ⊿ ABD ≅ ⊿ BCM (ALA)

$\Rightarrow MC = BD = 4$

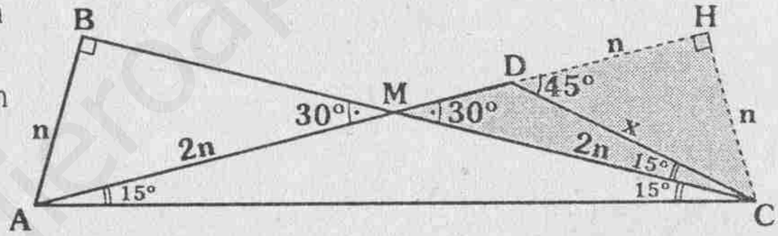
- ⊿DCM: notable de 45°

$$\therefore\ \mathbf{x = 4\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 112

- Piden **x**.
- ⊿ABM: notable de $30 \Rightarrow AM = 2n$
- ⊿AMC: isósceles $\Rightarrow AM = MC = 2n$
- ⊿MHC: notable de $30° \Rightarrow HC = n$
- ⊿BHC: notable de 45°



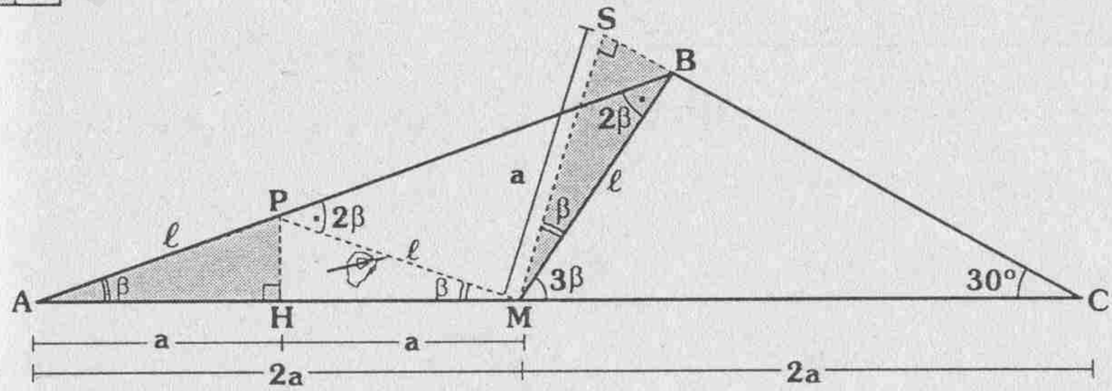
$$\therefore\ \mathbf{x = n\sqrt{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 113

Este problema tiene dos soluciones:

Solución 1



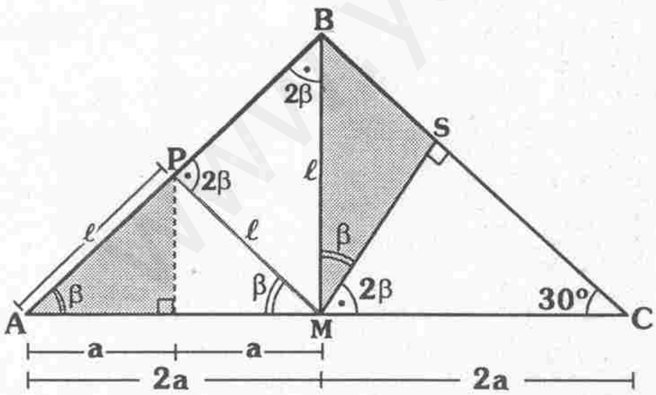
- Consideremos que el ángulo MBC es obtuso.
- Como: $m\sphericalangle MBA = 2(m\sphericalangle MAB)$ entonces se traza $\overline{MP}$ tal que $m\sphericalangle AMP = \beta$, luego ΔAPM y ΔPMB son isósceles.
- En el triángulo APM, se traza la altura $\overline{PH}$, la cual también es mediana (AH=HM=a).
- Se traza $\overline{MS} \perp \overleftrightarrow{BC}$, pues ⊿MSC es notable de 30°, entonces $MC = 2(MS)$
- ⊿AHP ≅ ⊿MSB ⇒ $m\sphericalangle SMB = \beta$
- Luego:

$$4\beta = 60^\circ$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\beta = 15^\circ}$$

Solución 2

- Ahora consideremos $m\sphericalangle MBC < 90^\circ$, el procedimiento es análogo:



$$m\sphericalangle MBC < 90^\circ \Rightarrow S \in \overline{BC}$$

- Luego: $2\beta = 60^\circ$

$$\therefore\ \boldsymbol{\beta = 30^\circ}$$

Nota

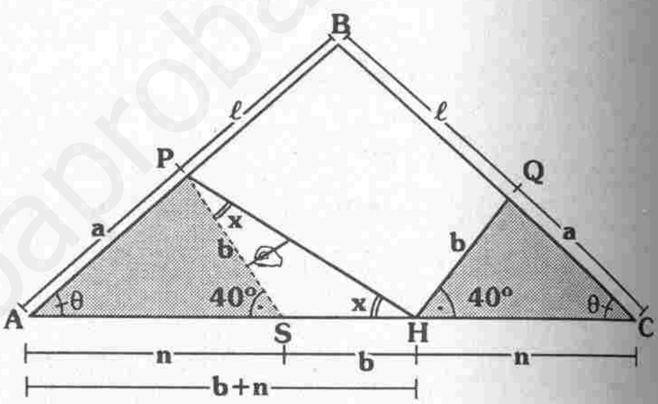
El caso en que $m\sphericalangle MBC = 90^\circ$, está descartado pues $a \neq \ell$.

- De ambas soluciones, tenemos:

$$\boldsymbol{\beta = 15^\circ \text{ ó } \beta = 30^\circ}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 114



- Piden **x**.
- Por dato: $AB = BC$ y $PB = BQ$, entonces: $AP = QC$
- Como $AH = b + n$, se ubica S en $\overline{AH}$ tal que $AS = n$, así tenemos:

$$\Delta SAP \cong \Delta HCQ \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow PS = HQ$$

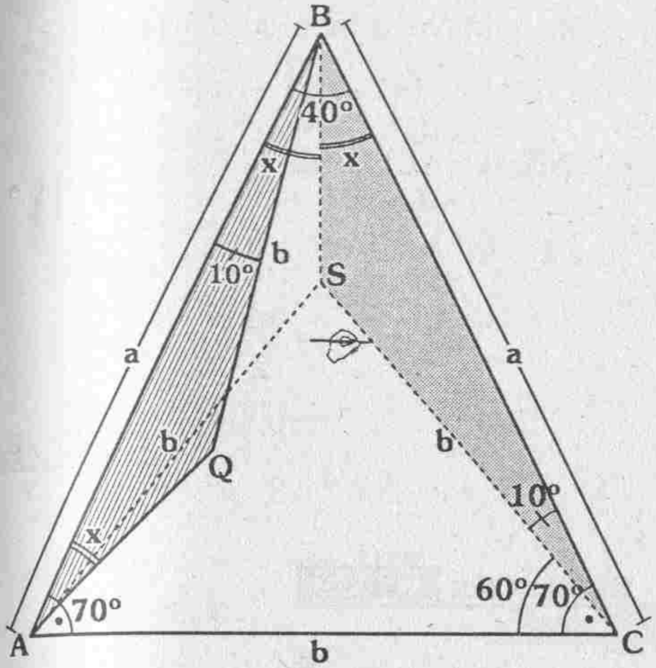
- ΔPSH es isósceles, luego:

$$x + x = 40^\circ$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 20^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 115



- Piden **x**.
- Como el ΔABQ tiene dos lados que miden "a" y "b" y el ángulo entre ellos mide 10°, se busca un triángulo congruente a él.
- Se traza $\overline{CS}$ tal que $m\measuredangle SCB = 10°$ y $SC = b$, con ello

$\Delta ABQ \cong \Delta BCS$ (LAL)

$\Rightarrow m\measuredangle SBC = x$

- Como $SC = CA$ y $m\measuredangle SCA = 60°$

$\Rightarrow$ ΔASC es equilátero

- Debido a que:

$AB = BC$ y

$AS = SC$

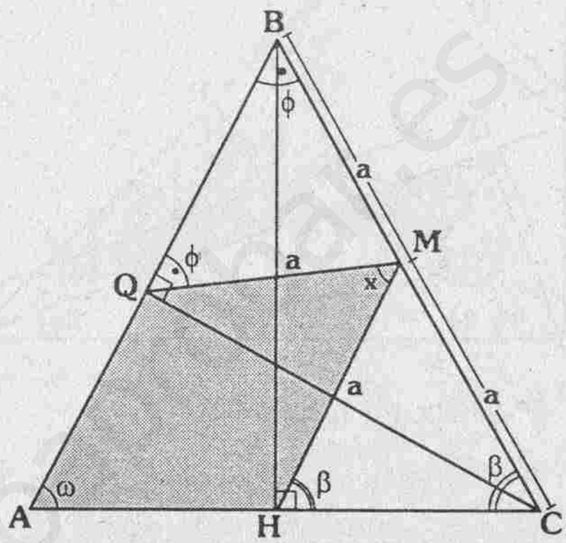
$\Rightarrow m\measuredangle ABS = m\measuredangle SBC = x$

$\Rightarrow x + x = 40°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 20°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 116



- Piden **x** en función de ω.
- Como M es punto medio de $\overline{BC}$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa, en
- ⊿BQS y ⊿BHC:

$MB = MC = MQ = MH$

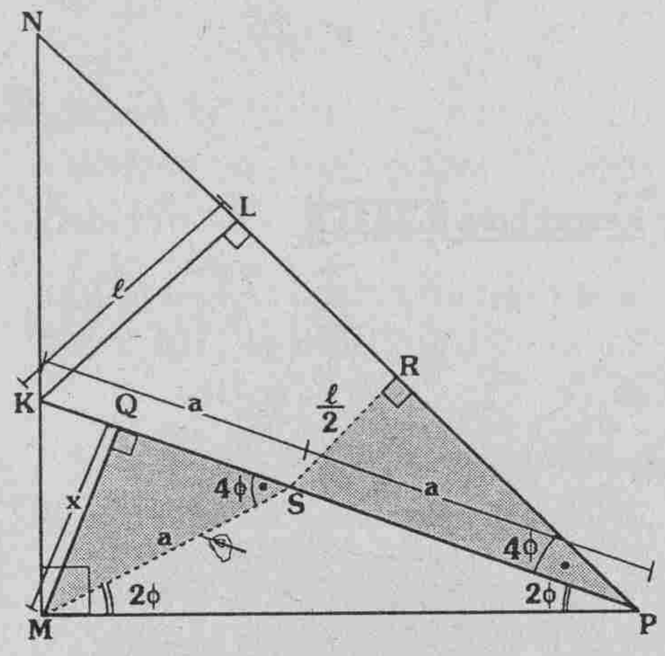
- ΔBQM y ΔHMC: isósceles
- ⊿: $x + \omega = \phi + \beta$
- ΔABC: $\underbrace{\phi + \beta} + \omega = 180°$

$x + \omega + \omega = 180°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 180° - 2\omega}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 117



- Piden **x** en función de ℓ.
- En $\triangle$PMK se traza la mediana $\overline{MS}$, por teorema $KS = SP = MS = a$.
- En $\triangle$KLP, se traza $\overline{SR} \perp \overline{NP}$, por teorema de la base media:

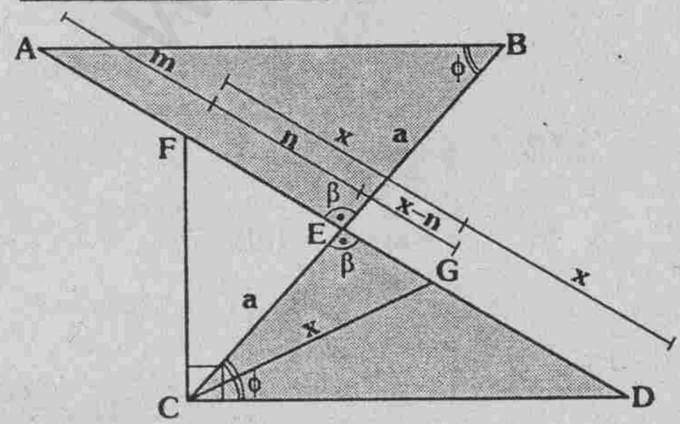
$$SR = \frac{\ell}{2}$$

- En $\triangle MSQ \cong \triangle SPR$ (ALA)

$$\therefore\ \mathbf{x} = \frac{\ell}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 118



- Piden **x**.
- En $\triangle$FCD, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$FG = GD = CG = x$$

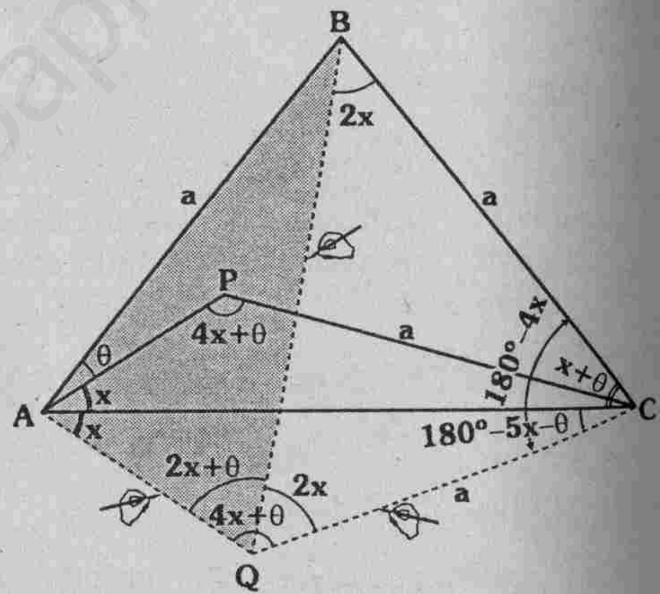
- $\Delta BEA \cong \Delta CED$ (ALA)

$$\Rightarrow\ x + x - n = m + n$$

$$\therefore\ \mathbf{x = n + \frac{m}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 119



- Nos piden **x**.
- Trazamos el triángulo AQC congruente con el triángulo BQC, tal que:

$$m\measuredangle PAC = m\measuredangle QAC\ ;$$

$$m\measuredangle APC = m\measuredangle AQC = 4x + \theta$$

$$\Rightarrow\ QC = PC = a$$

- Al completar "ángulos", notemos:

$m\measuredangle ACQ = 180° - 5x - \theta$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle QCB = 180° - 4x$

- Como $QC = CB$

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle CQB = m\measuredangle QBC = 2x$

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BQA = 2x + \theta$

- $\triangle ABQ$: isósceles

  $\Rightarrow \quad AB = BQ = a$

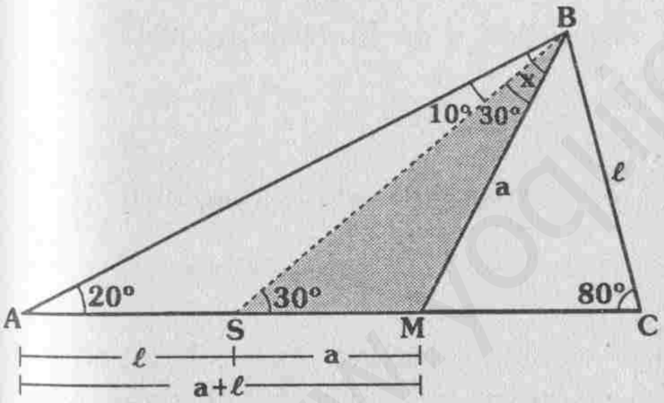
- $\triangle QBC$: equilátero:

  $2x = 60°$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$

Clave A

Resolución Nº 120



- Piden **x**.
- Como $\triangle ABC$ isósceles donde:

  $m\measuredangle A = 20$ y $m\measuredangle C = 80°$,

  se ubica S en $\overline{AM}$ tal que $AS = \ell$, (ver pag. 57 y 58) entonces:

  $m\measuredangle ABS = 10° \Rightarrow m\measuredangle BSC = 30°$

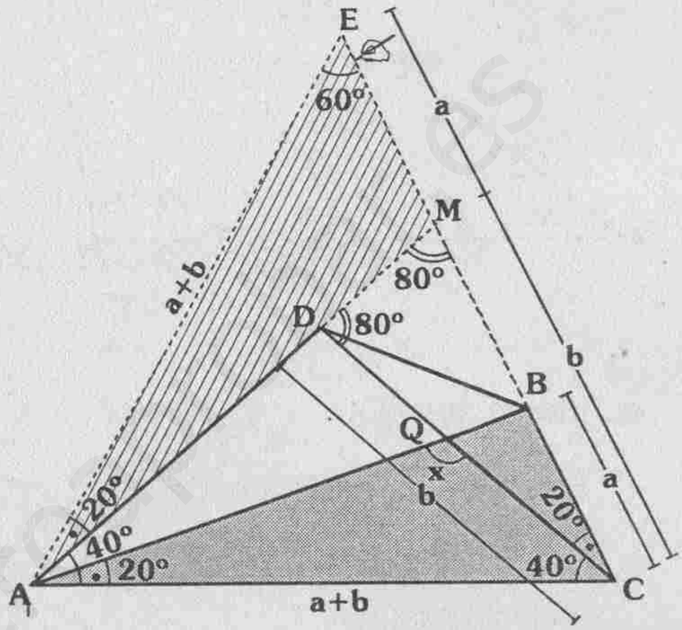
- Como $AM = a + \ell \Rightarrow SM = a$, luego $\triangle SMB$ es isósceles

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle SBM = 30°$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$

Clave B

Resolución Nº 121



- Piden **x**.
- Con $m\measuredangle ACD = 60°$ y el $\triangle DCM$ resulta ser isósceles, con $DC = CM = b$, nos conviene prolongar $\overline{CM}$ hasta "E" tal que $MB = a$, entonces:

  $\triangle AEC$ es equilátero

  $\triangle AEM \cong \triangle ACB$ (LAL)

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BAC = 20°$

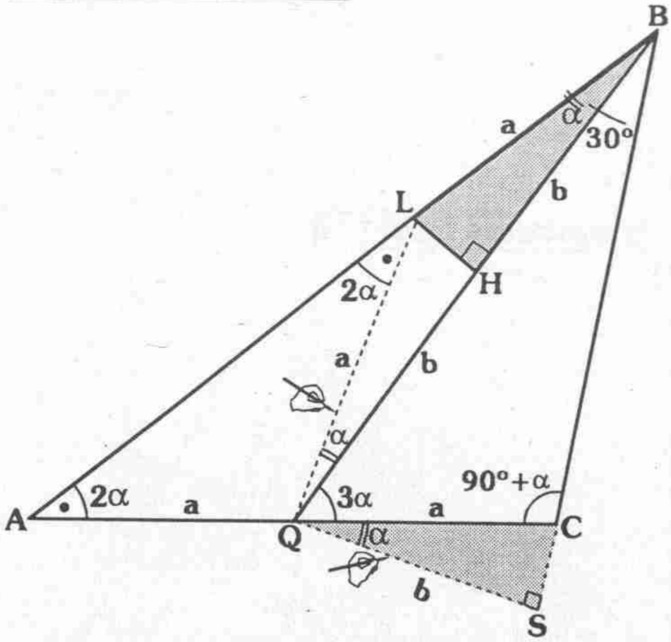
- $\triangle AQC$:

  $x + 20° + 40° = 180°$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 120°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 122



- Piden: $m\measuredangle BQC$
- En ΔAQC : $m\measuredangle BQC = 3\alpha$
- Como $m\measuredangle BAQ = 2(m\measuredangle QBA)$, trazamos $\overline{QL}$ tal que :

  $m\measuredangle LQB = \alpha \Rightarrow AQ = QL = LB = a$
- En ΔQLB, se traza la altura $\overline{LH}$, luego $QH = HB = b$.
- Se traza:

  $\overline{QS} \perp \overline{BC} \Rightarrow m\measuredangle CQS = \alpha$
- ⊿ QSC ≅ ⊿ LHB (ALA) $\Rightarrow QS = b$
- ⊿BSQ: notable de 30°

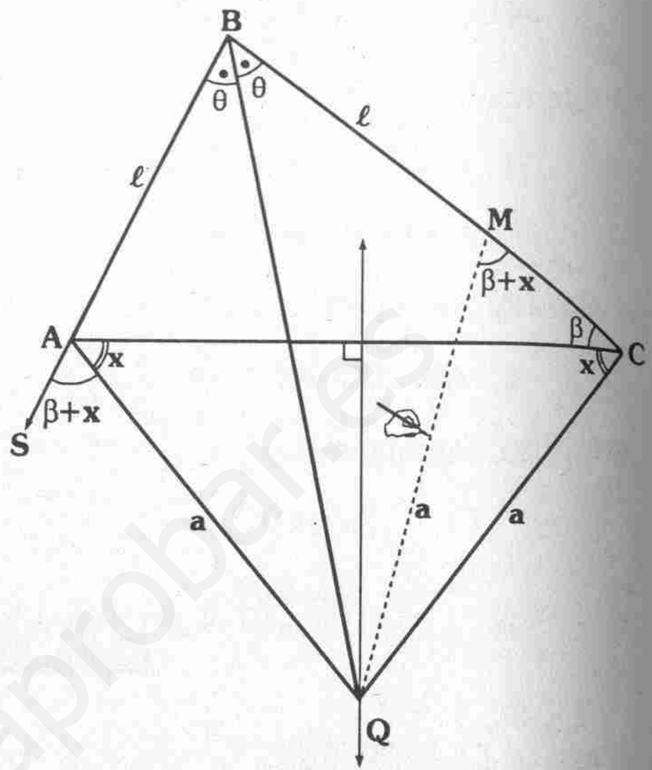
  $\Rightarrow 4\alpha = 60°$

  $\alpha = 15°$

  $\therefore$ **$m\measuredangle BQC = 45°$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 123



- Piden **x** en función de $m\measuredangle B$.
- Sea $m\measuredangle B = 2\theta$
- Por teorema de la mediatriz:

  $QA = QC$
- Como el ΔABC es escaleno, consideremos (sin pérdida de generalidad) que $BC \geq AB$.
- Se ubica M en $\overline{BC}$, tal que $BM = BA$

  $\Delta ABQ \cong \Delta MBQ$ (LAL) $\Rightarrow QM = a$
- ΔQMC : isósceles
- Por la congruencia:

  $m\measuredangle QMC = m\measuredangle QAS = \beta + x$
- En ΔABC :

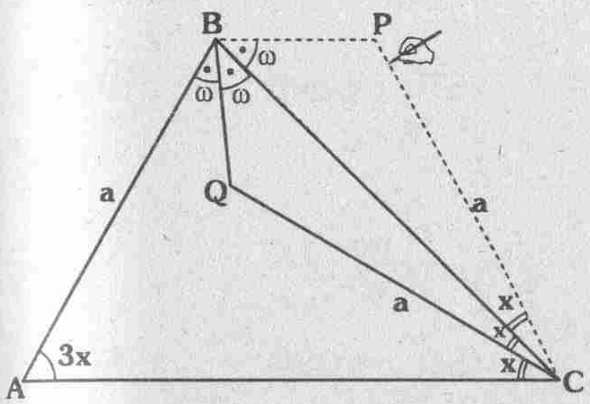
$$\beta + 2x = \beta + 2\theta$$

$$\Rightarrow x = \theta$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{m\sphericalangle B}{2}}$$

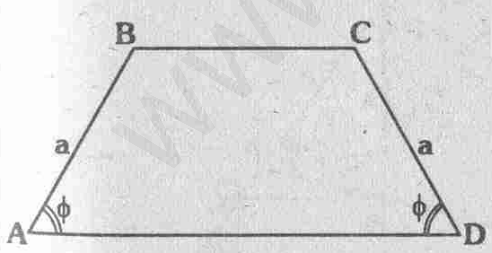
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 124



- Piden: $m\sphericalangle ABC$
- Como $m\sphericalangle BAC = 3x$ y $m\sphericalangle ACB = 2x$ y $AB = QC = a$, nos conviene trazar $\overline{CP}$ tal que $m\sphericalangle BCP = x$ y $CP = a$.
- $\Delta QCB \cong \Delta PCB$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle CBP = \omega$

Considerando:



Se cumple: $\overline{AD} // \overline{BC}$

(Ver pág. 77)

- En el problema, como $AB = CP$ y $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACP \Rightarrow \overline{AC} // \overline{BP}$
- Luego: $\omega = 2x$
- En ΔABC: $3x + 2x + 2\omega = 180°$

$$\Rightarrow x = 20°$$

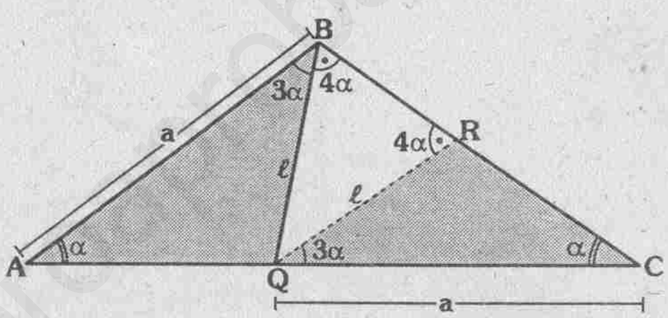
- Como: $m\sphericalangle ABC = 2\omega$

$$m\sphericalangle ABC = 4x$$

$$\therefore \ \mathbf{m\sphericalangle ABC = 80°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 125



- Piden: $m\sphericalangle BAC$.
- Dada la distribución de medidas angulares α; $\mathbf{3\alpha}$ y $\mathbf{4\alpha}$, nos conviene trazar $\overline{QR}$ tal que:

$$m\sphericalangle RQC = 3\alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QRB = 4\alpha$$

- $\Delta ABQ \cong \Delta CQR$ (LAL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAQ = \alpha$$

- ΔABC: $\alpha + 7\alpha + \alpha = 180°$

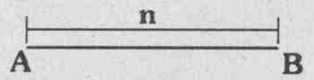
$$\Rightarrow \alpha = 20°$$

$$\therefore \ \mathbf{m\sphericalangle BAC = 20°}$$

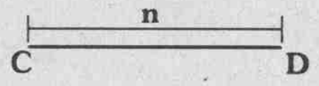
Clave D

Resolución Nº 126

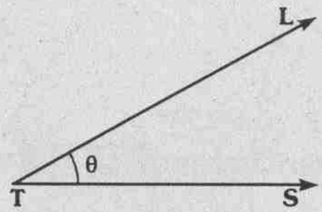
- Para indicar el valor de verdad de las proposiciones, hay que tener presente:



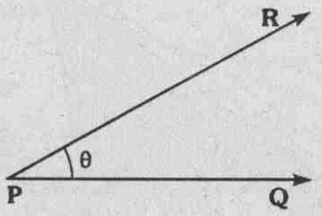
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ... (V)



$\overline{AB} = \overline{CD}$ ... (F)



$\sphericalangle STL \cong \sphericalangle QPR$ ... (V)



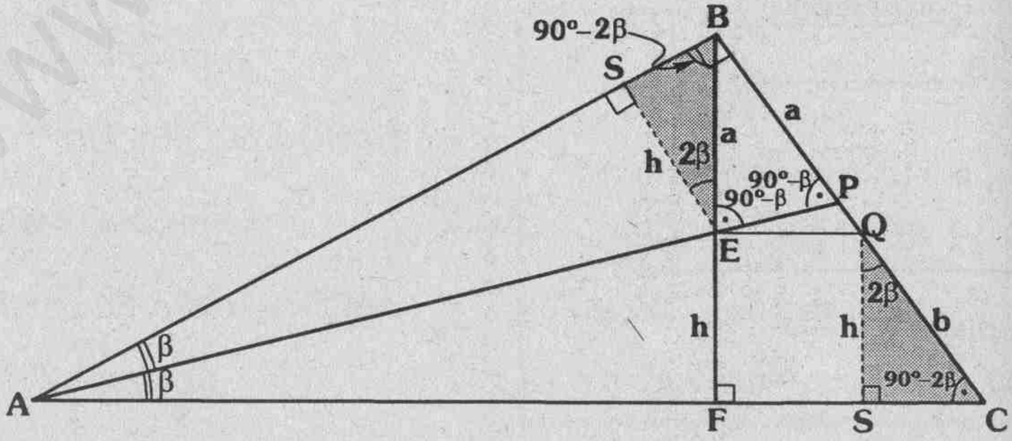
$\sphericalangle STL = \sphericalangle QPR$ ... (F)

- Con ello:

I) V **II)** F **III)** F **IV)** V

Clave B

Resolución Nº 127



- Sea BP = a y QC = b
- Nos piden la relación entre **a** y **b**.

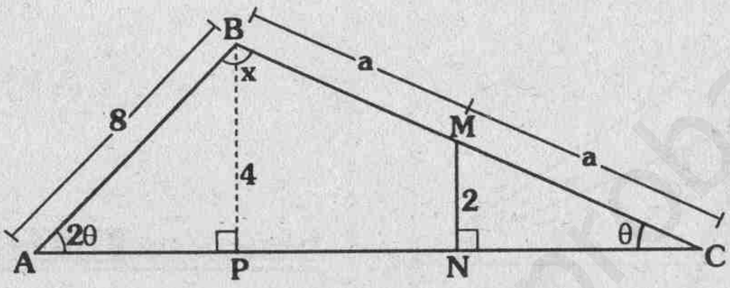
- $\triangle EBP$: isósceles $\Rightarrow BE = BP = a$
- Por teorema de la bisectriz: $ES = EF$

$$⊿ESB \cong ⊿QSC \text{ (ALA)} \Rightarrow a = b$$

$$\therefore \mathbf{BP = QC}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 128



- Piden **x**.
- $\triangle ABC: \ x + 3\theta = 180°$
- Se traza $\overline{BP} \perp \overline{AC}$, por base media en el $⊿PBC$: $BP = 4$
- $⊿APB$: notable de 30°

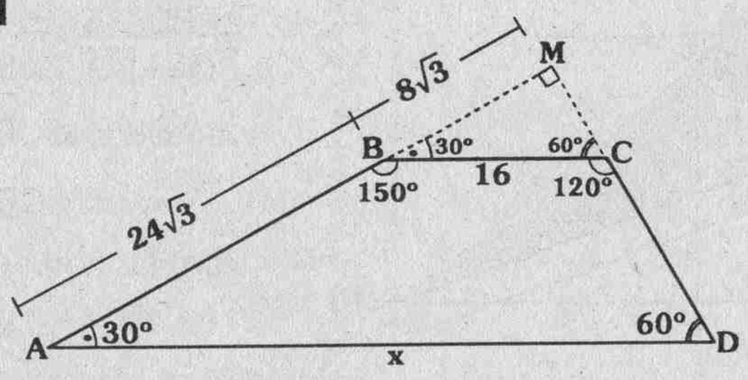
$$2\theta = 30° \Rightarrow \theta = 15°$$

- $x + 3(15°) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 129



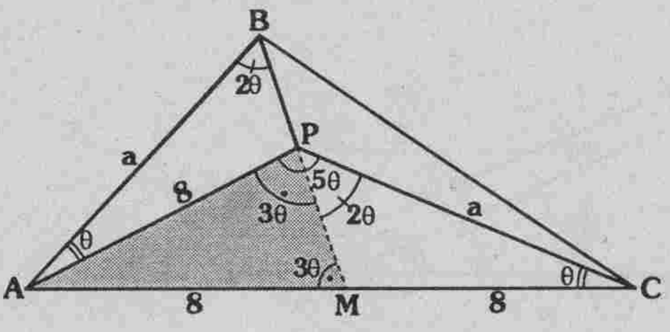
- Piden **x**.

- Del gráfico $\overline{AD}//\overline{BC}$
- $\measuredangle$BMC: notable de 30° $\Rightarrow BM = 8\sqrt{3}$
- $\measuredangle$AMD: notable, como $AM = 32\sqrt{3}$

$$\therefore\ \mathbf{x = 64}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 130

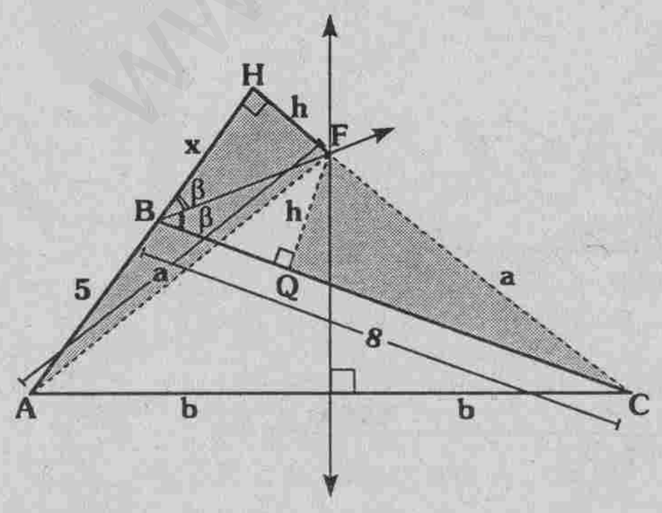


- Piden AC.
- Al prolongar $\overline{BP}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en M, nos damos cuenta.
- ΔAMP : isósceles $\Rightarrow AP = AM = 8$
- $\Delta ABP \cong \Delta CPM$ (ALA) $\Rightarrow MC = AP = 8$

$$\therefore\ \mathbf{AC = 16}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 131



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz: $FA = FC$
- Por teorema de la bisectriz:

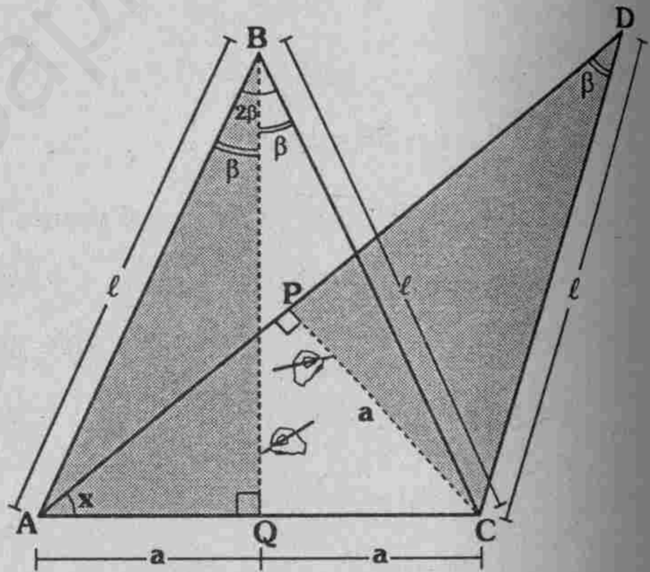
$$FH = FQ$$
$$BQ = x$$

- $\measuredangle AFH \cong \measuredangle CFQ \Rightarrow AH = CQ = x + 5$

$$\Rightarrow\ \underbrace{BC}_{} = CQ + BQ$$
$$8 = x + 5 + x$$
$$\therefore\ \mathbf{x = 1,5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 132



- Piden **x**.
- ΔABC: isósceles, se traza la altura $\overline{BQ} \Rightarrow \overline{BQ}$ es bisectriz y mediana.
- $\measuredangle AQB \cong \measuredangle CPD$ (ALA)

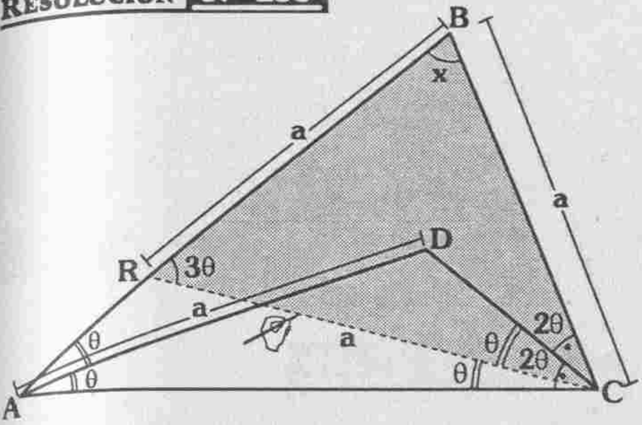
$$\Rightarrow CP = AQ = QC$$

- $\measuredangle$APC: notable

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 133



- Piden **x**.
- Al trazar $\overline{CR}$ tal que: $m\sphericalangle RCA = \theta$, se tiene:

ΔBRC : isósceles $\Rightarrow RB = BC$

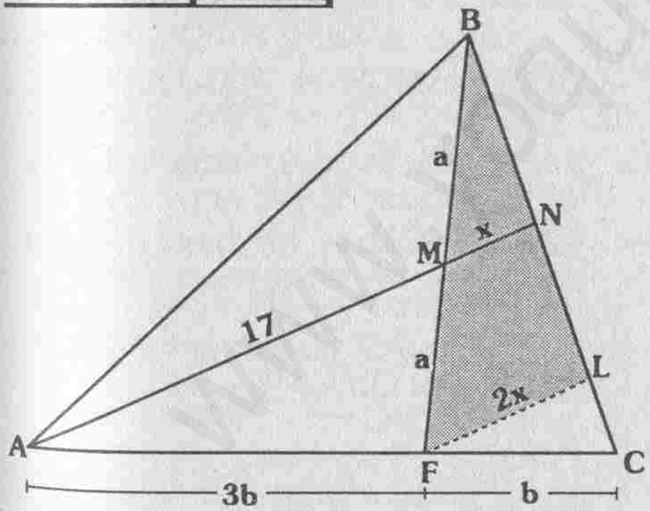
$\Delta RAC \cong \Delta BCA$ (ALA) $\Rightarrow RC = a$

- ΔRBC : equilátero

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 134



- Piden **x**.
- Como $BM = MF$, se traza $\overline{FL} // \overline{MN}$, entonces en el ΔFLB, $\overline{MN}$ es base media, luego: $FL = 2x$ y $\overline{FL} // MN$.
- En ΔANC, observamos: $\overline{FL} // \overline{AN}$ y

$AF = 3(FC) \Rightarrow AN = 8x$ ... (*ver nota*)

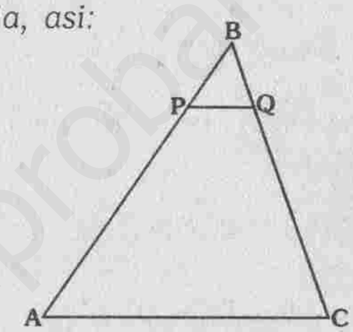
$$x + 17 = 8x$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{17}{7}}$$

Clave E

Nota

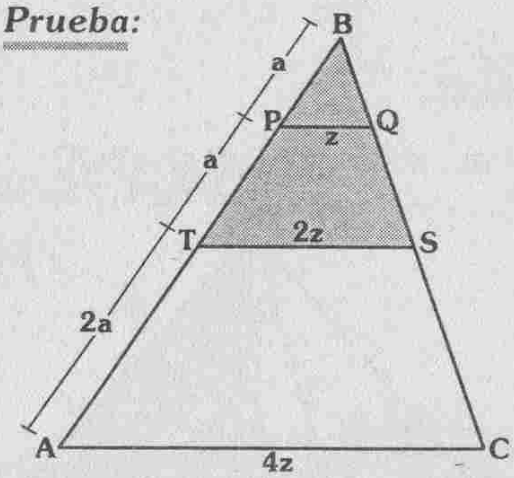
En el tema de semejanza de triángulos, se hará la prueba general pero en este caso se puede hacer la prueba con el teorema de la base media, así:



Si: $AP = 3(PB)$ *y*

$\overline{AC} // \overline{PQ} \Rightarrow AC = 4(PQ)$

Prueba:



Se ubica T en $\overline{AB}$, *tal que* $AT = TB$, *luego se traza:* $\overline{TS} // \overline{AC}$.

Por base media:

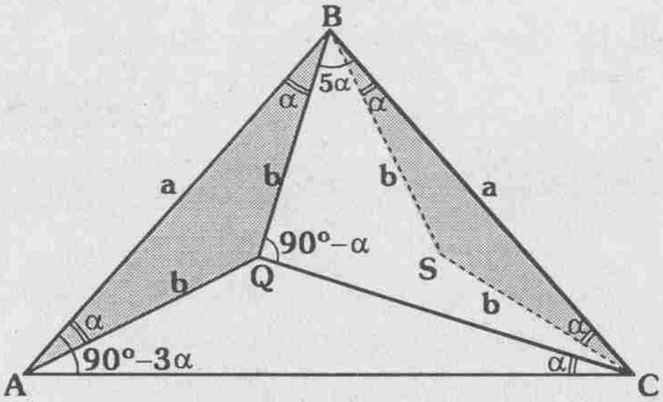
ΔTSB : $TS = 2(PQ)$

ΔABC : $AC = 2(TS)$

$\therefore\ AC = 4(PQ)$

RESOLUCIÓN Nº 135

Paso 1



- Piden: m∢BQC
- Se traza $\overline{BS}$ tal que m∢CBS = α y BS = BQ

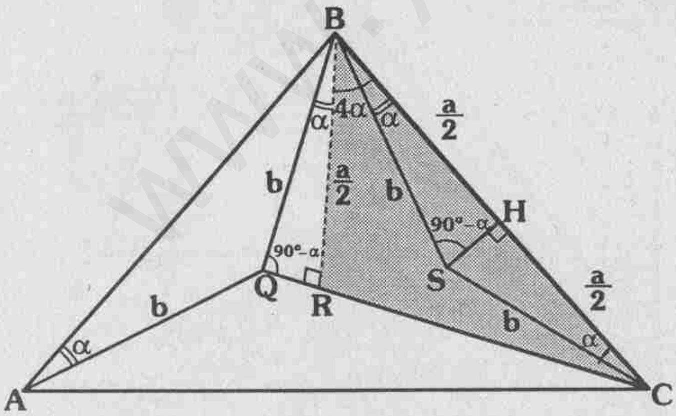
  ⇒ ΔABQ ≅ ΔCBS (LAL) ⇒ CS = b
- Como AB = BC y

  m∢ABC = 6α ⇒ m∢BAC = 90° − 3α

  ⇒ m∢BQC = 90° − α

Paso 2

- Trabajemos solo en el ΔBQC :



- Se trazan $\overline{BR} \perp \overline{QC}$ y $\overline{SH} \perp \overline{BC}$, como ΔBCS es isósceles con:

  BS = CS ⇒ BH = HC

- ⊿RBC: notable de 30°

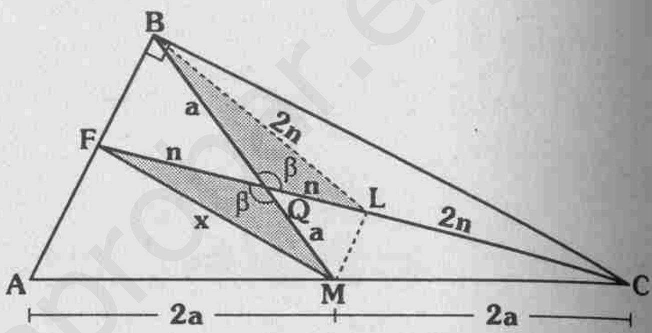
  ⇒ 4α = 60°

  ⇒ α = 15°

  ∴ **m∢BQC = 75°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 136



- Piden **x**.
- Dato: CQ = 12
- Se traza $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$
- ΔBQL ≅ ΔMQF ⇒ FQ = QL = n
- ΔAFC , $\overline{ML}$ es base media ⇒ FL = LC
- ⊿FBC : $\overline{BL}$ es mediana relativa a la hipotenusa ⇒ BL = 2n
- ΔFQM ≅ ΔLQB ⇒ x = 2n
- Como:

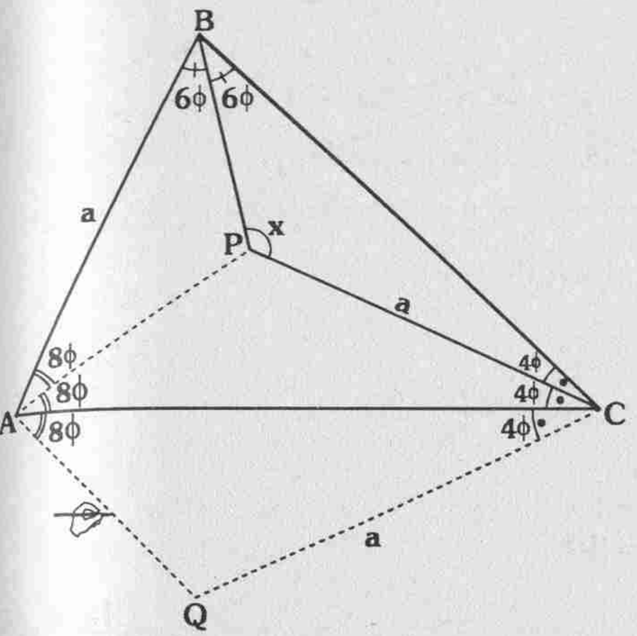
  3n = 12

  ⇒ n = 4

  ∴ **x = 8**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 137



- Piden **x**.
- En ΔPBC: $x + 10\phi = 180°$ ... (I)
- Se traza $\overline{CQ}$ tal que $CQ = a$ y $m\sphericalangle ACQ = 4\phi$
- Luego: $\Delta PCA \cong \Delta QCA$ (LAL)
- Como $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ACQ$ y $BA = CQ$

$$\Rightarrow \overline{AQ} // \overline{BC} \Rightarrow m\sphericalangle PAC = 8\phi$$

- Por la congruencia: $m\sphericalangle PAC = 8\phi$
- Por la observación (pág. 77)

$$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle CAP = 8\phi$$

- ΔABC: $16\phi + 12\phi + 8\phi = 180°$

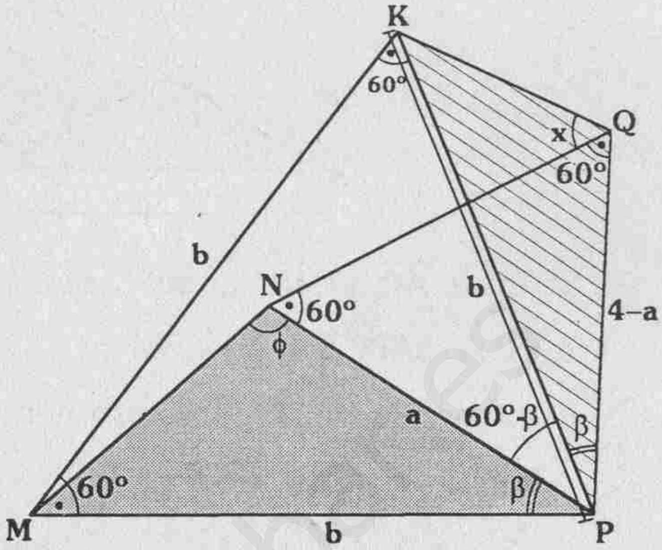
$$\Rightarrow \phi = 5°$$

- En (I): $x + 10(5°) = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 130°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 138



- Piden **x**.
- Como ΔMKP y ΔNQP son equiláteros, se tendrá:

$$\Delta NPM \cong \Delta QPK \text{ (LAL)}$$

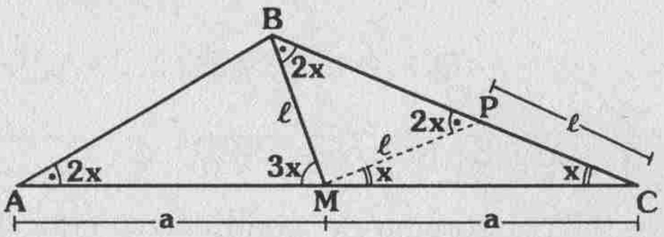
$$\Rightarrow x + 60° = \phi$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \phi - 60°}$$

Clave C

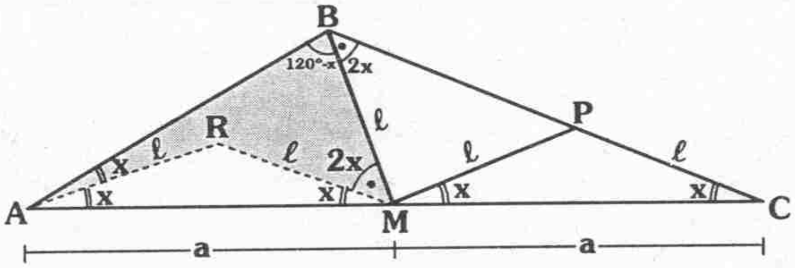
RESOLUCIÓN Nº 139

Paso 1



- Piden: $m\sphericalangle MBC$
- Como $m\sphericalangle MBC = 2(m\sphericalangle MCB)$ nos conviene trazar $\overline{MP}$ tal que $m\sphericalangle CMP = x$, entonces $MP = PC = MB$.

Paso 2

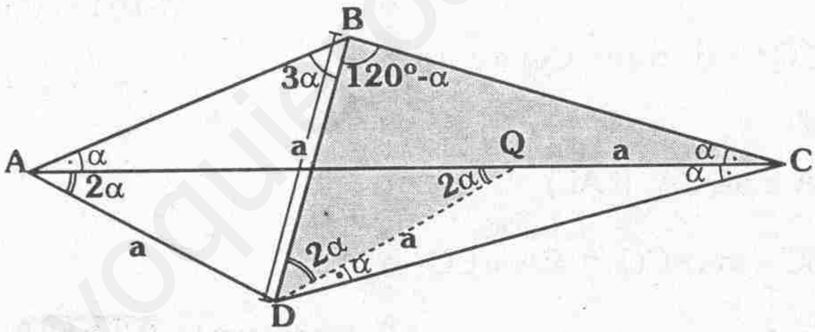


- Se traza $\overline{AR}$ y $\overline{MR}$ tal que: $m\measuredangle RAM = m\measuredangle AMR = x$
- $\Delta ARM \cong \Delta APC \Rightarrow AR = RM = \ell$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo: $m\measuredangle ABM = 120° - x$
- ΔABM: $2x + 3x + 120° - x = 180° \Rightarrow x = 15°$

$$\therefore \ \mathbf{m\measuredangle MBC = 30°}$$

Clave B

Resolución Nº 140



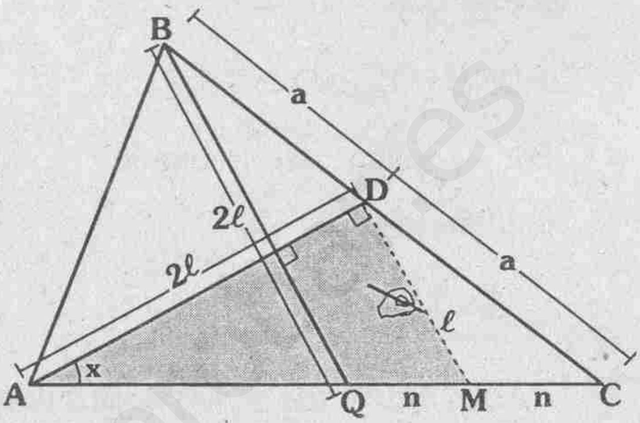
- Piden α.
- En ΔADC como $m\measuredangle DAC = 2(m\measuredangle ACD)$, trazamos $\overline{DQ}$ tal que:

  $m\measuredangle QDC = \alpha \Rightarrow \Delta DQC$, ΔAQD son isósceles, luego: $AD = DQ = QC = a$
- ΔADB : isósceles $\Rightarrow BD = a$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo: $m\measuredangle DBC = 120° - \alpha$
- En ΔDBC: $3\alpha + 2\alpha + 120° - \alpha = 180°$

$$\therefore \ \boldsymbol{\alpha = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 141



- Piden **x**.
- Por dato:

$$AD = BQ \quad y \quad \overline{AD} \perp \overline{BQ}$$

- En ΔQBC se traza la base media $\overline{DM}$, entonces:

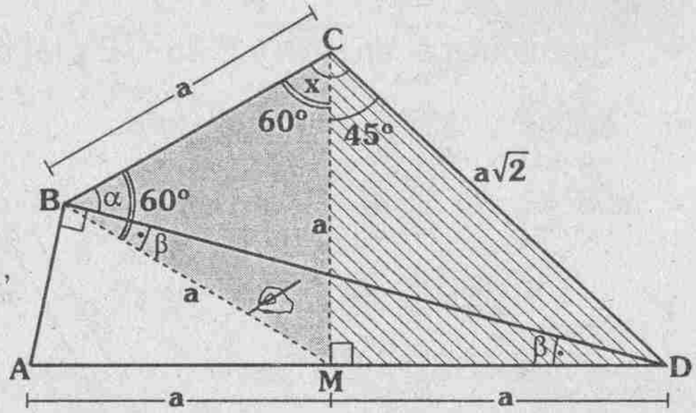
$$BQ = 2(DM) \quad y \quad \overline{BQ} \parallel \overline{DM}$$

- ⊿ADM notable, pues AD=2(DM)

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{53^\circ}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 142



- Piden **x**.
- Datos: $\alpha + \beta = 60^\circ$

$AD = 2a$; $CD = a\sqrt{2}$ y $BC = a$

- En ⊿ ABD , se traza la mediana $\overline{BM}$,
- Por teorema: $AM = MD = BM = a$

$$m\measuredangle MBD = \beta$$

- Como $BM = BC$ y $m\measuredangle MBC = 60^\circ \Rightarrow \Delta MBC$ es equilátero.
- Como $CM = MD = a$ y $CD = a\sqrt{2} \Rightarrow m\measuredangle MCD = 45^\circ$

$$\therefore \ \mathbf{x = 105^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 143

- Piden AB.
- Dato: ΔABC es equilátero:

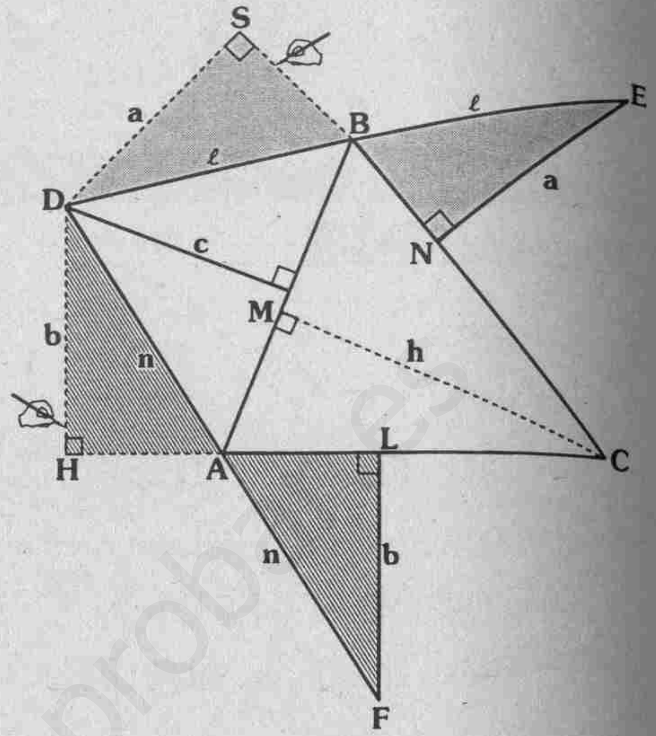
$$a+b-c=4\sqrt{3}$$

- $⊿ ALF \cong ⊿ AHD \Rightarrow DH = b$
- $⊿ DNE \cong ⊿ BSD \Rightarrow DS = a$
- Por teorema del triángulo equilátero (pág. 42)

$$h=a+b-c \Rightarrow h=4\sqrt{3}$$

- ΔABC equilátero y su altura mide $4\sqrt{3}$, por lo tanto:

$$\mathbf{AB=8}$$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 144

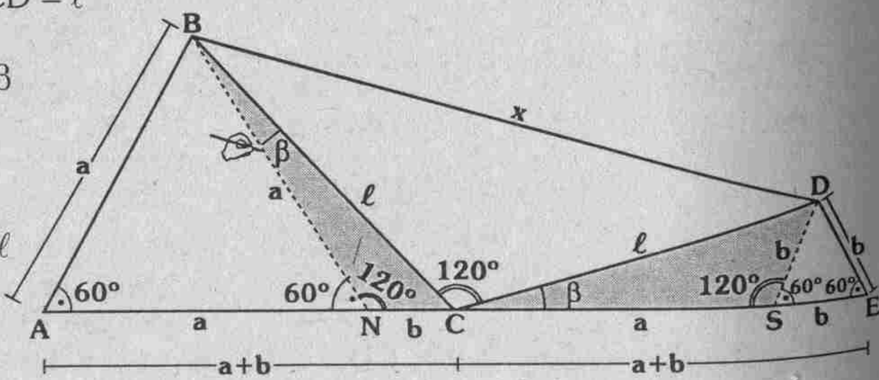
- Nos piden "**x**" en función de "ℓ".
- Ubiquemos N en $\overline{AC}$ y S en $\overline{CE}$, tal que: $AN=a$ y $ES=b \Rightarrow NC=b$ y $CS=a$
- ΔANB y ΔSDE son equiláteros.
- $\Delta BNC \cong \Delta CSD$ (LAL) $\Rightarrow CD=\ell$

  y $m\measuredangle NBC = m\measuredangle SCD = \beta$

  $\Rightarrow m\measuredangle BCD = 120°$
- ΔBCD, como $BC=CD=\ell$

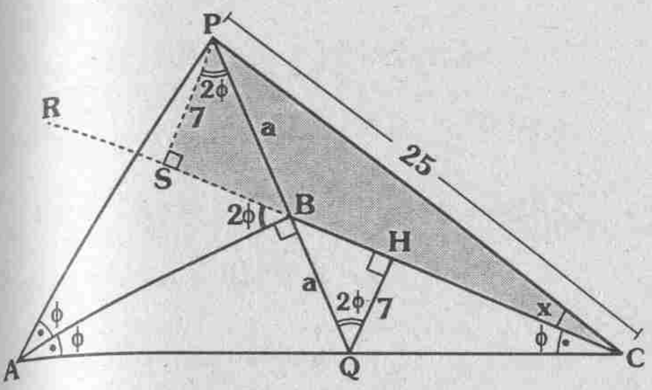
  y $m\measuredangle BCD = 120°$

  $$\Rightarrow \mathbf{x}=\ell\sqrt{3}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 145



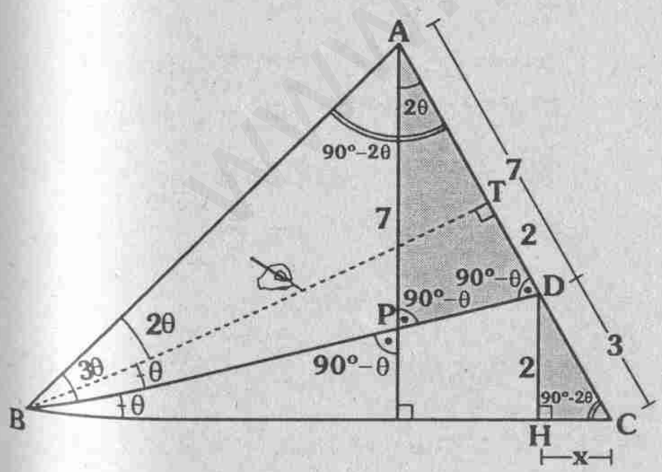
- Piden **x**.
- ΔABC: isósceles y como $m\measuredangle ABR = 2\phi$

  $\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = \phi$
- ΔAPQ: isósceles, pues $\overline{AB}$ es altura y bisectriz, entonces $PB = BQ$.
- $\triangle PBS \cong \triangle QBH$ (ALA) $\Rightarrow PS = QH = 7$
- $\triangle$PSC es notable:

$$\therefore\ \mathbf{x = 16^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 146



- Piden **x**.
- Completando medidas angulares.
- $m\measuredangle ACB = m\measuredangle BAC = 90^\circ - 2\theta$

  $\Rightarrow\ m\measuredangle ABC = 4\theta \Rightarrow m\measuredangle DAC = \theta$
- ΔPAD: isósceles $\Rightarrow PA = AD = 7$
- ΔABC, se traza la altura $\overline{AT}$, la cual es mediana y bisectriz.

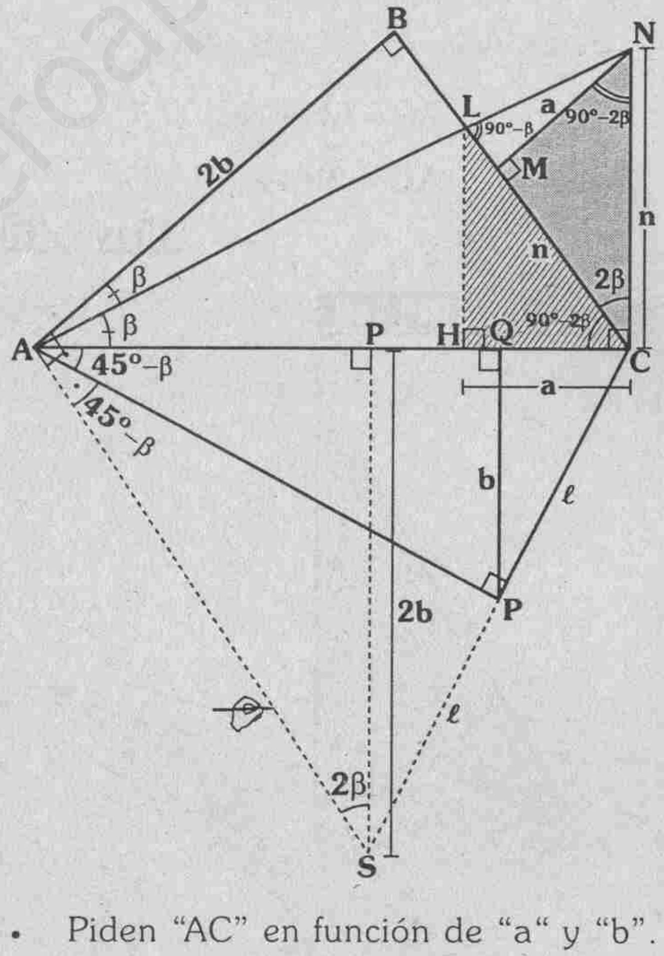
  $\Rightarrow TC = TA = 5 \Rightarrow TD = 2$
- Por teorema de la bisectriz: $TD = DH = 2$
- $\triangle$DHC: por teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2^2 = 3^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{5}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 147



- Piden "AC" en función de "a" y "b".
- Notemos que el ΔLNC es isósceles.
- Trazemos $\overline{LH} \perp AC$.

- $\triangle$ LHC $\cong$ $\triangle$ NMC (ALA) $\Rightarrow$ HC = a
- Ya conocemos parte de $\overline{AC}$, faltaría AH.
- Por teorema de la bisectriz:

$$AH = AB \qquad \ldots \text{(I)}$$

- Como: $m\measuredangle NAP = 45°$

$$\Rightarrow m\measuredangle PAC = 45° - \beta$$

- Prolongamos $\overline{CP}$ hasta S, tal que:

$$m\measuredangle CAP = m\measuredangle PAS = 45° - \beta$$

- ΔCAS : isósceles $\Rightarrow$ CL = CN y CP = PS
- Se traza: $\overline{ST} \perp \overline{AC}$
- $\triangle$STC: $\overline{PQ}$ es base media $\Rightarrow$ ST = 2b
- $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ STA (ALA)

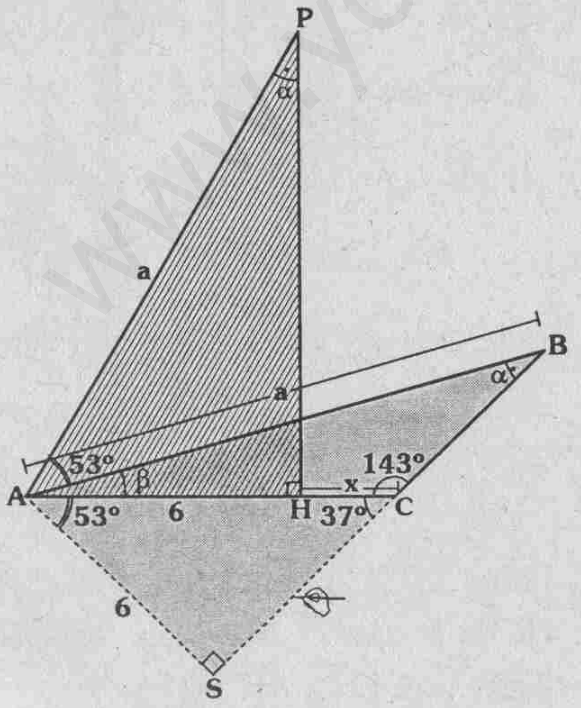
pues AC = AS $\Rightarrow$ AB = 2b

$$AC = AH + HC$$

$$\therefore \mathbf{AC = 2b + a}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 148



- Piden **x**.
- Notamos: $\alpha + \beta = 37°$

$$\Rightarrow m\measuredangle APH = m\measuredangle ABC = \alpha$$

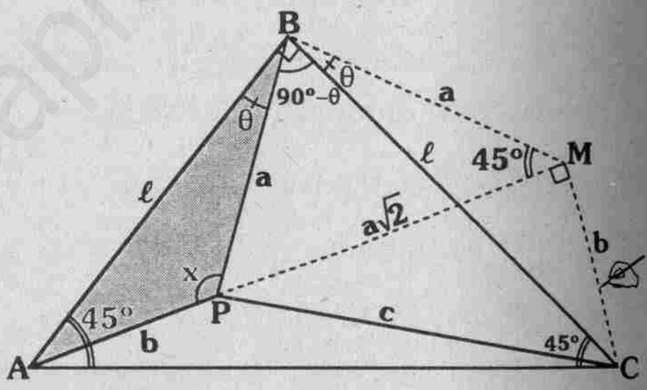
- $\triangle$ AHP $\cong$ $\triangle$ ASB (ALA) $\Rightarrow$ AH = AS = 6
- $\triangle$ASC: notable de 37° $\Rightarrow$ AC = 10

$$x + 6 = 10$$

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 149



- Piden **x**.
- Dato: $c^2 = 2a^2 + b^2$
- Como AB = BC construimos:

$\Delta BMC \cong \Delta BPA$, tal que BM = BP = a y MC = AP = b, con ello $m\measuredangle MBC = \theta$ y $m\measuredangle PBM = 90°$ $\Rightarrow$ $PM = a\sqrt{2}$

- Del dato, notamos:

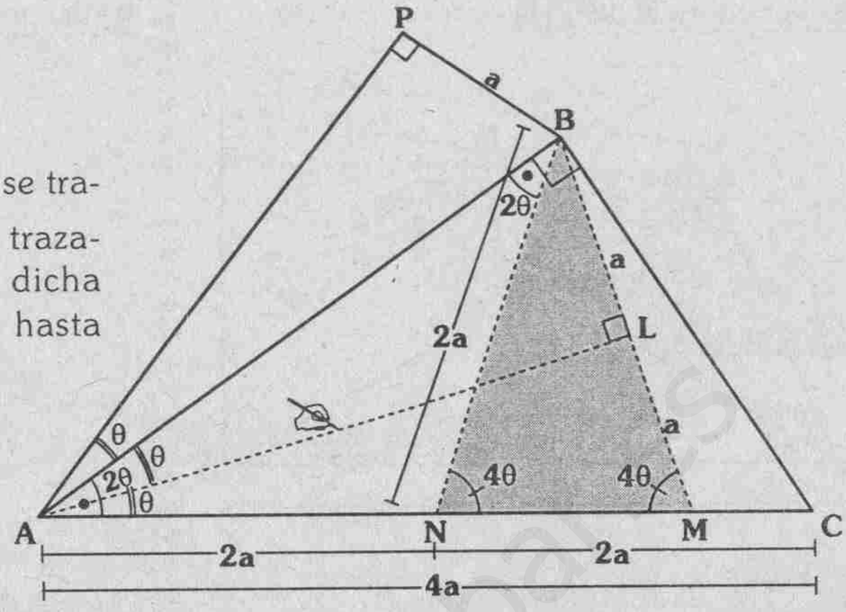
$$(PC)^2 = (PM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow m\measuredangle PMC = 90°$$

- De la congruencia: $x = 45° + 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 150



- Piden θ.
- Como $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BAP)$, se traza la bisectriz del $\sphericalangle BAC$ y trazamos la perpendicular BL a dicha bisectriz, prolongamos $\overline{BL}$, hasta que corte a $\overline{AC}$.
- $\triangle BAM$: isósceles
- Por teorema de la bisectriz:

  $BP = BL = a$

- Como $\triangle BAM$ isósceles $\Rightarrow BL = LM = a$
- Se traza la mediana $\overline{BN}$ relativa a $\overline{AC}$ del ⊿ABC.

  Por teorema: $AN = NC = BN = 2a$

- $\triangle NBM$: isósceles
- ⊿ALM: $\theta + 4\theta = 90°$

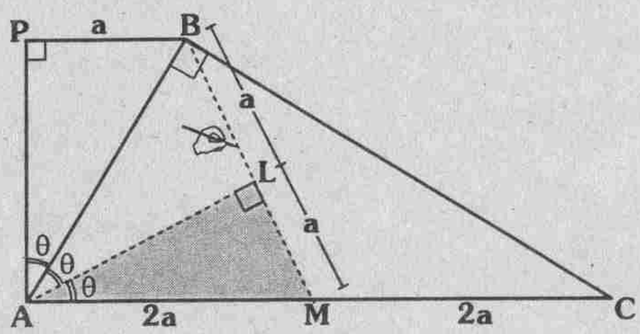
$$\therefore \ \boldsymbol{\theta = 18°}$$

Observación

Este problema tiene otra solución, de la observación dada en la pág. 75

Puede ser que $\overline{BM}$ *sea mediana, pues* $BM = \dfrac{AC}{2}$

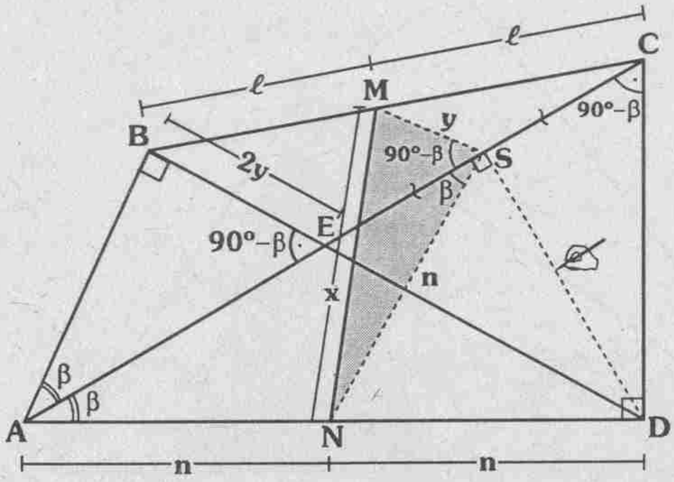
La figura quedaría asi:



En este caso, ⊿ALM *es notable:* $\theta = 30° \Rightarrow$ *Los valores de* θ *son:* 18° *ó* 30°.

Clave B

Resolución Nº 151



- Piden **x**.
- Dato: $(BE)^2 + (AD)^2 = 20$
- Notemos primero que el ΔEDC es isósceles, pues:

$$m\sphericalangle CED = m\sphericalangle ACD = 90° - \beta$$

- Busquemos la forma de aprovechar la presencia de los puntos medios, para ello se traza $\overline{DS} \perp \overline{EC}$, entonces: $ES = SC$.
- ΔBEC: $\overline{MS}$ es base media

$$\Rightarrow MS = \frac{BE}{2} = y \quad ; \quad \overline{BE} // \overline{MS}$$

- $\triangle ASD$: $\overline{SN}$ es mediana

$$\Rightarrow AN = ND = NS \quad ; \quad m\sphericalangle ASN = \beta$$

- Como:

$$m\sphericalangle MSN = 90° \Rightarrow x^2 = y^2 + n^2$$

- Por dato:

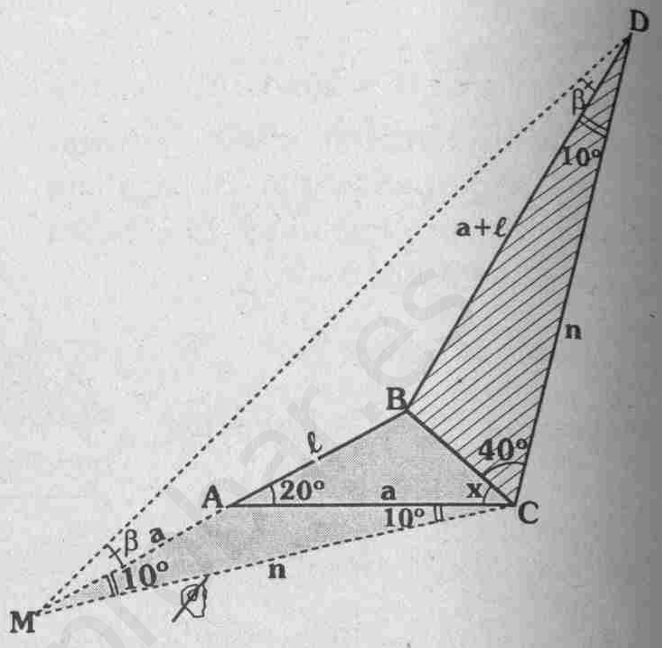
$$(2y)^2 + (2n)^2 = 20$$

$$\Rightarrow y^2 + n^2 = 5$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{5}}$$

Clave C

Resolución Nº 152



- Piden **x**.
- Dato: $BD = AB + AC$
- Para aprovechar el dato, prolongamos $\overline{BA}$ hasta M tal que:

$$AM = AC \Rightarrow \Delta MAC \text{ isósceles}$$

- Luego:

$$m\sphericalangle AMC = m\sphericalangle ACM = 10°$$

- Como :

$$BM = BD \Rightarrow \Delta MBD \text{ isósceles}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DMB = m\sphericalangle MDC \Rightarrow MC = CD$$

- $\Delta MBC \cong \Delta DBC$ (LLL)

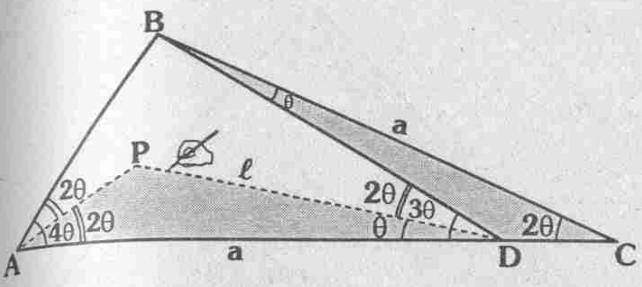
$$\Rightarrow x + 10° = 40°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 153

Paso 1



- Piden θ.
- Como AD=BC, busquemos la forma de aprovechar dicho dato, para ello tracemos:

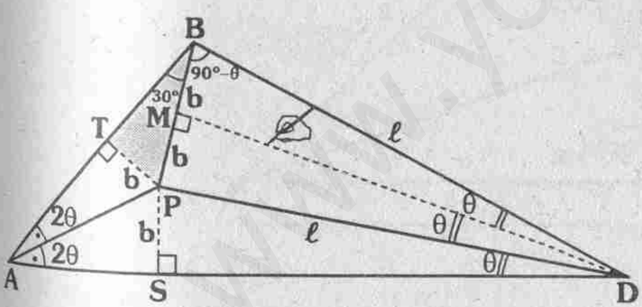
$$\Delta APD \cong \Delta CDB$$

Tal que: $m\sphericalangle PAD = m\sphericalangle BCD = 2\theta$

$$m\sphericalangle PDA = m\sphericalangle DBC = \theta$$

$$\Rightarrow BD = DP$$

Paso 2



- Trabajemos en el ΔABD.
- Como ΔDPB es isósceles de base $\overline{PB}$ se traza la altura DM, la cual también es mediana y bisectriz.
- Por teorema de la bisectriz:

$$PM = PS = PT$$

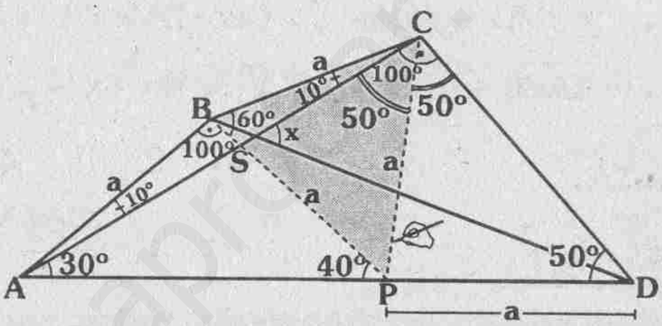
- $\measuredangle PTB$: notable de 30°
- En ΔABD:

$$4\theta + 3\theta + 30° + 90° - \theta = 180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta = 10}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 154



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BP}$ tal que $BP = BA = a$

$$\Rightarrow m\sphericalangle APB = 40° \Rightarrow m\sphericalangle PBC = 60°$$

- ΔPBC: es equilátero, luego:

$$m\sphericalangle ACP = 50°$$

- ΔPCD: isósceles $\Rightarrow PD = PC = a$
- ΔBPD: isósceles, como $m\sphericalangle BPA = 40°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ADB = m\sphericalangle PBD = 20°$$

- ΔASD:

$$x = 30° + m\sphericalangle ADB$$

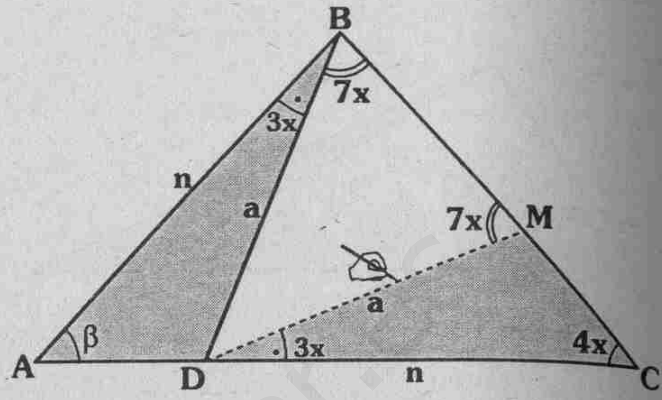
$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 155

- Piden **x**.

$\Delta ABC: \ \beta + 14x = 180°$ ... (I)



- Como: $\underbrace{m\sphericalangle DBC}_{7x} = \underbrace{m\sphericalangle ABD}_{3x} + \underbrace{m\sphericalangle ACB}_{4x}$

- Nos conviene trazar $\overline{DM}$, tal que:

$m\sphericalangle CDM = 3x \Rightarrow m\sphericalangle DMB = 7x$

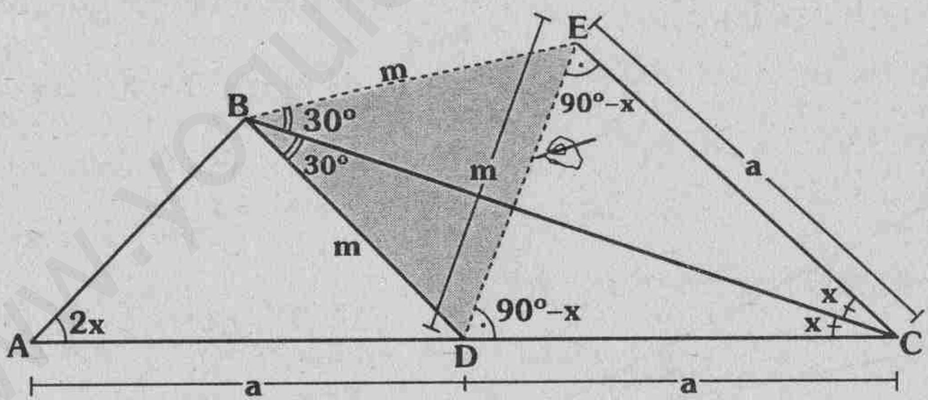
- ΔBMD isósceles $\Rightarrow DB = DM$
- $\Delta ABD \cong \Delta CDM$ (LAL) $\Rightarrow \beta = 4x$
- En (I): $4x + 14x = 180°$

$\therefore \ \mathbf{x = 10°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 156

Paso 1

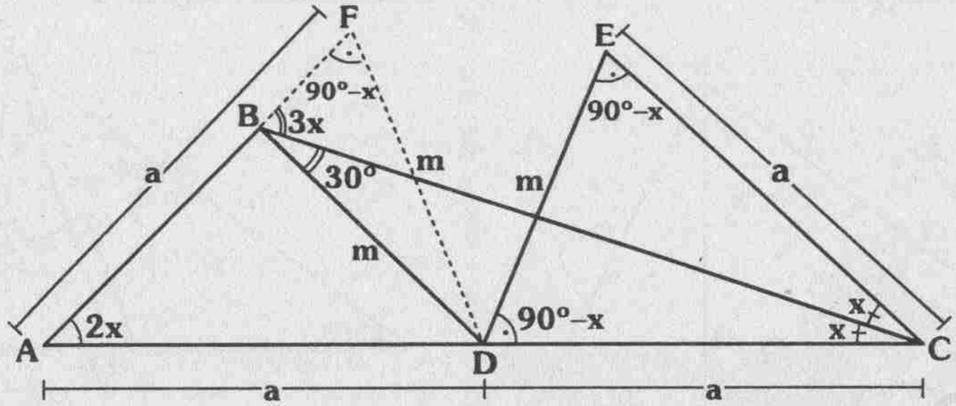


- Piden **x**.
- Dato: $m\sphericalangle ABD > 90°$ y $AD = DC = a$
- Trazamos $\overline{CE}$ tal que: $m\sphericalangle BDE = x$ y $m\sphericalangle CBE = 30°$ $\Rightarrow \Delta BCD \cong \Delta BCE$
- Con ello tendremos: – $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DCE = 2x$

  – ΔDBE : equilátero

- Notar que tenemos ahora: $m\sphericalangle BAD = 2x$ y $AD = a$ y por otra parte: $m\sphericalangle DCE = 2x$ y $DC = a$.

Paso 2



- Como $m\sphericalangle ABD = 2(m\sphericalangle ACB)$, se traza $\overline{DF}$ tal que:

  $m\sphericalangle AFD \;\; 90° - x \;\Rightarrow\; \Delta AFD$: isósceles y $\Delta DAF \cong \Delta DCE$ (LAL) $\Rightarrow FD = DF = m$

- ΔBDF : isósceles $\Rightarrow 30° + 3x = 90° - x$

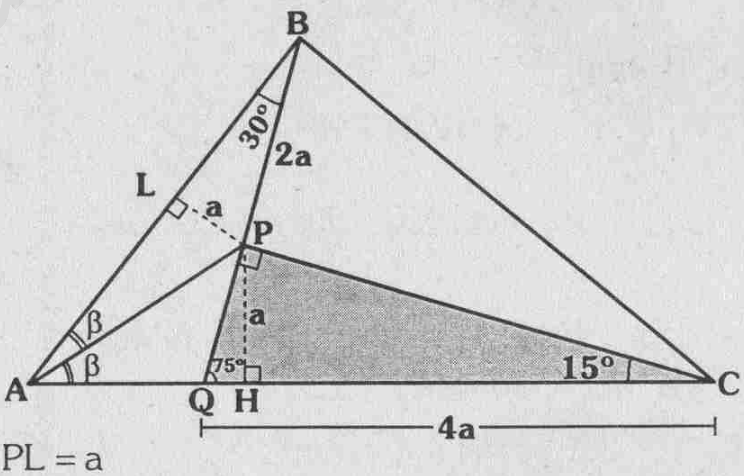
$$\therefore \;\; \mathbf{x = 15°}$$

Clave A

Nota

Otra solución es cuando F=B, *en este caso*: x=30°

RESOLUCIÓN Nº 157



- Nos piden β .
- Dato: $QC = 2(PB)$
- En ◿QPC por teorema:

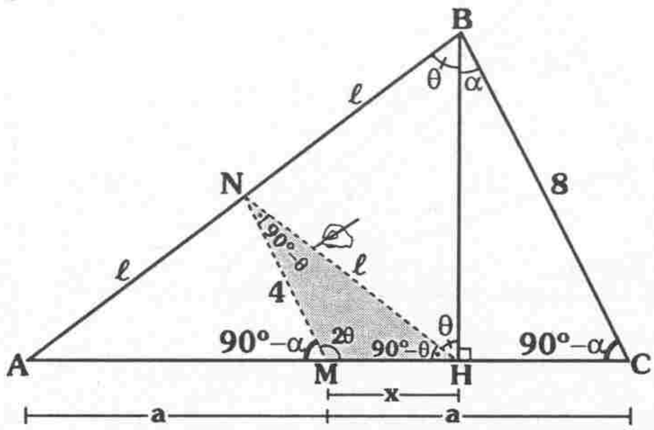
  $QC = 4(PH) \Rightarrow PH = a$ y $QC = 4a$

- Del dato: $PB = 2a$
- Por teorema de la bisectriz: $PH = PL = a$
- ◿BLP: notable de 30°
- ΔABQ : $2\beta + 30° = 75°$

$$\therefore \beta = \frac{\mathbf{45°}}{\mathbf{2}} = \mathbf{22°30'}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 158



- Piden **x.**
- Dato: $BC = 8$ y

$$2\theta - \alpha = 90° \Rightarrow 2\theta = 90° + \alpha$$

- Se ubican "N" punto medio de $\overline{AB}$, con ello tendremos:
- $\overline{MN}$ es base media del ΔABC entonces $MN = 4$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $m\measuredangle AMN = 90° - \alpha$.
- Como:

$$m\measuredangle AMN = 90° - \alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle NMC = \underbrace{90° + \alpha}_{2\theta}$$

- En $⊿AHB$, $\overline{HN}$ es mediana relativa a $\overline{AB}$ entonces:

$$HN = AN = NB$$

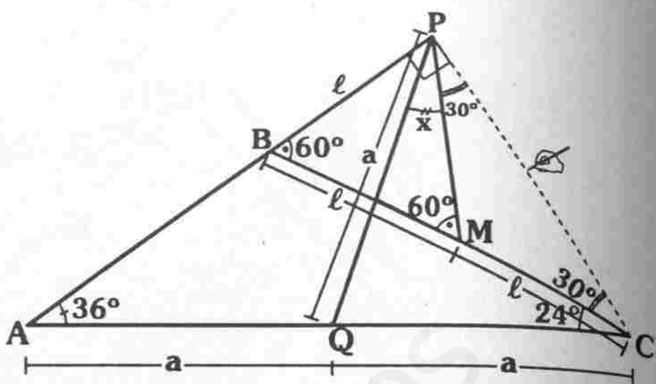
$$\Rightarrow m\measuredangle NHB = \theta$$

- ΔMNH: isósceles

$$\therefore \ \mathbf{x = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 159



- Piden **x**.
- Como $BP = BM$ y $m\measuredangle PBM = 60°$

  $\Rightarrow \Delta BPM$ es equilátero
- Como:

  $BM = MC = MP \Rightarrow m\measuredangle BPC = 90°$
- En $⊿APC$, $\overline{PQ}$ es mediana

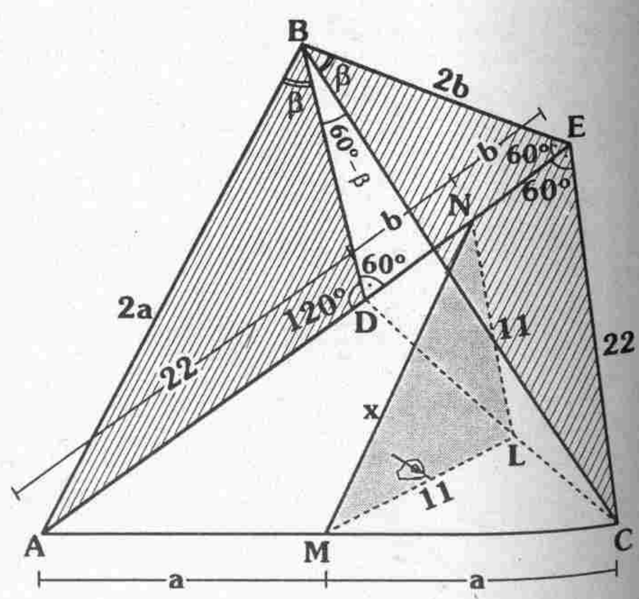
$$\Rightarrow AQ = QC = QP$$

- ΔQPC: isósceles: $x + 30° = 24° + 30°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 24°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 160



- Piden **x**.
- Como ΔABD y ΔCBE son equiláteros

$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBE$ (LAL)

$\Rightarrow AD = EC = 22$ y $m\sphericalangle BEC = 120°$

- Trazamos $\overline{CD}$ y ubicamos su punto medio "L".
- Por teorema de la base media en:

_ ΔACD : $CM=11$ y $\overline{ML} // \overline{AE}$

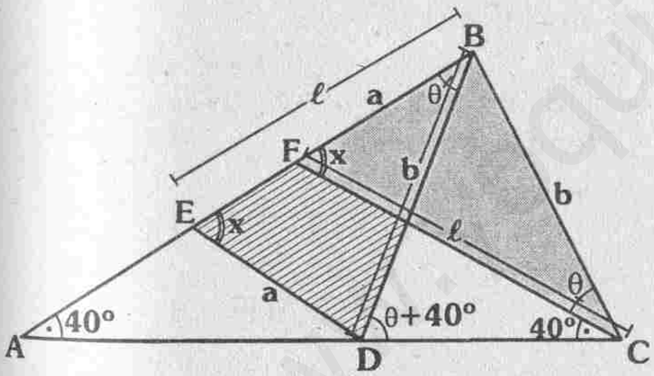
_ ΔDCE : $CN=11$ y $\overline{NL} // \overline{EC}$

- Como $m\sphericalangle BEC = 120°$, por ángulo entre paralelas: $m\sphericalangle MLN = 120°$
- ΔMLN por teorema:

$$\mathbf{x = 11\sqrt{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 161



- Piden **x**.
- De los datos, deducimos rápidamente:

$\Delta FBC \cong \Delta EDB$ (LLL)

$\Rightarrow m\sphericalangle DEB = m\sphericalangle CFB = x$;

$m\sphericalangle BCF = m\sphericalangle EBD = \theta$

- Como ΔDBC es isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle BDC = m\sphericalangle DCB = 40° + \theta$

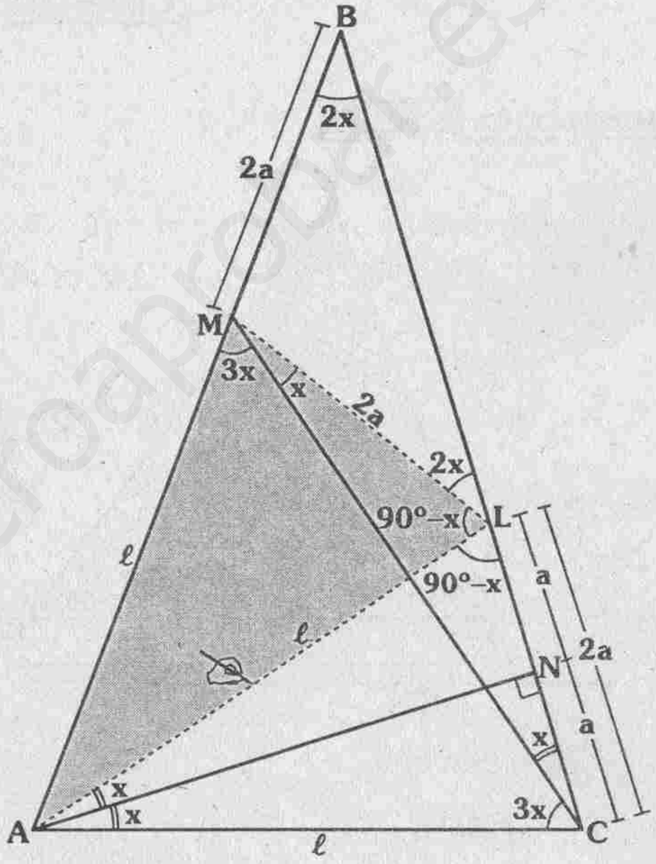
- Luego: $m\sphericalangle DCF = 40°$
- ΔAFC, por ángulo exterior:

$x = 40° + 40°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 80°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 162



- Piden **x**.
- Como $AB = BC$ y $m\sphericalangle NAC = x$

$\Rightarrow m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle CAB = 90° - x$

Luego: $m\sphericalangle ABC = 2x$

- En ΔBMC, como:

$m\sphericalangle MBC = 2(m\sphericalangle MCB)$

nos conviene trazar $\overline{ML}$, tal que $m\sphericalangle CML = x$, entonces:

$MB = ML = LC = 2a$

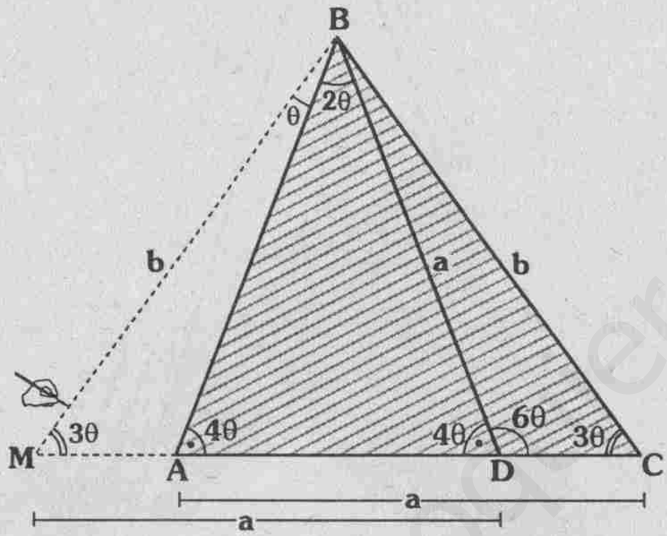
- Como $LN = NC \Rightarrow \Delta ALC$ isósceles, con $AL = AC$ y $m\measuredangle ALC = 90° - x$.
- $\Delta ALM \cong \Delta ALC$ (LAL)

  $\Rightarrow AC = AM \Rightarrow m\measuredangle ACM = 3x$
- $⊿ANC$: $x + 4x = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 18°}$$

Clave C

Resolución Nº 163



- Nos piden θ.
- En ΔDBC como:

  $$m\measuredangle BDC = 2(m\measuredangle DCB)$$

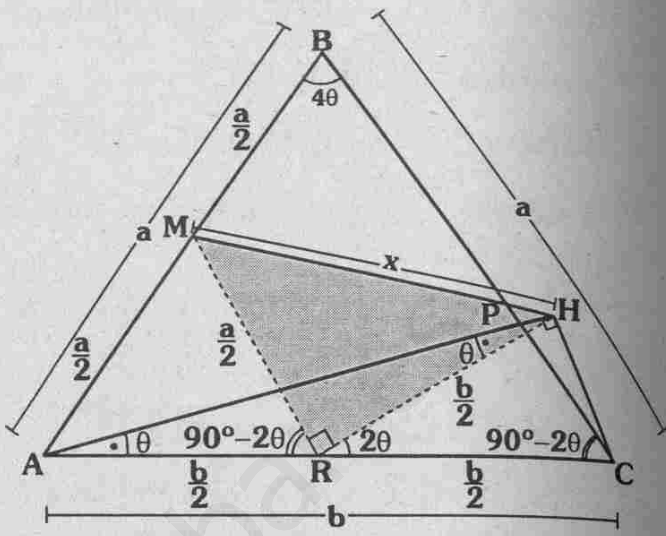
  trazamos $\overline{BM}$ tal que: $m\measuredangle BMD = 3\theta$, entonces $MB = BC$ y $MD = DB$.
- $\Delta BMD \cong \Delta BCA$ (LAL)

  $\Rightarrow m\measuredangle BDM = m\measuredangle BAC = 4\theta$
- En "D": $4\theta + 6\theta = 180°$

$$\therefore \ \theta = \mathbf{18°}$$

Clave C

Resolución Nº 164



- Piden x, en función de "a" y "b".
- Se ubica "R", punto medio de $\overline{AC}$.
- $\overline{MR}$ es base media para el $\Delta ABC \Rightarrow MR = \dfrac{a}{2}$ y $\overline{MR} // \overline{BC}$, luego $m\measuredangle MRA = 90° - 2\theta$.
- $\overline{HR}$ es mediana relativa a la hipotenusa en:

  $$⊿AHC \Rightarrow HR = HA = HC = \frac{b}{2}$$

  $$\text{y} \quad m\measuredangle AHR = \theta$$
- Como:

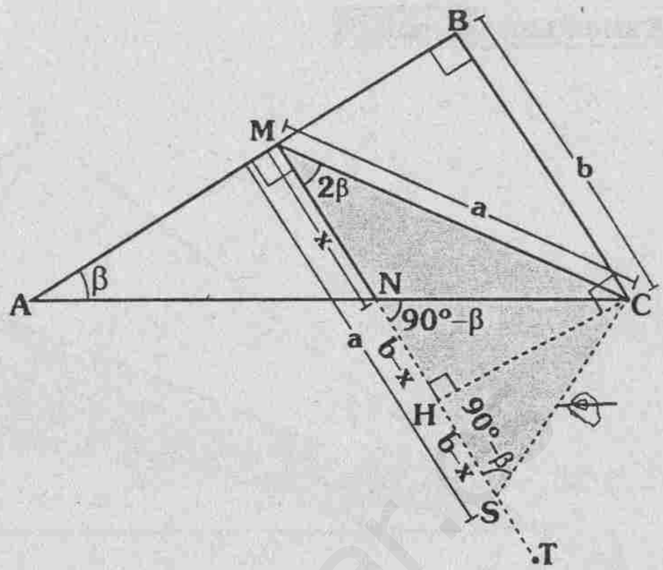
  $$m\measuredangle HRC = 2\theta \Rightarrow m\measuredangle MRH = 90°$$
- Finalmente en el $⊿MRH$:

  $$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 165



- Nos piden **x** en función de "a" y "b".
- Al prolongar $\overline{MN}$, nos damos cuenta:

  $m\measuredangle CMN = 2\beta$ y

  $m\measuredangle CNT = 90° - \beta$

  Nos conviene trazar $\overline{CS}$ tal que:

  $m\measuredangle NSC = 90° - \beta$

- ΔCMS y ΔNSC : isósceles, luego:

  $SM = MC = a$

- En ΔNCS, se traza la altura $\overline{CH}$, la cual también es mediana, como $BC = MH = b \Rightarrow NH = b - x$, luego: $NH = HS = b - x$
- Finalmente: $MH + HS = MS \Rightarrow b + b - x = a$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2b - a}$$

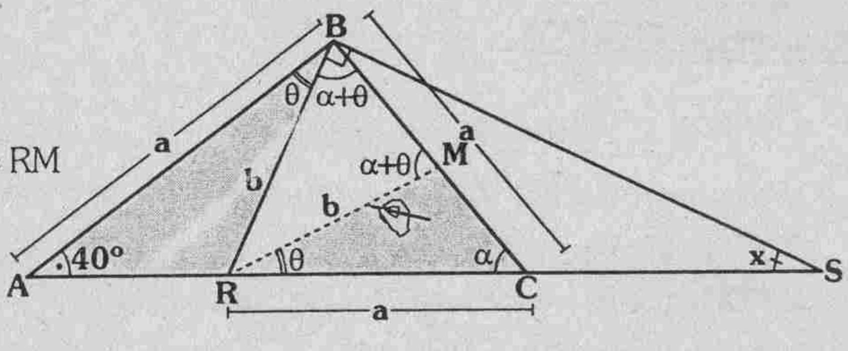
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 166

- Nos piden **x**.
- Del gráfico, en el ΔABC: $\alpha + \theta = 70°$
- Trazamos $\overline{RM}$ tal que:

  $m\measuredangle MRC = \theta$

  $\Rightarrow m\measuredangle RMB = \alpha + \theta \Rightarrow RB = RM$



- $\Delta ABR \cong \Delta CRM$ (LAL)

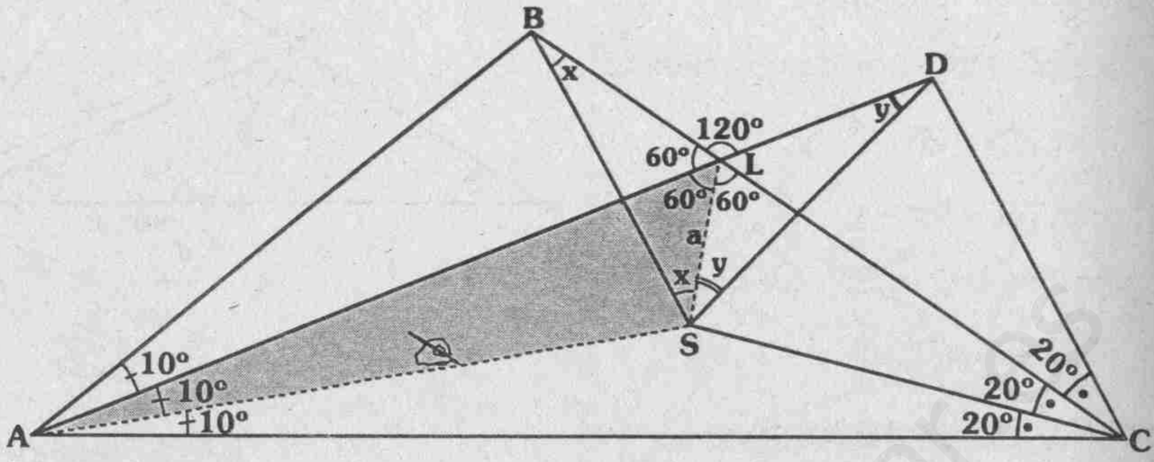
  $\Rightarrow \alpha = 40°$

- Como $\alpha = 40° \Rightarrow BC = a$, luego el ΔRBC es isósceles $\Rightarrow m\measuredangle CRB = 70°$
- $\triangle RBS$: $x + m\measuredangle CRB = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 167



- Piden $x+y$.
- Por la observación dada en la pág. 73, en ΔALC, como $\overline{AS}$ y $\overline{CS}$ son bisectrices

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ALS = m\measuredangle CLS = 60°$$

- $\Delta ALB \cong \Delta ALS$ (ALA) $\Rightarrow$ $BL = LS \Rightarrow m\measuredangle BSL = x$
- $\Delta CLS \cong \Delta CLD$ (ALA) $\Rightarrow$ $LS = LD \Rightarrow m\measuredangle LSD = y$
- En $\measuredangle$BSDL: $2x+2y=120°$

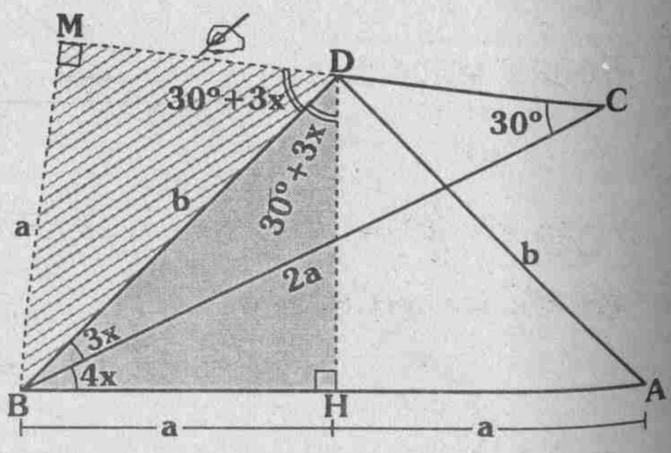
$$\therefore\ \mathbf{x+y=60°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 168

- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia del "30°" y $AB=BC$, primero en el ΔADB que es isósceles ($DB=DA$), se traza la altura $\overline{DH} \Rightarrow BH=HA=a$; se traza $\overline{BM} \perp \overrightarrow{CD}$ (M en $\overrightarrow{CD}$).
- $\triangle$BMC notable de 30°

$$\Rightarrow \quad BM=\frac{BC}{2}=a$$



- Por teorema de la bisectriz (recíproco), debido a que:

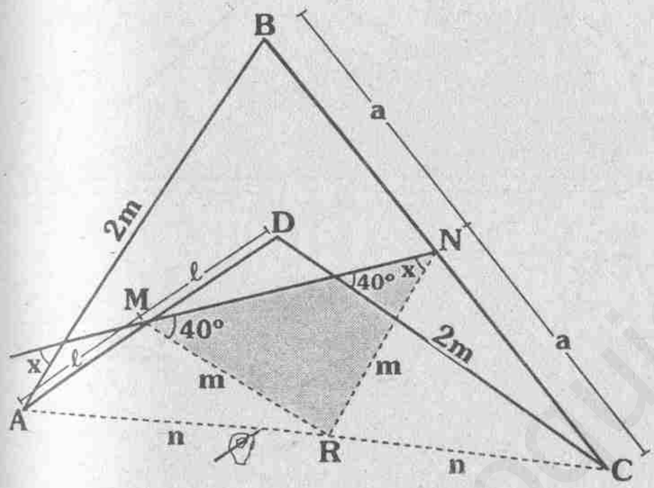
$$BM = BH \Rightarrow m\sphericalangle MDB = m\sphericalangle BDH$$

- ⊿BHD: $7x + 30° + 3x = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 169



- Piden **x**.
- Dato $AB = CD$
- Se ubica R, punto medio de $\overline{AC}$,
- En ΔADC, $\overline{MR}$ es media

$$\Rightarrow MR = \frac{CD}{2} \quad y$$

$$\overline{MR} // \overline{DC}$$

- En ΔABC, $\overline{RN}$ es base media

$$\Rightarrow RN = \frac{AB}{2} \quad y \quad \overline{RN} // \overline{AB}$$

- Por ángulo entre paralelas:

$$\_\ m\sphericalangle RMN = 40° \ ; \quad y$$

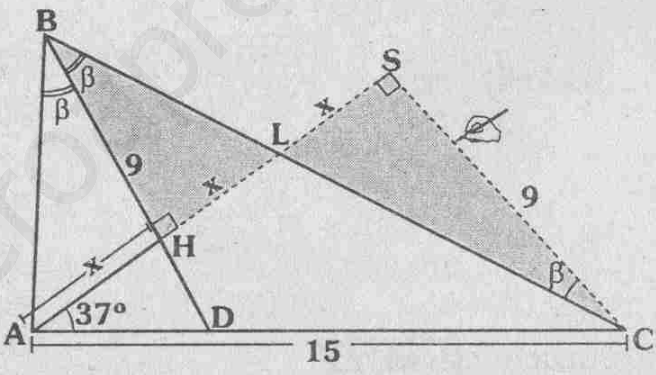
$$\_\ m\sphericalangle RNM = x$$

- También: $MR = RN$
- ΔMRN : isósceles

$$\therefore\ \mathbf{x = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 170



- Piden **x**.
- Se prolonga $\overline{AH}$ y se traza $\overline{CS} \perp \overleftrightarrow{AH}$, con S en $\overleftrightarrow{AH}$.
- ⊿ASC: notable de 37°

$$\Rightarrow CS = 9 \quad y$$

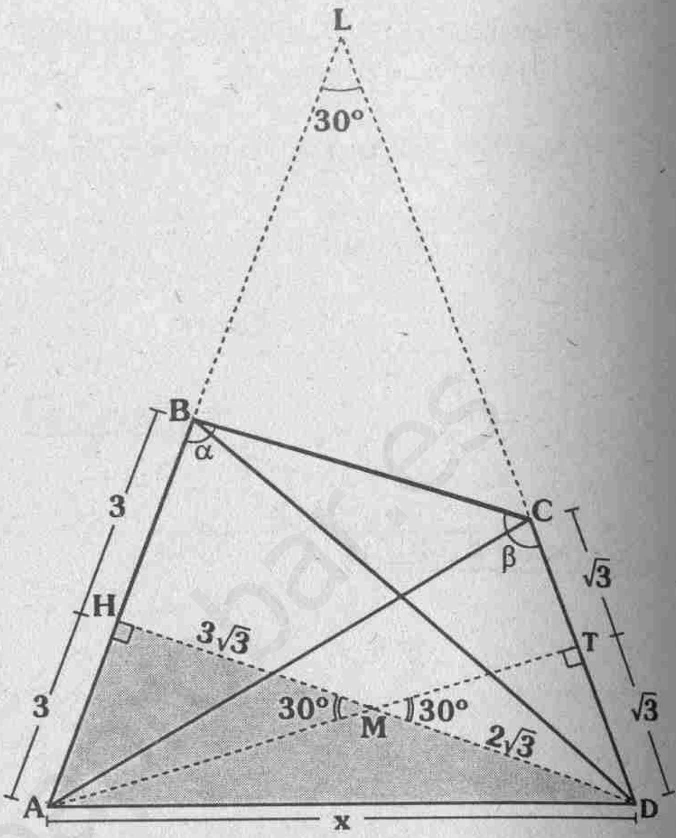
$$AS = 12$$

- ΔABL : isósceles $\Rightarrow AH = HL = x$
- ⊿BHL ≅ ⊿CSL $\Rightarrow HL = LS = x$
- Como $\underbrace{AS}_{3x} = 12$

$$\therefore\ \mathbf{x = 4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 171



- Piden **x**.
- Dato: $AD = DB = DC$
- Como:

$$\alpha + \beta = 210° \Rightarrow m\sphericalangle ALD = 30°$$

- En los triángulos isósceles ADB y DAC, se trazan las alturas $\overline{DH}$ y AT $\Rightarrow AH = HB = 3$ y $CT = TD = \sqrt{3}$.
- ⊿AHM y ⊿MTD: notable de 30°

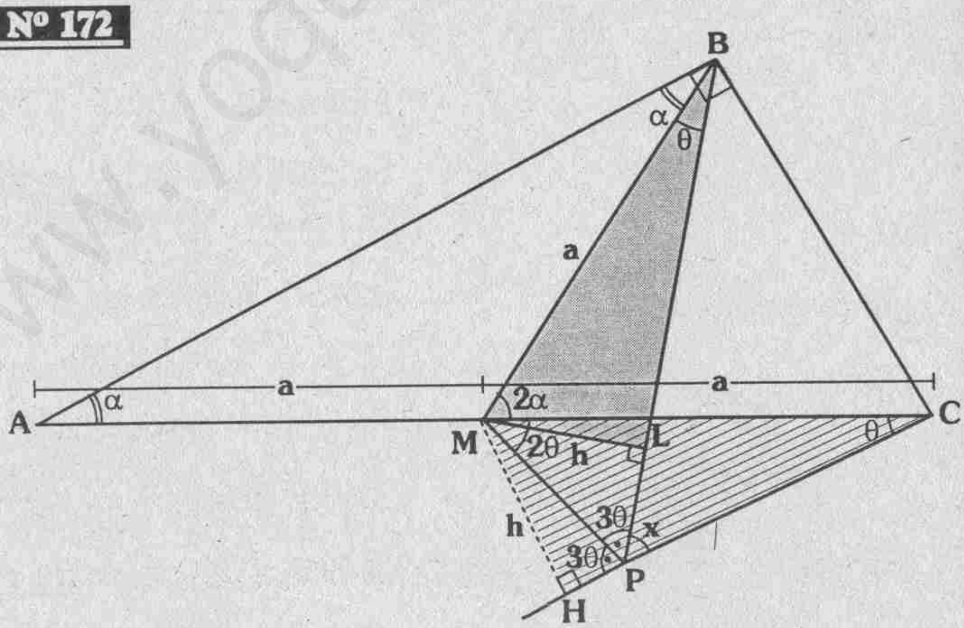
$$\Rightarrow HM = 3\sqrt{3} \quad \text{y}$$
$$MD = 2\sqrt{3}$$

- ⊿AHD: $x^2 = 3^2 + (5\sqrt{3})^2$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2\sqrt{21}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 172

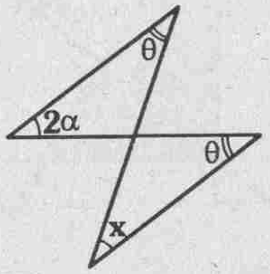


- Piden **x** en función de α
- $\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa, por teorema: $AM = MC = MB$
- Por teorema de la bisectriz: $MH = ML$

- $\triangle$ MLB $\cong$ $\triangle$ HMC

$$\Rightarrow m\sphericalangle MBP = \theta$$

- Del gráfico:

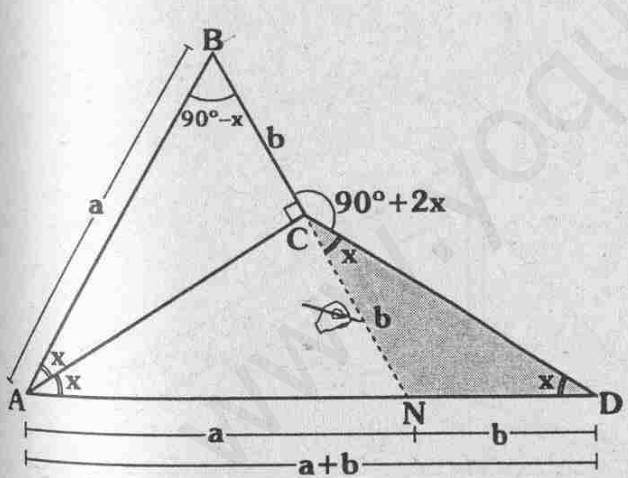


$$x + \theta = 2\alpha + \theta$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 2\alpha}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 173



- Piden **x**.
- De los datos:

$$m\sphericalangle ABC = 90° - x$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ACB = 90°$$

- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en N, ΔABN es isósceles

$$\Rightarrow AB = AN$$

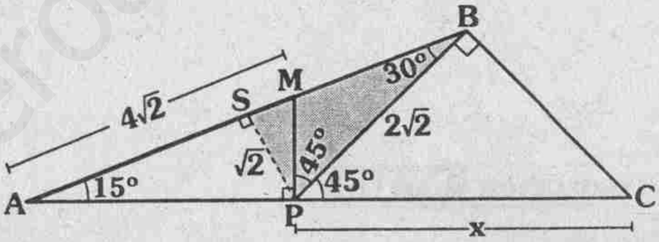
- ΔCND : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle DCN = x$
- En "C":

$$90° + 2x + x = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 174



- Piden **x**.
- En $\triangle$APM, por teorema AM = 4(PS)

$$\Rightarrow PS = \sqrt{2}$$

- $\triangle$PSB: notable de 30°

$$\Rightarrow PB = 2\sqrt{2}$$

- $\triangle$PBC: notable de 45°, como $PB = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \ \mathbf{x = 4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 175

- Piden MN
- En ⊿ABC se traza la mediana:

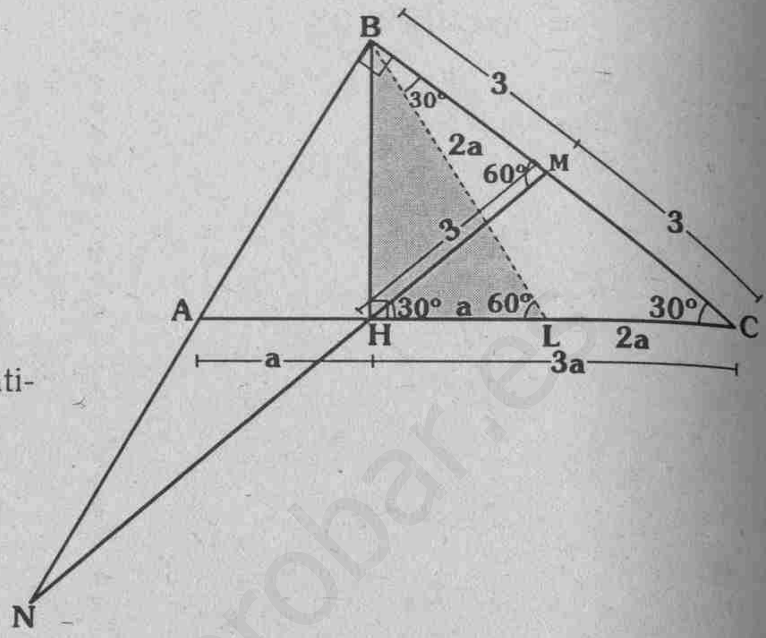
$$BL \Rightarrow AL = LC = BN$$

- ⊿BHL: notable de 30° y 60°

$$\Rightarrow m\sphericalangle BCH : 30$$

- En ⊿BHC: $\overline{HM}$ es mediana relativa a $\overline{BC} \Rightarrow MB = MC = MN$
- $m\sphericalangle BMH = 60°$
- ⊿NBM: notable de 30° y 60°

$$\therefore\ \mathbf{MN = 6}$$

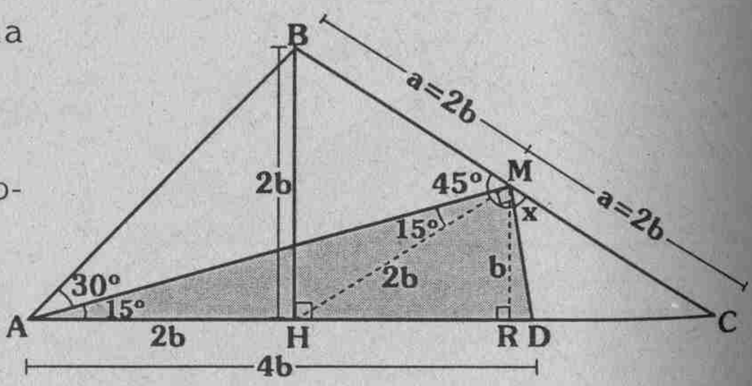


Clave D

RESOLUCIÓN Nº 176

- Nos piden **x**.
- Por teorema de la base media $MR = \dfrac{BH}{2}$:
- Luego, como $AD = 4(MR)$, por teorema: $m\sphericalangle MAD = 15°$
- ⊿ABN: notable de 45°

$$\Rightarrow AH = HB$$

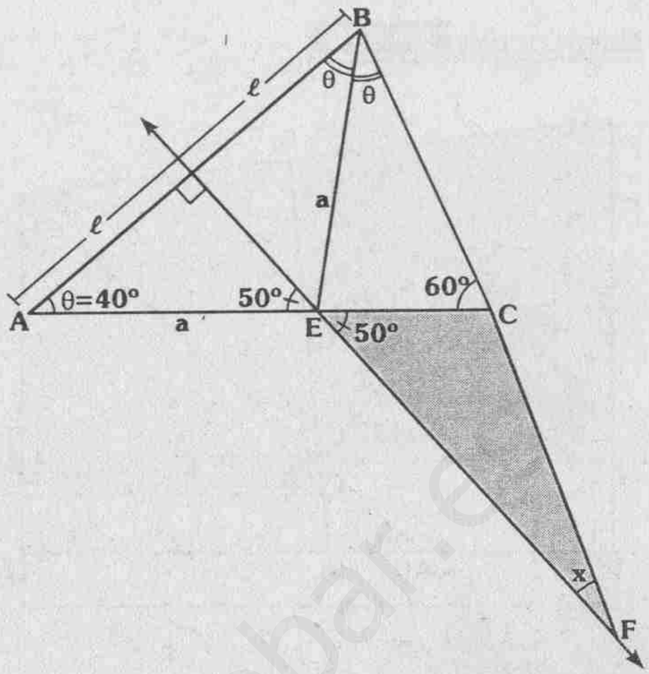


- En ⊿BHC: $\overline{HM}$ es mediana $\Rightarrow$ $HM = MB = MC$
- ΔHMB : equilátero $\Rightarrow m\sphericalangle BMA = 45°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 177



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz:

$$EA = EB$$

- ΔABC :

$$3\theta + 60° = 180° \Rightarrow \theta = 40°$$

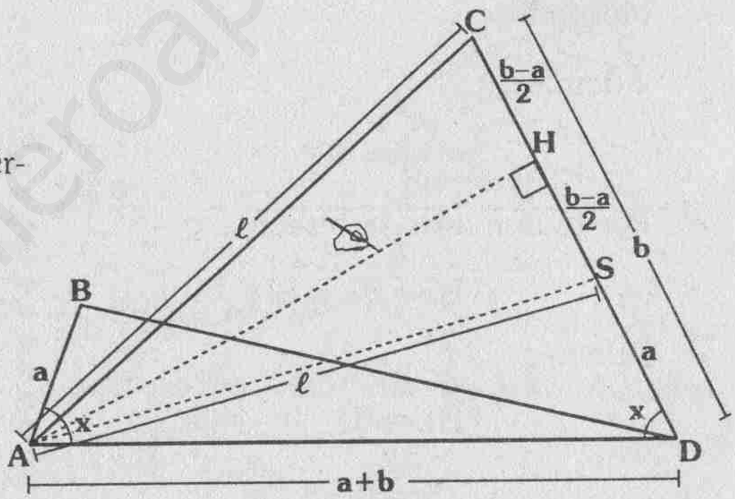
- ΔECF :

$$x + 50° = 60°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 178



- Nos piden **x**.
- Como $AB \neq CD$, consideremos sin pérdida de generalidad: $CD > AB$
- Se ubica S en $\overline{CD}$ tal que:

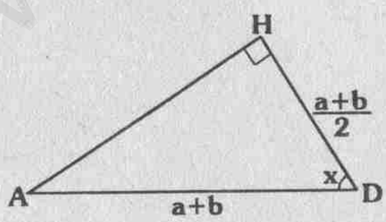
$$DS = AB = a$$

- $\Delta ABD \cong \Delta ASD$ (LAL)

$$\Rightarrow\ AS = DB = \ell$$

- ΔACS : isósceles, aquí se traza la altura $\overline{AH}$, por teorema: $CH = HS = \dfrac{b-a}{2}$

- Del gráfico:

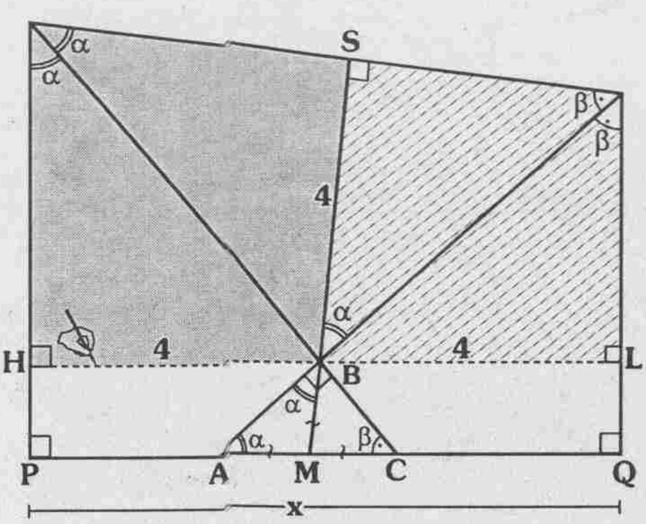


- ⊿AHD: notable $\quad \therefore\ \mathbf{x = 60°}$

Clave B

> **Nota**
>
> *Si se considera* $AB > CD$ *, se comprueba en forma análoga.*

RESOLUCIÓN Nº 179



- Piden **x**.
- $\triangle$ABC: $\overline{BM}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- Además:

$$\alpha + \beta = 90°$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$BS = BL = BH$$

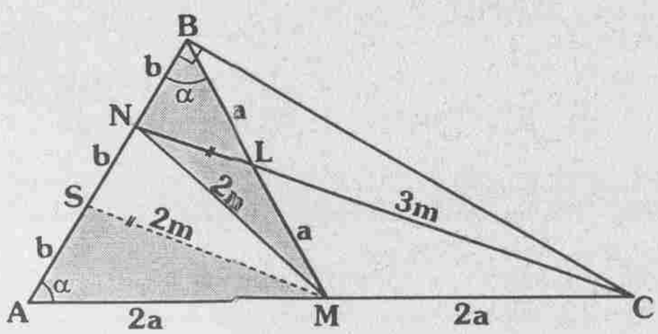
- Además:

$$HL = PQ$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 180



- Piden: $\dfrac{MN}{CN}$
- Trazamos $\overline{MS} // \overline{NS}$
- ΔMSB : $\overline{NL}$ es base media

$$\Rightarrow BN = NS$$

- ΔANC : $\overline{MS}$ es base media

$$\Rightarrow AS = SN$$

- $\triangle$ABC: $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa

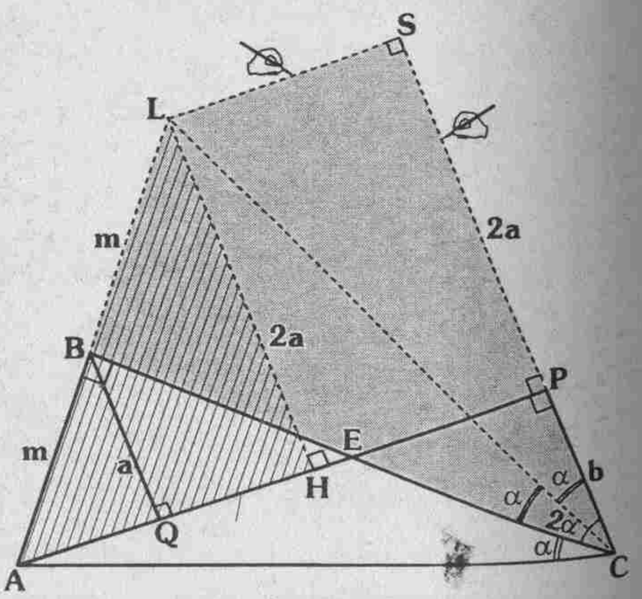
$$\Rightarrow \ m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle MBA$$

- $\Delta AMS \cong \Delta BMN$ (LAL) $\Rightarrow$ MN = MS

$$\therefore \ \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{CN}} = \frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{4m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 181



- Piden: BC.
- Trazamos $\overline{CL}$ tal que: $m\sphericalangle BCL = \alpha$

- ΔLCA : isósceles $\Rightarrow AB = BL$
- Trazamos $\overline{LH} \perp \overline{AP}$
- $⊿ALH$: $\overline{BQ}$: base media

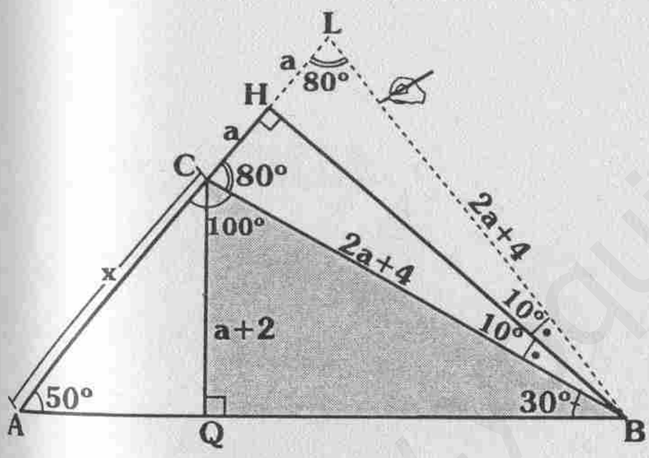
$$\Rightarrow LH = 2(BQ)$$

- Por teorema de la bisectriz $BC = SC$; además $SP = LH$.

$$\therefore \mathbf{BC = 2a + b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 182



- Piden **x**.
- Dato:

$$CQ - CH = 2 \rightarrow CQ = \underbrace{CH}_{a} + 2$$

- En la prolongación de $\overline{AH}$ se ubica el punto L tal que:

$$BC = BL \Rightarrow CH = HL$$

- $⊿CQB$: notable de 30° y 60°

$$\Rightarrow BC = 2(CQ)$$

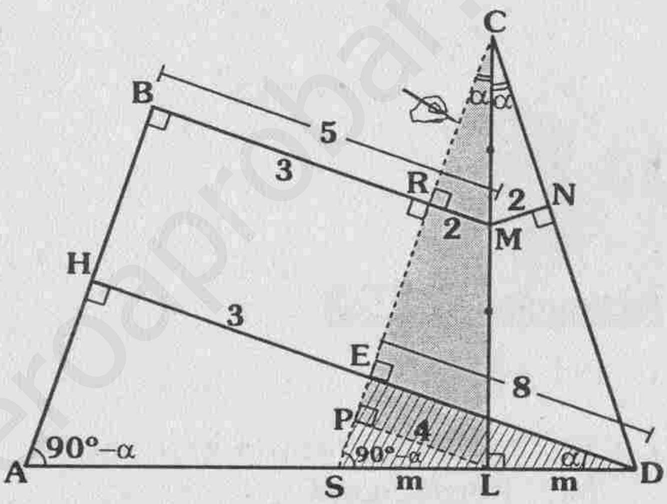
- ΔALB : isósceles

$$x + 2\cancel{a} = 2\cancel{a} + 4$$

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 183



- Piden: HD
- Trazamos $\overline{CS} // \overline{AB}$ tal que ΔSCB: isosceles

$$\Rightarrow MN = MR \quad y$$

$$SL = LD$$

- $⊿CPL$: $\overline{RM}$ es base media
- $⊿DSE$: $\overline{PL}$ es base media

$$\Rightarrow ED = 2(PL) = 8$$

$$\Rightarrow HD = 3 + 8$$

$$\therefore \mathbf{HD = 11}$$

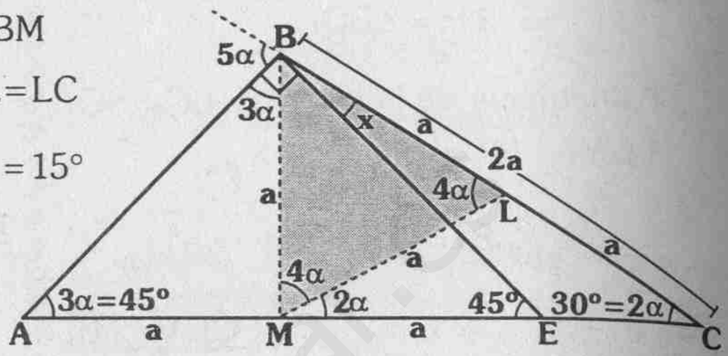
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 184

- Piden **x**.
- $\measuredangle$ABE : $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa.
- ΔBMC : trazamos $\overline{ML}$ tal que BL=BM
- Además el $\measuredangle$MLC es isósceles $\Rightarrow$ ML=LC
- ΔMBL : equilátero $\Rightarrow 4\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 15°$
- ΔEBC:

$$30° + x = 45°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 15°}$$



Clave E

RESOLUCIÓN Nº 185

- Piden **x**.
- En ΔAPB se traza la base media $\overline{ML}$, por teorema:

$$PL = LB \quad y$$

$$ML = \frac{AP}{2}$$

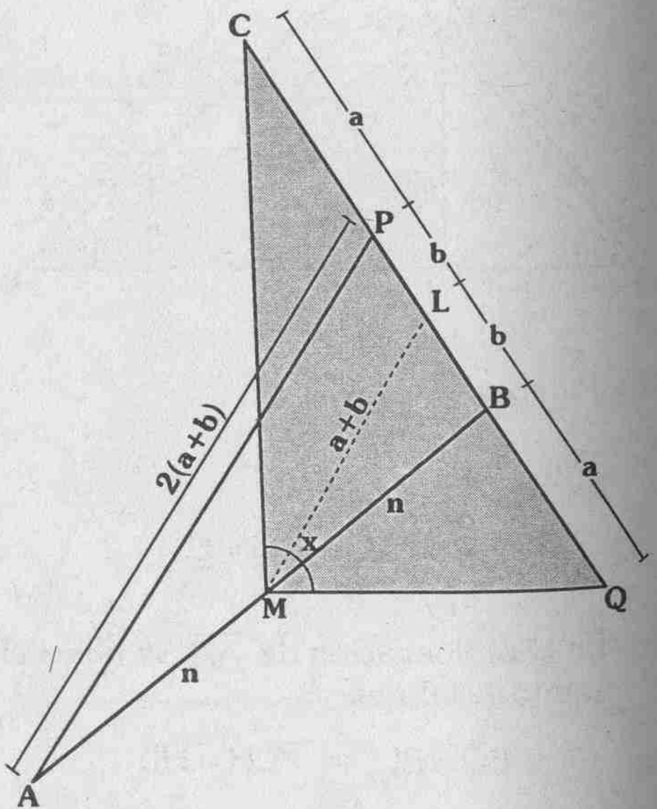
- Como AP=CQ

$$\Rightarrow \quad ML = a + b$$

- Como CL = LQ = ML , por teorema:

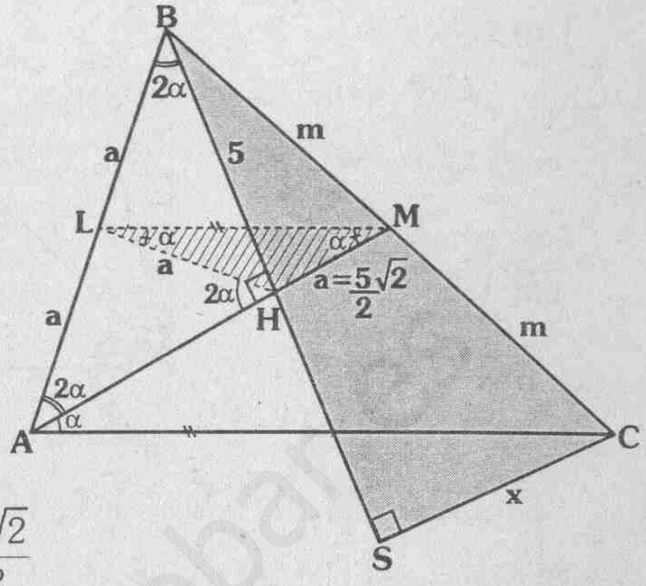
$$m\measuredangle CMQ = 90°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 90°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 186



- Piden **x**.
- ⊿AHB: $\overline{HL}$ es mediana relativa a la hipotenusa.

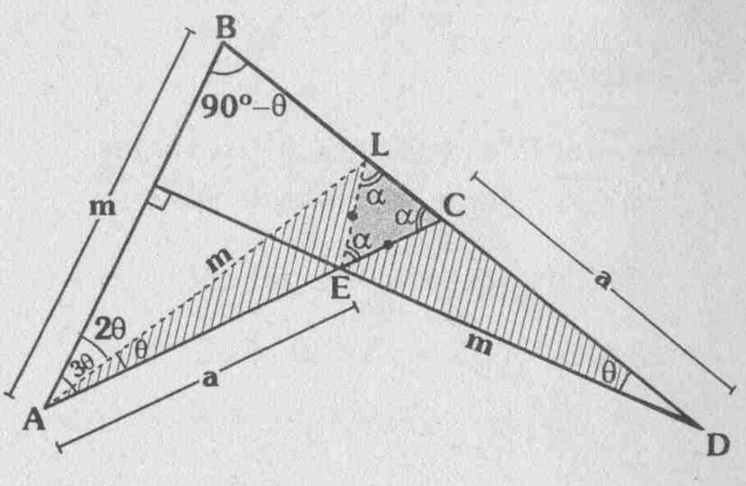
  $\Rightarrow$ HL = AL = LB
- ΔABC: $\overline{LM}$ es base media $\Rightarrow \overline{LM} // \overline{AC}$

  $m\measuredangle LMA = m\measuredangle MAC$
- ΔLMH : isósceles
- ⊿AHB: $2\alpha = 45° \Rightarrow 2a = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
- ⊿BSC: $\overline{HM}$ es base media

$$\mathbf{x = 5\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 187



- Piden θ.
- Trazamos $\overline{AL}$ tal que: AB=AL
- ΔLAE ≅ ΔEDC (LAL)

$\Rightarrow$ LE = EC y

$m\measuredangle LEC = m\measuredangle ECL = m\measuredangle ELC$

$\Rightarrow$ ΔLEC : equilátero ($\alpha = 60°$)

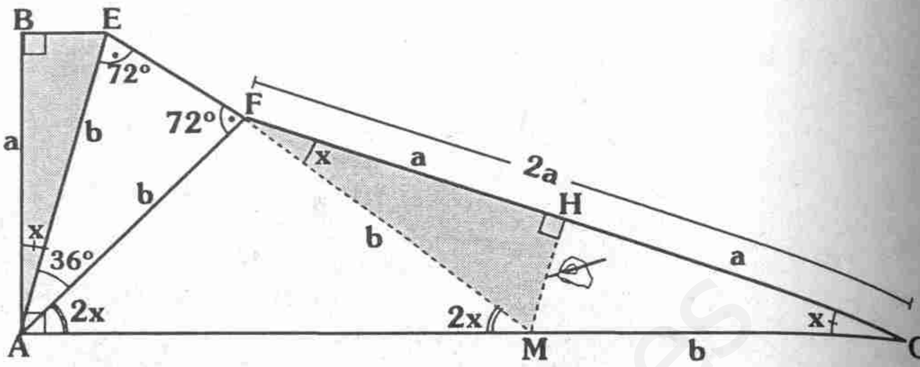
- ΔBAC :

  $3\theta + 90° - \theta + 60° = 180°$

$$\therefore\ \theta = 15°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 188



- Nos piden **x**.
- En ΔAEC notamos:

  $m\sphericalangle FAC = 2(m\sphericalangle FCA)$
- Nos conviene trazar $\overline{FM}$ tal que:

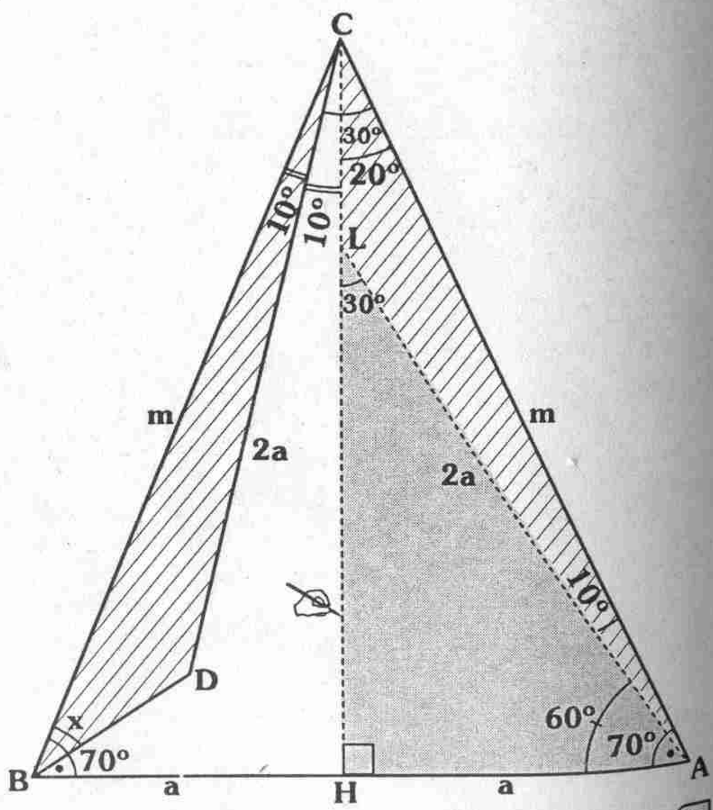
  $m\sphericalangle CFM = x$

  $\Rightarrow \; FA = FM = MC = b$
- Se traza : $\overline{MH} \perp \overline{FC} \quad \Rightarrow FH = HC = a$
- $⊿ ABE \cong ⊿ FHM$ (ALA) $\Rightarrow AE = b$
- ΔAEF : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle EAF = 36°$
- Finalmente: $x + 36° + 2x = 90°$

  $\therefore \; \mathbf{x = 18°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 189



- Piden **x**.
- Se deduce que ΔBCA isósceles

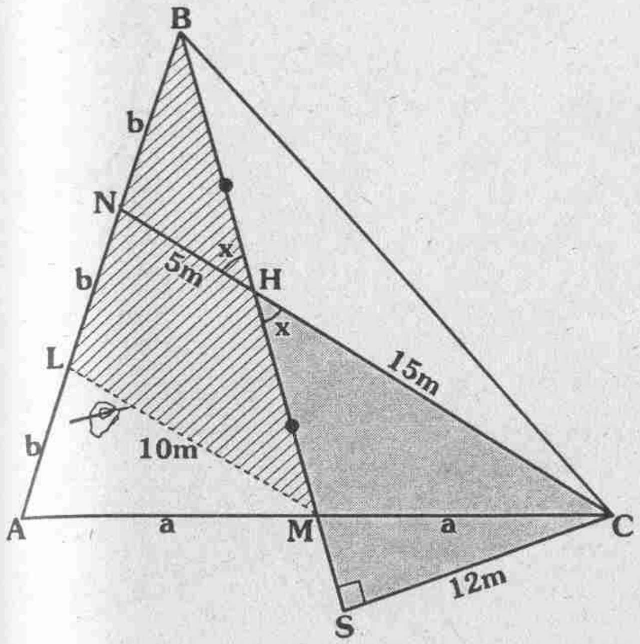
  $\Rightarrow \overline{CH}$: altura, mediana y bisectriz.
- $⊿ACH$: trazamos $\overline{AL}$ tal que:
- $⊿ AHL$: notable de 30° y 60°

  $\rightarrow AL = 2(AH)$
- $⊿ BCD \cong ⊿CAL$ (LAL)

  $\therefore \; \mathbf{x = 20°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 190



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{ML} // \overline{CN}$
- Δ LBM:

  $\overline{NH}$ es base media $\Rightarrow$ LM = 2(NH)

- Δ NAC:

  $\overline{LM}$ es base media $\Rightarrow$ NC = 2(LM)

  y del dato:

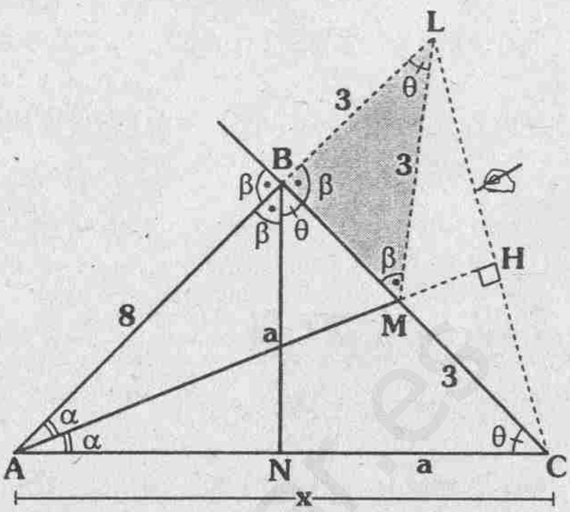
$$\frac{CN}{CS} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} CN = 20\text{ m} \\ CS = 12\text{ m} \end{array}$$

- ⊿CSH: notable de 37° y 53°

$$\mathbf{x = 53°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 191



- Piden AC = x.
- En la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto L tal que: LA = LC.

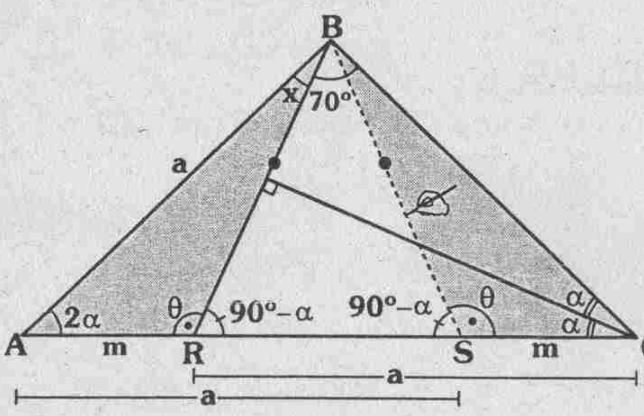
  $\Rightarrow$ m∢ALM = m∢MCA y LM = MC

- ΔBLM: se deduce que m∢LMB = β
- ΔBLM: isósceles (BL = LM)

$$\therefore \ \mathbf{x = 11}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 192



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BS}$ tal que AB = AS.

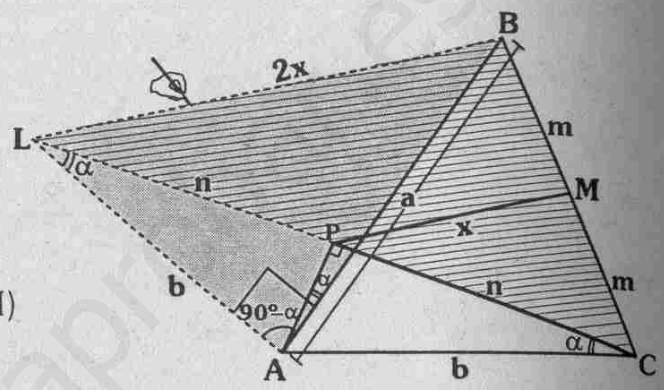
- Además $\triangle RBS$: isósceles $(RB = BS)$
- $⊿ ABR \cong ⊿ BSC$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\measuredangle BSC = m\measuredangle BAR$ $(\alpha = 20°)$
- $\triangle ABC$: $40° + x + 70° + 40° = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 193

- Piden **x**; dato: $a^2 + b^2 = 36$
- En la prolongación de $\overline{CP}$ se ubica el punto L tal que $CA = AL$.
- $\triangle CAL$: $\overline{AP}$ es altura y mediana
- $\triangle CLB$: $\overline{PM}$ es base media $\Rightarrow$ $LB = 2(PM)$
- $⊿LAB$: teorema de Pitágoras



$$(2x)^2 = a^2 + b^2 = 36$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 3}$$

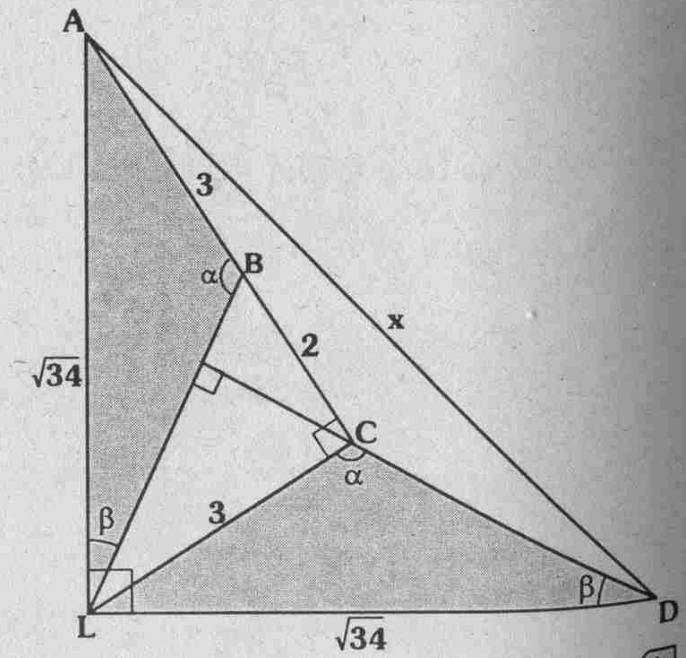
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 194

- Piden **x**.
- Se deduce: $m\measuredangle ABL > 90°$ y $m\measuredangle LCD > 90°$

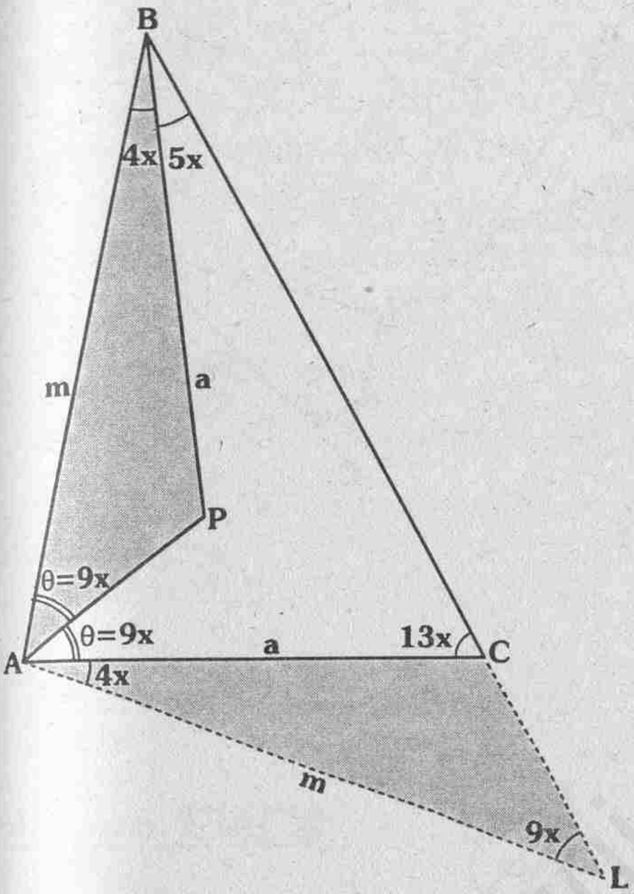
  y como $⊿ ABL \cong ⊿ m\measuredangle LCD$
  y $AL = LD$; $LC = AB$
- Se deduce: $m\measuredangle BCL = 90°$
- $⊿ACL$: $(AL)^2 = 5^2 + 3^2$

  $\Rightarrow AL = \sqrt{34}$
- $⊿ALD$: $\mathbf{x = 2\sqrt{17}}$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 195



- Piden **x**.
- En la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto "L" tal que $AB = AL$.
- $\Delta ABP \cong \Delta LAC$ (LAL)

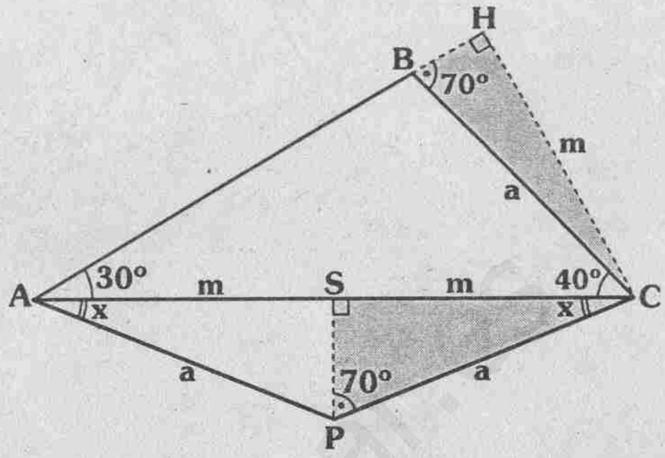
  $\Rightarrow \quad \theta = 9x$
- En ΔABC :

  $18x + 9x + 13x = 180$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 4,5°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 196



- Piden **x**.
- ⊿AHC: notable de 30° y 60°

  $\Rightarrow AC = 2(HC)$
- ΔAPC : isósceles, $\overline{PS}$ altura y mediana

  $\Rightarrow AS = SC$
- ⊿PSC ≅ ⊿BHC

  $\Rightarrow \quad m\sphericalangle SPC = m\sphericalangle HBC$
- ⊿PSC: $x + 70° = 90°$

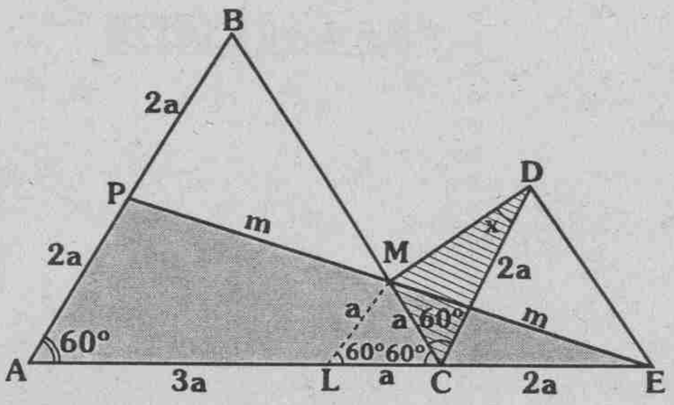
  $\therefore \quad \mathbf{x = 20°}$

Clave B

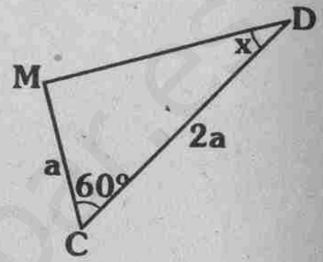
RESOLUCIÓN Nº 197

- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{ML} \parallel \overline{AP}$
- ⊿APE: $\overline{ML}$: base media

  $\Rightarrow AP = 2(ML) \quad , \quad AL = LE$



- En el ⊿CMD:



$$m\sphericalangle DMC = 90°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 198

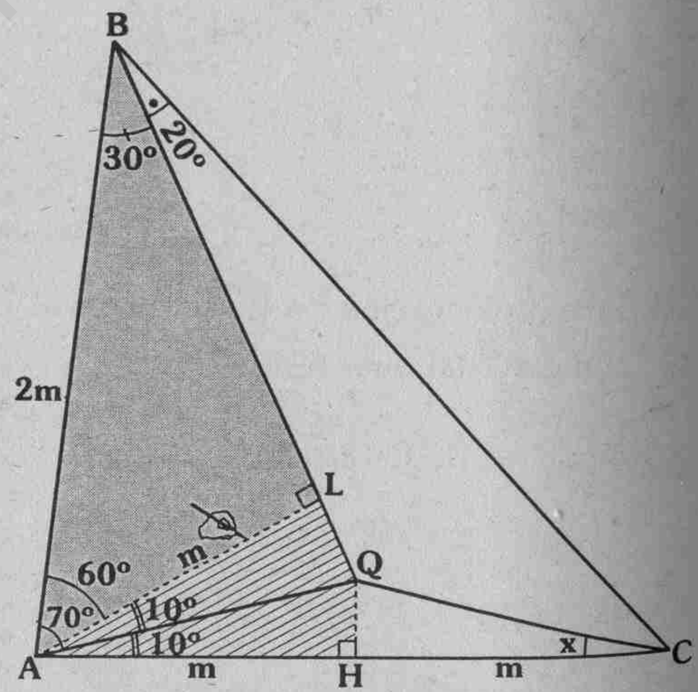
- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{AL} \perp \overline{BQ}$
- ⊿ALB: notable de 30 y 60°

  $\Rightarrow$ AB = 2(AL)
- Además el $\triangle$BAC es isósceles (AB = AC)
- Por teorema de la bisectriz:

  LA = HA

  $\Rightarrow$ AH = HC
- $\triangle$AQC : $\overline{QH}$ es altura y mediana

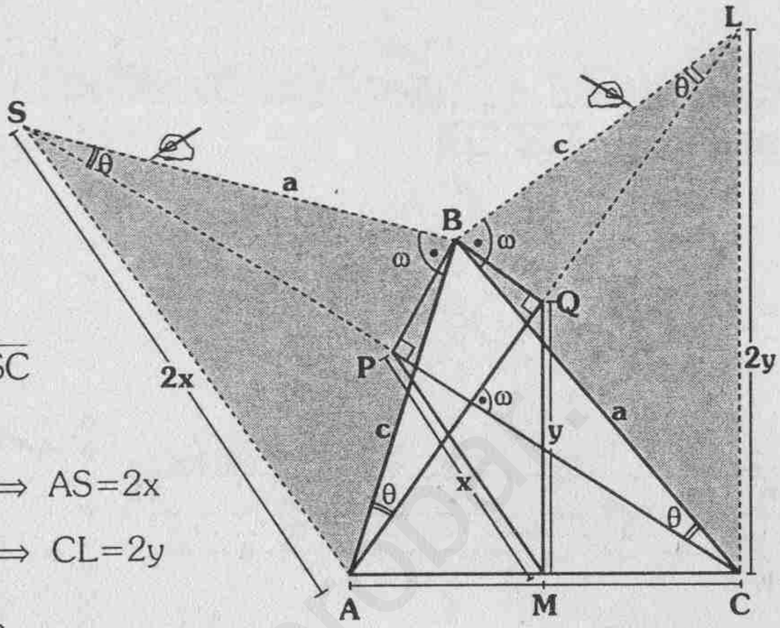
  $\Rightarrow$ $\triangle$AQC : isósceles



$$\therefore \quad \mathbf{x = 10°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 199

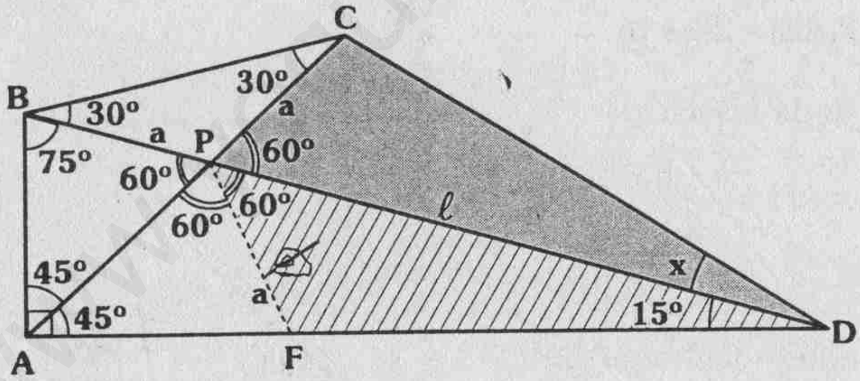


- Piden $\frac{x}{y}$.
- Se prolongan $\overline{CP}$ y $\overline{AQ}$ y se traza $\overline{BS}$ y $\overline{BL}$, con S y L en dichas prolongaciones tal que: $BS = BC$ y $AB = BL$.
- ΔSBC y ΔABL son isósceles.
- P y Q son puntos medios de $\overline{SC}$ y $\overline{AL}$ respectivamente.
- En ΔACS, $\overline{MP}$ es base media $\Rightarrow AS=2x$
- En ΔALC, $\overline{MQ}$ es base media $\Rightarrow CL=2y$
- $\triangle ABS \cong \triangle LBC$ (LAL) $\Rightarrow 2x=2y$

$$\therefore \ \frac{x}{y}=1$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 200



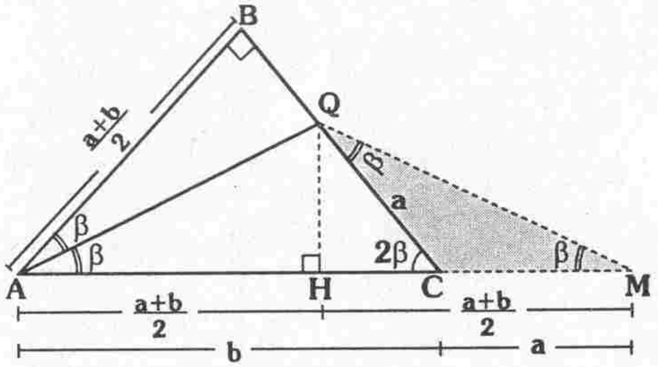
- Piden **x.**
- ΔBPC: isósceles $\Rightarrow PB=PC=a$
- Se traza $\overline{PF}$ tal que: $m\measuredangle APF = 60°$
- $\Delta APF \cong \Delta APB$ (ALA) $\Rightarrow PF=BP=a$
- Como: $m\measuredangle FPC = 60° \Rightarrow \Delta DPF \cong \Delta DPC$ (LAL)

$$\therefore \ \mathbf{x=15°}$$

Clave B

Solucionario
Ciclo Semestral Intensivo

Resolución Nº 201



- Piden β
- Se prolonga $\overline{AC}$ hasta M, tal que:

$$CM = CQ = a$$

- Así tenemos:

$$AM = 2(AB) = 2(a+b)$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$AB = AH = \frac{a+b}{2}$$

- Como:

$$AH = HM \Rightarrow AQ = QM \Rightarrow \Delta AQM$$

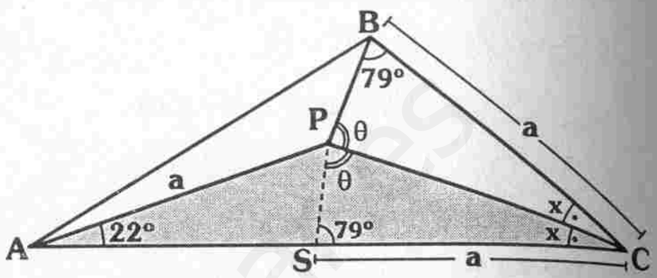
es isósceles, luego $m\measuredangle AMQ = \beta$

- ΔCQM : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle MQC = \beta$
- $\measuredangle ABC$: $2\beta + 2\beta = 90°$

$$\therefore \beta = \mathbf{22,5°}$$

Clave B

Resolución Nº 202



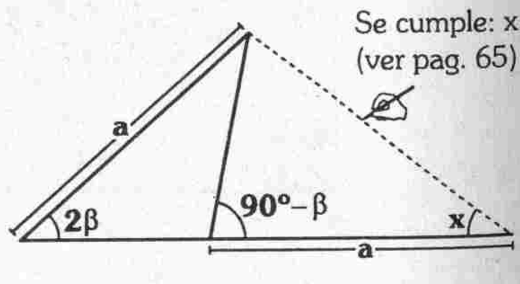
- Piden **x**.
- Se traza $\overline{PS}$, tal que:

$$m\measuredangle CPS = m\measuredangle CPB$$

$$\Rightarrow \Delta BPC \cong \Delta SPC \ \ (ALA)$$

$$\Rightarrow CS = CB = a$$

- Consideremos:



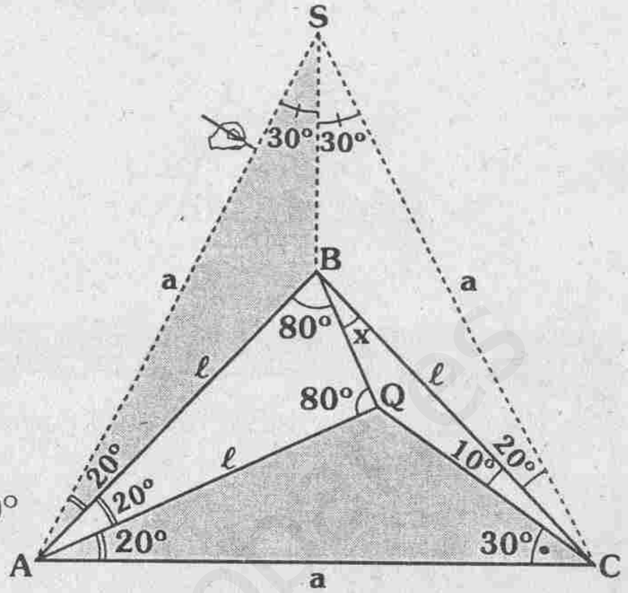
- En el problema:

$$\beta = 11°$$

$$\therefore \mathbf{x = 22°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 203



- Piden **x**.
- Se traza $\overline{AS}$ tal que $m\measuredangle SAB = 20°$ y $AS = AC = a$
- ΔASC : equilátero $\Rightarrow CS = a$
- Como $AS = SC$ y $AB = BC$

$$\Rightarrow m\measuredangle ASB = m\measuredangle BSC = 30°$$

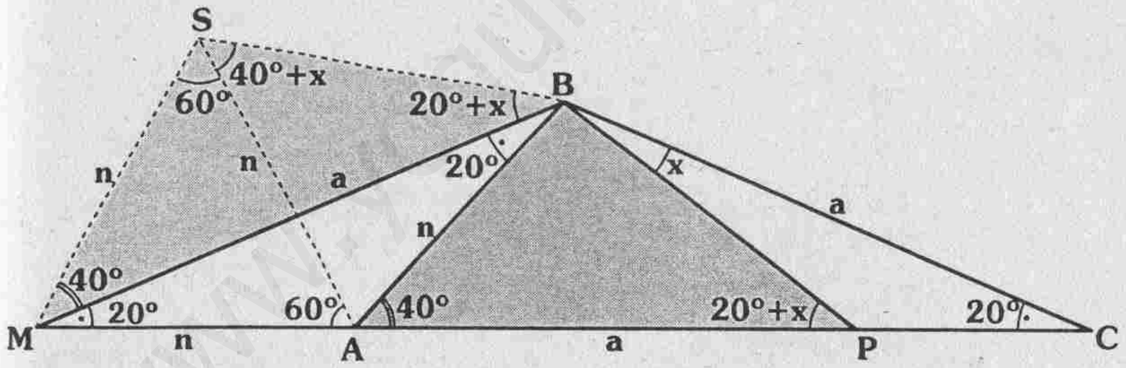
- $\Delta SAB \cong \Delta CAQ$ (ALA) $\Rightarrow AB = AQ$
- ΔABQ : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle ABQ = m\measuredangle AQB = 80°$
- ΔABC : $m\measuredangle ABC = 100°$

$$80° + x = 100°$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 204

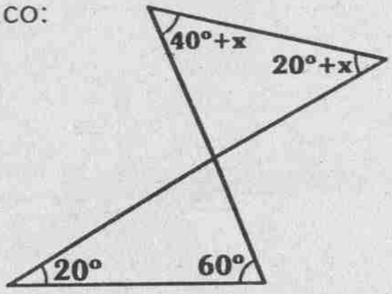


- Piden **x**.
- Como $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$, se traza $\overline{BM}$ tal que:

$$m\measuredangle MBA = 20° \Rightarrow AM = AB = n \quad y \quad MB = BC = a$$

- Se traza $\overline{MS}$ tal que $MS = n$ y $m\measuredangle SMB = 40°$
- $\Delta SMB \cong \Delta BAP$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle ABS = 20° + x$
- ΔASM : equilátero $\Rightarrow AS = n$
- ΔBAS : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle ASB = 40° + x$

- Del gráfico:



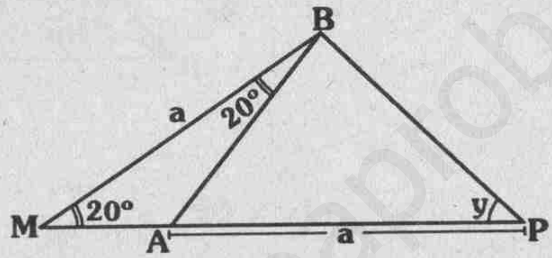
$$40° + x + 20° + x = 20° + 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave D

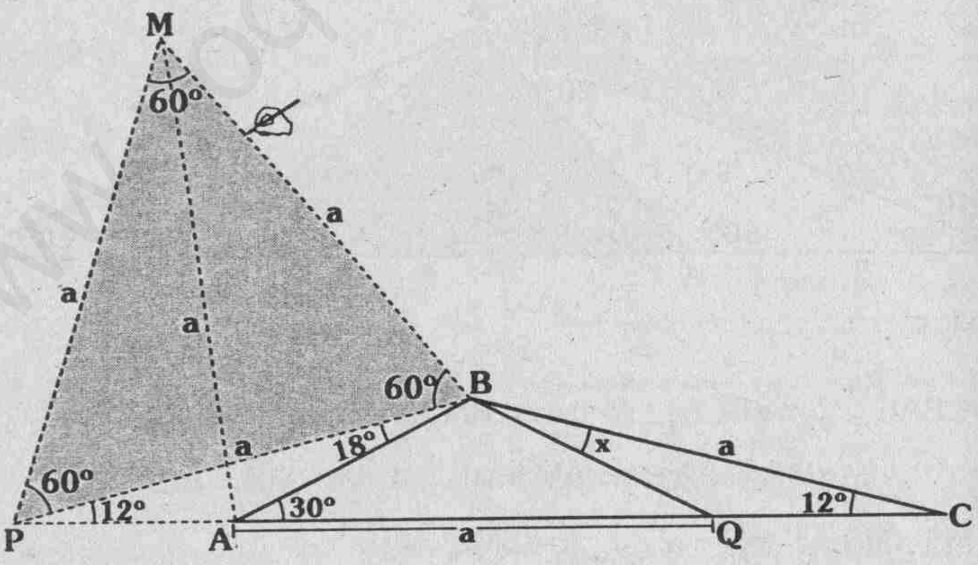
Nota

Si notamos el $\triangle MBP$ *, lo cual ya fue analizado en el capítulo de trazos auxiliares (ver pág 59).*



Resolución Nº 205

Paso 1



- Piden **x**.
- Se traza $\overline{BP}$ (P en la prolongación de $\overline{QA}$), tal que:

$$m\measuredangle BPA = 12° \Rightarrow PB = BC = a$$

- Se traza el ΔPBM equilátero, verificamos entonces:

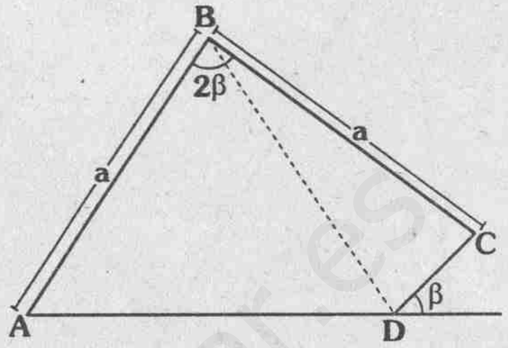
$$m\sphericalangle PMB = 2(m\sphericalangle BAP) \quad y \quad PM = MB = a \Rightarrow MA = a$$

Recordar:

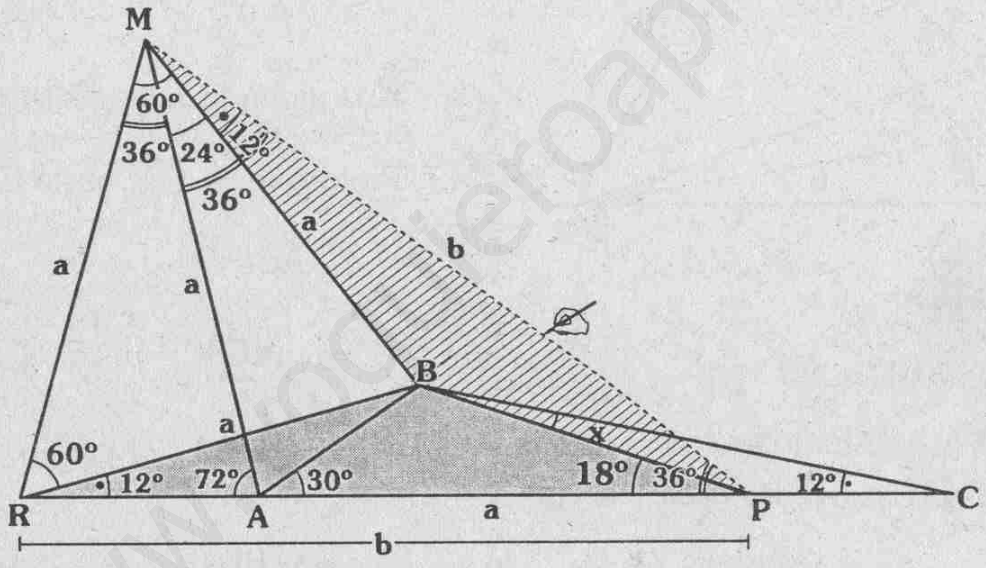
- Del gráfico, se cumple:

$$\boxed{BD = a}$$

- La prueba fue realizada en la publicación de "Triángulos", también se demuestra en "Puntos Notables".



Paso 2



- Como: $AM = AP = a \quad y \quad m\sphericalangle MAR = 72°$

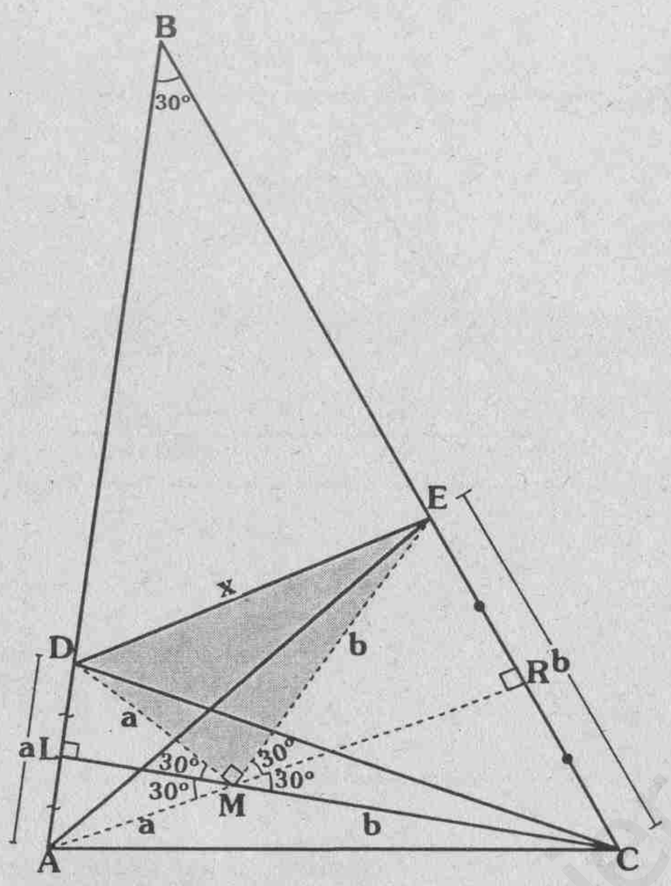
$$\Rightarrow m\sphericalangle APM = 36°$$

- ΔRMP : isósceles $\Rightarrow PR = PM$
- Como: $PR = PM \quad y \quad RB = BM \Rightarrow m\sphericalangle RPB = m\sphericalangle MPB = 18°$
- ΔPBC : $x + 12° = 18°$

$$\therefore \mathbf{x = 6°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 206



- Piden **x**.
- Datos: AC = CD = AE
- En ΔACD y ΔCAE (isósceles) se trazan las alturas $\overline{CL}$ y $\overline{AR}$ las cuales se cortan en M.
- Por teorema: $m\measuredangle EMR = 30°$
- ΔAMD y ΔCME : equiláteros
- $m\measuredangle DME = 90°$

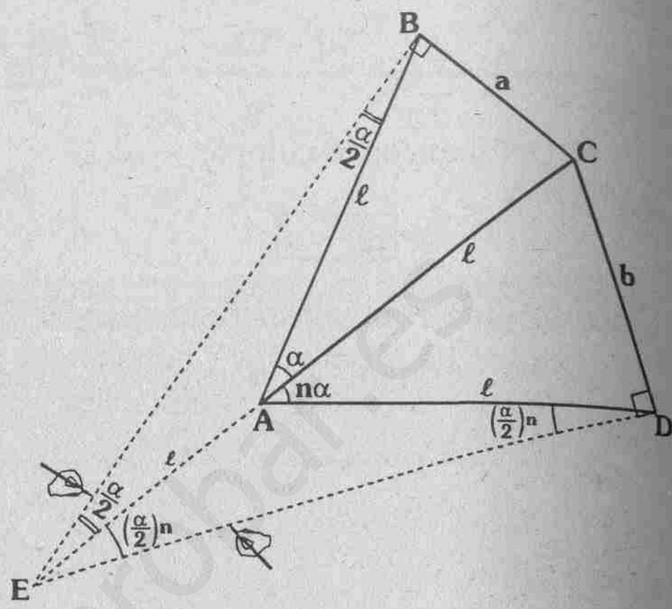
  ⊿DME: por teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 207



- Nos piden la relación entre **a**; **b** y **n**.
- Prolongamos $\overline{CA}$ hasta E tal que :

$$AE = \ell$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EBC = m\measuredangle EDC = 90°$$

- En ΔBEA y ΔAED notamos:

$$m\measuredangle BEA = \frac{\alpha}{2} \qquad y$$

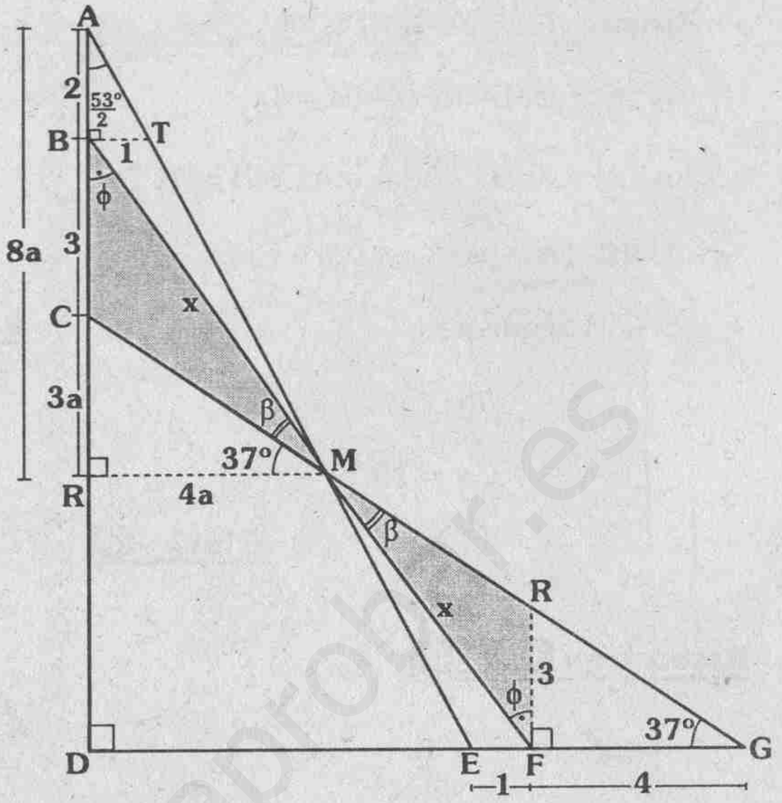
$$m\measuredangle AED = n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Por teorema (pág. 51)

$$\therefore\ \mathbf{b < na}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 208



- Nos piden **x**.
- Se traza:

  $\overline{FR} // \overline{CB} \Rightarrow \Delta BMC \cong \Delta FMR$ (LAL)

  $\Rightarrow FR = 3$

  $\overline{BT} // \overline{EF} \Rightarrow \Delta MBT \cong \Delta MEF$ (ALA)

  $\Rightarrow BT = 1$

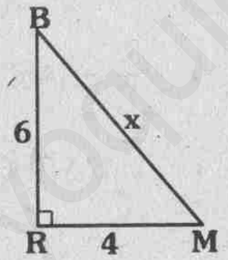
- ⊿RFG: notable de 37°
- ⊿ABT: notable de 53/2
- Se traza $\overline{MR} \perp \overline{AD}$ (R en $\overline{AD}$)
- ⊿MRC: notable de 37°

  $\Rightarrow MR = 4a$ y $RC = 3a$

- En ⊿ARM: notable de $\dfrac{53°}{2}$ $\Rightarrow AR = 8a$

  $8a = 3a + 5 \Rightarrow a = 1$

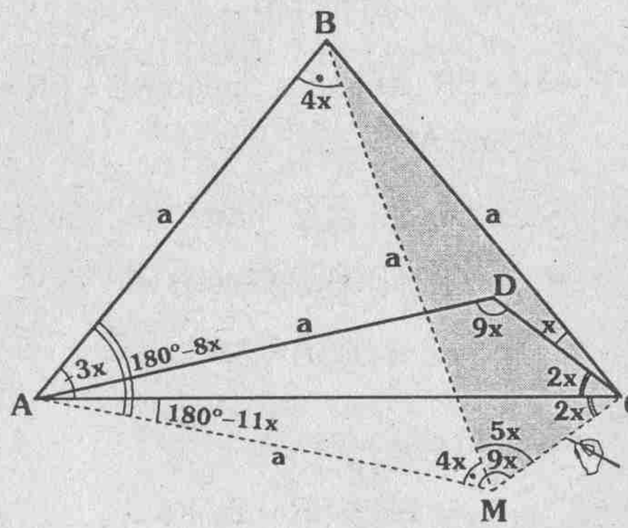
- En ⊿BRM:



$\therefore$ $\mathbf{x = 2\sqrt{13}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 209



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{CM}$ tal que $CD = CM$ y

  $m\measuredangle ACM = 2x \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta AMC$

- Como:

  $m\measuredangle CAM = 180° - 11x$

  $\Rightarrow m\measuredangle BAM = 180° - 8x$

- Como: $AB = AM$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle AMB = 4x$

- $m\sphericalangle AMC = 9x \quad \Rightarrow m\sphericalangle CMB = 5x$

- ΔMBC : isósceles $\Rightarrow CB = BM = a$

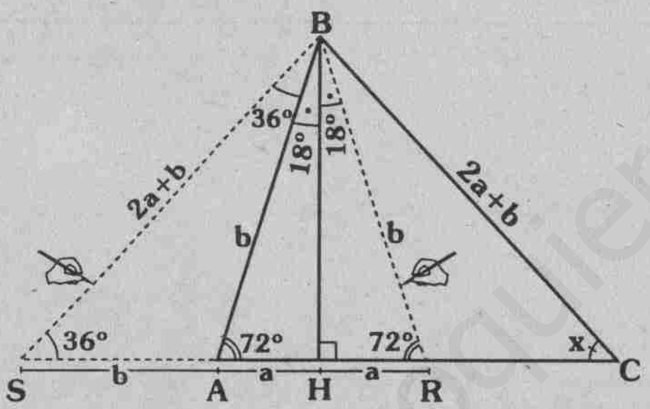
- ΔAMB : equilátero

$$4x = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 210



- Piden **x**.
- Se ubica R en $\overline{HC}$ tal que:

$$AH = HR = a$$

  $\Rightarrow \Delta ABR$: isósceles , luego $AB = BR = b$ y $m\sphericalangle ARB = 72°$

- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta "S" tal que: $AS = b \Rightarrow \Delta BSA$: isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle BSA = 36°$

- ΔSBR : isósceles

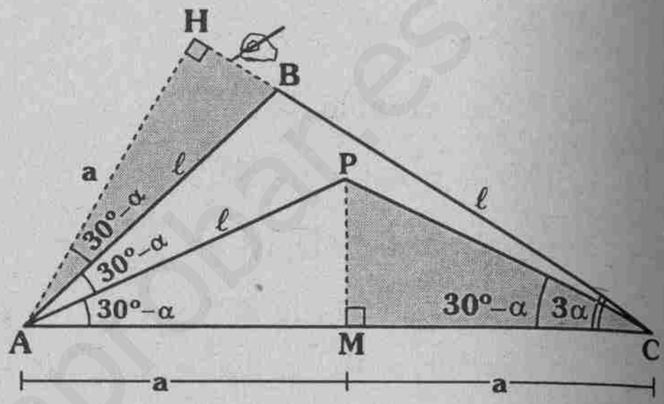
  $\Rightarrow SB = SR = 2a + b$

- ΔSBC : isósceles

$$\therefore \mathbf{x = 36°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 211



- Nos piden α.

- Se traza $\overline{AH} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (H en $\overleftrightarrow{BC}$)

- $m\sphericalangle BAH = 30° - \alpha$

- En ΔAPC se traza la altura $\overline{PM}$, M en $\overline{AC}$

  $\Rightarrow AM = MC$

- $\triangle AHB \cong \triangle CMP$

  $\Rightarrow AH = MC = a$

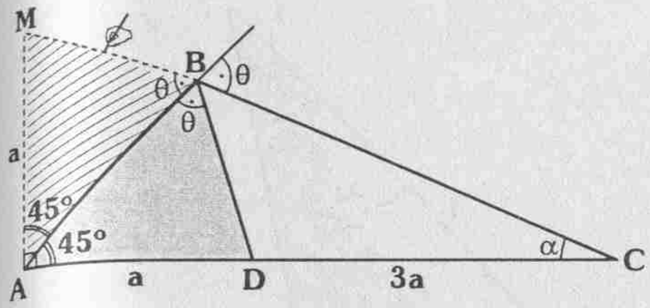
- $\triangle AHC$: notable :

$$3\alpha = 30°$$

$$\therefore \alpha = \mathbf{10°}$$

Clave C

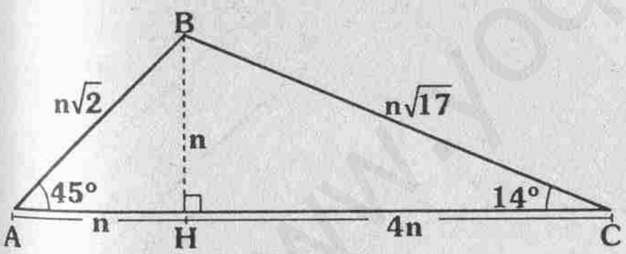
RESOLUCIÓN Nº 212



- Nos piden: $\dfrac{BC}{AB}$
- Aprovechemos el hecho que $\overline{BA}$ es bisectriz exterior del ΔDBC.
- Se traza $\overline{AM}$, tal que: $m\sphericalangle BAM = 45°$
- $\Delta MAB \cong \Delta DAB$ (ALA)

$$\Rightarrow AM = AD = a$$

- $\triangle MAC$: $AC = 4(AM) \Rightarrow \alpha = 14°$
- Ahora analicemos el ΔABC.



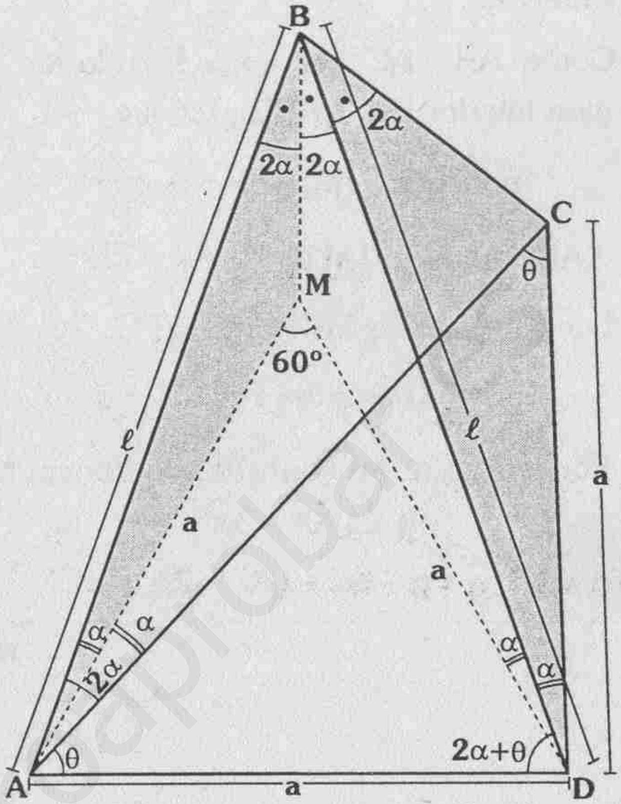
- $\triangle AHB$: notable de 45°
- $\triangle BHC$: notable de 14°

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{n\sqrt{17}}{n\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AB}} = \frac{\sqrt{\mathbf{34}}}{\mathbf{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 213



- Piden α.
- En ΔADC: $3\alpha + 3\theta = 180°$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 60°$$

- Se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\sphericalangle BAM = \alpha \quad y \quad AM = a$$

- $\Delta MAB \cong \Delta CDB$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle ABM = 2\alpha$
- ΔAMD : equilátero
- Como $AB = BD$ y

$AM = MD \Rightarrow m\sphericalangle DBM = m\sphericalangle ABM = 2\alpha$

- En ABDM:

$$\alpha + 4\alpha + \alpha = 60°$$

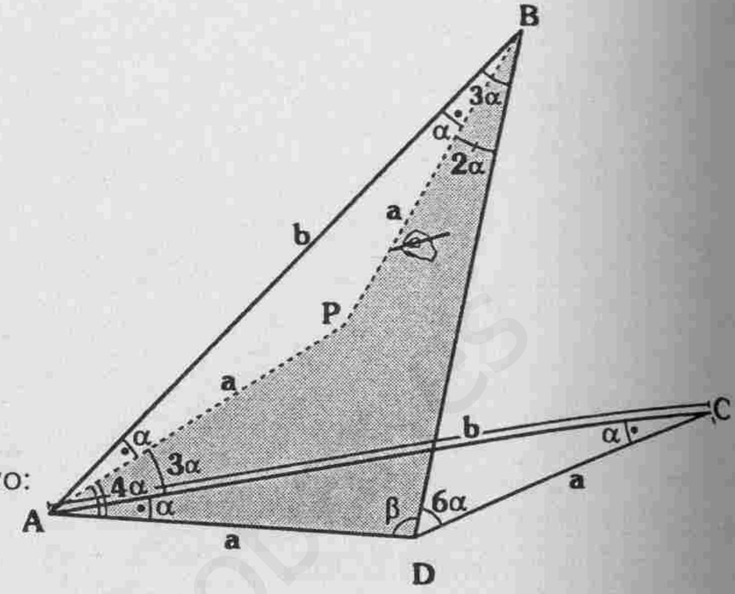
$$\therefore \alpha = \mathbf{10°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 214

- Piden α.
- Como $AB = AC$, se ubica P en la región interior del ΔABD, tal que :

$$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle ABP = \alpha$$



- $\Delta ABP \cong \Delta ACP$ (ALA) $\Rightarrow AP = PB = a$
- Luego tenemos: $AP = AD = PC$ y

$$m\sphericalangle DAP = 2(m\sphericalangle PBD)$$

- Por teorema del cuadrilátero cóncavo:

$$\beta = 120° - 2\alpha$$

- $\Delta ADC : \alpha + \alpha + 6\alpha + 120° - 2\alpha = 180°$

$$\therefore \alpha = 10°$$

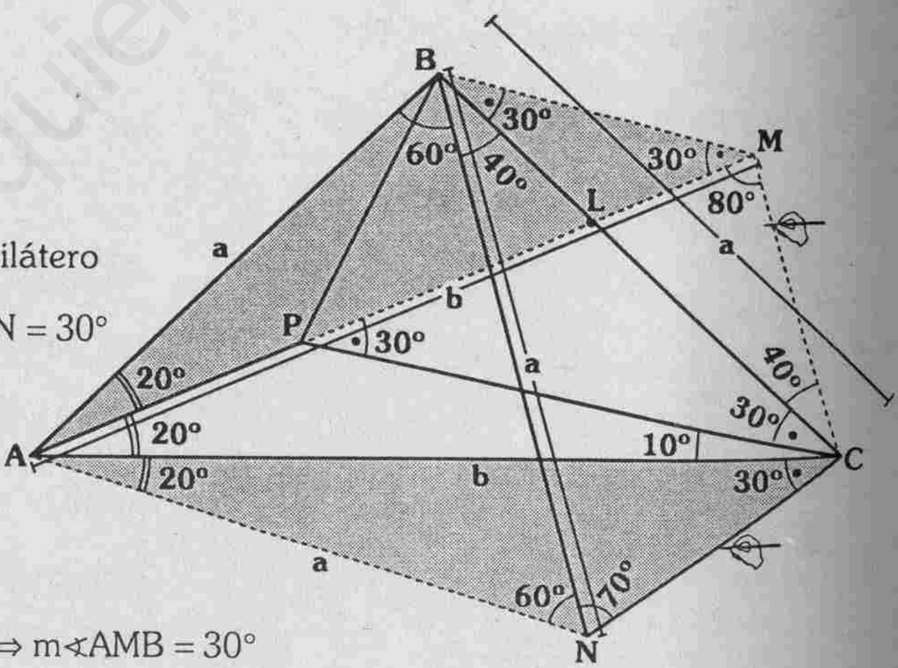
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 215

- Piden $m\sphericalangle PBC$
- Se traza $\overline{AN}$ tal que:

  $m\sphericalangle CAN = 20°$ y

  $AN = AB \Rightarrow \Delta ANB$ es equilátero



- ΔNBC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle ACN = 30°$
- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta M tal que: $AC = AM$

  $\Rightarrow \Delta AMC$ es isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle AMC = 80°$

- $\Delta BAM \cong \Delta CAN$ (LAL) $\quad \Rightarrow m\sphericalangle AMB = 30°$
- ΔPLC y ΔLMB : isósceles $\Rightarrow AL = LC$ y $LM = LB \Rightarrow PM = BC = a$
- $\Delta PCB \cong \Delta CPM$ (LAL)

$$\therefore \ m\sphericalangle PBC = 80°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 216

- Piden **x**.
- $\triangle ABE$ y $\triangle ECD$: isósceles
- Al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se corten en L, tenemos:

  $m\measuredangle ALD + \alpha + \theta = 180°$

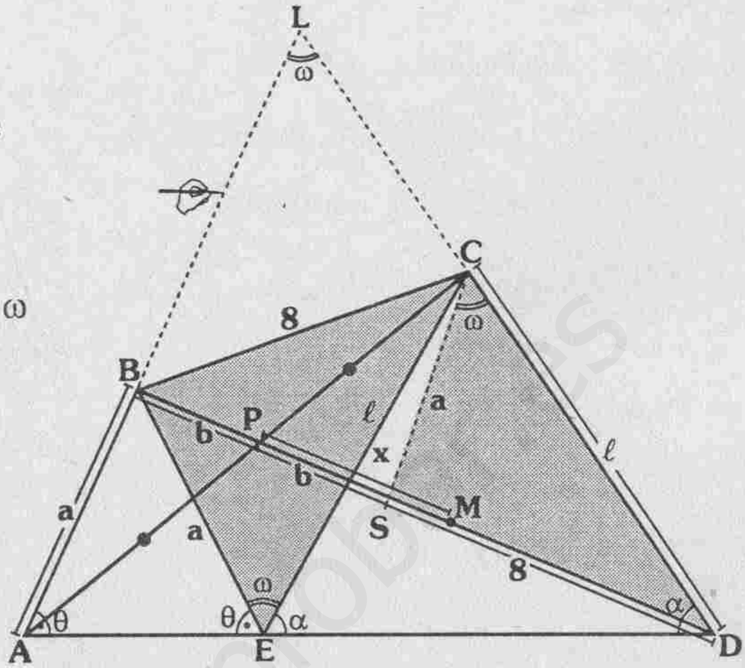
- Como: $\omega + \alpha + \theta = 180° \Rightarrow m\measuredangle ALD = \omega$
- Sea:

  $\overline{CS} // \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle SCP \Rightarrow CS = a$

- $\triangle SCD \cong \triangle BEC$ (LAL) $\Rightarrow SD = BC = 8$
- Como M es punto medio de $\overline{BD}$

  $$\Rightarrow \quad BM = \frac{BD}{2}$$

  $$b + x = 4 + x$$



$\therefore$ **x = 4**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 217

- Nos piden **x**.
- Prolonguemos $\overline{BA}$ y ubiquemos M, tal que:

  $m\measuredangle AMD = 80° \Rightarrow \triangle AMD$ y $\triangle MBD$; isósceles

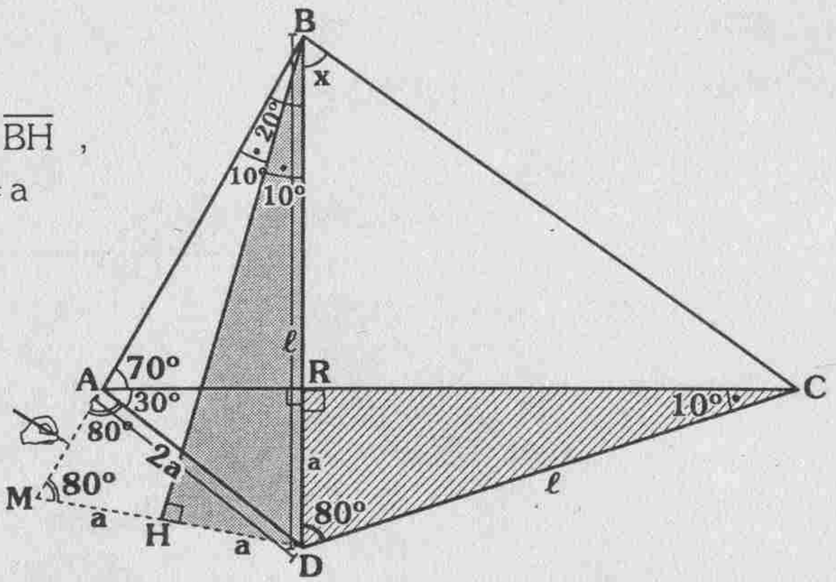
- En el $\triangle MBD$ se traza la altura $\overline{BH}$, como: $MB = BD \Rightarrow MH = HD = a$
- $\triangle AMD$: isósceles $\Rightarrow AD = 2a$
- ⊿ARD: notable de 30°

  $\Rightarrow DR = a$

- ⊿DHB $\cong$ ⊿DRC (ALA)

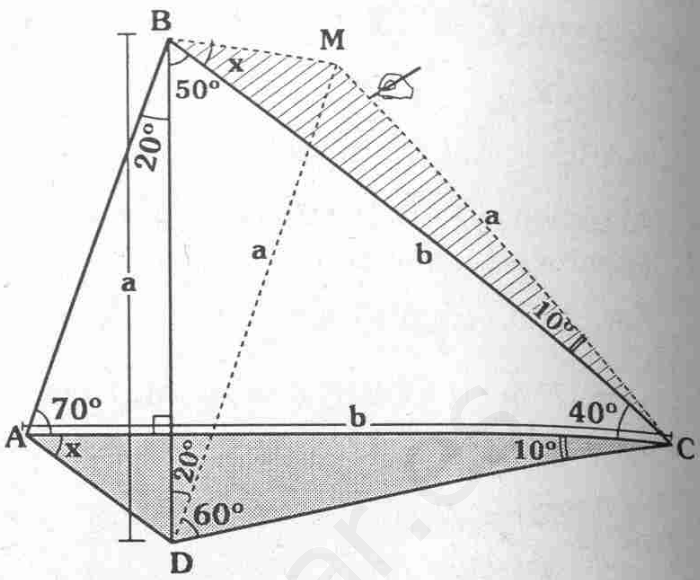
  $\Rightarrow DB = DC$

  $\therefore$ **x = 50°**



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 218



- Piden **x**.
- ΔDBC : isósceles $\Rightarrow DB = DC = a$
- Tracemos $\overline{CM}$ tal que $m\measuredangle BCM = a$ y $CM = a \Rightarrow \Delta DCM$ equilátero
- $\Delta ACD \cong \Delta BCM$ (LAL)

  $\Rightarrow m\measuredangle MBC = x$
- Como: $DB = DM$

  $\Rightarrow \Delta DBM$: isósceles

  $\Rightarrow x + 50° = 80°$

$\therefore$ **x = 30°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 219

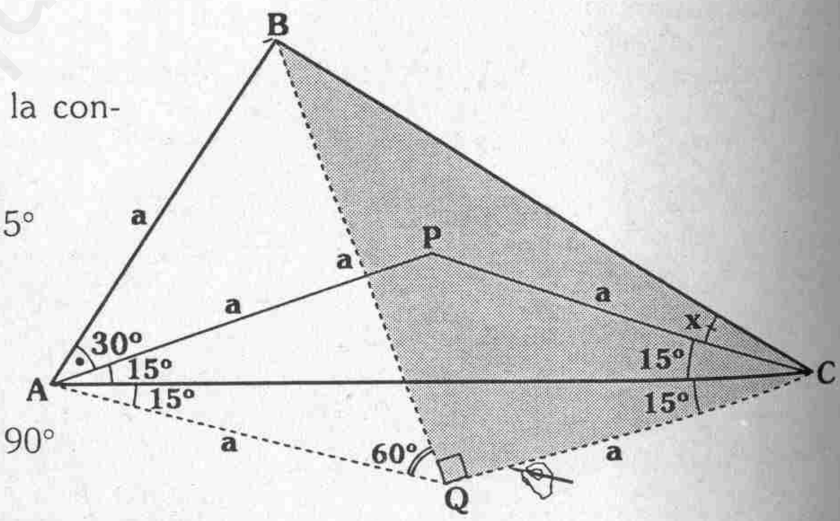
- Piden **x**.
- Tracemos ΔAQC tal que :

  $\Delta AQC \cong \Delta APC$, producto de la congruencia:

  $AQ = AP = a$ y $m\measuredangle CAQ = 15°$
- ΔAQB : equilátero
- Como:

  $BQ = QC$ y $m\measuredangle BQC = 90°$
- Tenemos:

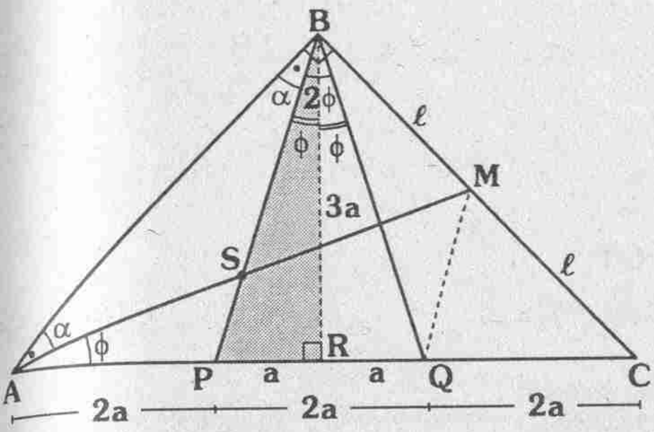
  $x + 30° = 45°$



$\therefore$ **x = 15°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 220



- Piden ϕ
- En ΔPBC: $\overline{MQ}$ es base media

$$\Rightarrow \overline{QM} // \overline{PB}$$

- En ΔAMQ:

$AP = PQ$ y $\overline{PS} // \overline{QM} \Rightarrow \overline{PS}$ es base media $\Rightarrow AS = SM$

- En $\triangle ABM$: $\overline{BS}$ es mediana

$$\Rightarrow AS = SM = SB$$

- ΔABS:

isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle BAS = m\sphericalangle SBA$

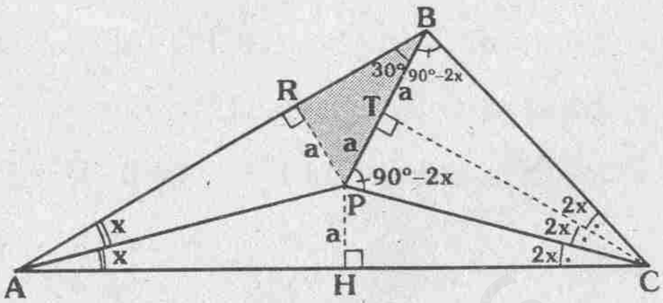
- En $\triangle ABC$ se traza la mediana:

$\overline{BR} \Rightarrow AR = RC = RB = 3a$

- En ΔPBQ: $\overline{BR}$ es mediana y bisectriz, entonces $\overline{BR}$ también es altura.
- $\triangle PBR$: $\phi = \dfrac{37^\circ}{2}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 221



- Nos piden **x**.
- ΔPCB: isósceles, pues $CP = CB$ entonces al trazar la altura, tenemos:

$PT = TB$ y

$m\sphericalangle PCT = m\sphericalangle BCT = 2x$

- Por teorema de la bisectriz:

$$PT = PH = PR = a$$

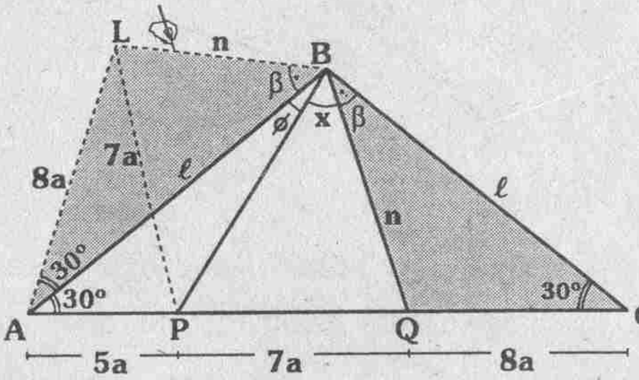
- $\triangle PRB$: notable de 30°
- En ΔABC:

$$8x + 90^\circ - 2x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 222

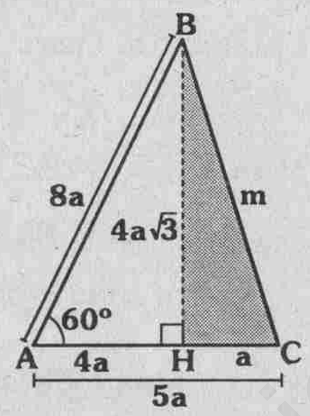


- Piden **x**.
- Del gráfico: $x+\beta+\phi=120°$
- Se traza: $\Delta ABL \cong \Delta CBQ$ (ALA), asi tenemos: $AL=8a$ y $LB=BQ=n$
- De la obsevación: $LP=7a$
- $\Delta PBL \cong \Delta PBQ$ (LLL) $\Rightarrow$ $x=\beta+\phi$

$$\therefore\ \mathbf{x=60°}$$

Clave C

Observación

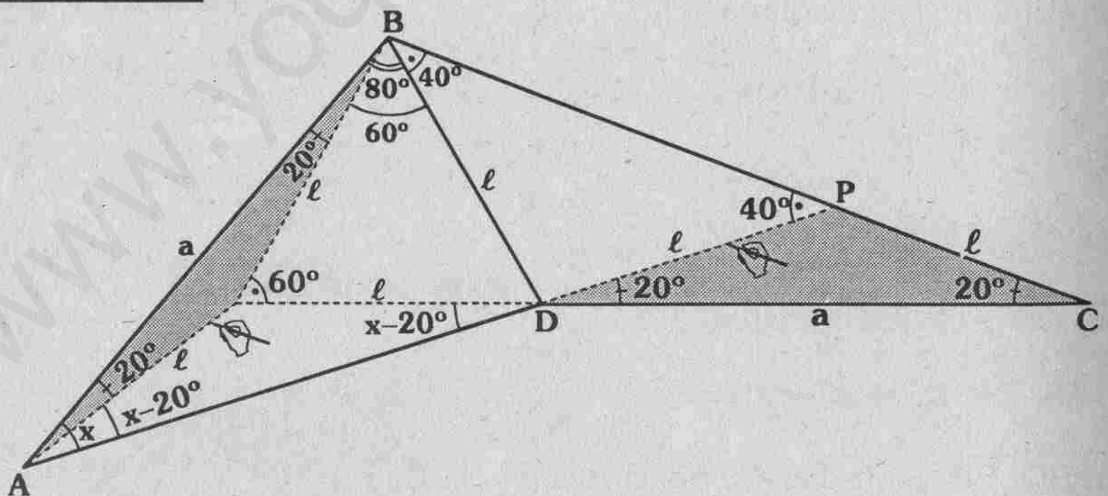


- $⊿BHC$:

$$m^2=a^2+\left(4a\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{m=7a}$$

RESOLUCIÓN Nº 223



- Piden **x**.
- En ΔDBC se nota: $m\sphericalangle DBC=2(m\sphericalangle DCB)$
- Se nos sugiere trazar $\overline{DP}$ tal que: $m\sphericalangle PDC=20° \Rightarrow PC=PD=DB=\ell$
- Se traza el ΔASB, tal que $\Delta ASB \cong \Delta DPC$

- Como $BS = BD$ y $m\sphericalangle SBD = 60^\circ$

  $\Rightarrow \Delta SBD$: equilátero

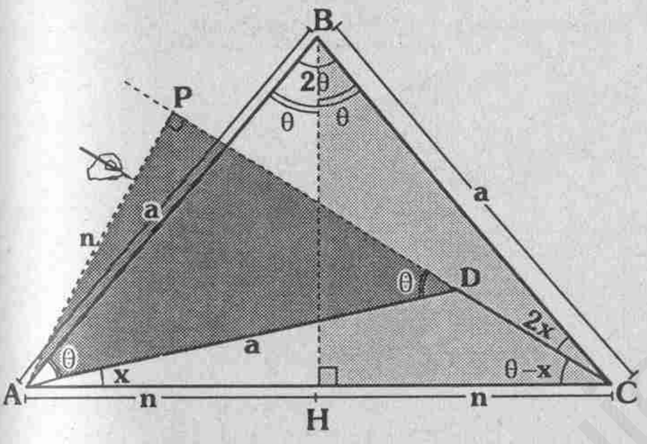
- En $\measuredangle$ ABSD :

  $$20^\circ + x + x - 20^\circ = 60^\circ$$

  $$\therefore\ \mathbf{x = 30^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 224



- Piden **x**.
- Dato: $AB = BC = AD$
- Se traza $\overline{AP} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (P en $\overleftrightarrow{CD}$)
- Se traza:

  $\overline{BH} \perp \overline{AC} \Rightarrow AH = HC$ y

  $m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle CBH$

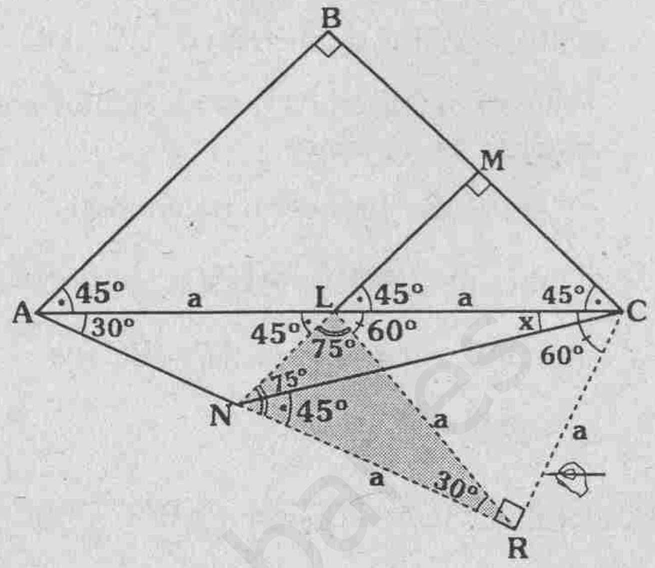
- $\triangle APD \cong CHB \Rightarrow AP = AH = n$
- $\triangle APC$: notable de 30°
- Como: $2\theta + x = 90^\circ$ y $\theta - x = 30^\circ$

  $\Rightarrow \theta = 40^\circ$

  $$\therefore\ \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 225

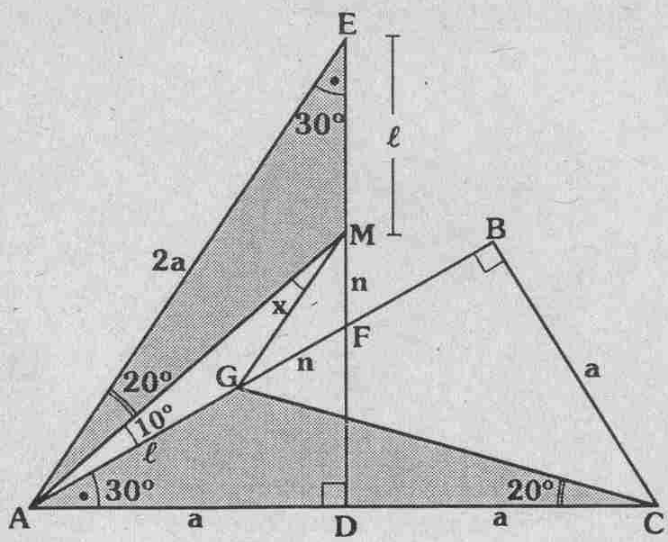


- Piden **x**.
- Como: $BM = MC \Rightarrow AL = LC = a$
- ARC: notable de $30^\circ \Rightarrow CR = a$
- $\triangle LCR$: equilátero $\Rightarrow LR = a$
- $\triangle NLR$: isósceles $\Rightarrow NR = a$
- $\triangle NRC$: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle RNC = 45^\circ$
- ΔANC : $x + 30^\circ = 45^\circ$

  $$\therefore\ \mathbf{x = 15^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 226



- Piden **x**.
- Dato: $\triangle ABC \cong \triangle EDA$ y $BC=DC$
- Primero, analicemos que elementos son iguales; asi tenemos:

$AC = AE$ (por ser hipotenusas)

- Como $m\measuredangle EAD \neq m\measuredangle BAC$, entonces:

$m\measuredangle BAC = m\measuredangle AED \Rightarrow AD = BC = a$

$m\measuredangle BCA = m\measuredangle EAD$

- Como: $AC = 2(BC) \Rightarrow m\measuredangle BAC = 30°$
- ΔAEF : isósceles, con $AF = FE$
- $\Delta ACG \cong \Delta EAM$ (ALA)

$\Rightarrow AG = EM$

- ΔGFM : isósceles

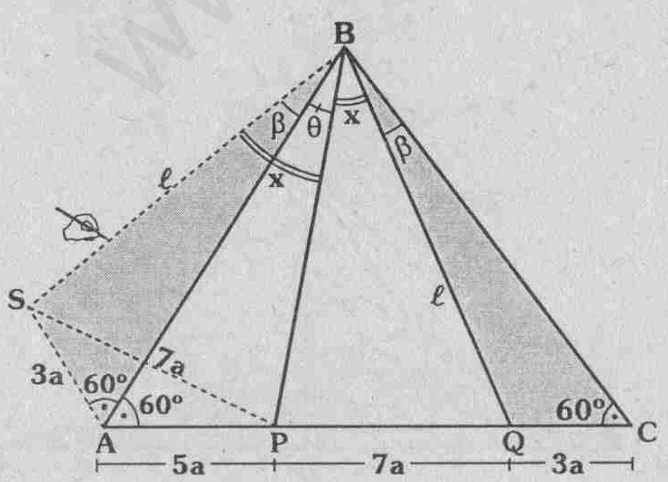
$\Rightarrow m\measuredangle GMF = m\measuredangle FGM = 30°$

- Luego: $\overline{GM} // \overline{AE}$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 227



- Piden **x**.

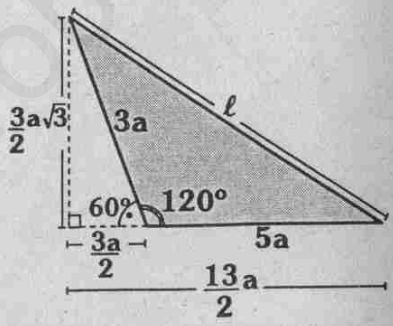
$$\beta + \theta + x = 60°$$

- Construimos ΔABS congruente con el ΔACQ :
- Como $AS = 3a$ y $AP = 5a$, de la observación: $SP = 7a$
- $\Delta PSB \cong \Delta PQB$ (LLL) $\Rightarrow x = \beta + \theta$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

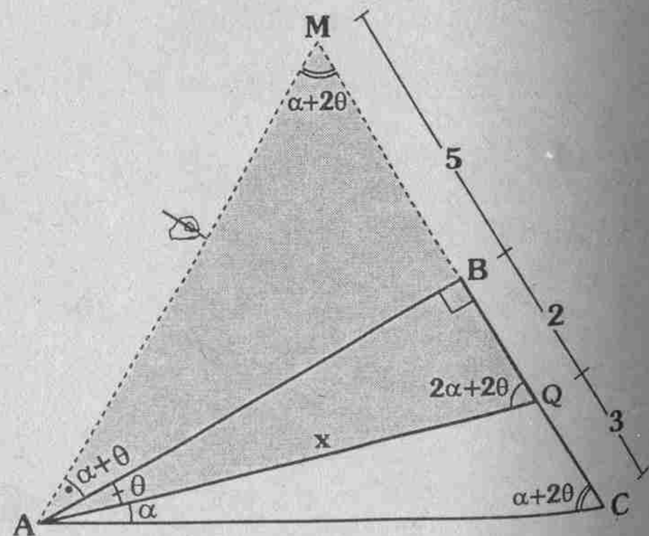
Observación



$$\ell^2 = \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}a\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{\ell = 7a}$$

RESOLUCIÓN Nº 228

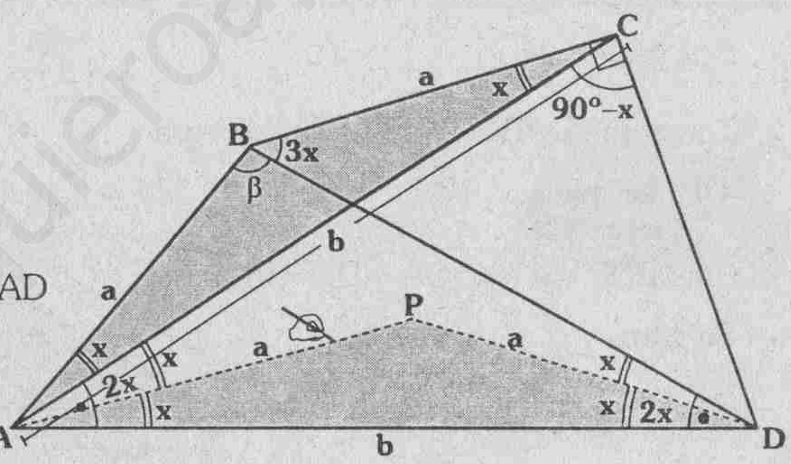


- Piden **x**.
- En ⊿ABC: $2\alpha + 3\theta = 90°$
- Prolongamos $\overline{CB}$ y unicamos M tal que: $CB = BM$
- ΔAMC : isósceles $\Rightarrow$ $m\sphericalangle AMC = \alpha + 12\theta$
- En ⊿ABM: $m\sphericalangle MAB = \alpha + \theta$
- Como: $m\sphericalangle MAQ = m\sphericalangle AMQ = \alpha + 2\theta$
- ΔAMQ : isósceles

$$\therefore\ \mathbf{x = 7}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 229



- Piden **x**.
- Del gráfico: $m\sphericalangle CAD = 2x$ y

  $m\sphericalangle ACD = 90° - x$

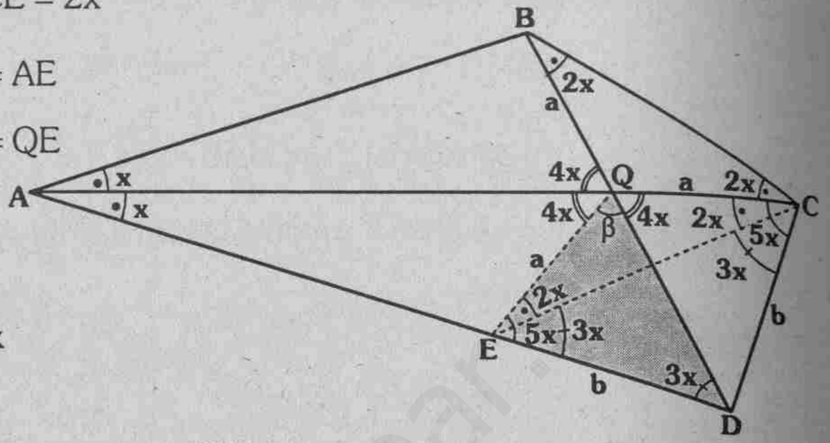
  $\Rightarrow \Delta ACD$: isósceles, luego $AC = AD$
- Como $AC = AD$, aprovechemos ello para utilizar la congruencia.
- Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ tal que: $m\sphericalangle DAP = m\sphericalangle ADP = x$
- $\Delta ACB \cong \Delta ADP$ (ALA) $\Rightarrow$ $AP = PD = AB = BC = a$
- En ⩓ABDP: $\beta = 120° - x$
- En ΔBDP: $3x + 2x + 120° - x = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 230

- Nos piden **x**.
- Tracemos $\overline{CE}$ tal que: $m\sphericalangle ACE = 2x$
- $\Delta ACE \cong \Delta ACB$ (ALA) $\Rightarrow AB = AE$
- $\Delta ABQ \cong \Delta AEQ$ (ALA) $\Rightarrow BQ = QE$
  y $m\sphericalangle AQE = 4x$
- ΔBQC y ΔCQE: isósceles
- $\Delta EQD \cong \Delta CQD$ (LLL) $\Rightarrow \beta = 4x$
- En Q: $4x + 4x + 4x = 180°$



$\therefore$ **x = 15°**

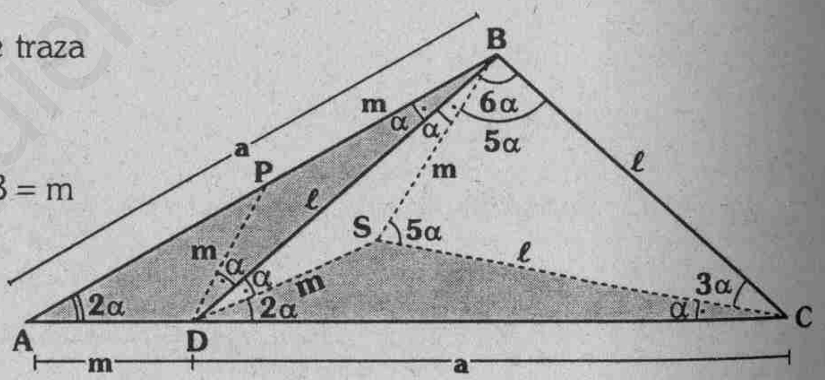
Clave E

RESOLUCIÓN Nº 231

- Nos piden: α
- Como $m\sphericalangle DAB = 2(m\sphericalangle ABD)$, se traza $\overline{DP}$ tal que:

  $m\sphericalangle BDP = \alpha \Rightarrow DA = DP = PB = m$
- Se traza:

  $\Delta DPB \cong \Delta DSB$

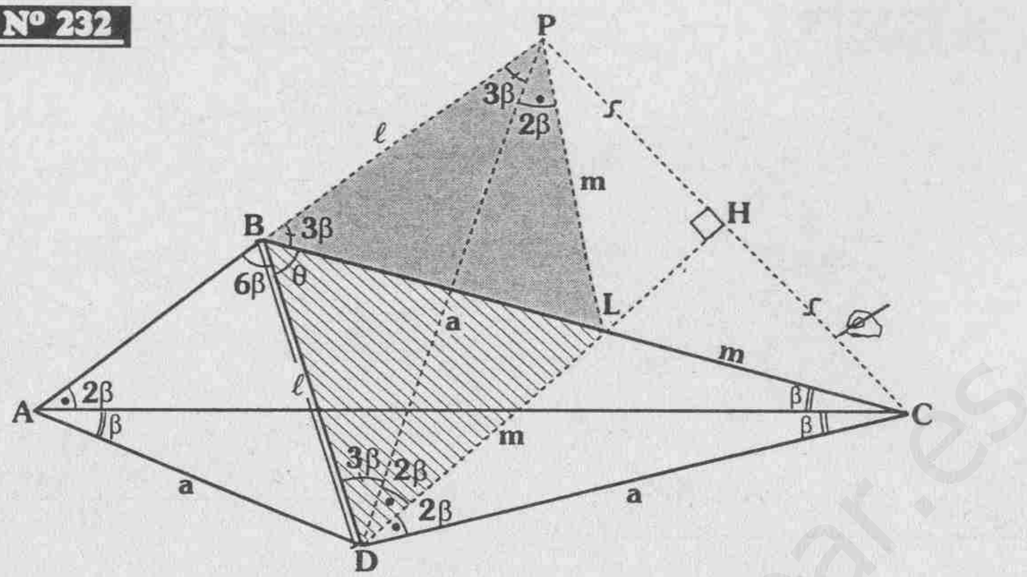


- $\Delta BAD \cong \Delta CDS$ (LAL) $\Rightarrow CS = DB$
- Como: $m\sphericalangle DBC = 6\alpha$ y $m\sphericalangle DBS = x \Rightarrow m\sphericalangle SBC = 5\alpha$
- En ∡BDCS: $m\sphericalangle BSC = 5\alpha$
- ΔDBC: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle BCD = 3\alpha$
- En ΔDBC: $3\alpha + 6\alpha + 3\alpha = 180°$

$\therefore$ **α = 15°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 232



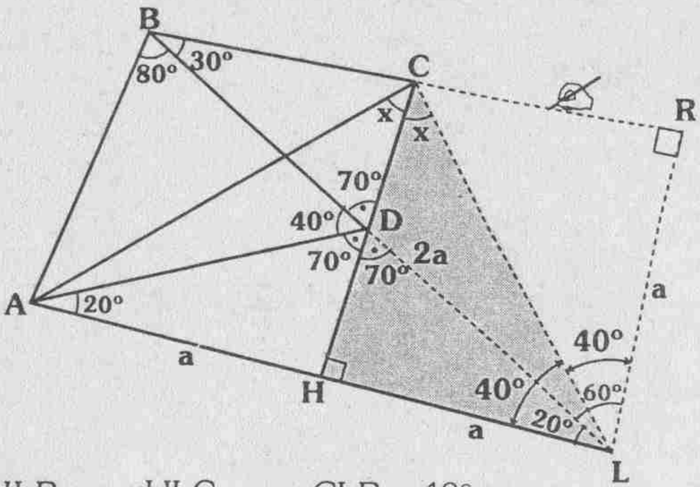
- Piden β .
- Como $m\sphericalangle DBA = 2(m\sphericalangle BAD)$, se traza $\overline{DP}$ tal que: $m\sphericalangle APD = 3\beta$
- ΔAPD y ΔDBP : isósceles $\Rightarrow AD = DP = 3$ y $DB = BP = \ell$
- Como $DP = DC = a$, en ΔDBC se traza la altura $\overline{DH}$ $\Rightarrow LP = LC = LD$
- $\Delta DBL \cong \Delta PBL$ (LLL) $\Rightarrow \theta = 3\beta$
- En "B": $6\beta + 3\beta + 3\beta = 180°$

$$\therefore\ \beta = 15°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 233

- Piden **x**.
- Como $m\sphericalangle ADH = m\sphericalangle HDL$, se traza $\overline{AL} \perp \overline{CD}$, con H en $\overline{AC}$ y L en $\overline{BD}$.
- ΔADL : isósceles $\Rightarrow AH = HL = a$
- ΔALB : isósceles $\Rightarrow AL = LB = 2a$
- ΔACL : isósceles
  $\Rightarrow m\sphericalangle ACH = m\sphericalangle LCH = x$

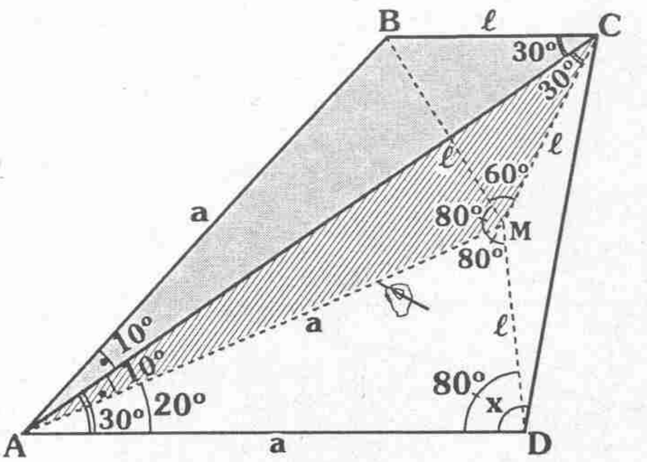


- Como $LH = LR \Rightarrow \overrightarrow{LC}$ bisectriz del $\triangle HLR$: $m\sphericalangle HLC = m\sphericalangle CLR = 40°$
- En $\triangle HCL$: $x + 40° = 90°$

$$\therefore\ x = 50°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 234



- Piden **x**.
- Ubicamos M tal que:

$$m\sphericalangle CAM = 10° \quad y \quad m\sphericalangle ACM = 30°$$

$$\Rightarrow \Delta BAC \cong \Delta MAC \text{ (ALA)}$$

- Luego: $CM = BC$ y $AM = AB = \ell$
- ΔBCM : equilátero
- $\Delta BAM \cong \Delta DAM \Rightarrow DM = \ell$
- ΔCMD : isósceles
- Como:

$$m\sphericalangle CMD = 140°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle MDC = m\sphericalangle MCD = 20°$$

- Luego:

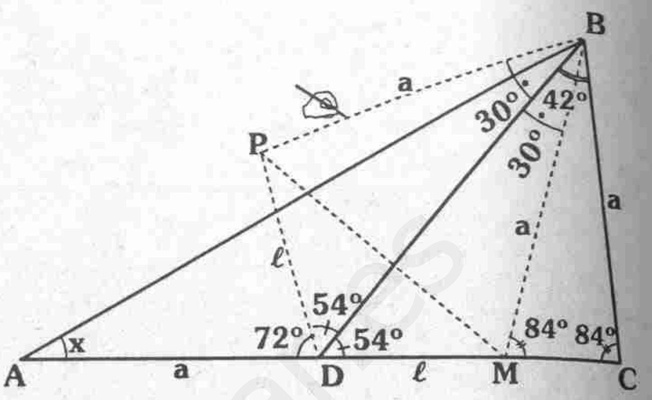
$$x = 80° + 20°$$

$$\therefore \mathbf{x = 100°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 235

Paso 1



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\sphericalangle BCM = 84°$, entonces:

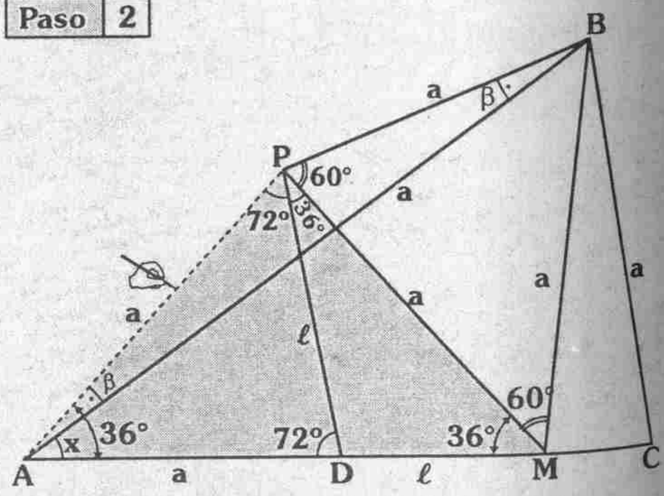
$$BM = BC = a \quad y \quad m\sphericalangle MBD = 30°$$

- Se traza $\Delta DMB \cong \Delta DPB$ con:

$$DM = DP = \ell \quad y \quad PB = BM = a$$

- ΔMBP : equilátero

Paso 2



- ΔPDM : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle PMA = 36°$
- Como $PM = AD$, $m\sphericalangle PMD = 36°$ y $m\sphericalangle PDA = 72°$, de la observación:

$$AP = a$$

- $\triangle APB$: isósceles

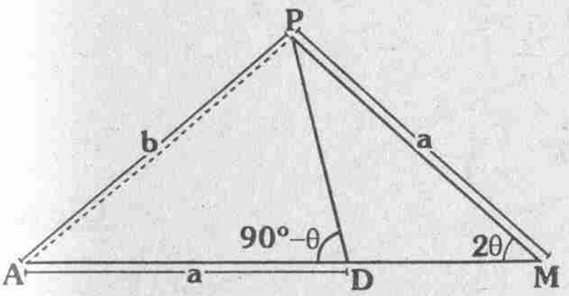
$$2\beta + 168° = 180° \Rightarrow \beta = 6°$$

- Como: $x + \beta = 36°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

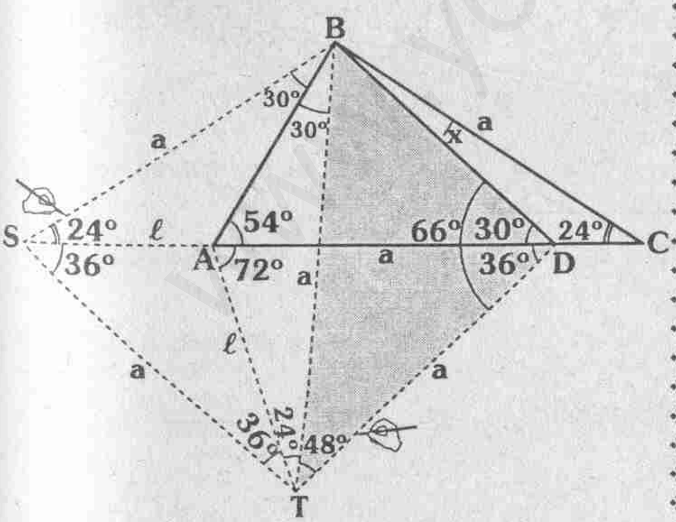
Clave A

Observación



En el problema $\theta = 18°$ *. Se cumple a=b, (ver pág. 65 y 66)*

RESOLUCIÓN Nº 236



- Nos piden **x**.
- Se prolonga $\overline{CA}$ y se ubica S tal que:

$$m\measuredangle BSA = 24° \Rightarrow SB = BC = a$$

- Se traza $\overline{BT}$ tal que $m\measuredangle ABT = 30°$ y $BT = a$.
- $\triangle SBT$: equilátero
- Como $m\measuredangle TSA = 36°$, $m\measuredangle TAD = 72°$ y $ST = AD = a$, de la observación anterior: $TD = a$
- $\triangle TDA$ y $\triangle BDT$: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle ADT = 36°$$

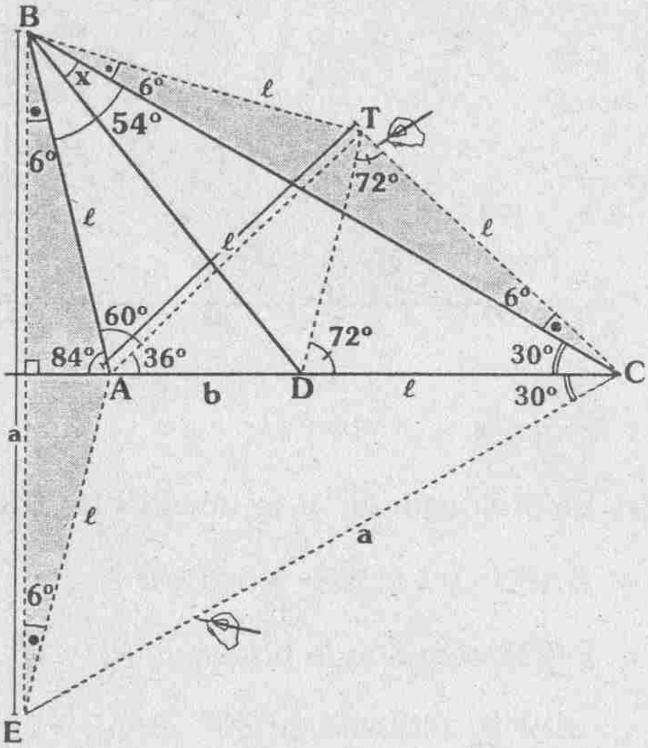
$$\Rightarrow m\measuredangle BTD = 48°$$

- $m\measuredangle TDB = 66° \Rightarrow m\measuredangle BDA = 30°$
- $\triangle BDC$: $x + 24° = 30°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 237



- Nos piden **x**.

- Se traza $\overline{CE}$ tal que $CE = CB = a$ talque $m\sphericalangle ACE = 30°$ $\Rightarrow$ ΔEBC: equilátero
- ΔEAB: isósceles
- Se traza $\Delta CTB \cong \Delta EAB$ $(BT = TC = AB = \ell)$
- ΔDTC: isósceles $\Rightarrow$ $m\sphericalangle CDT = m\sphericalangle DTC = 72°$
- ΔABT: equilátero $\Rightarrow$ $AT = \ell$
- ΔATD: isósceles $\Rightarrow$ $AD = DT$
- $\Delta ADB \cong \Delta TDB$ (LAL)

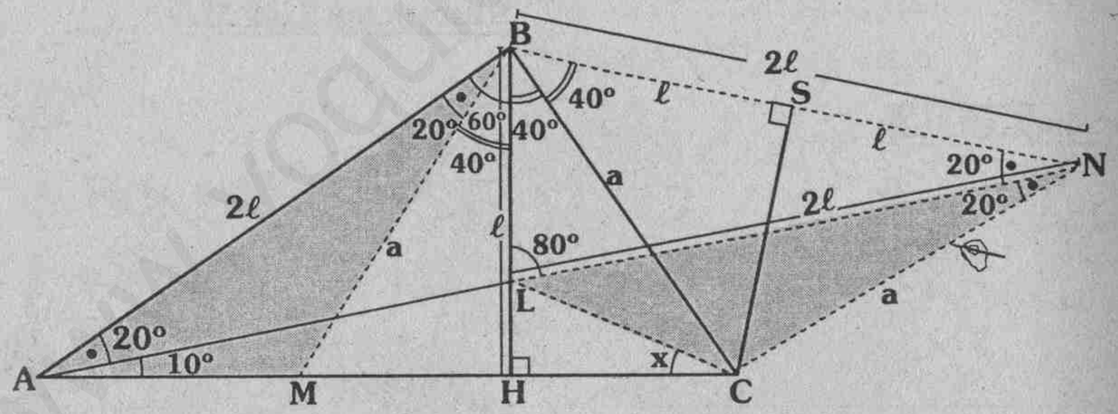
$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle ADB = m\sphericalangle BDT = 54°$$

- ΔDBC: $x + 30° = 54°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 24°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 238



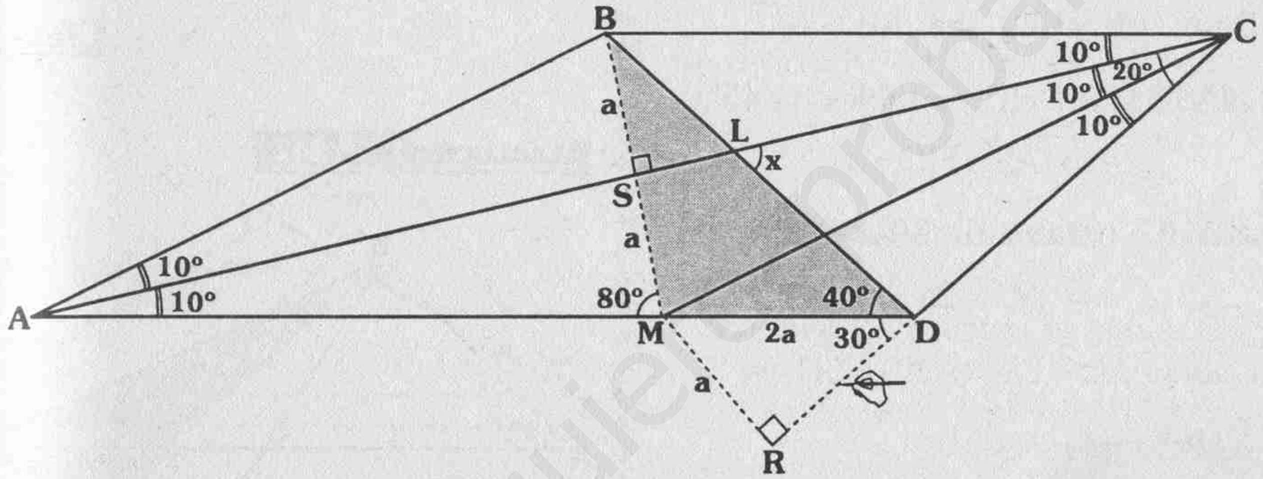
- Piden **x**.
- Se prolonga $\overline{AL}$ y se ubica N tal que $AB = BN$.
- ΔABN y ΔLNB: isósceles
- Por teorema de la bisectriz: $BH = BS = \ell$
- ⊿AHB: notable de $30°$ $\Rightarrow$ $AB = 2\ell$
- Como $AB = BN = 2\ell$ $\Rightarrow$ ΔBNC: isósceles

- Se traza M en $\overline{AH}$ tal que $m\measuredangle HBM = 40°$ $\Rightarrow$ ΔMBC: isósceles $\Rightarrow$ $MB = BC = a$
- $\Delta ABM \cong \Delta LNC$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\measuredangle CLN = 30°$
- ΔALC: $x + 10° = 30°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 239

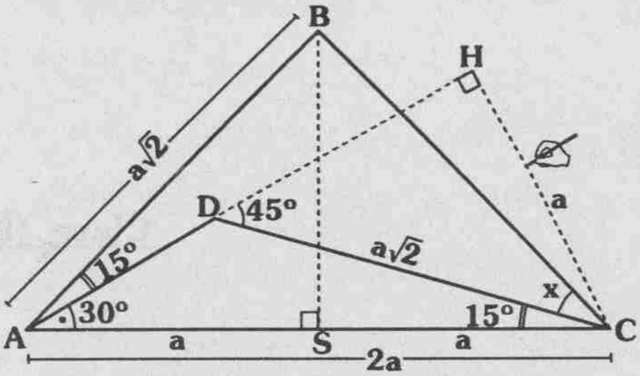


- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$ (M en $\overline{AD}$)
- ΔABM y ΔBCM isósceles y congruentes $(BS = SM)$.
- Por teorema de la bisectriz $MS = MR = a$
- $⊿RMD$: notable de 30 ° $\Rightarrow$ $MD = 2a$
- ΔBMD: isósceles
- Como: $m\measuredangle BMA = 80°$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle BDM = 40°$
- En ΔALD: $x = 40° + 10°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 240



- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD$, sea $AB = a\sqrt{2}$
- ⊿ASB y ⊿DHC: notables de 45°

  $\Rightarrow AS = HC = a$
- ⊿AHC: notable de 30°

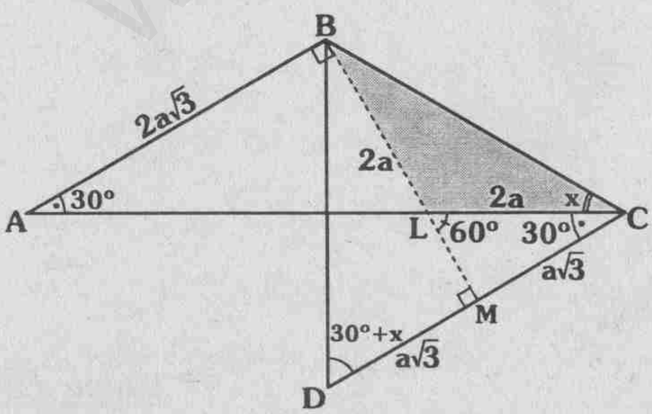
  $\Rightarrow AC = 2a$
- Como: $AC = 2a \Rightarrow AS = SC = a$
- $\triangle ABC$: isósceles

  $45° = x + 15°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 241



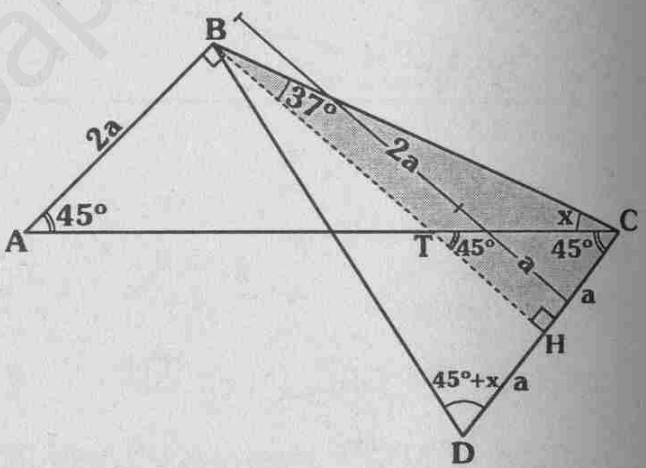
- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD$, sea $AB = 2a\sqrt{3}$
- Se traza $BM \perp CD$
- $\triangle DBC$: isósceles $\Rightarrow DM = MC$
- ⊿ABL y ⊿LMC: notables de 30°

  $\Rightarrow BL = LC = 2a$
- $\triangle BLC$: isósceles $x + x = 60°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 242



- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD = 2a$
- Se traza $BH \perp CD$
- $\triangle DBC$: isósceles $\Rightarrow DH = HC = a$
- ⊿ABT: notable de 45°

  $\Rightarrow AB = BT = 2a$
- ⊿THC: notable de 45° $\Rightarrow TH = a$
- ⊿BHC: notable de 37°/2

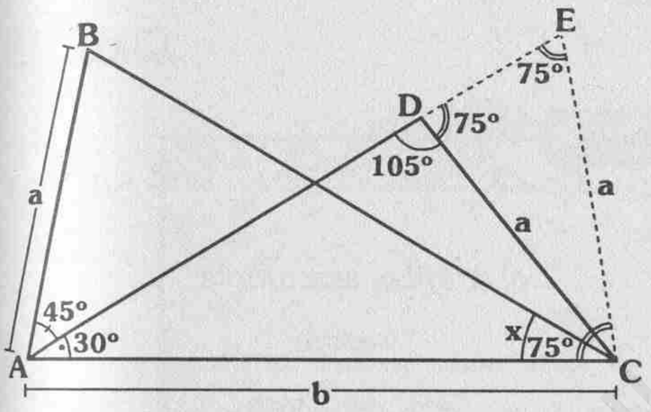
- En:

$$x + \frac{37^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{53^\circ}{2} = 26,5^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 243



- Se pide **x**.

- Se prolonga $\overline{AD}$ y se ubica E tal que:

$$m\sphericalangle CED = 75^\circ$$

- ΔDEC y ΔAEC : isósceles

$$\Rightarrow\ CD = CE \quad y$$

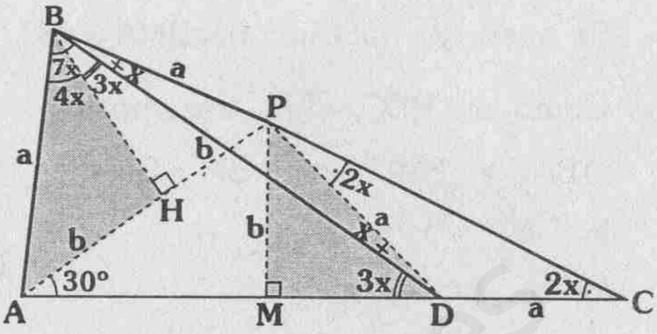
$$AC = AE$$

- $\Delta ABC \cong \Delta ECA$ (LAL)

$$\therefore\ \mathbf{x = 30^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 244



- Nos piden **x**.

- En ΔBDC se traza $\overline{DP}$ tal que:

  $m\sphericalangle BDP = x\ \Rightarrow\ \Delta BPD$ y

  ΔPCD : isósceles $(BP = PD = DC = a)$

- En ΔABP, se traza la altura $\overline{BH}$

$$\Rightarrow\ AH = HP = b$$

- En ΔAPD, se traza la altura $\overline{PM}$

- ⊿ AHB ≅ ⊿PMD

$$\Rightarrow\ AH = PM$$

- ⊿AMP: notable de 30°

- En ∡ADBH:

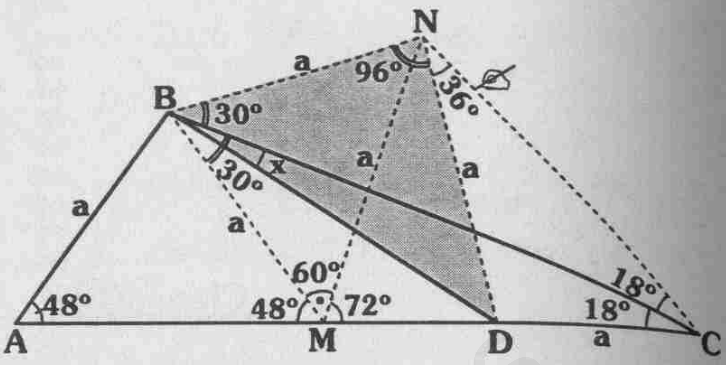
$$3x + 3x + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 245

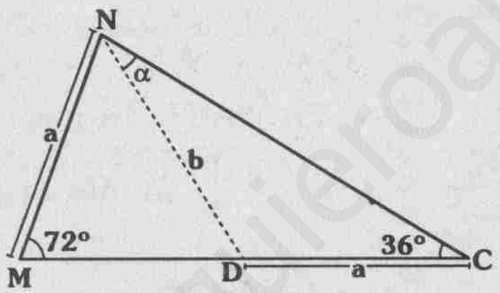
- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BM}$ tal que: $m\sphericalangle BMA = 48°$
- Como $m\sphericalangle MBC = 30°$, trazamos $\Delta BNC \cong \Delta BMC$, con $BM = BN$ y $CM = CN$.
- ΔMBN : equilátero
- Como $MN = DC = a$, $m\sphericalangle NMC = 72°$ y $m\sphericalangle NCM = 36°$, de la observación: ΔBHD : isósceles, como $m\sphericalangle AND = 96° \Rightarrow m\sphericalangle DBN = 42°$



$$\therefore\ \mathbf{x = 12°}$$

Clave E

Observación



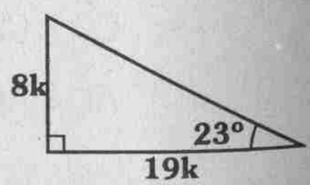
Del gráfico, se cumple:

$$\mathbf{a = b}$$

$$y\ \ \alpha = 36°$$

RESOLUCIÓN Nº 246

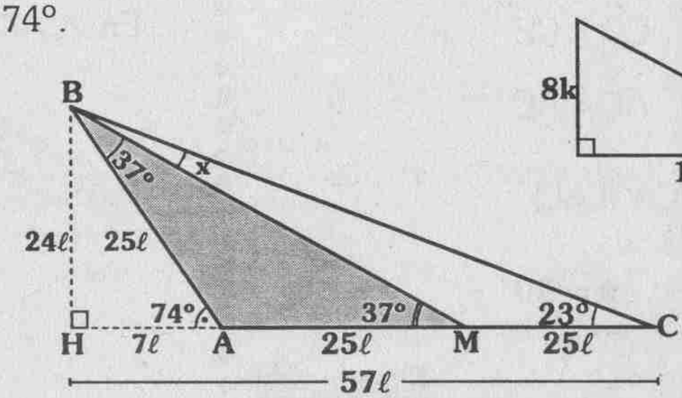
- El cálculo de "x", dados los valores, es aproximado, hay diversas formas de hallar "x", optemos, por el uso del ⊿ notable de 23°.



- Piden **x**.
- ⊿AHB: notable de 16° y 74°.
- ⊿BHC: como $HB = 24\ell$ $\Rightarrow HC = 57\ell$
- ΔABM : isósceles

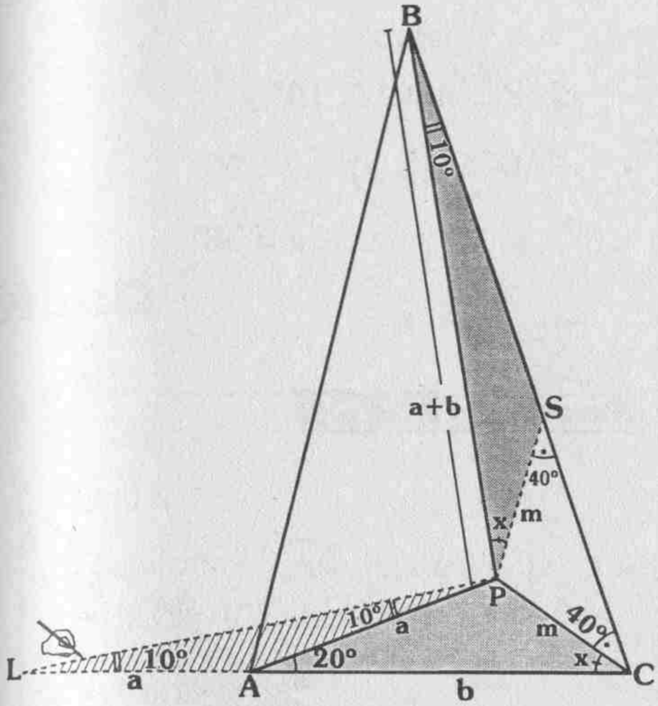
$$x + 23° = 37°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 14°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 247



- Piden **x**.
- En la prolongación de $\overline{CA}$ se ubica el punto L tal que :

$$LA = AP$$

- Trazamos $\overline{PS}$, tal que: $m\sphericalangle BPS = x$
- $\Delta BSP \cong \Delta LPC$ (ALA)

$$\Rightarrow \quad SP = PC$$

$$m\sphericalangle PSC = 40°$$

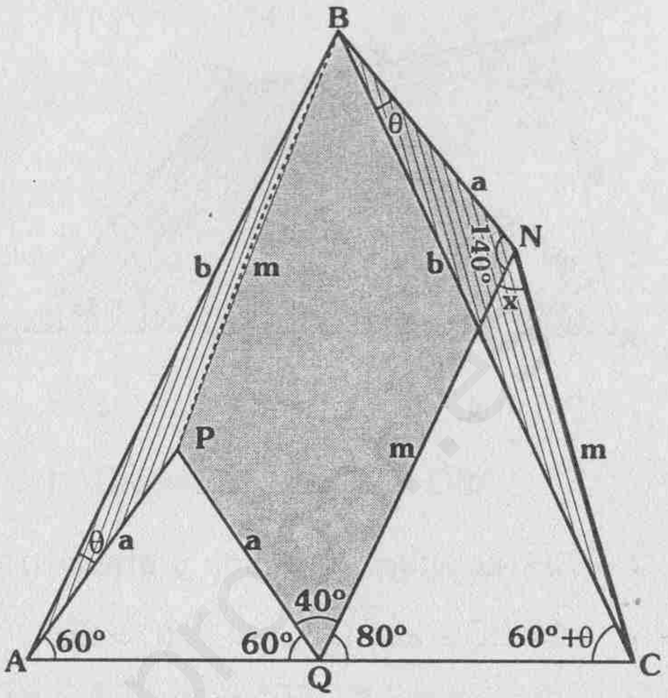
- ΔBSP :

$$x + 10° = 40°$$

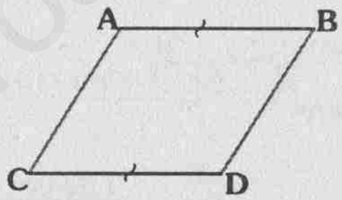
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 248



Usemos:



Si : $AB=CD$

y $\overline{AB} // \overline{CD}$

$\Rightarrow$ $AC=BD$

- Piden **x**.
- $\Delta ABP \cong \Delta BNC$ (LAL)

$$\Rightarrow BP = NC$$

- Como $BN = PQ$ y

$$m\sphericalangle BNQ + m\sphericalangle PQN = 180°$$

$$(\overline{BN} // \overline{PQ})$$

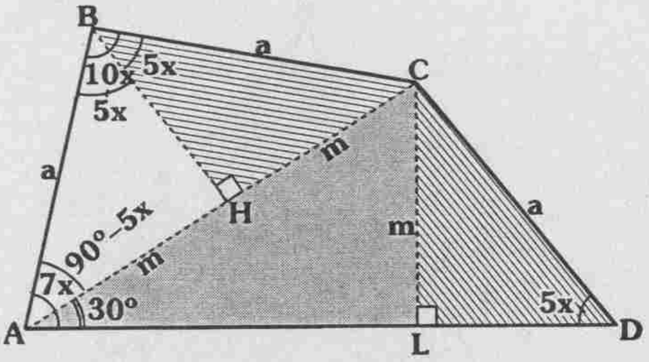
$$\Rightarrow BP=NQ$$

- ΔQNC : isósceles

$$\mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 249



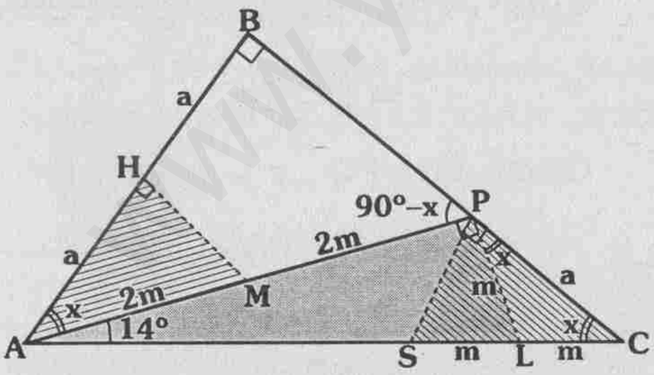
- Piden **x**.
- En $\triangle ABC$: isósceles $(AB = BC)$
- $(\overline{BH}$ es altura, mediana y bisectriz)
- $⊿BHC \cong ⊿CLD \Rightarrow HC = CL$
- $⊿ACL$: not $30°$ y $60° \Rightarrow m\measuredangle CAL = 30°$
- Entonces en "A":

$$7x = 90° - 5x + 30°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 250



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ tal que $AH = HB$
- Luego se traza $\overline{PS}$ tal que:

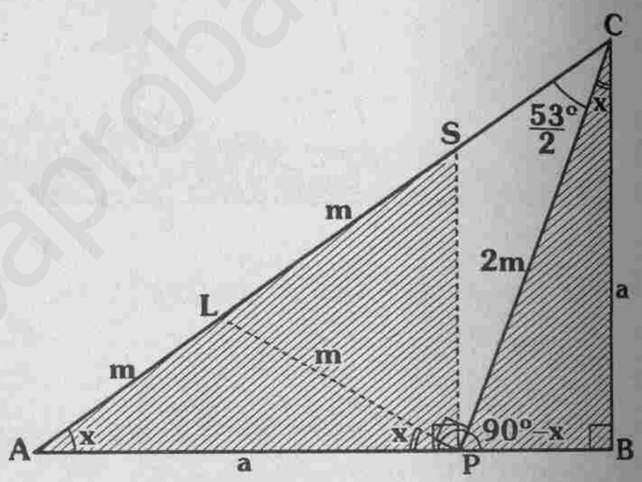
$$m\measuredangle SPC = 90°$$

- $⊿AHM \cong ⊿SPC \Rightarrow AM = SC$
- $⊿SPC$: $\overline{PL}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- $⊿APL$: notable $14°$ y $76°$
- $⊿ABC$: $x + 14° + x = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 38°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 251

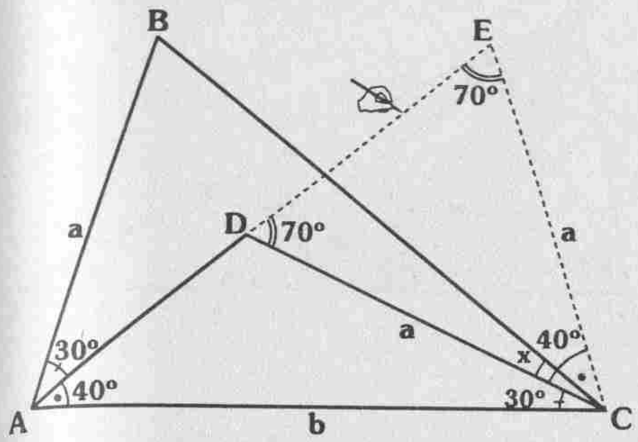


- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{PS}$ tal que: $m\measuredangle APS = 90°$
- $⊿APS \cong ⊿PBC \Rightarrow AS = PC$
- $⊿ASP$: $\overline{PL}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- $⊿LPC$: notable de $53°/2$.
- $⊿ABC$: $x + \dfrac{53°}{2} + x = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{127°}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 252



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{AD}$ hasta E tal que $m\measuredangle DEC = 40°$, tenemos:

  ΔDCE y ΔEDC:

  isósceles $\Rightarrow CD = CE = a$

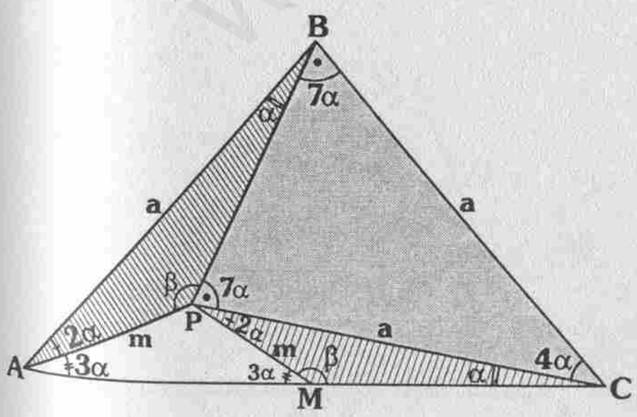
- $\Delta BAC \cong \Delta ECA$ (LAL)

$$\Rightarrow x + 30° = 40°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 253



- Piden α.
- Trazamos $\overline{PM}$ tal que:

$$m\measuredangle MPC = 2\alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle APB = m\measuredangle PMC$$

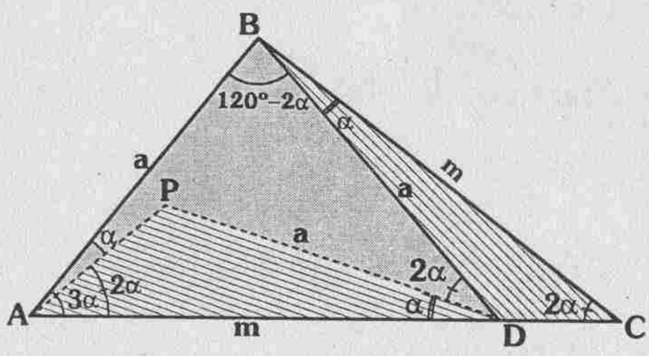
  y ΔAPM: isósceles $(AP = PM)$

- $\Delta APB \cong \Delta PMC$ (ALA) $\Rightarrow PC = AB$
- ΔPCB : isósceles
- En $\measuredangle$ ABPC: $m\measuredangle BPC = 7\alpha$
- $\Delta BPC: \quad 7\alpha + 7\alpha + 4\alpha = 180°$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 254



- Piden α.
- Se constituye el ΔAPD tal que:

$$m\measuredangle PAD = 2\alpha \quad y$$

$$m\measuredangle PDA = \alpha$$

- $\Delta APD \cong \Delta BDC$ (ALA) $\Rightarrow PD = BD$
- $\measuredangle$BDPL: se sabe $m\measuredangle ABD = 120° - 2\alpha$

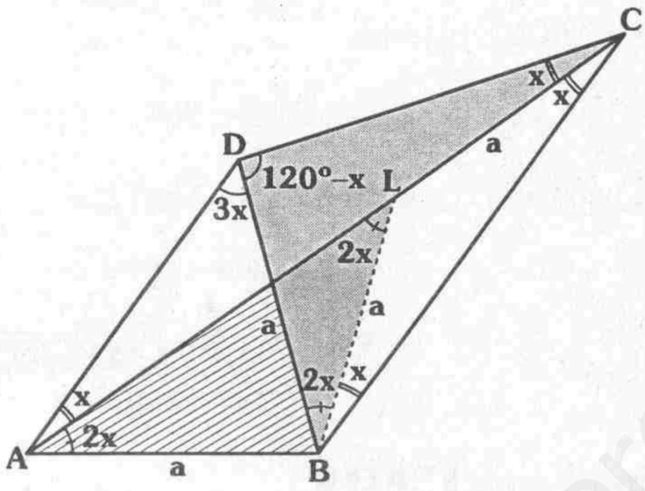
- $\Delta ABC:\ 3\alpha + 120° - 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha = 60°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha = 15°}$$

Clave A

Resolución Nº 255



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que:

$$m\sphericalangle CBL = x \ \Rightarrow \ AB = BL = LC$$

- $\Delta ABD:$ isósceles $(AB = BD)$
- $\measuredangle$BDCL: se sabe:

$$m\sphericalangle BDC = 120° - x$$

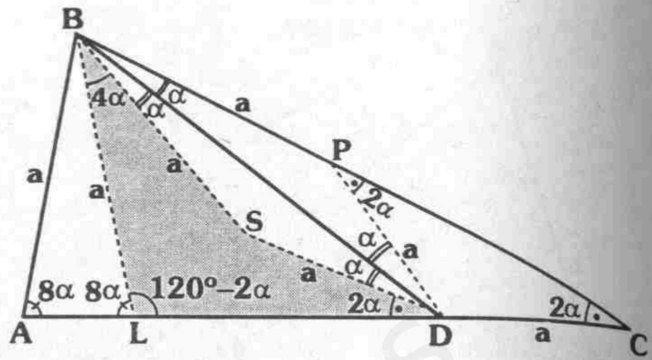
- $\Delta BDC:$

$$3x + 120° - x + 2x = 180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 15°}$$

Clave D

Resolución Nº 256



- Piden α.
- $\Delta BDC:$ trazamos $\overline{DP}$ tal que:

$$BP = PD = DC$$

- Se construye $\Delta BSD \cong \Delta BPD$
- $\Delta ABC:$ trazamos $\overline{BL}$ tal que $AB = BL$
- $\measuredangle$LBSD: se sabe que :

$$m\sphericalangle BLD = 120° - 2\alpha$$

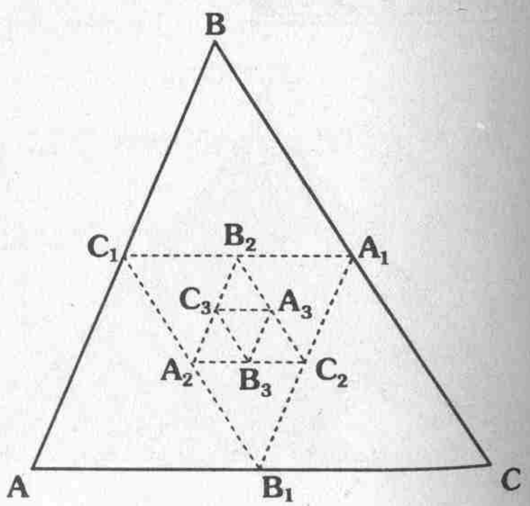
- En el punto "L":

$$8\alpha + 120° - 2\alpha = 180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha = 10°}$$

Clave B

Resolución Nº 257



- Inicialmente ubicamos A_1, B_1 y C_1 puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
- Por base media: $AB = 2(A_1B_1)$, $BC = 2(B_1C_1)$ y $AC = 2(A_1C_1)$
- Sea: $\text{Perím}_{\Delta ABC} = M \Rightarrow \text{Perím}_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{M}{2}$ y asi sucesivamente:

$$\text{Perím}_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{M}{2^2}$$

$$\text{Perím}_{\Delta A_3B_3C_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2^2}\right) = \frac{M}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$\text{Perím}_{\Delta A_nB_nC_n} = \frac{M}{2^n} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{M}{2^n} \quad \therefore \quad \mathbf{\frac{N}{M} = 2^{-n}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 258

- Nos piden **x**.
- Prolongamos $\overline{AB}$ hasta L tal que:

  $m\sphericalangle CBL = m\sphericalangle BLC = 72° + 4x$

  $\Rightarrow AC = AL = m$
- Prolonguemos $\overline{CB}$ hasta "S" tal que:

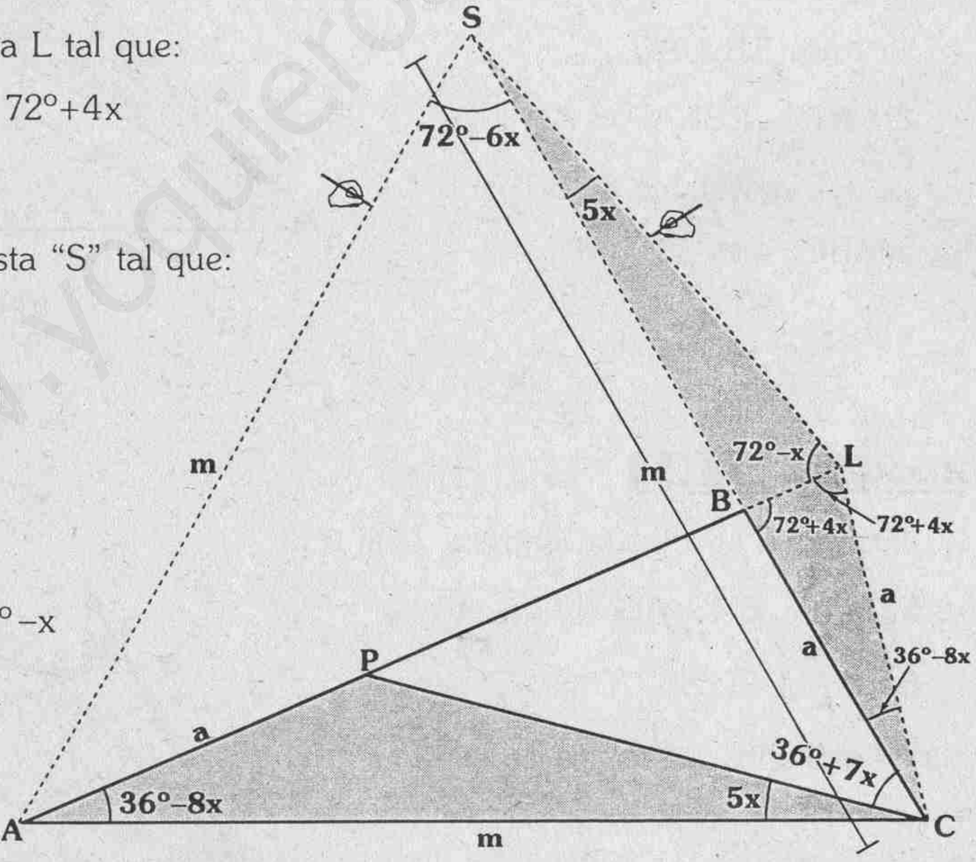
  $CS = CA = m$
- $\Delta CAP \cong \Delta SCL$ (LAL)

  $\Rightarrow m\sphericalangle CSL = 5x$
- Como:

  $m\sphericalangle ASL = m\sphericalangle ALS = 72° - x$

  $\Rightarrow AL = AS = m$
- ΔASC : equilátero

  $72° - 6x = 60°$

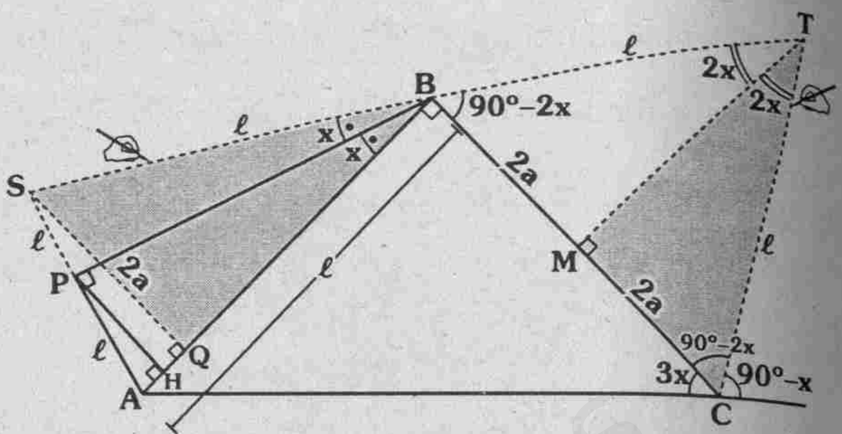


$\therefore$ **x = 2°**

Clave B

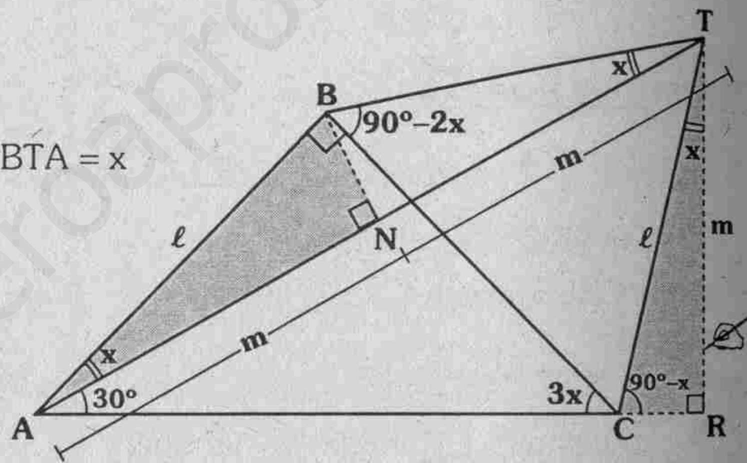
RESOLUCIÓN Nº 259

Paso 1



- Nos piden **x**.
- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S tal que: $m\measuredangle PBS = x$
- ΔABS : isósceles $\Rightarrow AP = PS$
- Se traza: $\overline{SQ} \perp \overline{AB} \Rightarrow SQ = 2(PH) = 2a$
- Se traza: $\overline{MT} \perp \overline{BC}$, donde $BM = MC = 2a$ y $m\measuredangle MTC = 2x$
- $\triangle SQB \cong \triangle CMT \Rightarrow AB = CT = BT = \ell$

Paso 2



- ΔABT : isósceles, como:

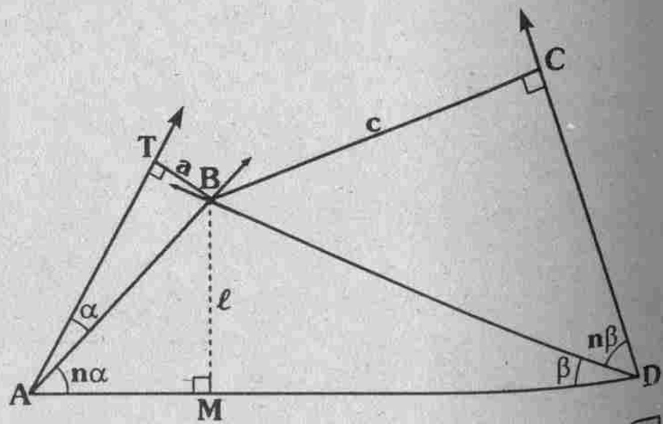
$m\measuredangle ABT = 180° - 2x \Rightarrow m\measuredangle BAT = m\measuredangle BTA = x$

- Se traza $\overline{TR} \perp \overleftrightarrow{AC}$
- $\triangle CRT \cong \triangle BNA \Rightarrow AN = TR$
- $\triangle ART$ es notable de 30°
- $\triangle ABC$: $4x + 30° = 90°$

$\therefore\ \mathbf{x = 15°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 260



- Nos piden la relación entre a, c, m y n.
- Se traza: $\overline{BM} \perp \overline{AD}$ (M en $\overline{AD}$)
- Sea: $BM = \ell$
- Por teorema: $\cdot\ \ell < na$

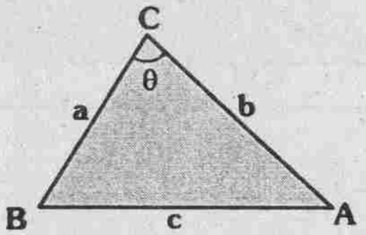
$\cdot\ c < m\ell$

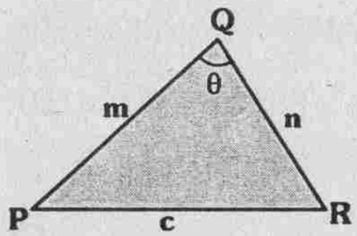
$\Rightarrow\ c < mna$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 261

I)





- De los datos:

$$a + b = m + n \qquad \text{... (I)}$$

- Por teorema de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \qquad \text{... (II)}$$

$$c^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta \qquad \text{... (III)}$$

- De (I), (II) y (III):

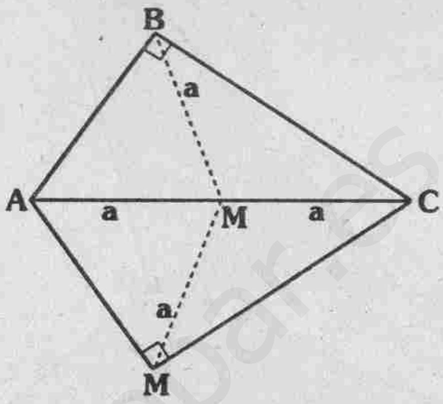
$(a = n \ \ y \ \ b = m)$ ó

$(a = m \ \ y \ \ b = n)$

- En cualquier de los dos casos, los triángulos son congruentes.

Verdadero

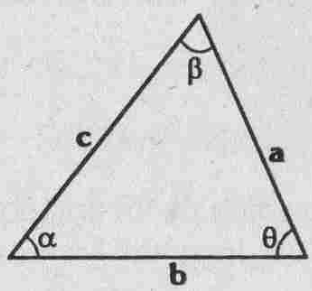
II)

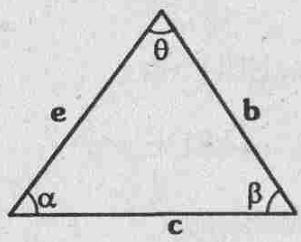


- En el gráfico los triángulos ABC y AMC cumplen la condición, sin embargo ⊿ABC ≇ ⊿AMC.

Falso

III) Sea $a \neq b$, $b \neq c$ y $c \neq a$

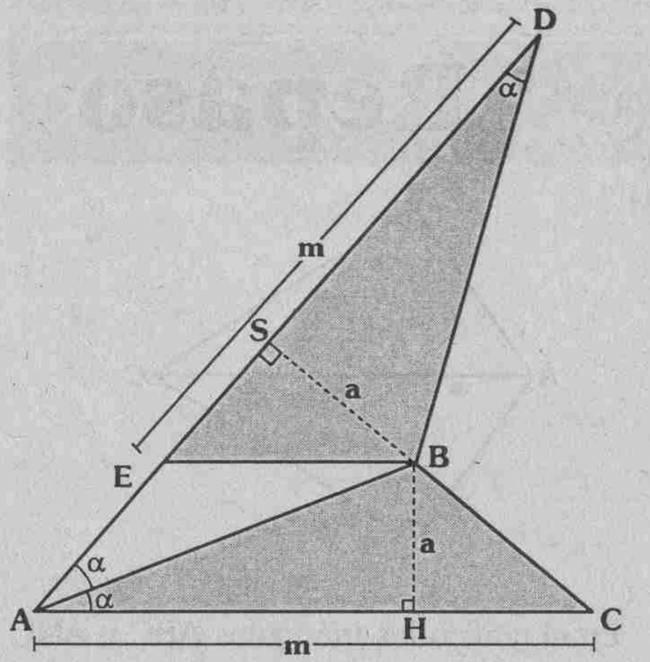




- Los triángulos cumplen la condición (que repiten α, β, θ, b y c), sin embargo no necesariamente son congruentes.

Clave D

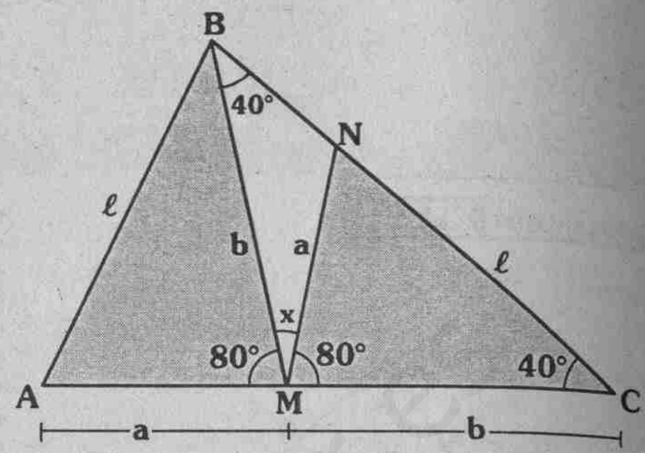
RESOLUCIÓN Nº 262



- Piden $\dfrac{AB}{BD}$
- Como: $\Delta EBD \cong \Delta CBA$ y $ED = AC$
  $BS = BH$ (alturas homólogas congruentes)
- Además se deduce:
  $$m\measuredangle EAB = m\measuredangle BAC$$
- Como la medida de un ángulo adyacente al lado de longitud "m" es α en el ΔABC.
- ΔAEB: $m\measuredangle BED > \alpha$
  $$\Rightarrow m\measuredangle BDE = \alpha$$
- ΔABD: isósceles
  $$\Rightarrow AB = BD$$
  $$\therefore \ \mathbf{\frac{AB}{BD} = 1}$$

Clave B

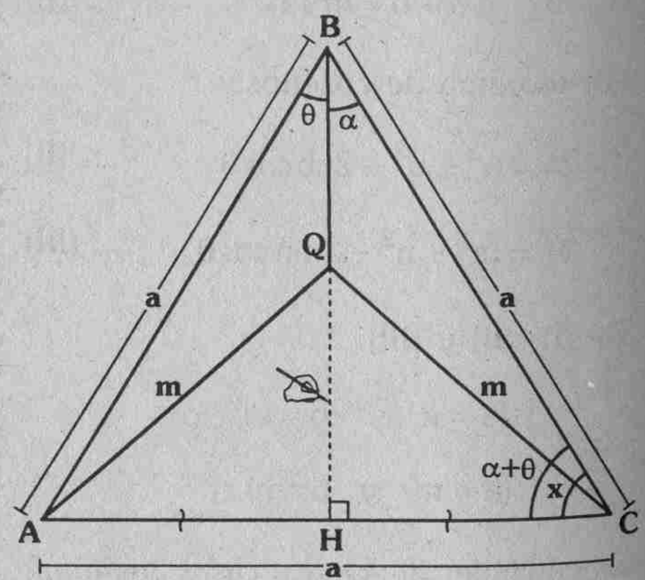
RESOLUCIÓN Nº 263



- Piden **x**.
- $\Delta ABM \cong \Delta NCM$ (LLL)
  $\Rightarrow m\measuredangle AMB = m\measuredangle NMC = 80°$
- En "M": $80° + x + 80° = 160°$
  $$\therefore \ \mathbf{x = 20°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 264



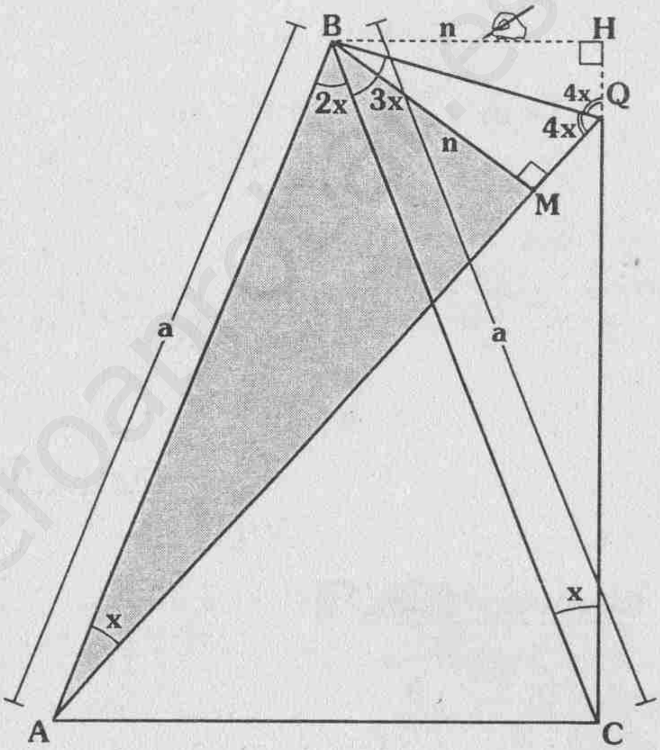
- Piden **x**.
- Dato: $\theta + 2\alpha = 90°$; $AB = AC$ y
  $AQ = QC$

- Al prolongar $\overline{BQ}$, como: $\theta + 2\alpha = 90° \Rightarrow \overline{BQ} \perp \overline{AC}$
- Como: $AQ = QC \Rightarrow \overrightarrow{QH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ entonces $AB = BC$.
- Como: $AB = AC = BC \Rightarrow \Delta ABC$: equilátero

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 265



- Piden **x**.
- Por teorema de la bisectriz:

$$BM = BH$$

- $⊿AMB \cong ⊿BHC$

$$\Rightarrow\ m\measuredangle BCQ = m\measuredangle BAM = x$$

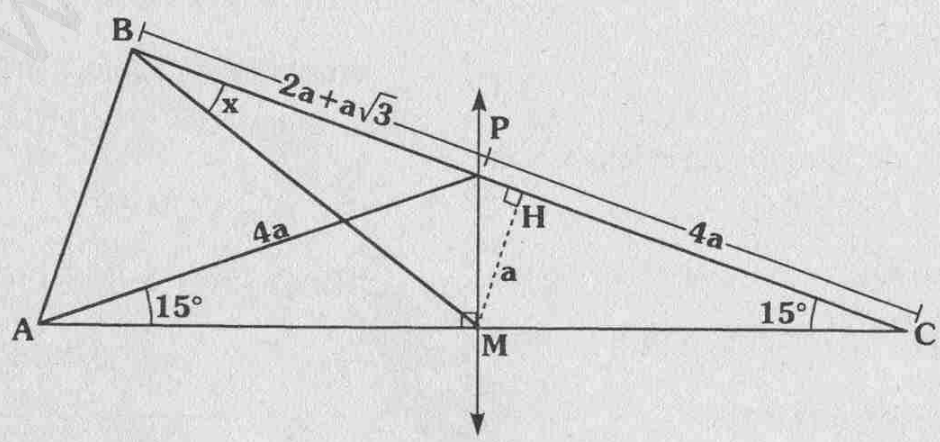
- ΔAQB:

$$x + 5x + 4x = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 18°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 266

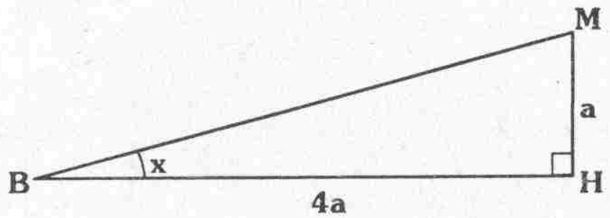


- Nos piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz $PA = PC$
- En $\triangle PMC$:

  notable de $15° \Rightarrow PC = 4(MH)$
- En $\triangle BHC$, como:

  $HM = a \quad \Rightarrow HC = 2a + a\sqrt{3}$

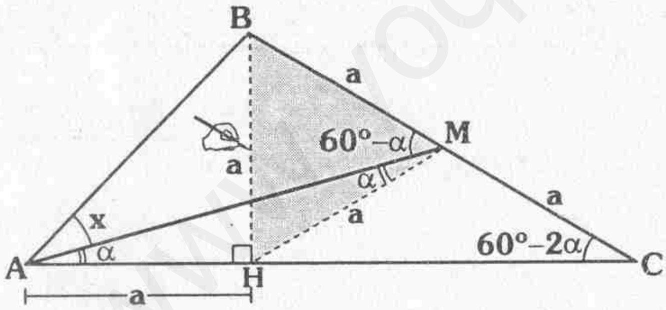
  $\Rightarrow PH = 2a - a\sqrt{3}$
- $BH = BP + PH \quad \Rightarrow \quad BH = 4a$



$\therefore$ **x = 14°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 267



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: $HM = a$
- ΔAHM : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle AMH = \alpha$
- Como $MB = MH$ y $m\measuredangle BMH = 60°$

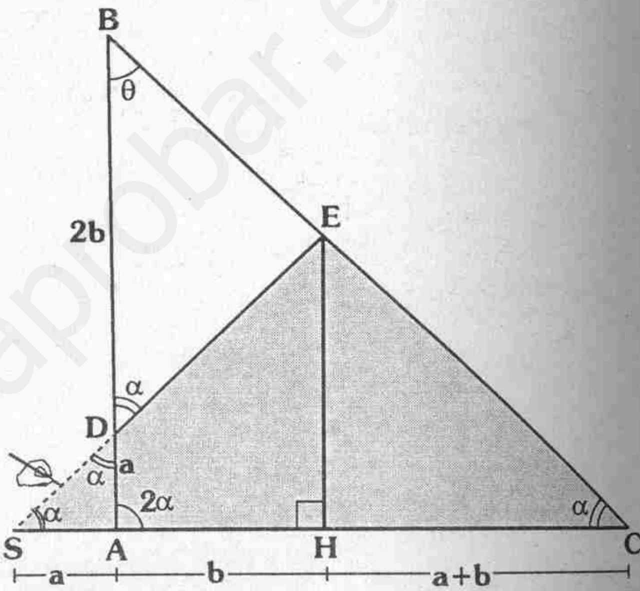
  $\Rightarrow \Delta BMH$: equilátero
- $\triangle BHC$: notable de 30°

  $\Rightarrow 60° - 2\alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 15°$
- $\triangle AHB$: isósceles $x + \alpha = 45°$

  $\therefore$ **x = 30°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 268

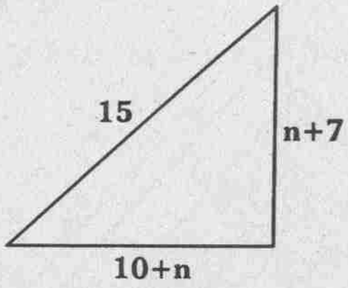


- Piden θ
- Al prolongar $\overline{ED}$ y $\overline{CA}$, se cortan en S.
- Por ángulo exterior, en el ΔASD: $m\measuredangle DSA = \alpha$.
- ΔSEC = isósceles
- Como $\overline{EH}$ es altura, también es mediana, entonces: $SH = HC = a + b$.
- $AB = AC \Rightarrow \alpha = \theta$
- $\triangle BAC$: $2\alpha + \alpha + \theta = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

  $\therefore$ **θ = 45°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 269



- Analicemos el triángulo.
- Dato: "n" es menor valor entero y $n \neq \{0\,;1\}$

$$10+n>0 \;\Rightarrow\; n>-10 \qquad \ldots(\alpha)$$

$$7+n>0 \;\Rightarrow\; n>-7 \qquad \ldots(\beta)$$

$$10+n-(n+1)<15<10+n+n+7$$

$$\Rightarrow \quad 3<\underbrace{15<17+2n}$$

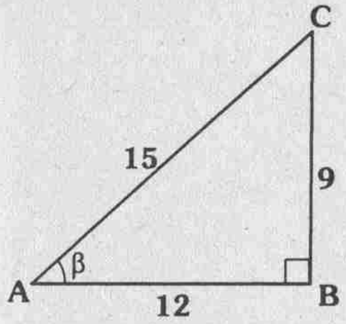
$$-1<n \qquad \ldots(\theta)$$

- De (α), (β), (θ):

$$n>-1$$

$$\Rightarrow n=\{0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$$

- Como "n" es el menor entero y $n \neq \{0\,;1\} \Rightarrow n=2$
- Luego; el triángulo quedaría asi:

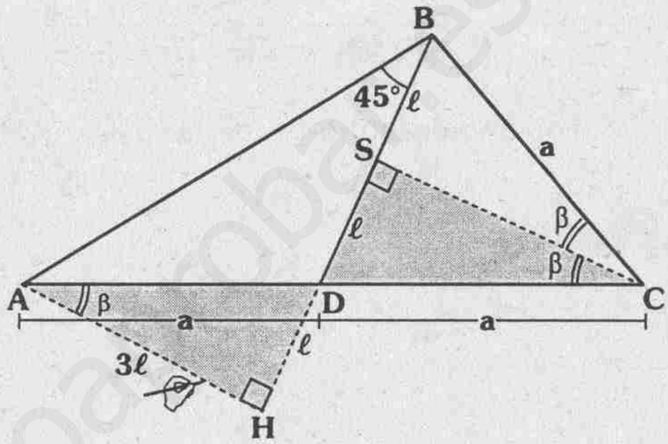


- El triángulo es notable de 37° y 53° nos piden β (menor ángulo).

$$\therefore\ \beta = 37°$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 270



- Piden $m\measuredangle ACB$.
- Al prolongar la mediana $\overline{BD}$ y trazar $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ y trazar la altura $\overline{CS}$ tenemos:

$\triangle AHD \cong \triangle CSD$

$$\Rightarrow DH = DS = \ell$$

- $\triangle AHB$: notable de 45°

$$\Rightarrow HB = AH = 3\ell$$

- $\triangle AHD$: notable

$$\Rightarrow \beta = \frac{37°}{2}$$

$$\therefore\ m\measuredangle ACB = 37°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 271

- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia de los puntos medios, ubiquemos L, punto medio de $\overline{BD}$.
- Por teorema de la base media en:

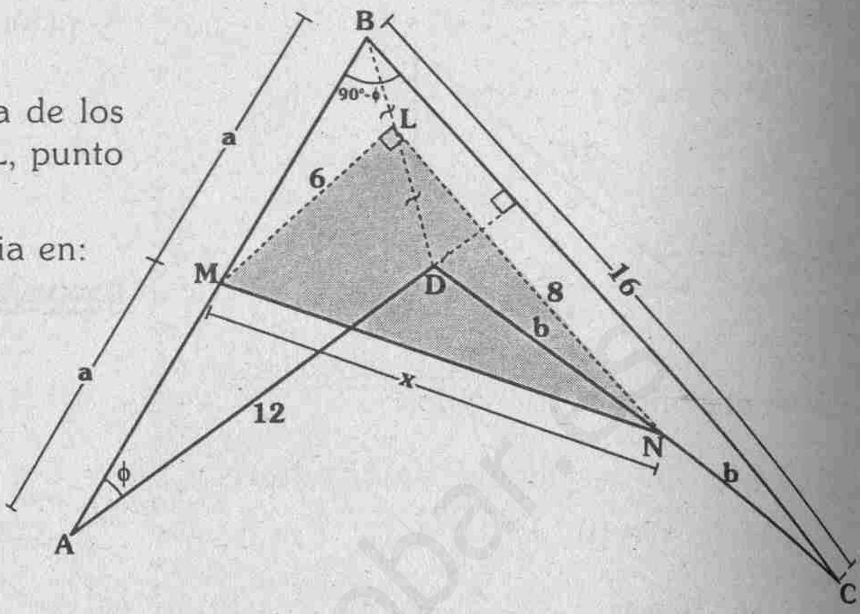
– $\Delta ADC: ML = 6$ y $\overline{ML} // \overline{AD}$

– $\Delta ABC: LN = 8$ y $\overline{LN} // \overline{BD}$

- Por ángulo entre paralelas:

$$m\measuredangle MLN = 90°$$

- En ⊿MLN: $x^2 = 6^2 + 8^2$



$$\therefore \ \mathbf{x = 10}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 272

- Piden **x**.
- Como ΔABC y isósceles, por teorema:

$$CT = MB + MN$$

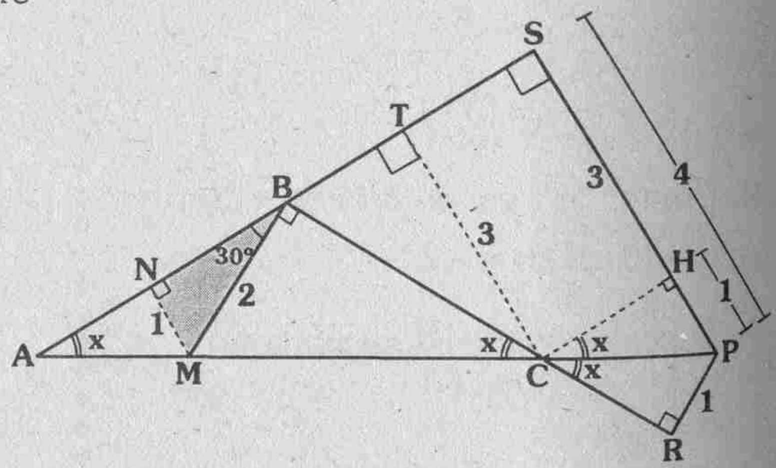
- Por teorema de la bisectriz:

$$PR = PH = 1$$

$$\Rightarrow HS = CT = 3$$

- Como: $MB = 2$

$$\Rightarrow MN = 1$$

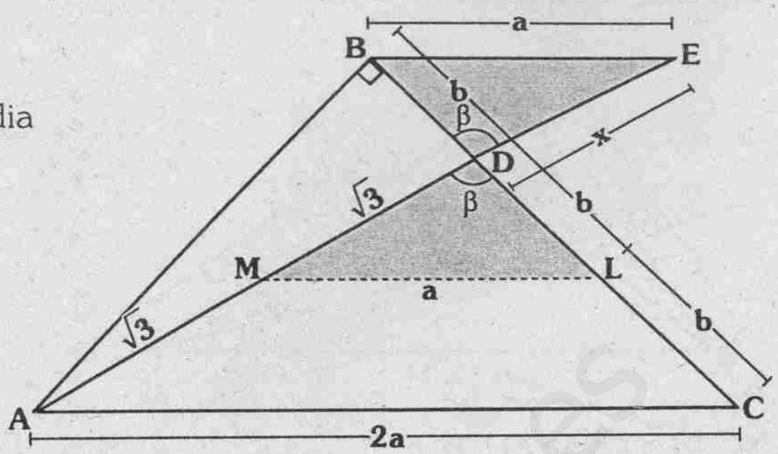


- ⊿NBM: notable de 30° ⇒ $x + x + 120° = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 273



- Piden **x**.
- En el ΔADC, se traza la base media $\overline{ML}$

$$ML = \frac{AC}{2} = a \quad y \quad \overline{ML} // \overline{AC}$$

- Notemos: $ML = BE$, $BD = DL$,

  $m\sphericalangle MDL = m\sphericalangle BDE \quad y \quad a > b$

  $\Rightarrow \Delta MLD \cong \Delta EBD$ (4^{to} caso)

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{3}}$$

Clave D

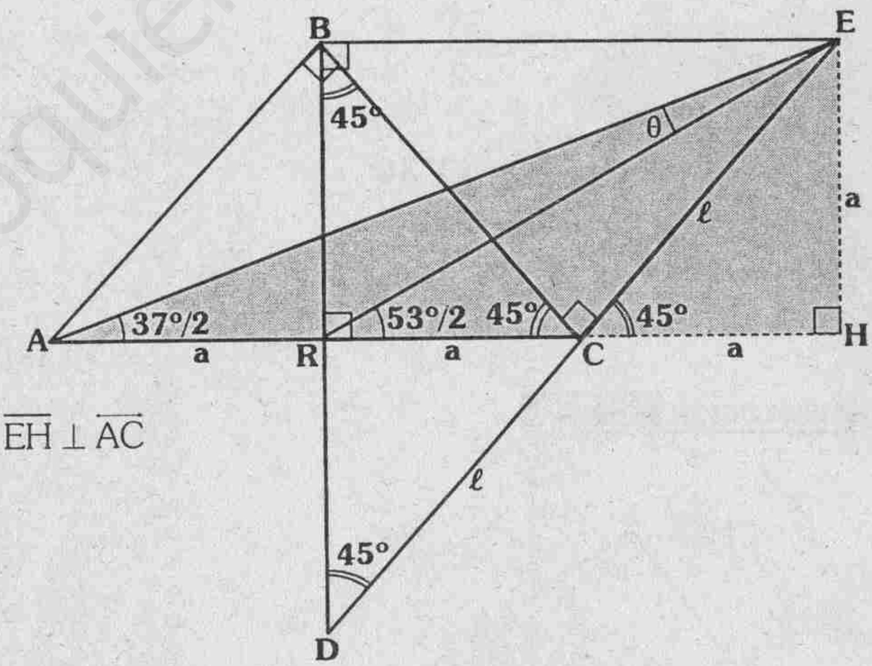
RESOLUCIÓN Nº 274

- Nos piden: θ
- Como:

  $AB = BC \Rightarrow m\sphericalangle ACB = 45°$
- $DC = CE \Rightarrow DBE$: isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle CDB = m\sphericalangle DBC = 45°$
- Luego:

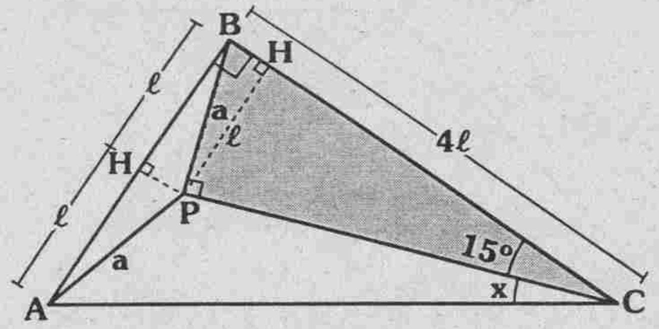
  $BR \perp AC \Rightarrow DR = RC = a$
- Se prolonga $\overline{AC}$ y se traza $\overline{EH} \perp \overrightarrow{AC}$
- ⊿RHE: notable de $53°/2$
- ⊿AHE: notable de $37°/2$
- $\Delta AER: \ \theta + \frac{37°}{2} = \frac{53°}{2}$



$$\therefore\ \theta = \mathbf{8°}$$

Clave A

Resolución Nº 275



- Nos piden **x**.
- En ⊿BPC, se traza $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ por teorema:

$$BC = 4(PH) = 4\ell$$

- ΔABP, es isósceles, entonces al trazar la altura $\overline{PH}$

$$\Rightarrow \quad HA = HB = \ell$$

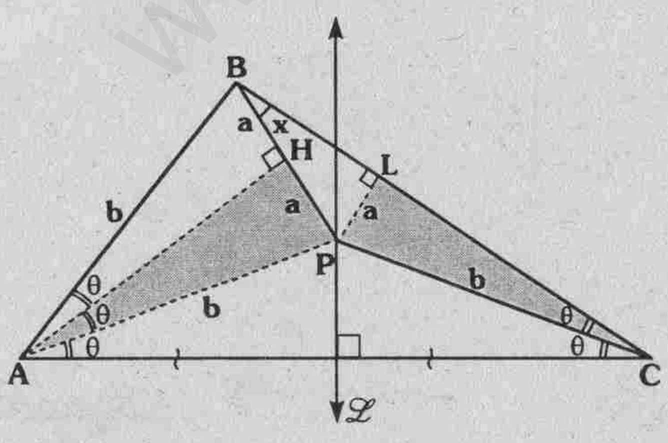
- ⊿ABC: notable:

$$x + 15° = \frac{53°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{23°}{2} = 11°30'}$$

Clave D

Resolución Nº 276



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz:

$$PA = PC \quad \Rightarrow \quad m\sphericalangle PAC = \theta$$

- Como $AB = PC \Rightarrow \Delta ABP$: isósceles, es este triángulo tracemos la altura:

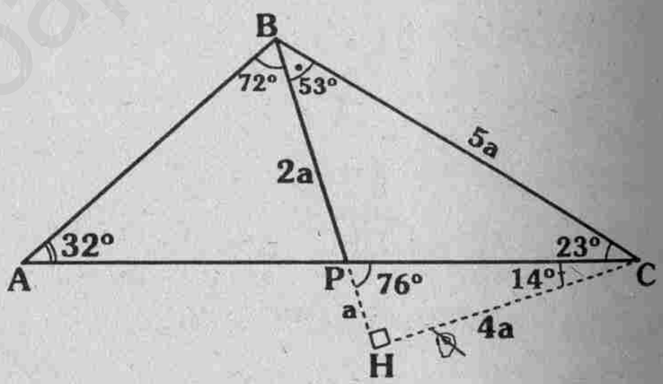
$$\overline{AH} \quad \Rightarrow \quad BH = HP$$

- Se traza $\overline{PL} \perp \overline{BC}$
- ⊿AHP ≅ ⊿CLP (ALA) $\Rightarrow HP = PL$
- ⊿BLP: notable

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

Resolución Nº 277



- Piden $\dfrac{PB}{BC}$.
- Completemos "ángulos", tenemos $m\sphericalangle CBP = 53°$.
- Ahora prolonguemos $\overline{BP}$ y tracemos $\overline{CH} \perp \overline{BP}$, notemos $m\sphericalangle PCH = 14°$
- ⊿PHC: notable de 14°

$$\Rightarrow HC = 4a \quad y \quad PH = a$$

- ⊿BHC: notable de 53°

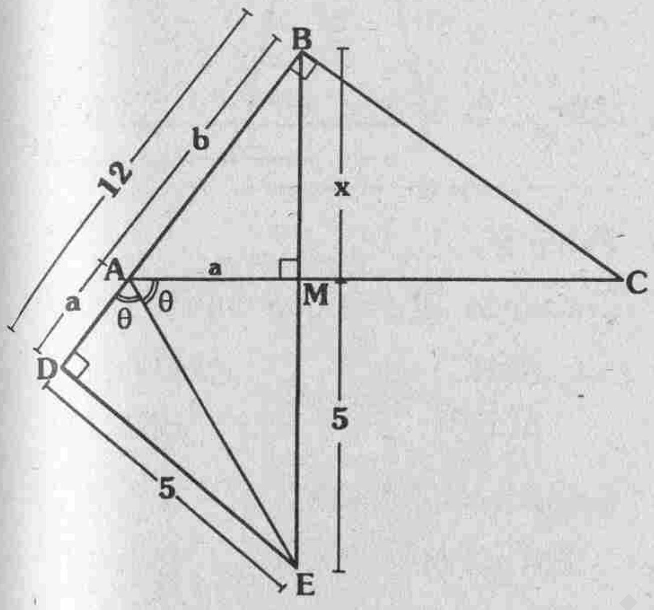
$$\Rightarrow BC = 5a \ \ y \ \ BH = 3a \Rightarrow PB = 2a$$

- Finalmente:

$$\frac{PB}{BC}=\frac{2}{5}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 278



- Piden **x**.
- Por teorema de la bisectriz:

$AD = AM = a$ y

$ED = EM = 5$

- Como:

$a + b = 12 \Rightarrow DB = 12$

- ⊿BDE:

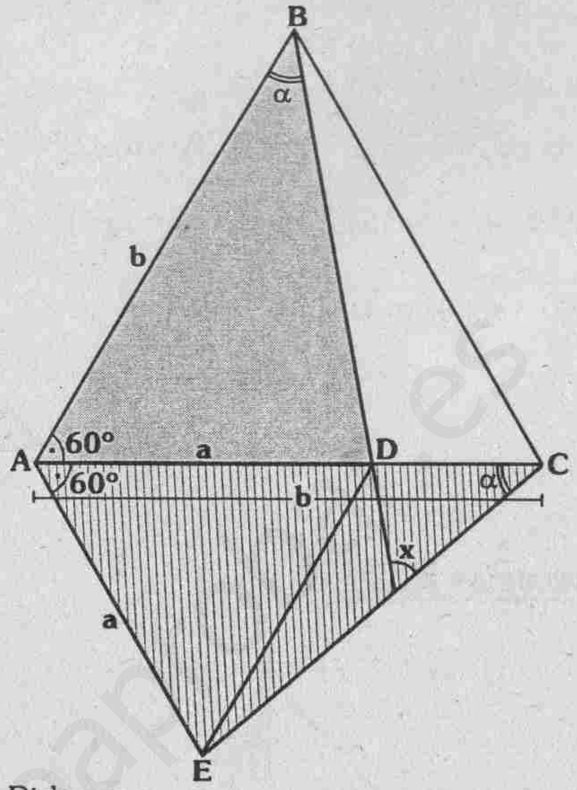
Pitagórico $\Rightarrow EB = 13$

$x + 5 = 13$

$\therefore\ \mathbf{x = 8}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 279



- Piden **x**.
- $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (LAL)

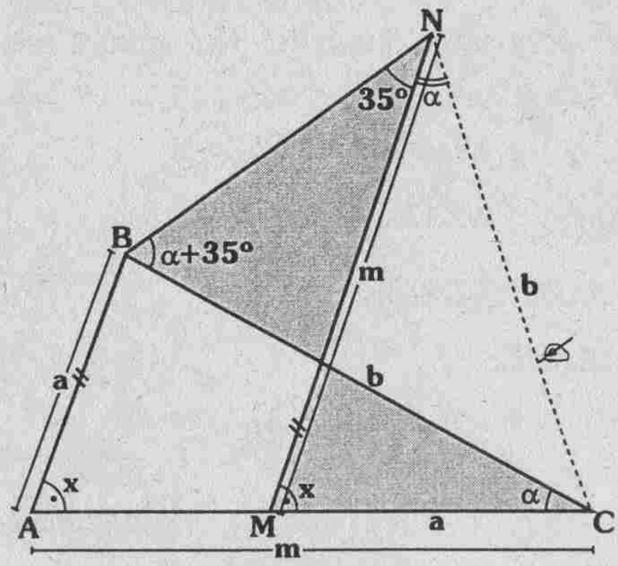
$\Rightarrow m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACE$

- En ⋈: $x + \alpha = 60° + \alpha$

$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 280



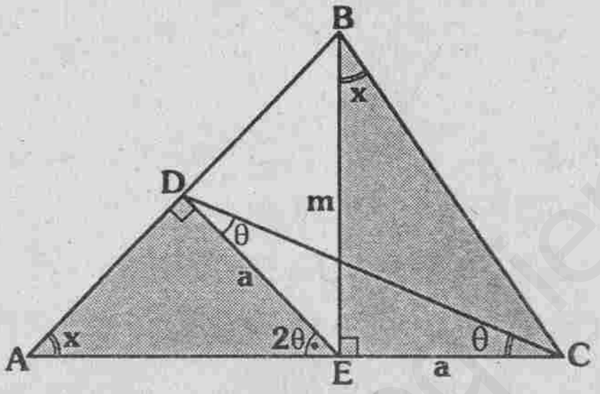
- Piden **x**.
- Como $\overline{AB} // \overline{MN} \Rightarrow m\measuredangle NMC = x$
- $\Delta ABC \cong \Delta CMN$ (LAL)

  $\Rightarrow BC = NC$ y $m\measuredangle BCA = m\measuredangle BNC$
- ΔBCN : isósceles $m\measuredangle CBN = m\measuredangle BNC$
- $\bowtie$: $x + \cancel{\alpha} = \cancel{\alpha} + 35° + 35°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 70°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 281



- Nos piden **x** en función de θ.
- Dato: $⊿ ADE \cong ⊿ BEC$
- Averiguemos que lados son iguales sea $ED = a$ entonces como:

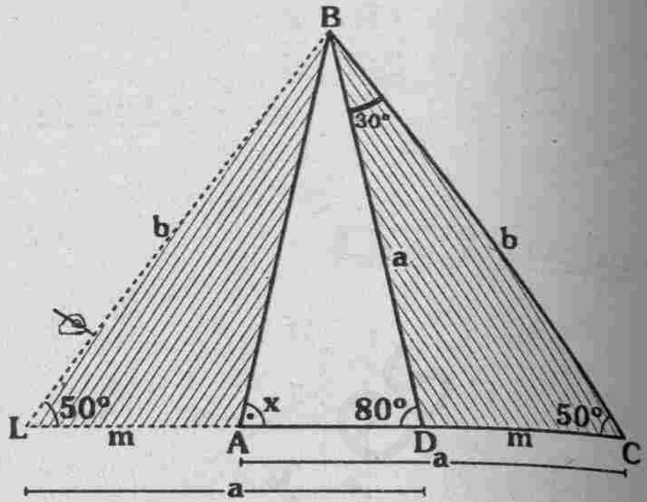
  $BE > ED \Rightarrow EC = a$

  luego : $m\measuredangle DAE = x$
- ΔEDC : isósceles
- $⊿ADE$:

$$\mathbf{x = 90° - 2\theta}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 282



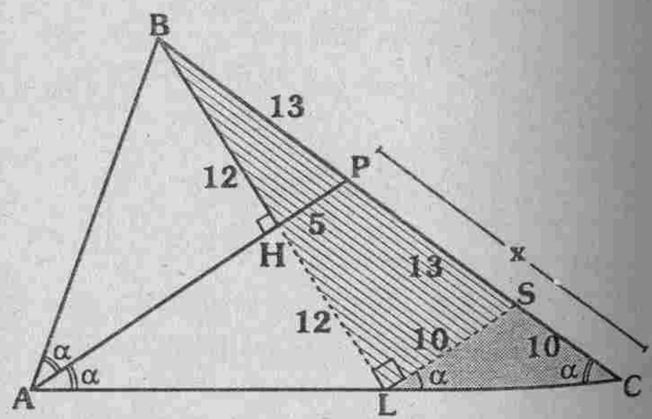
- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que: $m\measuredangle BLD = 50°$

  $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Delta LBC\\ \Delta LDB\end{array}\right\}$ isósceles $\quad \begin{array}{l}\Rightarrow LB = BC\\ BD = LD\end{array}$
- Se deduce: $LA = DC$
- $\Delta LBA \cong \Delta DBC$ (LAL) $\Rightarrow BA = BD$

$$\therefore\ \mathbf{x = 80°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 283



- Piden **x**.
- Prolongamos $\overline{BH}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en L.

  $\Rightarrow \Delta BAL$: isósceles $(BH = HL)$

- Trazamos $\overline{LS} // \overline{HP}$

$\triangle LBS$: $\overline{PH}$ base media

$\Rightarrow$ $LS = 10$ y $PS = 13$

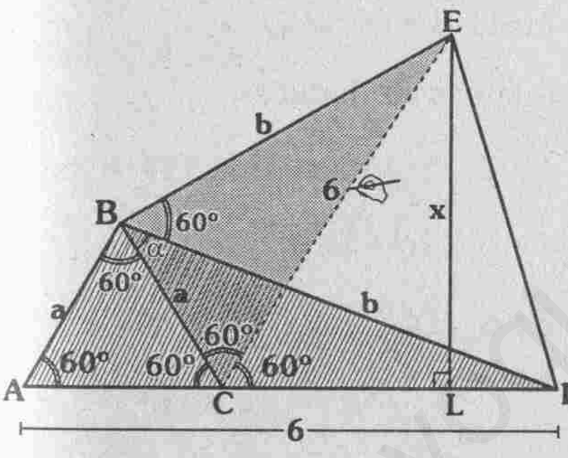
- Además $\triangle LSC$: isósceles :

$$LS = SC = 10$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 23}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 284



- Piden: $EL = x$

$\triangle ABD \cong \triangle CBE$ (LAL) $\Rightarrow$ $EC = AD$

$m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle BAD$

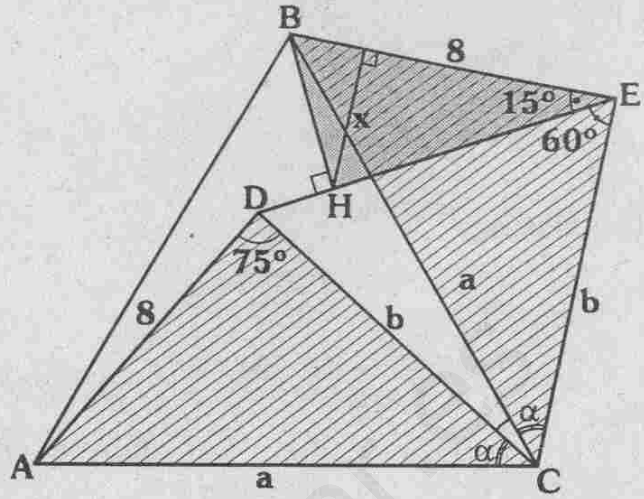
- Además:

$\triangle$CEL: notable de 30° y 60°

$$\therefore\ \mathbf{x = 3\sqrt{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 285



- Piden **x**.
- $\triangle ADC \cong \triangle BEC$ (LAL)

$BE = AD$ y $m\sphericalangle BEC = m\sphericalangle ADC = 75°$

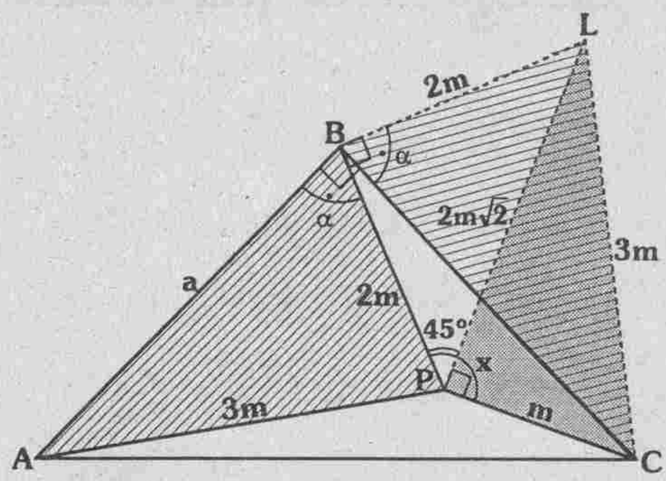
- Además se deduce:

$\triangle$BHE: not 15° y 75°, por propiedad:

$$\therefore\ \mathbf{x = 2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 286



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que $BL = BP$

y $m\sphericalangle LBC = m\sphericalangle ABP$

$\Rightarrow$ $\triangle ABP \cong \triangle LBC$ (LAL) $\Rightarrow$ $LC = AP$

- ⊿PBL: rectángulo isósceles
- Además:

$\Delta LPC : (LC)^2 = (PL)^2 + (PC)^2$

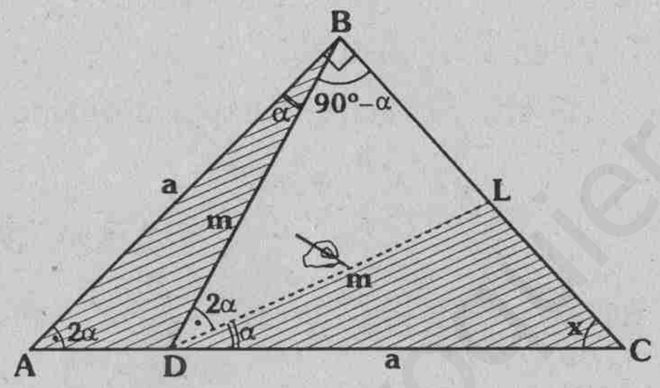
$\Rightarrow \quad m\measuredangle LPC = 90°$

$x = 90° + 45°$

$\therefore \quad \mathbf{x = 135°}$

Clave D

Resolución Nº 287



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{DL}$ tal que $m\measuredangle BDL = 2\alpha$

$\Rightarrow \quad \Delta BDL$: isósceles (BD = DL)

- $\Delta ABD \cong \Delta DLC$ (LAL)

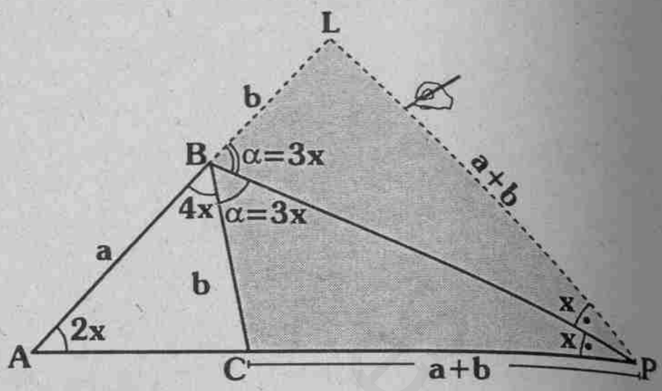
$\Rightarrow \quad m\measuredangle LCD = x = 2\alpha$

- ⊿ABC: isósceles

$\therefore \quad \mathbf{x = 45°}$

Clave B

Resolución Nº 288



- Piden **x**.
- Prolongamos $\overline{AB}$ tal que $BL = BC$

$\Delta CBP \cong \Delta LBP$ (LAL) $\Rightarrow LP = CP$;

$m\measuredangle LPB = m\measuredangle BPC$

- Además se deduce:

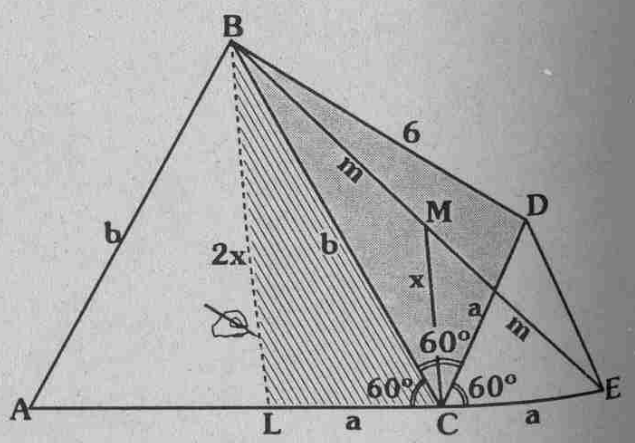
ΔALP : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle LAP = 2x$

- $\Delta ABP : \ \alpha = 3x$
- En B: $\quad 4x + 3x + 3x = 180°$

$\therefore \quad \mathbf{x = 18°}$

Clave B

Resolución Nº 289



- Piden: $CM = x$
- Trazamos: $\overline{BL} // \overline{MC}$
- $\triangle BEL : \overline{MC}$: base media

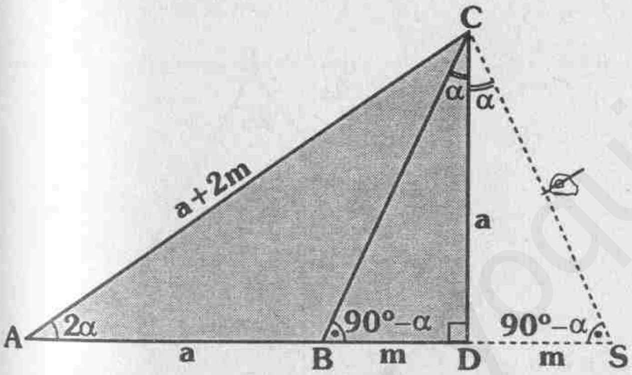
$$\Rightarrow BL = 2x \quad y$$
$$LC = CE$$

- $\triangle LBC \cong \triangle CBD$ (LAL)

$$2x = 6$$
$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 290



- Piden α.
- Trazamos $\overline{CS}$ tal que :

$$m\measuredangle CSA = 90° - \alpha$$

- $\triangle BCS$: isósceles $\Rightarrow BD = DS$
- $\triangle CAS$: isósceles $\Rightarrow AC = AS$

- $\triangle ADC$: $(a+2m)^2 = (a+m)^2 + a^2$

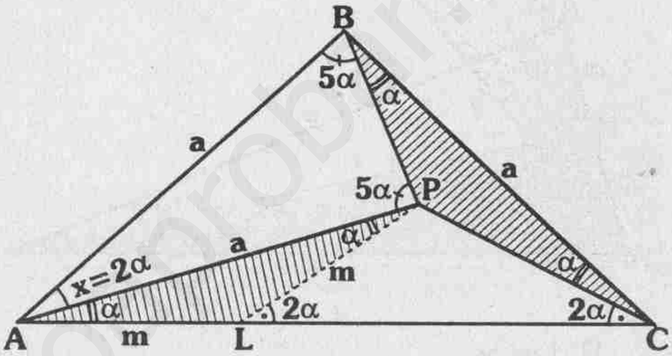
$$\Rightarrow a = 3m$$

- $\triangle ADC$: notable de 37° y 53°

$$2\alpha = 37°$$
$$\alpha = \frac{\mathbf{37°}}{\mathbf{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 291



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{PL}$ tal que $m\measuredangle APL = \alpha$
- $\triangle APL \cong \triangle BPC$ (ALA)

$$\Rightarrow AL = LP = BP = PC$$

- $\triangle LPC$: isósceles
- $\triangle BCAP$: $m\measuredangle BPA = 5\alpha$
- $\triangle BAP$: isósceles y

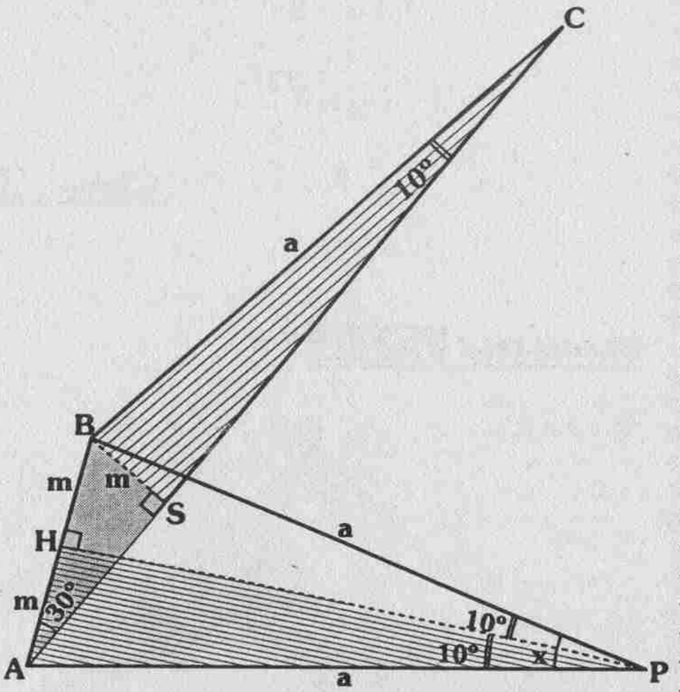
$\triangle ABC$: isósceles $\Rightarrow x = 2\alpha$

- $\triangle BAP$:

$$2\alpha + 5\alpha + 5\alpha = 180°$$
$$\therefore \mathbf{2\alpha = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 292

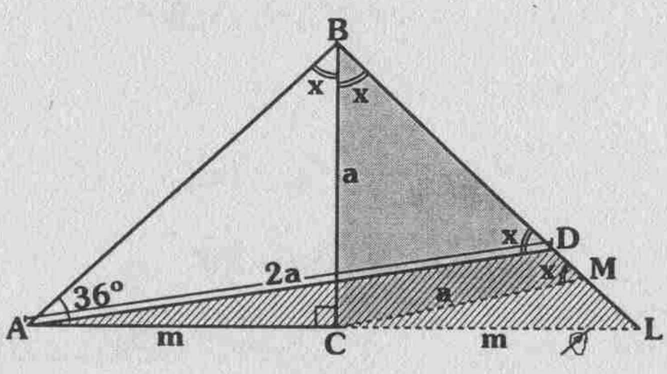


- Piden **x**.
- ΔABP : isósceles ($AP = BP$)
  $\Rightarrow \overline{PH}$ altura, mediana, bisectriz
  $AH = HB$ y $m\measuredangle APH = m\measuredangle BPH$
- $⊿ABS$: notable de 30° y 60°
- $⊿BSC \cong ⊿AHP \Rightarrow m\measuredangle APH = 10°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 20°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 293

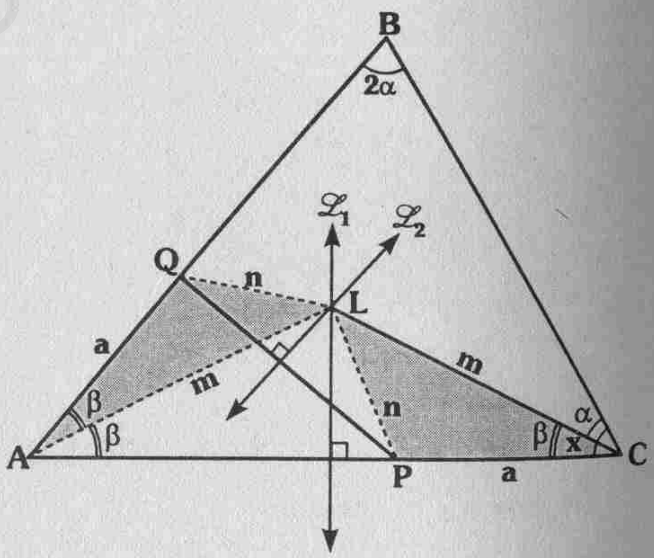


- Piden **x**.
- ΔABL : isósceles
- $\overline{BC}$: altura, mediana, bisectriz
- ΔADL : trazamos $\overline{CM} // \overline{AD}$
  $\Rightarrow \overline{CM}$: base media ($CM = a$)
- ΔBCM : isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle CMB = x$ y $m\measuredangle ADB = x$
- ΔABD : $36° + 2x + x = 180°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 48°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 294



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz:
  $\overline{\mathscr{L}_1}$: mediatriz de $\overline{AC}$ $\Rightarrow AL = LC$
  $\overline{\mathscr{L}_2}$: mediatriz de $\overline{QP}$ $\Rightarrow QL = LP$
- $\Delta AQL \cong \Delta CPL$ (LLL)
  $\Rightarrow m\measuredangle QAL = m\measuredangle LCP$

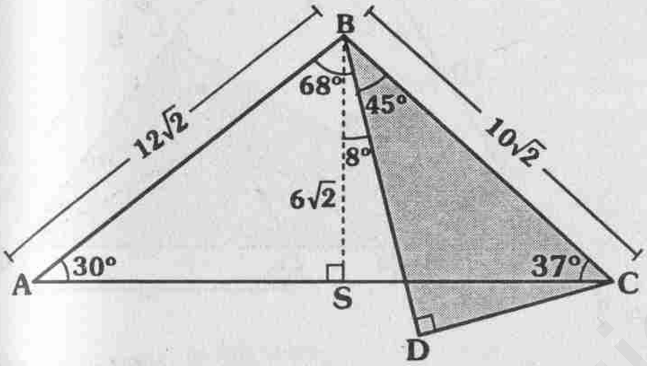
- Se observa: $x = \alpha + \beta$
- $\triangle ABC: 2\alpha + 2\beta + \alpha + \beta = 180°$

$$\alpha + \beta = 60°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 295



- Piden: BD
- Tracemos: $\overline{BS} \perp \overline{AC}$
- ⊿ASB: notable de 30°

$$\Rightarrow BS = 6\sqrt{2}$$

- ⊿BSC: notable de 37°

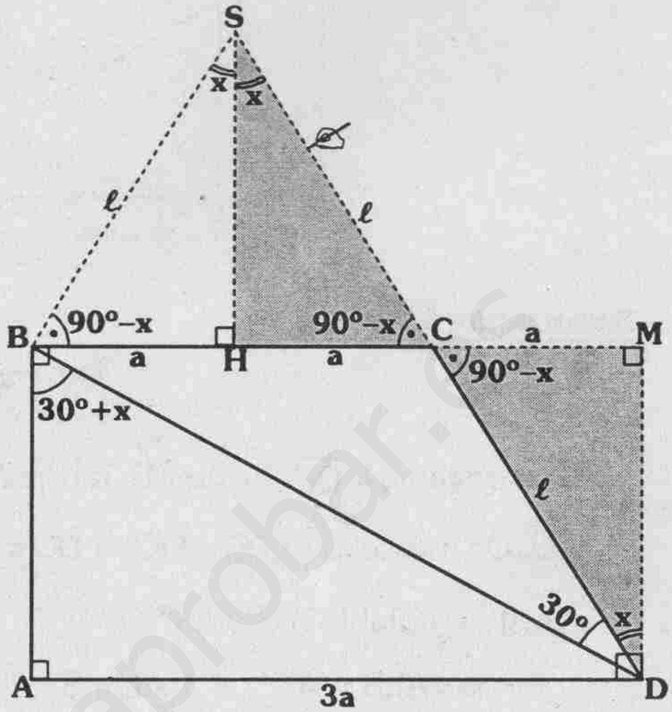
$$\Rightarrow BC = 10\sqrt{2}$$

- ⊿BDC: notable de 45°

$$\mathbf{BD = 10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 296



- Piden **x**.
- Como $\overline{AB} // \overline{DM}$ y $\overline{AD} // \overline{BM}$

$$\Rightarrow BM = 3a \Rightarrow CM = a$$

- Tracemos la mediatriz de $\overline{BC}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{DC}$ en M.
- Por teorema de la mediatriz: $SB = SC$.
- ⊿ CHS ≅ ⊿ CMD (ALA) $\Rightarrow CD = \ell$
- De la observación:

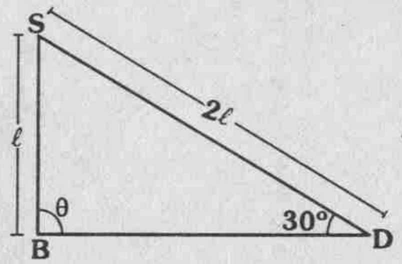
$$m\sphericalangle SBC = 90°$$

$$2x = 60°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

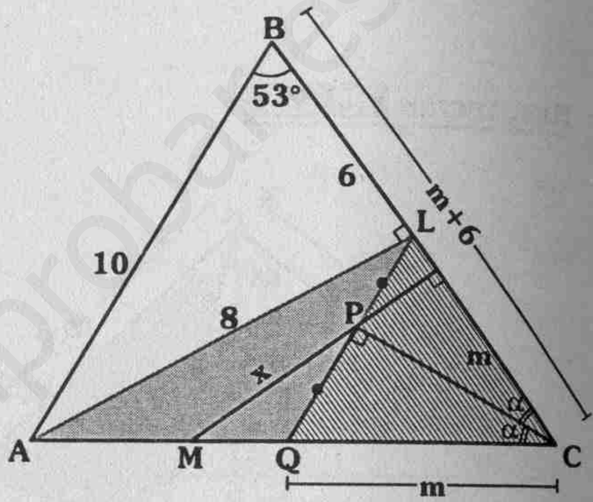
Observación



Se cumple:

$\theta = 90°$

RESOLUCIÓN N° 297



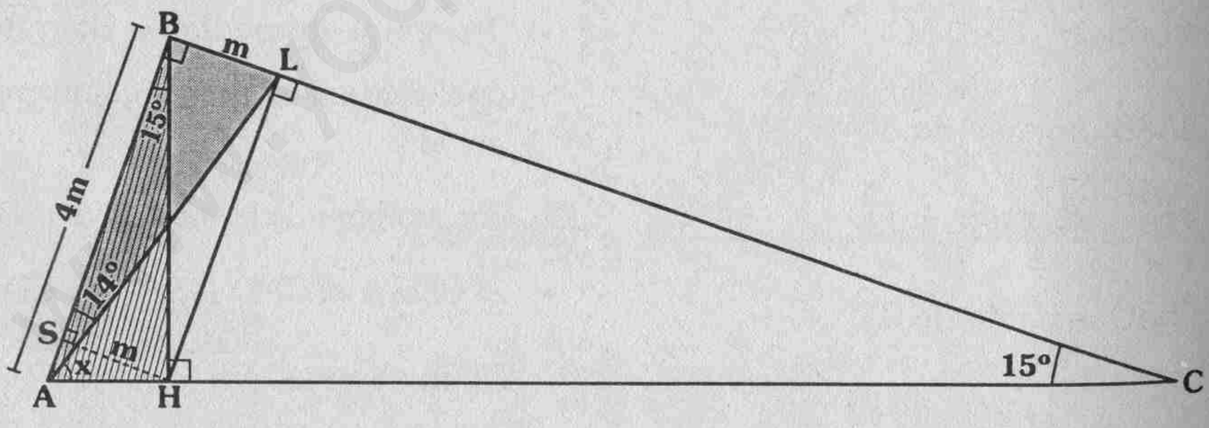
- Piden x.
- Prolongamos $\overline{QP}$ hasta "L" tal que,
- ΔLCQ : isósceles $\Rightarrow LC = QC \Rightarrow BL = 6$
- ΔABL : notable 37° y 53°

  $\Rightarrow$ m∢ALB = 90° y AL = 8
- ΔALQ : $\overline{PM}$ es base media

$\therefore$ **x = 4**

Clave D

RESOLUCIÓN N° 298

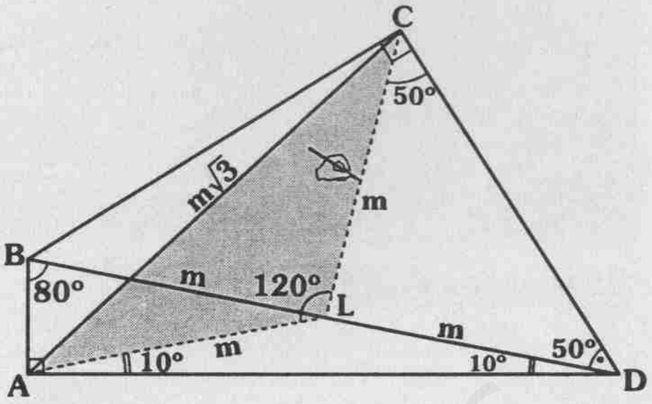


- Piden **x**.
- ⊿ABH: notable de 15° y 75° $\Rightarrow$ AB = 4(HS) ; además SH = BL
- ⊿ABL: notable 14° y 76° $\Rightarrow$ m∢BAL = 14°
- ⊿ABH: x + 14° = 75°

$\therefore$ **x = 61°**

Clave C

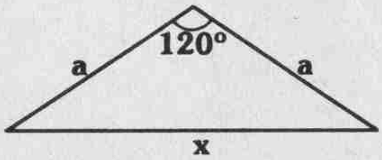
RESOLUCIÓN Nº 299



- Piden $\dfrac{AC}{BD}$
- Por teorema mediana relativa a la hipotenusa

$$\Rightarrow \; AL = CL = \frac{BD}{2} = m$$

Observación



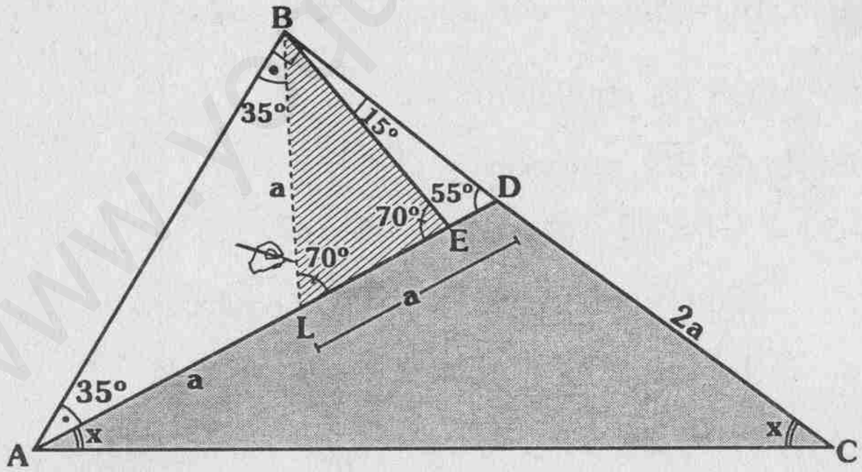
$$\mathbf{x = a\sqrt{3}}$$

- En $\Delta ALC : AC = m\sqrt{3}$

$$\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BD}} = \frac{\mathbf{m\sqrt{3}}}{\mathbf{2m}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 300



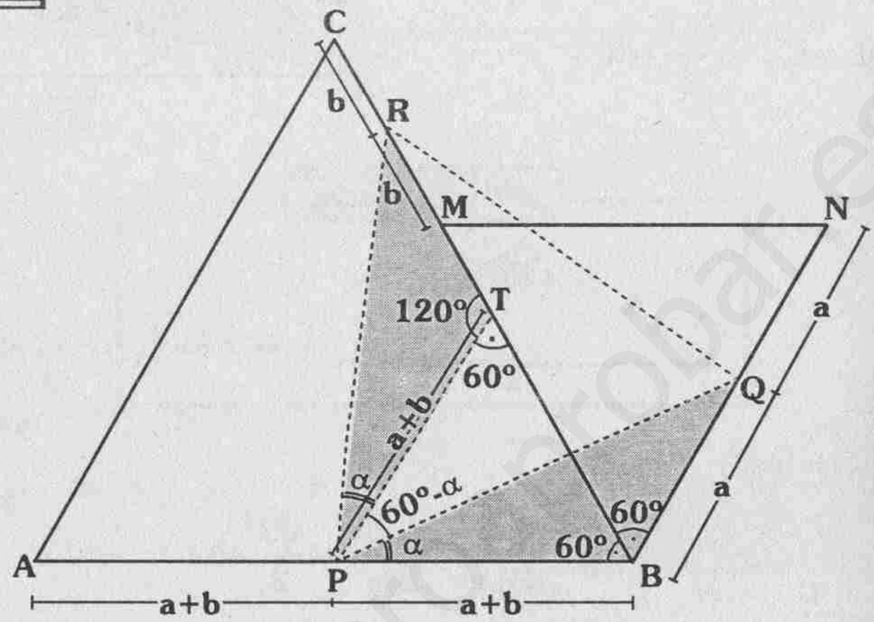
- Piden **x**.
- $\measuredangle$ABD: Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa entonces: BL=AL=LD.
- ΔLBE : isósceles (LB = BE)
- ΔADC : isósceles (AD = DC) : $2x = 55°$

$$\therefore \; \mathbf{x = 27{,}5°}$$

Clave A

Solucionario
Problemas Olímpicos

RESOLUCIÓN Nº 1



- En el gráfico, ΔABC y ΔBMN son equiláteros, AP=PB, CR=RM y BQ=QN. (Sea CR=RM=b; BQ=QN=a; con ello AP=PB=a+b)

- Por demostrar: ΔPQR es equilátero.

- Sea T punto medio de $\overline{BC}$, entonces:

  _ $CT = TB = a + b \Rightarrow RT = a$

  _ Como: $PB = BT \Rightarrow \Delta PBT$: equilátero

  _ Luego: $PT = a + b$ y $m\sphericalangle PTR = 120°$

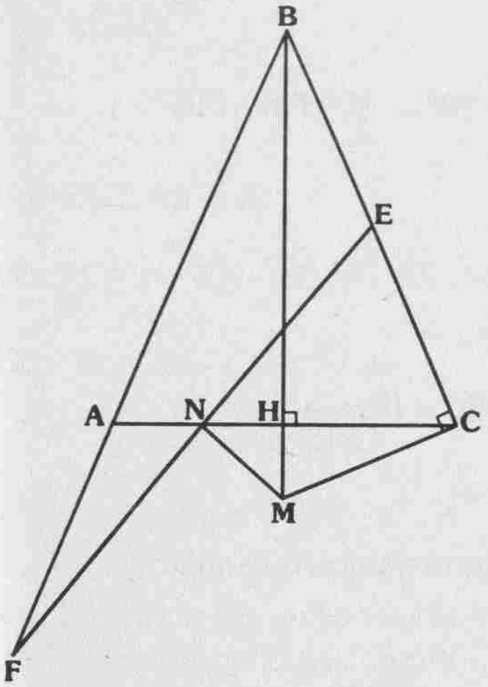
- $\Delta PTR \cong \Delta PBQ$ (LAL) $\Rightarrow PR = PQ$ y $m\sphericalangle RPT = m\sphericalangle QPB = \alpha$

- Como $PQ=PR$ y $m\sphericalangle RPQ = 60°$

$\Rightarrow$ **ΔPRQ es equilátero**

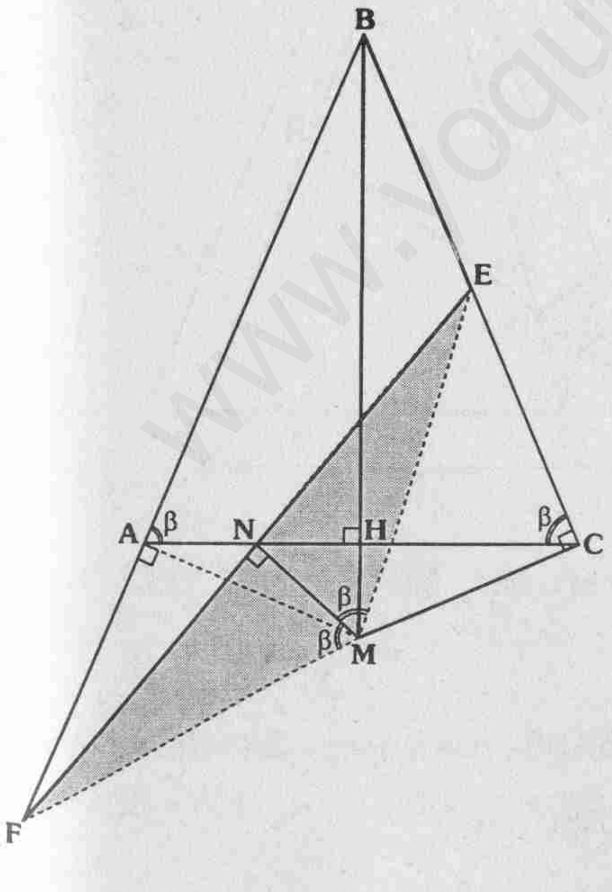
RESOLUCIÓN Nº 2

- Consideremos el siguiente gráfico:



- Dato: $AB = BC$
- Por demostrar: $\overline{MN} \perp \overline{EF} \Rightarrow EN = NF$
- El problema consta de dos partes:

Parte I



- Demostremos: si $\overline{MN} \perp EP \Rightarrow EN = NP$
- Como $AB = BC \Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB$ y $\overleftrightarrow{BH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, luego $MA = MC$, entonces:

$\Delta MAB \cong \Delta MCB$

$$\Rightarrow m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle MCB = 90^\circ$$

- Los cuadriláteros FANM y MNEC son inscriptibles, por teorema:

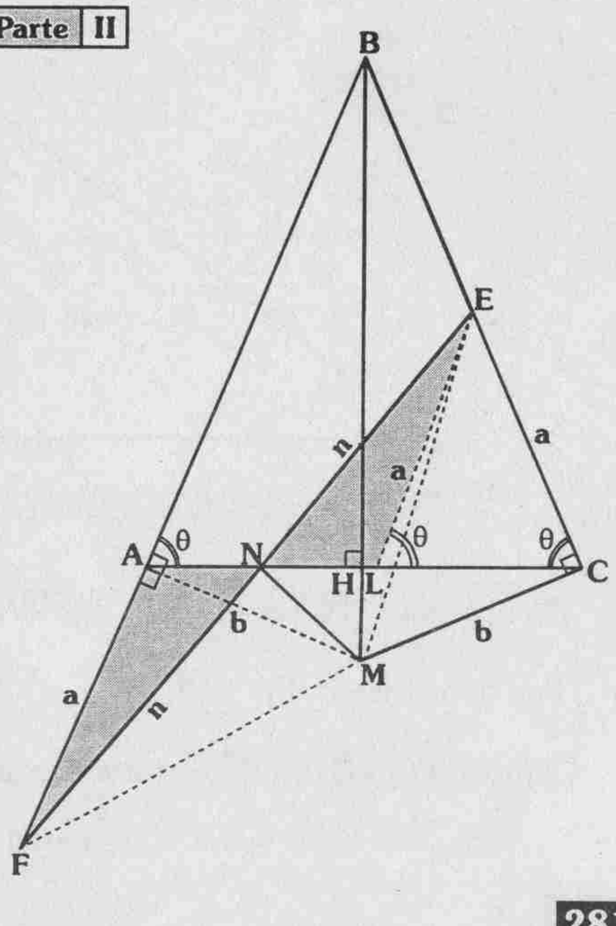
$$m\sphericalangle BAN = m\sphericalangle FMN = \beta$$

$$m\sphericalangle NCE = m\sphericalangle NME = \beta$$

- En ΔFME, como $\overline{MN}$ es altura y bisectriz, entonces ΔFME es triángulo isósceles, luego: $\overline{MN}$ también es mediana.

$$\therefore\ \mathbf{FN = NE}$$

Parte II

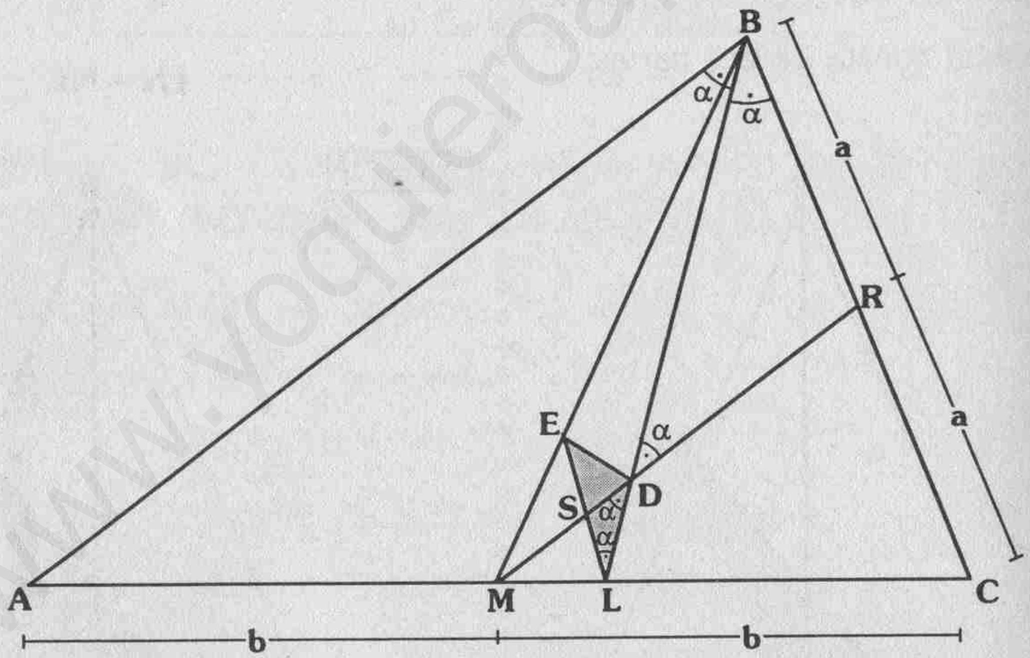


- Demostremos ahora si: $EN = NF \Rightarrow \overline{MN} \perp EF$
- $⊿ MAB \cong ⊿ MCB \Rightarrow m\measuredangle MCB = m\measuredangle MAB = 90°$ y $MA = MC$
- Se traza $\overline{EL} // \overline{AB}$ (L en $\overline{AC}$).
- $\Delta NAF \cong \Delta NLE \Rightarrow LE = FA = a$
- Como $\overline{EL} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle ELC = m\measuredangle BAC = \theta$

$\Rightarrow \Delta LEC$: isósceles $\Rightarrow EC = EL = a$
- $⊿ MAF \cong ⊿ MCE \Rightarrow MF = ME$
- ΔFME : isósceles, como $\overline{MN}$ es mediana, entonces también es altura:

$$\therefore \ \overline{MN} \perp \overline{FE}$$

RESOLUCIÓN Nº 3



- En el gráfico, $\overline{BL}$ es bisectriz del $\measuredangle ABC$, $AM = MC$, $\overline{MD} // \overline{AB}$ y $\overline{EL} // \overline{BC}$.
- Por demostrar: $\overline{ED} \perp \overline{BL}$
- Como $\overline{MD} // \overline{AB} \Rightarrow \overline{MR}$ es base media del ΔABC, por teorema $BR = RC$ también:

$$m\measuredangle MDL = m\measuredangle ABD = \alpha$$

- Como $\overline{LE} // \overline{BC}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ELD = m\sphericalangle DBC = \alpha$$

- En ΔMBC, tenemos:

$$BR = RC \quad y \quad \overline{EL} // \overline{BC} \Rightarrow ES = SL$$

- ΔSDL : isósceles, pues

$$m\sphericalangle SDL = m\sphericalangle SLD$$

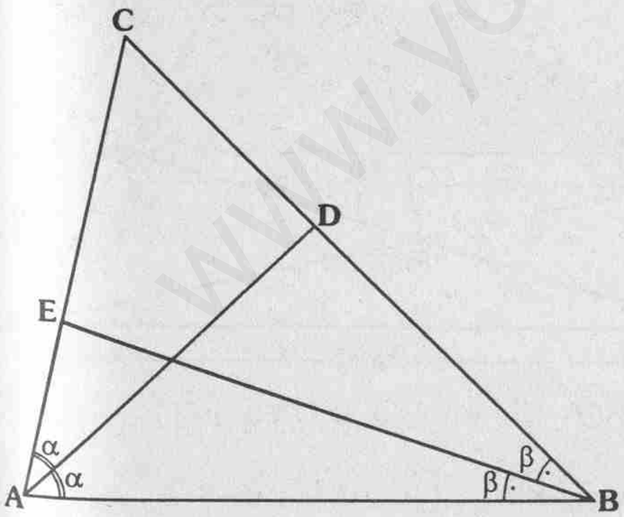
$$\Rightarrow \quad SL = SD$$

- Como $ES = SL = SL$ entonces el triángulo EDL es triángulo rectángulo (recto en D) .

$$\therefore \ \mathbf{\overline{ED} \perp \overline{BL}}$$

RESOLUCIÓN Nº 4

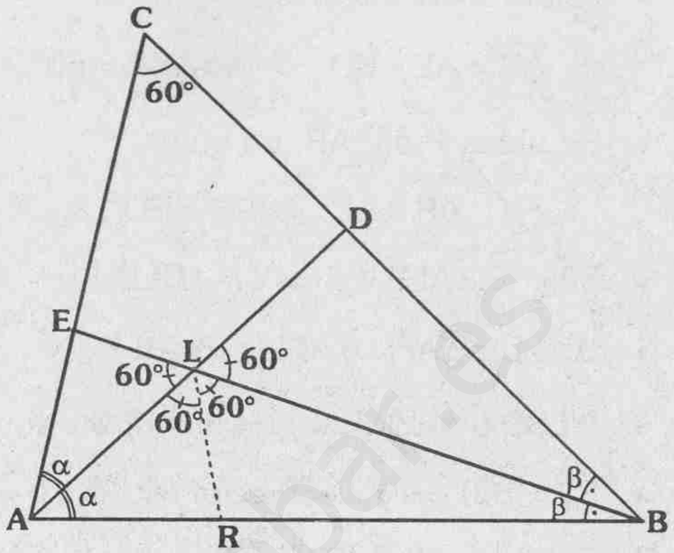
- Asi como el problema 2, consta de dos partes consideremos el siguiente gráfico:



- Por demostrar:

$$m\sphericalangle ACB = 60° \Leftrightarrow AE + BD = AB$$

Parte I



- Demostremos:

$$\text{si } m\sphericalangle BCA = 60° \Rightarrow AB = AE + BD$$

- En ΔABC :

$$2\alpha + 2\beta + 60° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 60°$$

- En ΔALB :

$$m\sphericalangle ALB = 120°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ALE = 60°$$

- Se traza $\overline{LR}$ (R en $\overline{AB}$) tal que:

$$m\sphericalangle ALR = 60°$$

- $\Delta ALE \cong \Delta ALR \Rightarrow AE = AR$

- $\Delta BLD \cong \Delta BLR \Rightarrow BD = BR$

- Como:

$$AB = AR + BR$$

$$\therefore \mathbf{AB = AE + BD}$$

Parte II

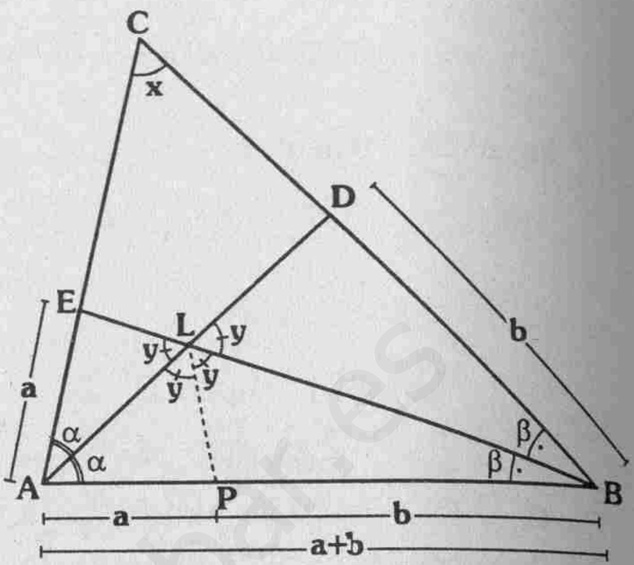
- Ahora demostremos:

  si $AB = AE + BD \Rightarrow m\measuredangle ACB = 60°$

- Se ubica P en $\overline{AB}$ tal que:

  $AP = AE \Rightarrow PB = BD$

- Sea: $m\measuredangle ALE = y \Rightarrow m\measuredangle DLB = y$
- $\Delta AEL \cong \Delta APL$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle ALP = y$
- $\Delta LBD \cong \Delta LBP$(LAL) $\Rightarrow m\measuredangle PLB = y$
- $3y = 180° \Rightarrow y = 60°$, con ello $\alpha + \beta = 60°$
- Como: $x + 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow x = 60°$



$\therefore$ **$m\measuredangle ACB = 60°$**

RESOLUCIÓN Nº 5

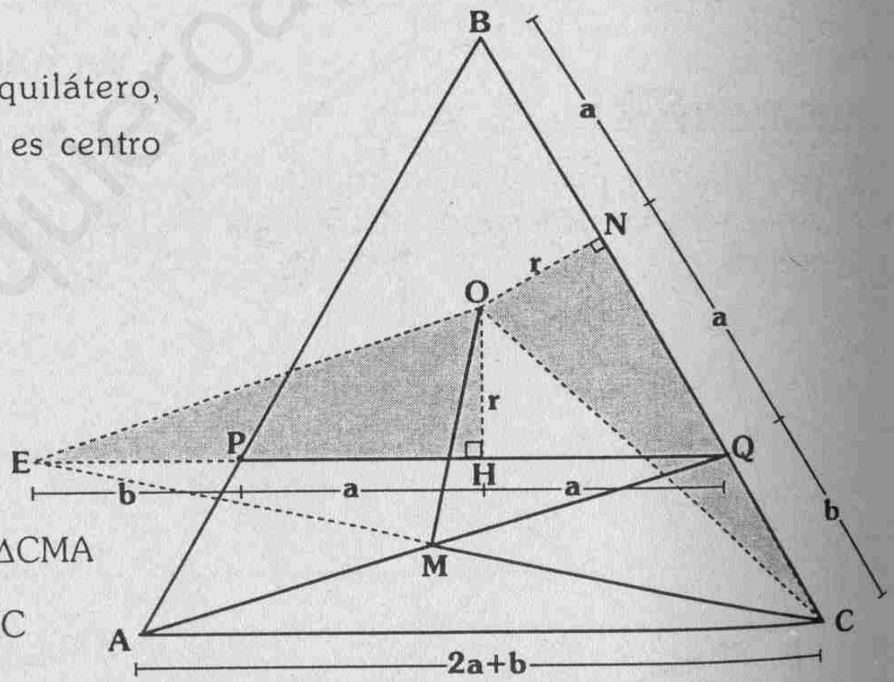
- En el gráfico: ΔABC equilátero, $\overline{PQ} // \overline{AC}$, $AM = MQ$ y O es centro del ΔPBQ.
- Por demostrar:

  $m\measuredangle OMC = 90°$

- $\overrightarrow{CM} \cap \overrightarrow{QP} = \{E\}$
- Como :

  $AM = MQ \Rightarrow \Delta EMQ \cong \Delta CMA$

  $\Rightarrow EQ = AC$ y $EM = MC$



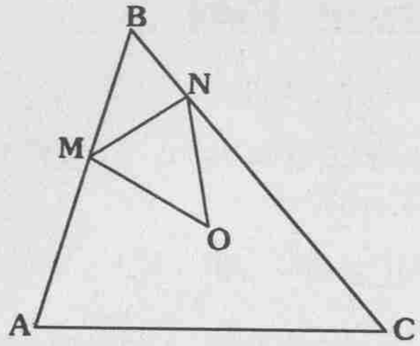
- Desde O se traza: $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$ y $\overline{ON} \perp \overline{BQ}$ (H en $\overline{PQ}$ y N en $\overline{BQ}$)

  $\Rightarrow OH = ON$; $PH = HQ$ y $QN = NB$

- $⊿ EHO \cong ⊿ CNO$ (LAL) $\Rightarrow OE = OC$
- ΔEOC : isósceles , como $EM = MC \Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{EC}$

$\therefore$ **$m\measuredangle OMC = 90°$**

RESOLUCIÓN Nº 6



- Del gráfico:

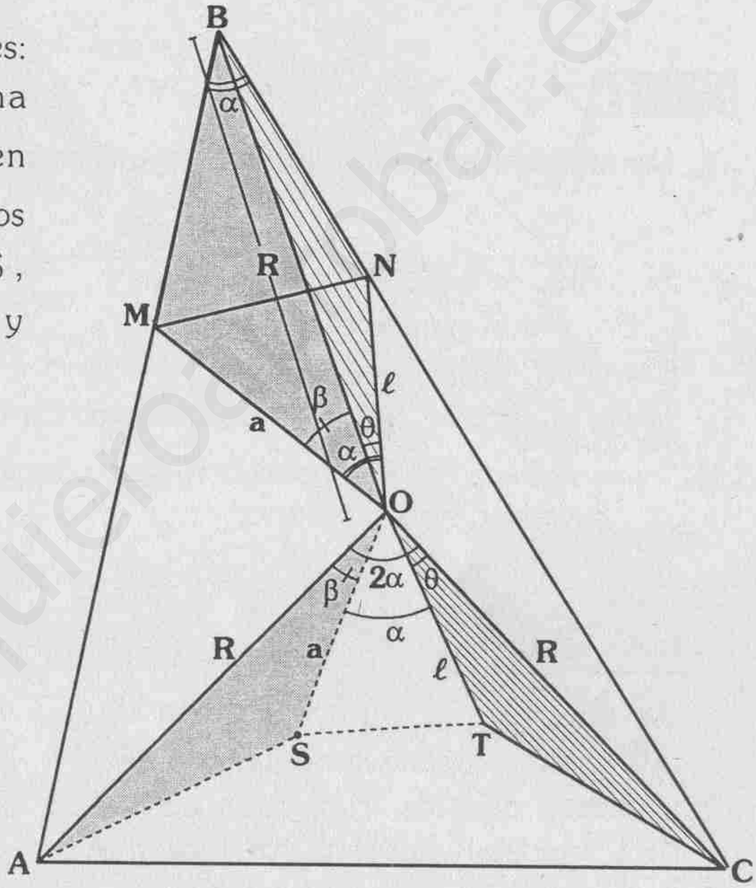
  O es circuncentro del triángulo ABC

  y $\quad m\measuredangle ABC = m\measuredangle MON$

- Por demostrar:

$$AC \leq MB + BN + MN$$

- Como "O" es circuncentro entonces: $OA = OB = OC$ y por teorema $m\measuredangle AOC = 2(m\measuredangle ABC)$ ubicamos en la región interior del $\measuredangle AOC$ los puntos S y T, tal que $OM = OS$, $ON = OT$, $m\measuredangle AOS = m\measuredangle MOB$ y $m\measuredangle TOC = m\measuredangle NOB$.



- Con ello tenemos:

  $\Delta AOS \cong \Delta MOB$ (LAL) $\Rightarrow MB = AS$

  $\Delta CTO \cong \Delta BON$ (LAL) $\Rightarrow TC = BN$

- $\Delta SOT \cong \Delta MON$ (LAL)

$$\Rightarrow ST = MN$$

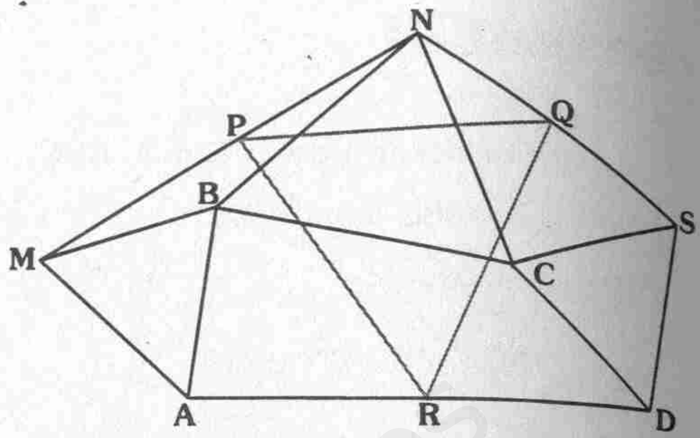
- Por teorema: $AC \leq \underbrace{AS}_{MB} + \underbrace{ST}_{MN} + \underbrace{TC}_{BN}$

$$\therefore \mathbf{AC \leq MB + MN + BN}$$

Nota

El estudiante puede verificar que si $AC = AD + ST + TC$ *o cuando S y T están sobre* $\overline{AC}$*, en cada caso se demuestra que el triángulo ABC es equilátero, lo cual queda como ejercicio para el lector.*

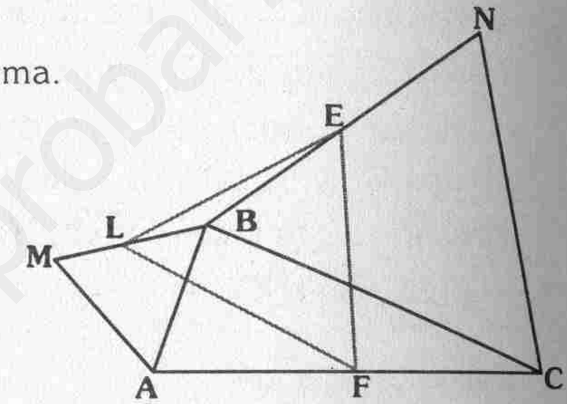
RESOLUCIÓN Nº 7



- En el gráfico.
- ΔAMB, ΔBCN y ΔLSD son equiláteros.
- $MP = PN$; $AR = RD$ y $NQ = QS$
- Por demostrar ΔPRQ es equilátero.

Paso 1

- Demostremos previamente el siguiente teorema.



- Si ΔABC y ΔBCN son equiláteros y L, E y F son puntos medios de $\overline{MB}$, $\overline{BN}$ y $\overline{AC}$ respectivamente
- Se cumple:

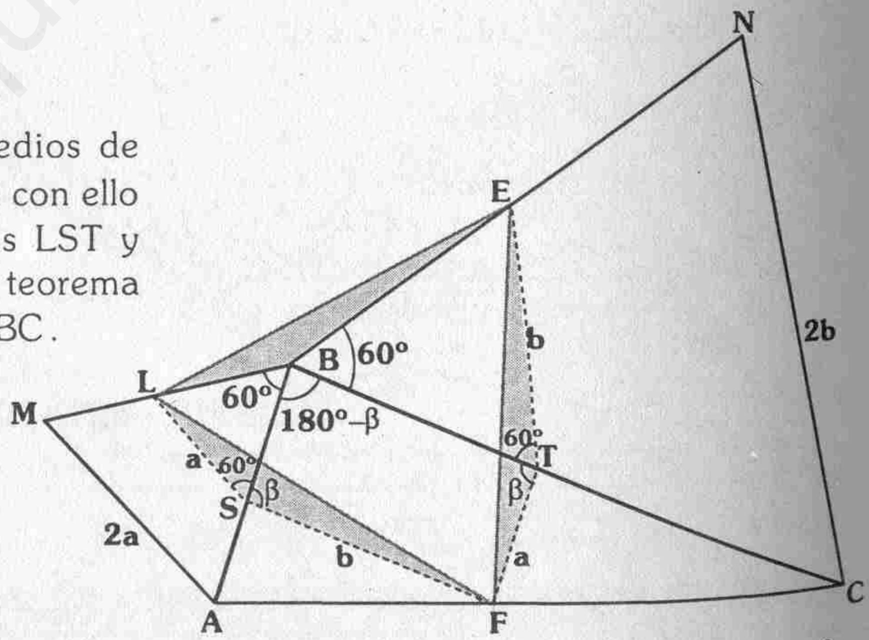
ΔLFE es equilátero.

Demostración:

- Se ubica S y T puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, con ello notamos que los triángulos LST y BET son equiláteros y por teorema de la base media en el ΔABC.

$$\overline{FT} // \overline{AB} \text{ y } FT = \frac{AB}{2},$$

$$\overline{FS} // \overline{CB} \text{ y } FS = \frac{BC}{2}$$

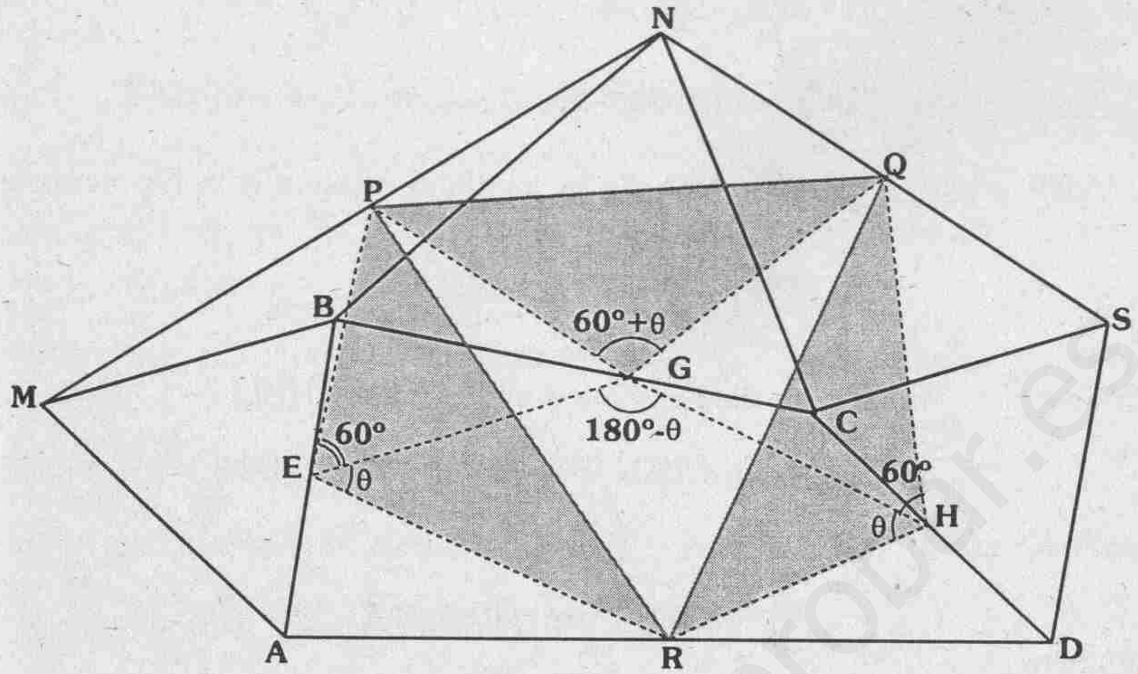


- Con ello SBTF: paralelogramo, sea $m\sphericalangle BSF = \beta \Rightarrow m\sphericalangle BTF = \beta$ y $m\sphericalangle LBE = 60° + \beta$.

$$\Delta LSF \cong \Delta FTE \cong \Delta LBE \text{ (LAL)} \Rightarrow LF = FE = LE$$

$$\therefore \ \mathbf{\Delta LFE} \text{ es equilátero.}$$

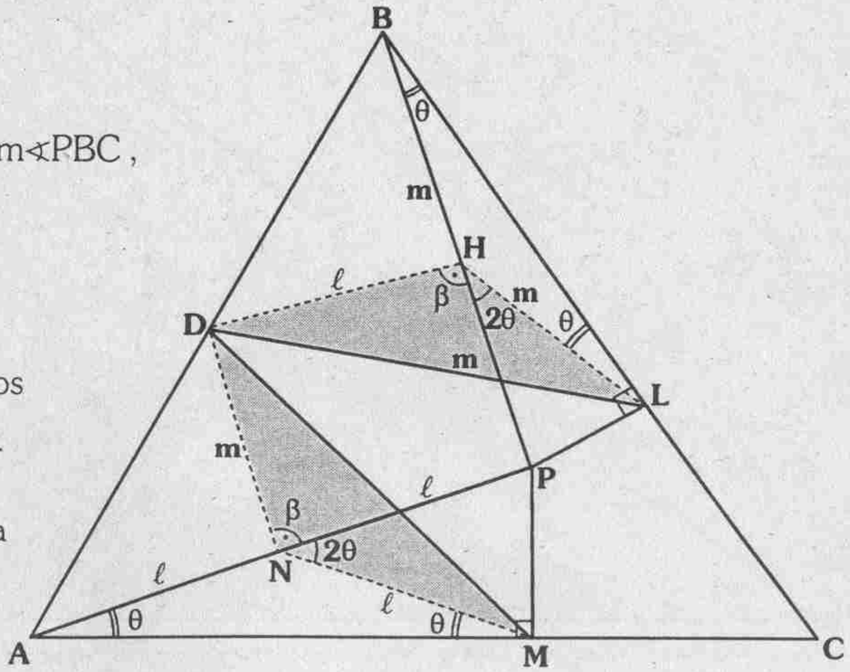
Paso 2



- Sean E, G y H puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente por el teorema anterior, para el ΔMNB y ΔNSC, los triángulos PEG y GQH son equiláteros.
- Por teorema como E, G, H y R son puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD, entonces EGHR es paralelogramo.
- Luego: $\Delta PER \cong \Delta RHQ \cong \Delta PGH$ (LAL) $\Rightarrow PR = RQ = PQ$

$$\therefore\ \Delta PRQ \text{ es equilátero.}$$

RESOLUCIÓN Nº 8



- Datos: $AD = DB$, $m\sphericalangle PAM = m\sphericalangle PBC$, $\overline{PM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$.
- Por demostrar: $DL = DM$
- Ubiquemos H y N puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{AP}$ respectivamente.
- En ΔAPB, por teorema de la base media:

$$\overline{DN} // \overline{BP} \;;\quad \overline{DH} // \overline{AP} \;;\quad DN = \frac{BP}{2} \text{ y } DH = \frac{AP}{2}$$

$\Rightarrow$ NDHP es paralelogramo $\Rightarrow$ $m\sphericalangle DNP = m\sphericalangle DHP$

- En ⊿AMP y ⊿BLP, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$LH = \frac{BP}{2} \quad \text{y} \quad MN = \frac{AP}{2}$$

- También: $m\sphericalangle HLB = m\sphericalangle LBH \Rightarrow m\sphericalangle LHP = 2(m\sphericalangle HBL)$

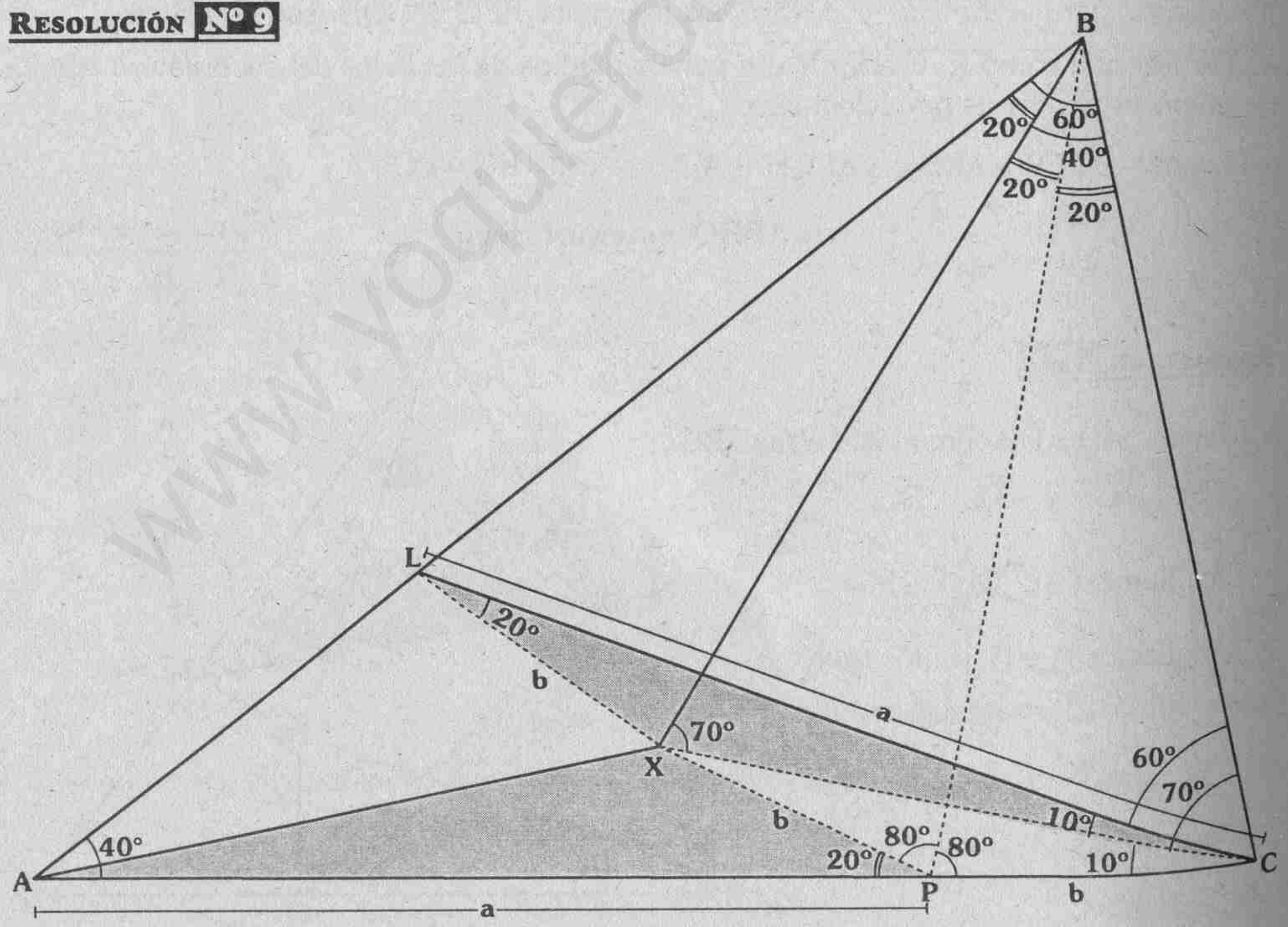
$m\sphericalangle MAN = m\sphericalangle AMN \Rightarrow m\sphericalangle MNP = 2(m\sphericalangle MAN)$

- Luego:

$$\Delta DNM \cong \Delta LHD \text{ (LAL)}$$

$$\therefore \mathbf{DM = DL}$$

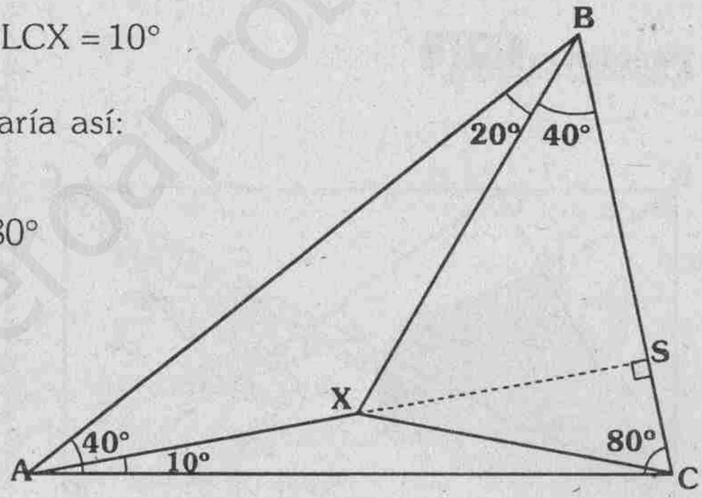
RESOLUCIÓN N° 9



- Datos: $m\sphericalangle BAC = 40°$, $m\sphericalangle ABC = 60°$, $m\sphericalangle XBA = 20°$ y $m\sphericalangle XCA = 10°$
- Por demostrar: $\overline{AX} \perp \overline{BC}$
- De los datos deducimos: $m\sphericalangle BCX = 70°$ y $m\sphericalangle XBC = 40°$ entonces el triángulo XBC es isósceles, con ello $XB = BC$, sea $BC = a$;
- Se traza $\overline{BP}$ (P en $\overline{AC}$) tal que : $m\sphericalangle ABP = 40° \Rightarrow m\sphericalangle BPC = 80°$ luego: $CB = PB = PA = a$
- Ubicamos L en $\overline{AB}$ tal que $BL = a$, como $BL = BC$, $m\sphericalangle CBL = 60°$ entonces: ΔCBL es equilátero:
- $\Delta ABX \cong \Delta XBP \cong \Delta PBC$ (LAL) $\Rightarrow$ $Lx = XP = PC$
- Notamos también: $m\sphericalangle LCX = 10°$, $m\sphericalangle XCP = m\sphericalangle PXC = 10°$ y $m\sphericalangle XPA = 20°$;
- $\Delta CLX \cong \Delta XPA$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\sphericalangle XAP = m\sphericalangle LCX = 10°$
- Como $m\sphericalangle XAP = 10°$, el gráfico quedaría así:
- Como $m\sphericalangle CAX = 10°$ y $m\sphericalangle ACB = 80°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ASC = 90°$$

$$\therefore \ \overline{\mathbf{AX}} \perp \overline{\mathbf{BC}}$$

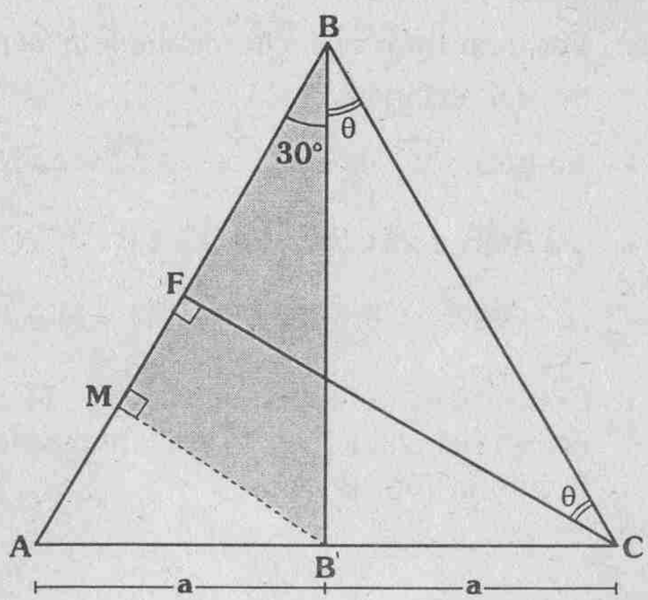


RESOLUCIÓN Nº 10

- Datos:

  $\overline{BB'}$ mediana y $\overline{CF}$ altura del ΔABC ,

  $\overline{BB'} \cong \overline{CP}$; $m\sphericalangle CBB' = m\sphericalangle FCB$
- Por demostrar ΔABC es equilátero.
- Se traza $\overline{B'M} \perp \overline{AB}$ (M en $\overline{AB}$), en el $\measuredangle AFC$ tenemos que $\overline{B'M}$ es base media, por teorema $B'M = \dfrac{FC}{2}$, pero $BB' = FC$.



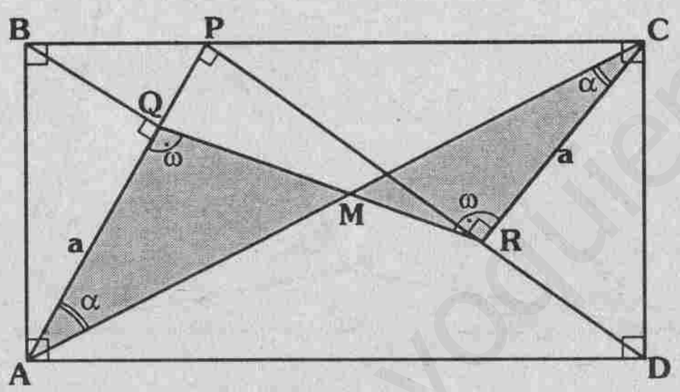
- $\triangle$ BMB' : notable $\Rightarrow m\sphericalangle FBB' = 30°$
- Sea $m\sphericalangle FCB = \theta$ en el $\triangle FBC$: $\theta = 30°$
- Como $AB' = B'C$ y

  $m\sphericalangle ABB' = m\sphericalangle B'BC = 30°$,

  es decir BB' es mediana y bisectriz entonces por teorema $AB = BC$;
- Finalmente tenemos $m\sphericalangle ABC = 60°$ y $AB = BC$, por lo tanto:

$$\Delta ABC \text{ es equilátero.}$$

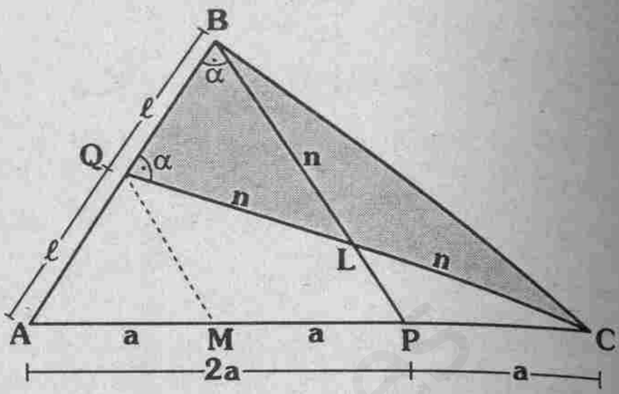
PROBLEMA Nº11



- Por demostrar que $\overline{QR}$ contiene al centro del rectángulo.
- Se traza $\overline{AC}$, la cual corta a $\overline{QR}$ en M.
- $\triangle AQB \cong \triangle CRD \Rightarrow AQ = CR$;
- $\Delta AQM \cong \Delta CRM$ (ALA) $\Rightarrow AM = MC$
- Como M es punto medio de $\overline{AC}$, M es centro del rectángulo, lo cual demuestra la afirmación, pues:

$$M \in \overline{QR}$$

PROBLEMA Nº12



- Datos: $\overline{CQ}$ es mediana; $AP = 2(PC)$ y $m\sphericalangle BQC = m\sphericalangle PBQ$
- Por demostrar:

$$m\sphericalangle ABC = 90°$$

- Se ubica M punto medio de $\overline{AP}$;
- En ΔABP, $\overline{QM}$ es base media, por teorema $\overline{QM} // \overline{BP}$.
- En el ΔMQC, como $MP = PC$ y $\overline{PL} // \overline{MQ}$, entonces $\overline{PL}$ es base media, por teorema: $QL = LC$.
- ΔQBL isósceles $\Rightarrow QL = LB$
- Finalmente, tenemos:

$$QL = LB = LC$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QBC = 90°$$

$$\therefore \ m\sphericalangle ABC = 90°$$

RESOLUCIÓN Nº 13

- Sean a, b y c las longitudes de tres segmentos, ellos serán las longitudes de los lados de un triángulo, si:

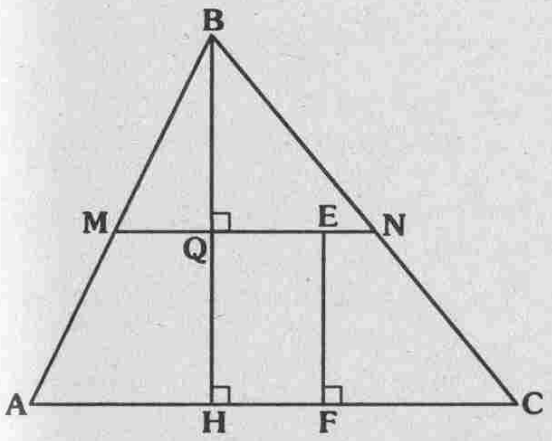
$a < b + c$; $b < a + c$; y $c < a + b$

(teorema de la desigualdad triangular)

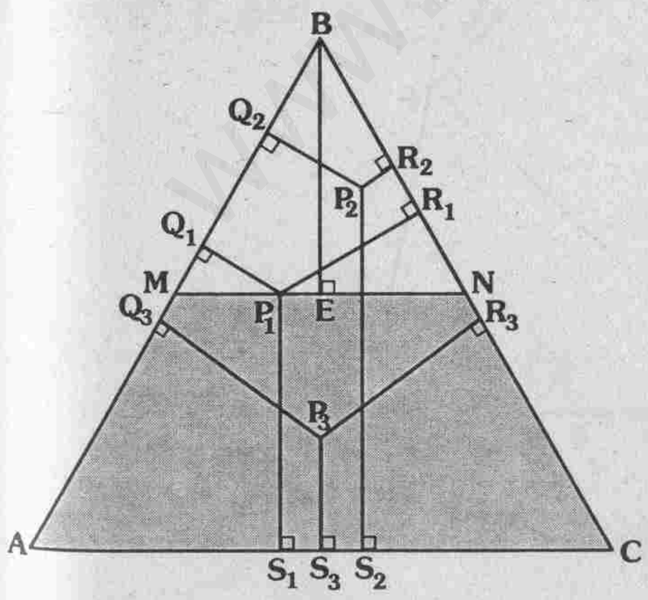
- Basta que no se cumpla cualquiera de las expresiones anteriores para que el triángulo no exista, por ejemplo:

$$a \geq b + c$$

- Usemos el siguiente teorema:



- Si M y N sean puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.
- Se cumple: $BQ = QH = EF$
- En el problema:



- Sea el triángulo ABC equilátero, M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, del teorema anterior.
- Si $P_1 \in \overline{MN} \Rightarrow BE = P_1S_1$
- Como ΔMBN es equilátero

$$\Rightarrow P_1Q_1 + P_1R_1 = BE$$

$$\Rightarrow P_1Q_1 + P_1R_1 = P_1S_1$$

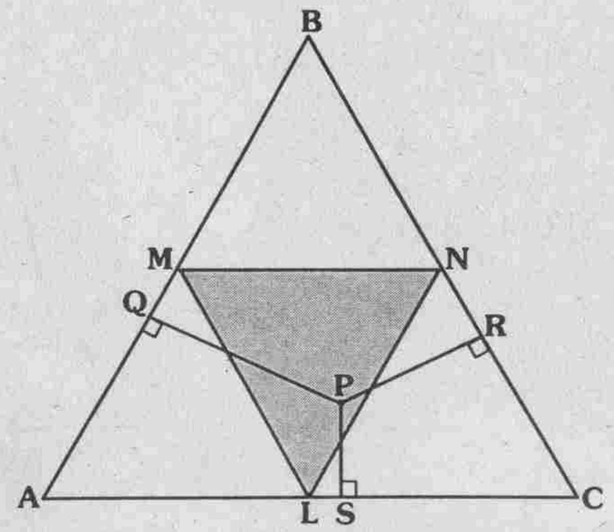
- Es decir, con $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_1R_1}$ y $\overline{P_1S_1}$ no se forma el triángulo.
- Si el punto está en la región interior del ΔMBN, por ejemplo P_2, entonces:

$$P_2S_2 > P_2Q_2 + P_2R_2$$

- Si el punto está en la región interior de AMNC, entonces:

$$P_3S_3 < P_3Q_3 + P_3R_3$$

- Vemos que para P_3 se cumple parte de la condición de existencias, analicemos para las tres bases medias entonces, la región donde se formará el triángulo es la intersección de las regiones, es decir:



- Sea M, N y L puntos medios de los lados, entonces deacuerdo a lo anterior, tendríamos.
- Si P está en la región interior del triángulo ΔMNL entonces:

$$PS < PQ + PR \quad ; \quad PQ < PR + PS$$

$$y \quad PR < PQ + PS$$

- Es decir existe el triángulo de lados:

$$\overline{\mathbf{PS}}, \ \overline{\mathbf{PQ}} \ \ \mathbf{y} \ \ \overline{\mathbf{PS}}$$

RESOLUCIÓN Nº 14

Parte I

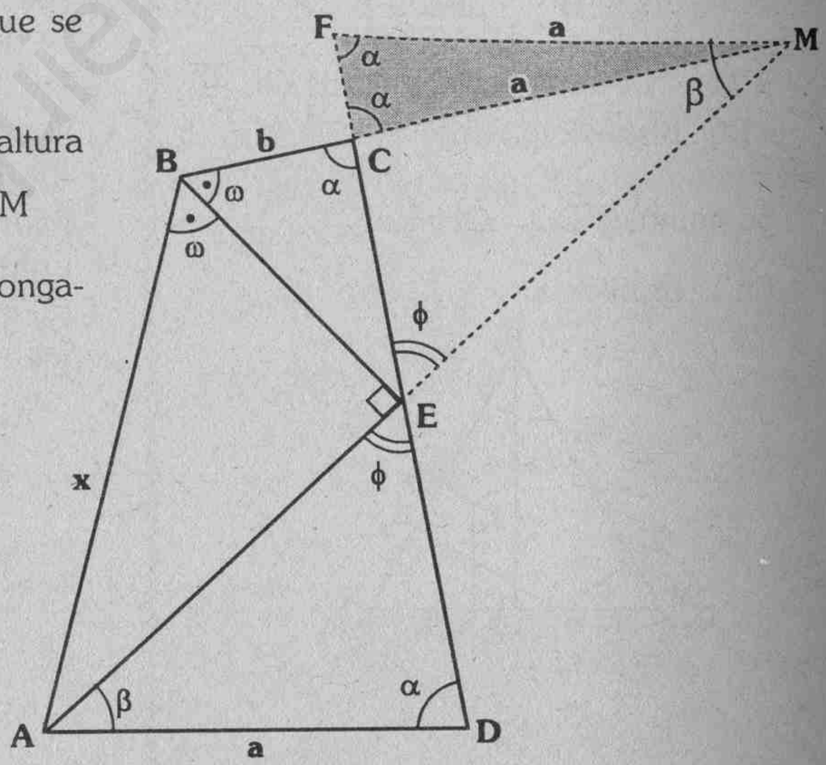
- Por demostrar que:

$$x=a+b$$

- Se prolonga $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$ hasta que se corten en M.
- En el ΔABM, $\overline{BE}$ es mediana y altura

$$\Rightarrow \quad AB=BM=x \quad y \quad AE=EM$$

- Se traza $\overline{MF} // \overline{AD}$, F en la prolongación de $\overline{DC}$.



- $\Delta AED \cong \Delta MEF$ (ALA)

$$\Rightarrow \quad FM=AD=a$$

- ΔFCM : isósceles

$$\Rightarrow \quad FM=MC=a$$

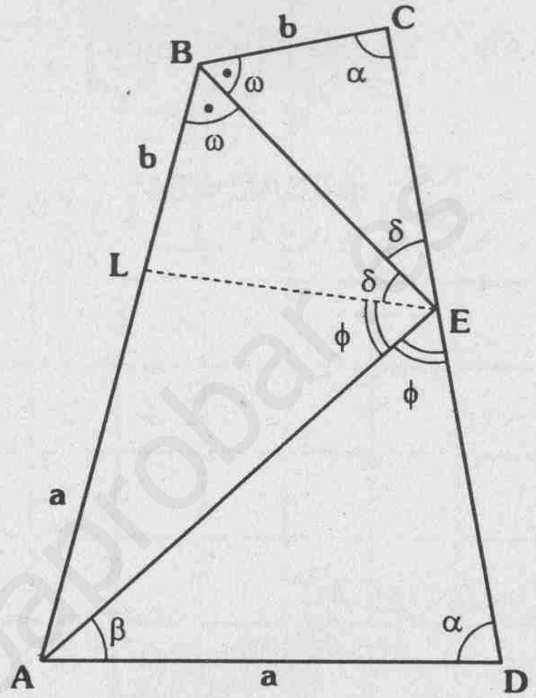
- Finalmente:

$$\underbrace{AB}_{x} = \underbrace{BM}_{a+b}$$

Parte II

- Ahora AB=a+b, demostremos:

$$m\sphericalangle AEB = 90^\circ$$



- Se traza $\overline{EL}$ tal que CB=BL=b

$\Rightarrow \quad \Delta AEB \cong \Delta ELB$ (LAL)

$\Rightarrow \quad m\sphericalangle CEB = m\sphericalangle BEL$ y

$m\sphericalangle BLE = m\sphericalangle BCE = \alpha$

- ⏢ALED inscriptible (o cíclico)

$\Rightarrow$ como AL=AD

$\Rightarrow \quad m\sphericalangle AEL = m\sphericalangle AED = \phi$

- Del gráfico: $2\alpha + 2\phi = 180^\circ$

$$\alpha + \phi = 90^\circ$$

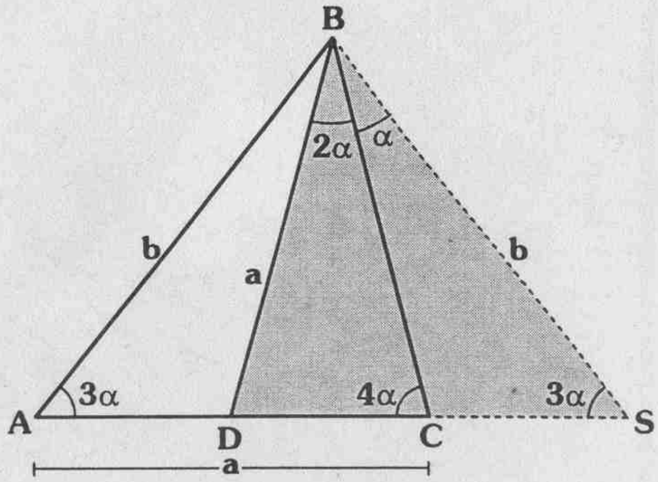
$$\therefore \quad m\sphericalangle AEB = 90^\circ$$

RESOLUCIÓN Nº 15

- Nos piden:

$$m\sphericalangle BAC$$

$$m\sphericalangle BAC = 3\alpha$$



- Se prolonga $\overline{AC}$ hasta S tal que:

$$m\sphericalangle ASB = 3\alpha$$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle CBS = \alpha$$

- ΔABS : isósceles $\Rightarrow$ $AB=BS=b$
- $\Delta BAC \cong \Delta SBD$ (LAL)

$\Rightarrow$ $m\sphericalangle BSD = m\sphericalangle ABC = 3\alpha$

- ΔABC : $3\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 180°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 18°$

$\therefore$ $\mathbf{m\sphericalangle BAC = 54°}$

❖❖❖❖❖

Enunciado de los Problemas Propuestos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

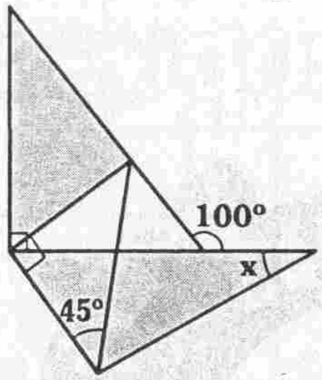
Editorial CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

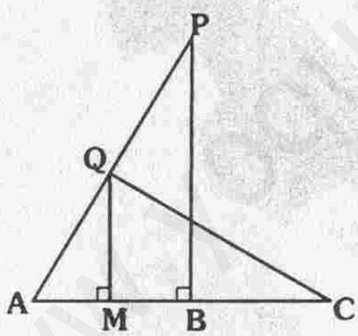
Las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.



A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 25°

PROBLEMA Nº 2

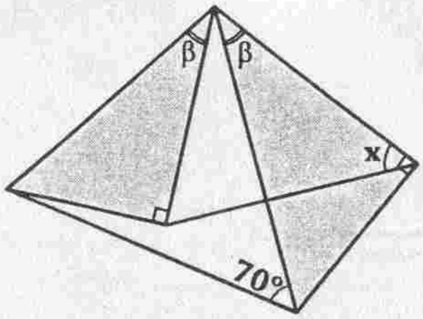
En el gráfico, las regiones QMC y ABP son congruentes $AM = MB = 4$ calcule BC.



A) 20
B) 8
C) 16
D) 12
E) 8

PROBLEMA Nº 3

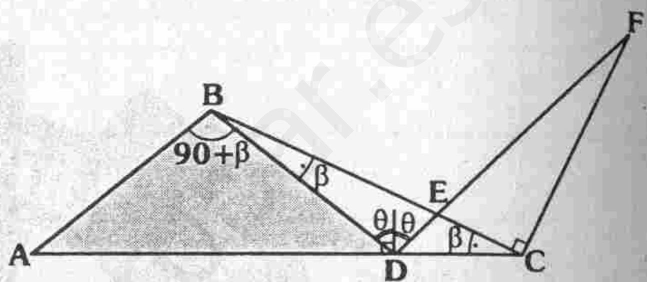
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Calcule x.



A) 70°
B) 40°
C) 35°
D) 80°
E) 50°

PROBLEMA Nº 4

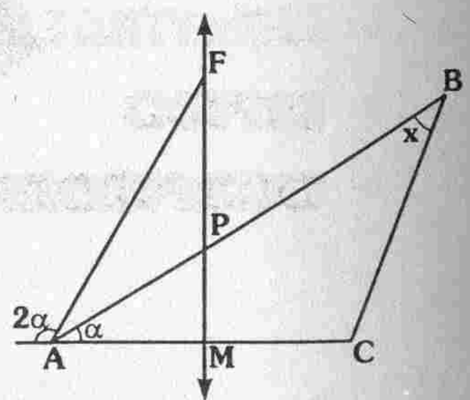
En el gráfico, AC=10 y FC=6 calcule el perímetro de la región sombreada.



A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, $\overleftrightarrow{FM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, $\overline{AF} // \overline{BC}$ y $BP = 2(PM)$. Calcule x.



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 25°
E) 15°

PROBLEMA Nº 6

En el triángulo ABC se traza la mediana BM, si $AB = 2$ y $BC = 8$. Calcule el valor entero de BM.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 7

En el triángulo ABC, se ubica M punto medio de $\overline{AB}$ y P en $\overline{BC}$ es tal que:

$$PC = 3(BP) = 3(PM)$$

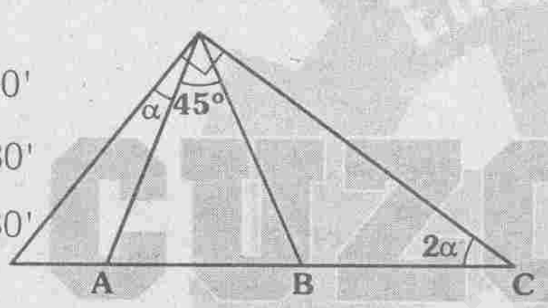
Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 60° C) 90°
D) 75° E) 120°

PROBLEMA Nº 8

En el gráfico, $AB = BC$, calcule α.

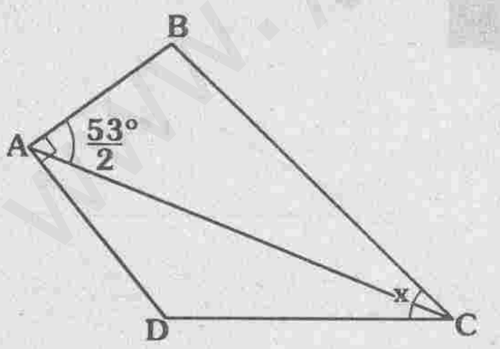
A) 15°
B) 18°30'
C) 26°30'
D) 22°30'
E) 16°



PROBLEMA Nº 9

En el gráfico, $AC = \sqrt{5}(AB) = \sqrt{5}(AD)$. Calcule x.

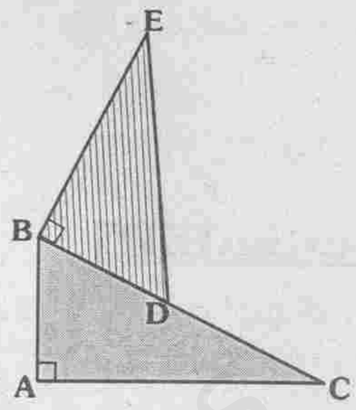
A) 30°
B) 45°
C) 53°
D) 37°
E) 60°



PROBLEMA Nº 10

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, si $AB = 8$ y $CD = 9$. Calcule EB.

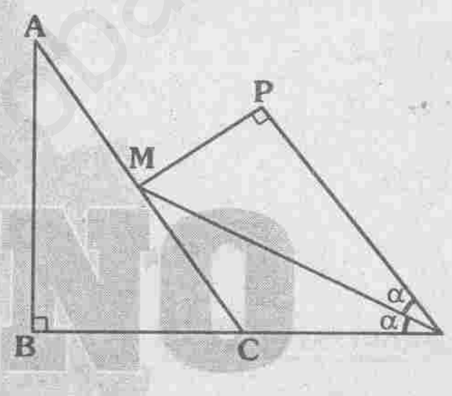
A) 15
B) 17
C) 16
D) 14
E) 13



PROBLEMA Nº 11

En el gráfico, $AM = MC$ y $AB = 8$, calcule PM.

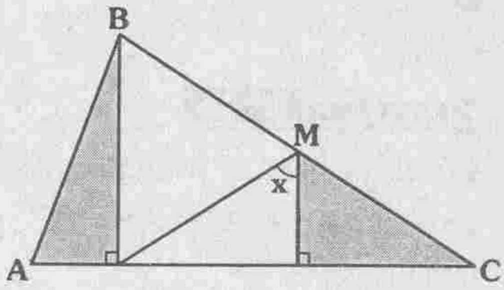
A) 8
B) 4
C) 2
D) 5
E) 6



PROBLEMA Nº 12

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $BM = MC$, calcule x.

A) 76°
B) 74°
C) 53°
D) $\dfrac{143°}{2}$
E) $\dfrac{127°}{2}$



PROBLEMA Nº 13

En el triángulo LMN se traza la perpendicular MP a la bisectriz interior MP a la bisectriz interior LQ. Si $2(LM) = LN$ y

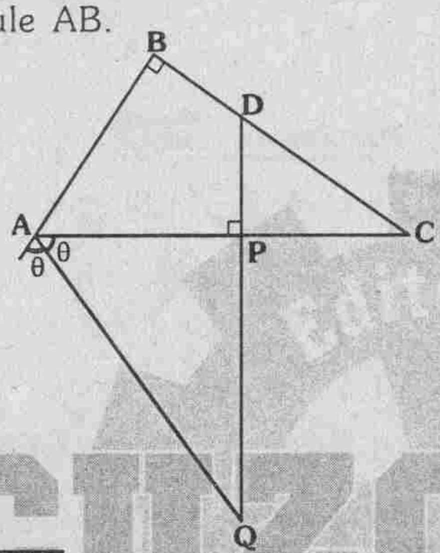
LP = 9 , calcule PQ.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4,5 E) 5

PROBLEMA Nº 14

En el gráfico, AQ = 12 , BD + PQ = 15 y AB = AP, calcule AB.



A) 10

B) 8

C) 7,5

D) 7,2

E) 6

PROBLEMA Nº 15

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la mediana CM, MC = BC y AH = HB. Calcule m∢MCB .

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) $\frac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 16

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, si AQ = PC , AP = BC y QP = PB , calcule x.

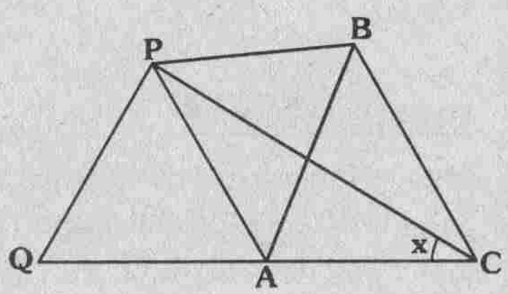
A) 10°

B) 15°

C) 20°

D) 30°

E) 40°



PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, $\overline{AB} // \overline{CD}$, AB = CE y BC = 6 , calcule ED.

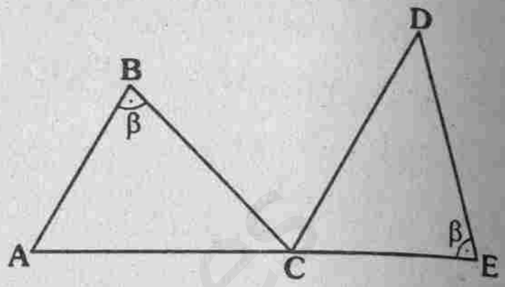
A) 3

B) 4,5

C) 6

D) 9

E) 8



PROBLEMA Nº 18

En el gráfico, BC = 5 y CD = 4 . Calcule x.

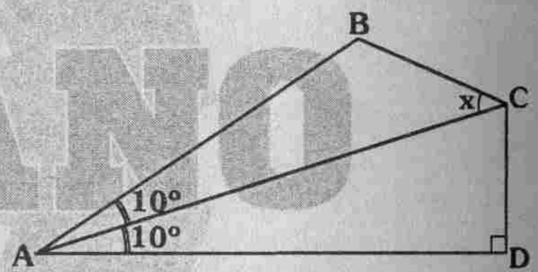
A) 37°

B) 27°

C) 33°

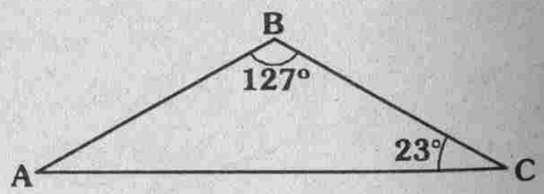
D) 43°

E) 47°



PROBLEMA Nº 19

En el gráfico AC = 16 , calcule AB + BC



A) $4(2\sqrt{3}+1)$ B) $3(\sqrt{3}+1)$

C) $2\sqrt{3}+1$ D) $2(4\sqrt{3}+5)$

E) $6+\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 20

En el gráfico, AQ = QP y QH = 2,1 .

Calcule AC.

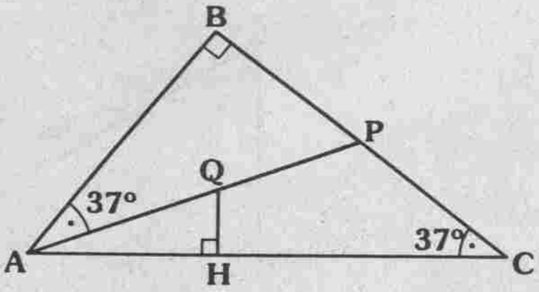
A) 25

B) 20

C) 35

D) 15

E) 7,5



PROBLEMA Nº 21

Del gráfico, $AB=\sqrt{39}$.

Calcule BD.

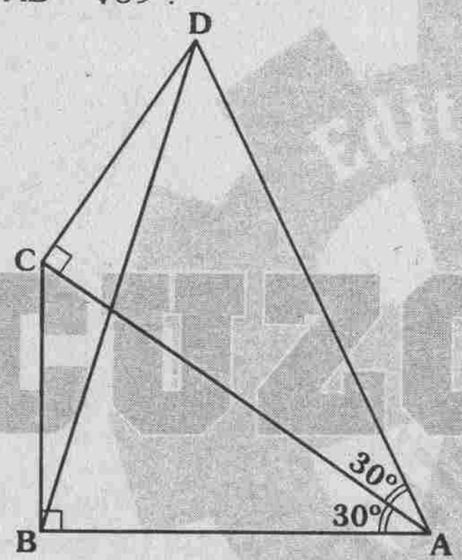
A) $13\sqrt{3}$

B) $6\sqrt{3}$

C) 13

D) $\frac{13}{3}\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{13}$



PROBLEMA Nº 22

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD, tal que $CD=4(BD)$,

$m\sphericalangle ABC=127°, m\sphericalangle DAC=45°-m\sphericalangle BCA$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 16° B) 30° C) 15°

D) 37°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $AB=PC$, calcule x.

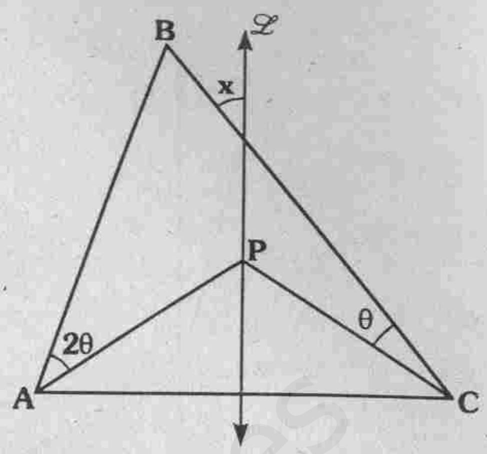
A) 30°

B) $\frac{45°}{2}$

C) 60°

D) $\frac{53°}{2}$

E) $\frac{37°}{2}$



PROBLEMA Nº 24

En el gráfico, $AM=MC$, $AB=4$ y $BC=6$. Calcule HM

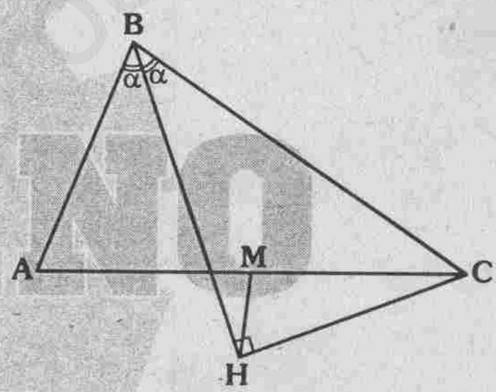
A) 1

B) 1,5

C) 2

D) 4

E) 3



PROBLEMA Nº 25

En el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{BC}$ iinterseca a $\overline{AC}$ en Q, tal que $AB=2(QC)$ y $m\sphericalangle ACB=45°$. Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 37° B) $\frac{53°}{2}$ C) 16°

D) $\frac{37°}{2}$ E) 30°

PROBLEMA Nº 26

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

Si $AP=BC=PD$, calcule x.

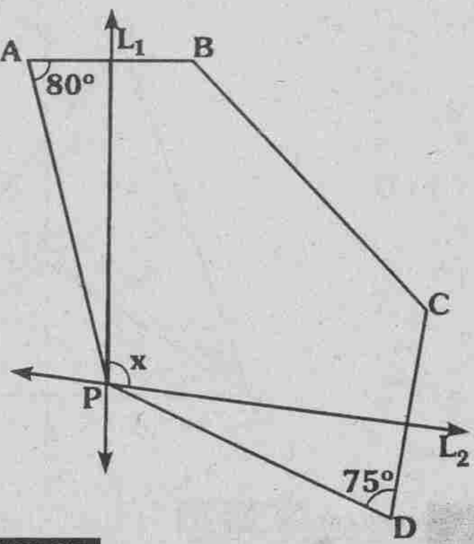
A) 90°

B) 85°

C) 95°

D) 105°

E) 115°



PROBLEMA Nº 27

En el gráfico, $PC = 2(AP)$.

Calcule x.

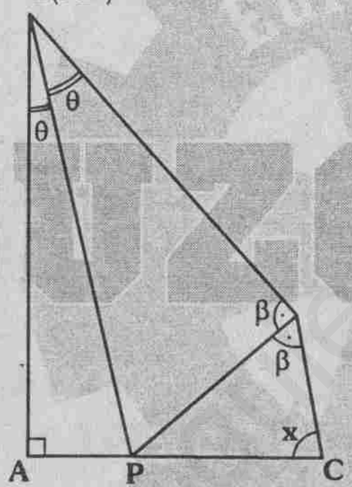
A) 53°

B) 60°

C) 54°

D) 73°

E) 30°



PROBLEMA Nº 28

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y la altura $\overline{BH}$, $\overline{AM} \cap \overline{BH} = \{P\}$. Si $AP = PM$ y $m\measuredangle ABH = 37°$.

Calcule $m\measuredangle MAH$.

A) $\dfrac{37°}{2}$ B) $\dfrac{53°}{2}$ C) 16°

D) 18° E) $\dfrac{45°}{2}$

PROBLEMA Nº 29

En el gráfico: $BP = 3$ y $m\measuredangle MAC = 2(m\measuredangle BAM)$, Halle MN.

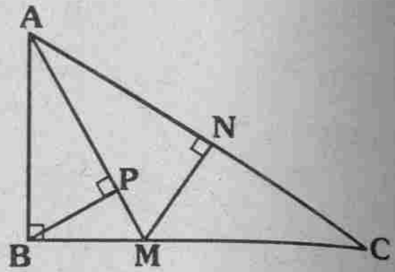
A) 1,5

B) 3

C) 6

D) 4,5

E) $3\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, AD=BC. Calcule θ.

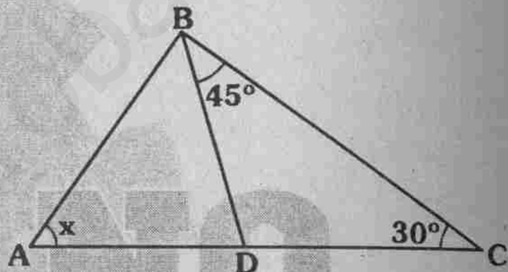
A) 30°

B) 45°

C) 50°

D) 60°

E) 40°



PROBLEMA Nº 31

Dos lados de un triángulo miden 2 y 10, calcule la longitud de la mediana relativa al tercer lado, si es entero.

A) 5 B) 4 C) 8

D) 10 E) 3

PROBLEMA Nº 32

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD.

Si $AB = CD$ y

$$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA) = 40°$$

Calcule $m\measuredangle DBC$.

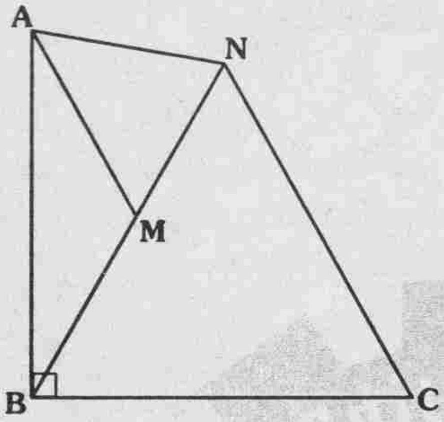
A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 25°

PROBLEMA Nº 33

En el gráfico: $AB = BC = CN$; $BM = MN$;
$AM = 5$ y $BM = 4$.

Calcule AN.



A) $\sqrt{19}$

B) $\sqrt{13}$

C) $\sqrt{14}$

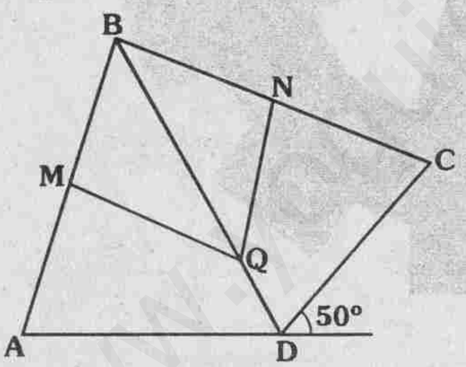
D) $\sqrt{21}$

E) $\sqrt{17}$

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, $AD = DC$; $BQ = CD + QD$; M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule $m\sphericalangle MQB$.



A) 50°

B) 25°

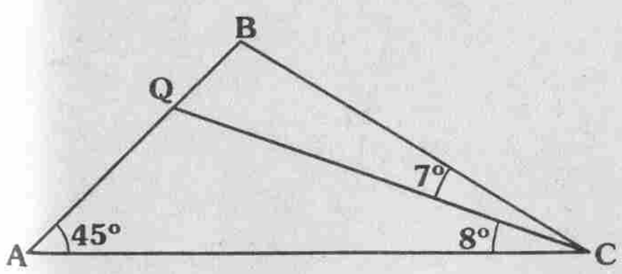
C) 60°

D) 65°

E) 55°

PROBLEMA Nº 35

En el gráfico, $AC = 12\sqrt{2}$, calcule QB.



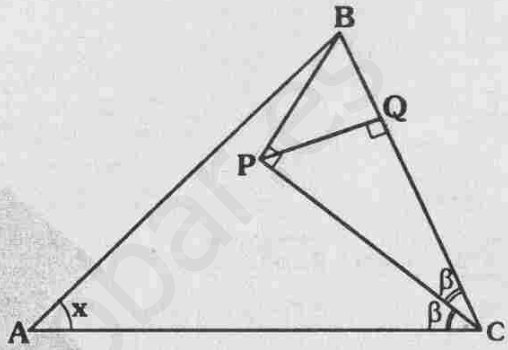
A) $2-\sqrt{3}$ B) $8-3\sqrt{3}$

C) $9-4\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}-4$

E) $4\sqrt{3}-5$

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, $AB = 4(PQ)$, calcule x.



A) 30°

B) 37°

C) 14°

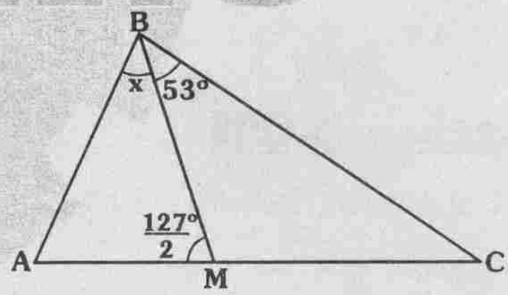
D) 53°

E) 28°

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, $AB = 1$ y $BC = 5$.

Calcule x.



A) 37°

B) 53°

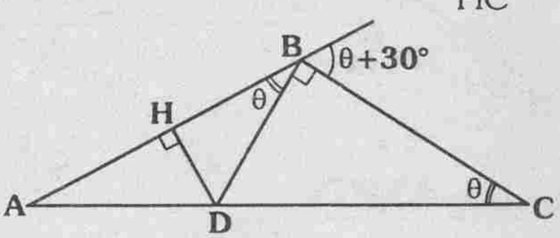
C) 30°

D) 39°/2

E) 127°/3

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, $BD = 4$, calcule $\dfrac{BA}{HC}$.

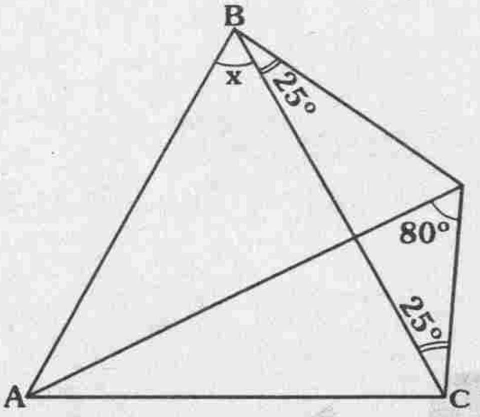


A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$ E) $2\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, $AB = BC$, calcule x.



A) 70°

B) 50°

C) 100°

D) 80°

E) 65°

PROBLEMA Nº 40

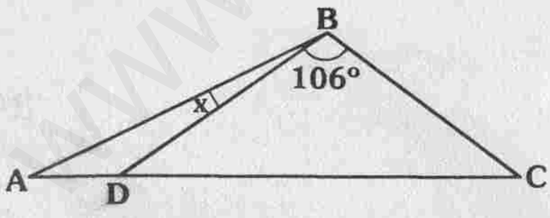
Se tiene el triángulo ABC, $AB = 10$ y $BC = 20$, se traza la bisectriz interior BD, si $m\sphericalangle ABD = 53°$, calcule la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a $\overline{BD}$.

A) 3 B) 2 C) 5

D) 4 E) 1

PROBLEMA Nº 41

Del gráfico, BD=BC, DC=8 y AB=6. Calcule x.



A) 4°

B) 5°

C) 8°

D) 7°

E) 15°

PROBLEMA Nº 42

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{CN}$, tal que $AN = 3(NB)$ y $m\sphericalangle CAB = 2(m\sphericalangle NCB)$. Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 30° B) 26,5° C) 53°

D) 45° E) 37°

PROBLEMA Nº 43

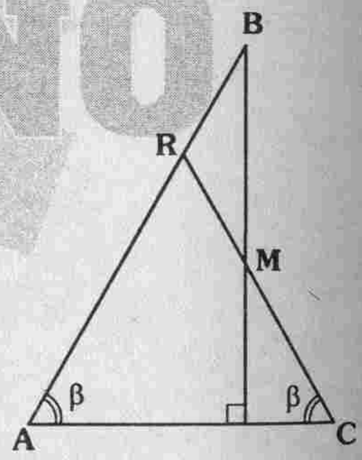
En el triángulo ABC, se cumple que $AB + BC = 14$, M es punto medio de $\overline{AC}$ y H es el pie de la perpendicular trazada desde C a la bisectriz exterior por B. Calcule MH.

A) 7 B) 14 C) 3,5

D) 10 E) 5

PROBLEMA Nº 44

En el gráfico, BM=MH y $RM = 3$. Calcule AB.



A) 9

B) 12

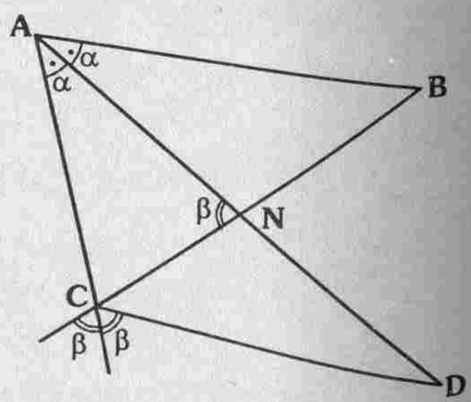
C) 10

D) 8

E) 6

PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, $BN = 6$, calcule CD.



A) 3

B) 4,5

C) 6

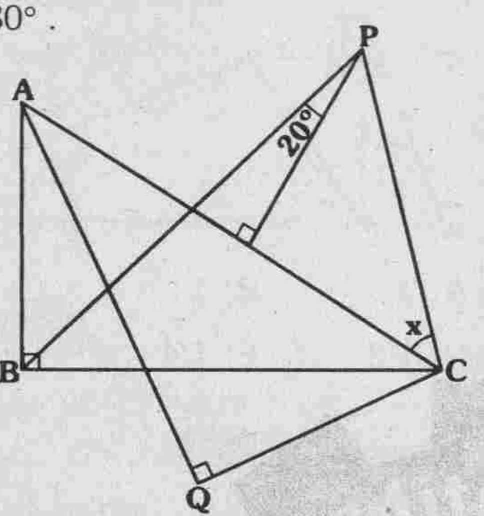
D) 9

E) 12

PROBLEMA Nº 46

Según el gráfico, $BQ = AM = MC$ y $m\measuredangle PBQ = 80°$.

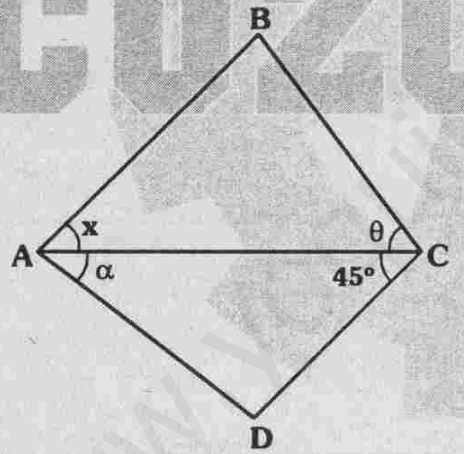
Calcule x.



A) 45°
B) 60°
C) 40°
D) 25°
E) 35°

PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, $BC = AD$ y $\alpha + \theta = 90°$.
Calcule x.



A) 60°
B) 30°
C) 45°
D) 37°
E) 53°

PROBLEMA Nº 48

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle ABC = 70°$, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente, de modo que $AB = NC$, luego se traza la altura AH.

Calcule $m\measuredangle HMN$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 50°

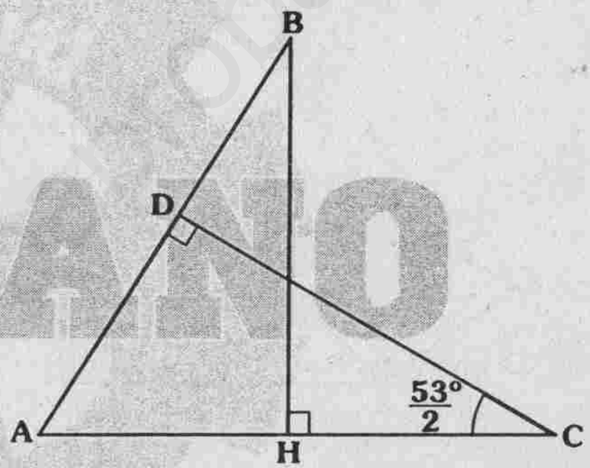
PROBLEMA Nº 49

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle ABC = 100°$, en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se ubican M y N respectivamente, tal que $AM = MC$ y $AN = NB + BC$. Calcule $m\measuredangle ANM$.

A) 40° B) 50° C) 80°
D) 100° E) 45°

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, $HC = 2(AH)$, calcule $\dfrac{BD}{AD}$.



A) 3/2 B) 2/3 C) 4/3
D) 3/4 E) 1

PROBLEMA Nº 51

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica P, tal que $m\measuredangle PAC = 90°$, $PA = AC$ y $5(AB) = 3(PB)$.

Calcule $m\measuredangle APB$.

A) 37° B) $\dfrac{69°}{2}$ C) 30°

D) $\dfrac{53°}{2}$ E) $\dfrac{75°}{2}$

PROBLEMA Nº 52

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM tal que $m\sphericalangle MAB = 2(m\sphericalangle CAM)$ y $m\sphericalangle ABC = 90° + m\sphericalangle MAC$.

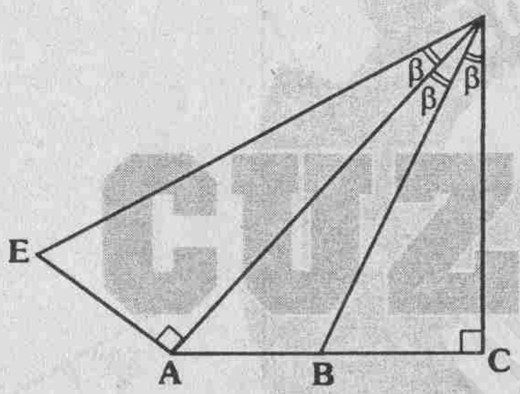
Calcule $m\sphericalangle MAC$.

A) 15° B) 30° C) 37°

D) 18°30' E) 22°30'

PROBLEMA Nº 53

Según el gráfico, $AE = 8$, calcule AB.

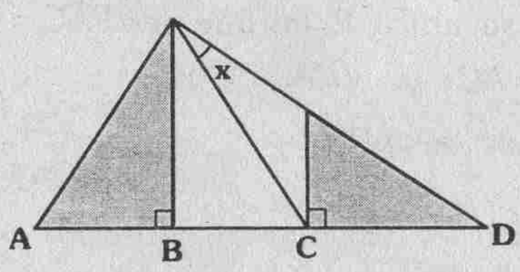


A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $CD = 2(AB)$. Calcule x.

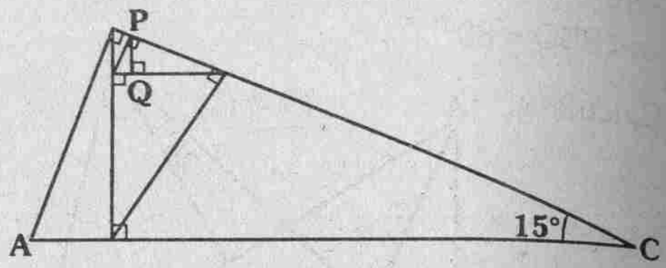


A) 8° B) 10° C) 15°

D) 18°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 55

En el gráfico, AC=32, calcule PQ.

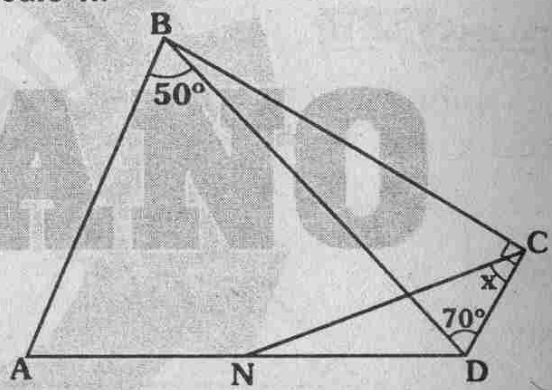


A) 2 B) 1 C) 4

D) 1/2 E) 1/4

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico, $AN = ND$ y $4(AB) = 3(BD)$. Calcule x.



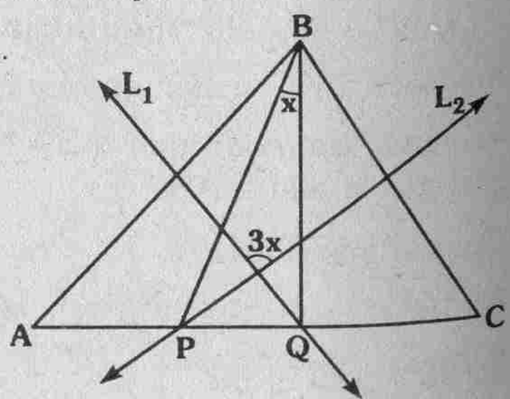
A) 30° B) 32° C) 33°

D) 34° E) 35°

PROBLEMA Nº 57

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule x.



A) 45°

B) 30°

C) 36°

D) 18°

E) 40°

PROBLEMA Nº 58

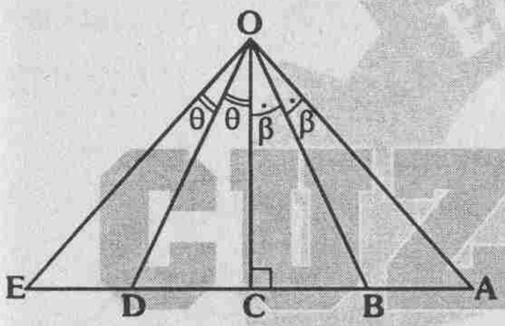
Se tiene el triángulo ABC, se ubica E punto medio de $\overline{AB}$ y D en la prolongación de $\overline{CB}$, tal que $m\sphericalangle BDE = m\sphericalangle ACB$. Si $AC = 10$. Calcule ED.

A) 2,5 B) 5 C) 7,5

D) 10 E) 20

PROBLEMA Nº 59

En el gráfico: $4(AB) = 5(BC)$ y $ED = \sqrt{2}(CD)$. Calcule $m\sphericalangle BOD$



A) 30° B) 37° C) 40°

D) 41° E) 74°

PROBLEMA Nº 60

Se tiene el triángulo ABC; se ubican P en $\overline{AB}$, Q en $\overline{AC}$ y R en $\overline{BC}$, tal que $AP = QC$, $RC = AQ$ y $PQ = QR$. Si $m\sphericalangle PQR = 2(m\sphericalangle ABC)$. Calcule $m\sphericalangle ABC$

A) 30° B) 36° C) 18°

D) 20° E) 45°

Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 61 [1er. Seminario 2008-II]

En el triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$ se traza la bisectriz interior AS, desde M se traza $\overline{SM}$ perpendicular a la bisectriz exterior trazada desde B, M en dicha bisectriz. Si $AB = a$ y $BM = b$.

Calcule BS.

A) $a+b$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $a-b$

D) $a-2b$ E) $a+2b$

PROBLEMA Nº 62 [1er. Seminario 2008-II]

En el triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$ se cumple $m\sphericalangle ABC = 20°$, sobre $\overline{BC}$ se ubica F, de modeo que $BF = AC$.

Calcule $m\sphericalangle BAF$.

A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 63 [1er. Seminario 2008-II]

Dado el triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C)$, se traza la altura BP(P en $\overline{AC}$). Si $AB = m$ y $AC = n$.

Calcule AP.

A) $\frac{m+n}{2}$ B) $\frac{m+2n}{2}$ C) $\frac{n-m}{2}$

D) $\frac{2m+n}{2}$ E) $\frac{3m-n}{2}$

PROBLEMA Nº 64 [1er. Seminario 2008-II]

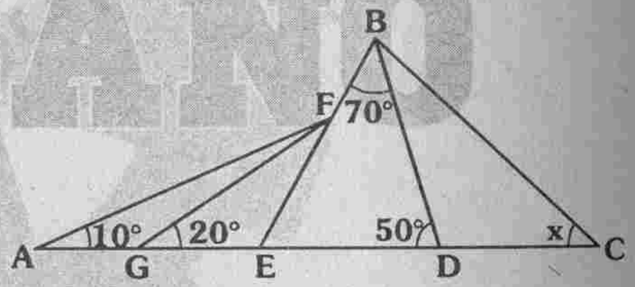
En un triángulo acutángulo ABC, $m\sphericalangle B = 2(m\sphericalangle A)$ y la ceviaba CF es tal que $BC = AF$. Demostrar que:

$$m\sphericalangle ACF = m\sphericalangle BAC$$

PROBLEMA Nº 65 [1er. Seminario 2008-II]

En el gráfico, $AE = EC$ y $GE = ED$.

Calcule x.



A) 60° B) 45° C) 30°

D) 22,5° E) 20°

PROBLEMA Nº 66 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, la $m\sphericalangle BAC = 25°$, $m\sphericalangle ACB = 5°$, se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que $AD = BD$, si $m\sphericalangle ABD = 85°$.

Calcule $m\sphericalangle BDC$.

A) 50° B) 60° C) 85°

D) 65° E) 80°

PROBLEMA Nº 67 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se ubica M tal que $\overline{AM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AB}$ luego se traza la mediana AQ del triángulo ABC y la mediana $\overline{QS}$ del triángulo AQM, si $m\sphericalangle BAS = 56°$.

Calcule $m\sphericalangle SQM$.

A) 14° B) 18° C) 28°
D) 45° E) 56°

PROBLEMA Nº 68 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC(AB = BC) se traza la bisectriz interior AF; luego en el triángulo AFC, se trazan las bisectrices interior y exterior del ángulo AFC, cortando en J y L a $\overline{AC}$, si AF = b.

Calcule JL.

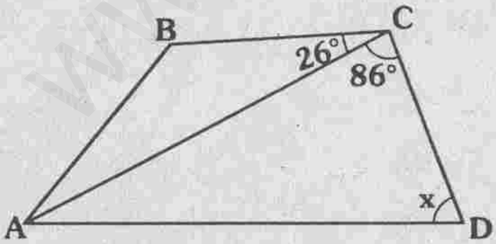
A) b B) $b\sqrt{2}$ C) $b\sqrt{3}$
D) $\dfrac{3b}{2}$ E) 2b

PROBLEMA Nº 69 [Seminario 2008-I]

En el gráfico, AB = BC = CD

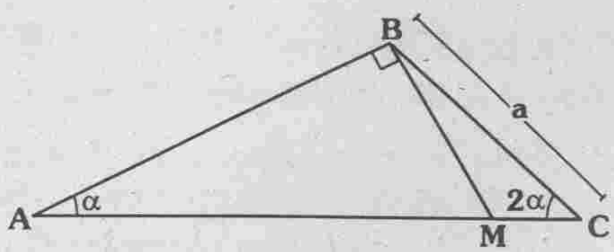
Calcule x.

A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 58°
E) 65°



PROBLEMA Nº 70 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, C está en la prolongación de $\overline{AM}$, ¿entre que valores está AC?



A) $\left\langle 2a; \dfrac{5a}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{5a}{2}; 3a \right\rangle$

C) $\left\langle \dfrac{14a}{5}; \dfrac{7a}{2} \right\rangle$ D) $\langle 2a; 3a \rangle$

E) $\left\langle 2a; \dfrac{13a}{4} \right\rangle$

PROBLEMA Nº 71 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM, luego se traza $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{AC}$ (N en $\overline{AB}$) y la bisectriz ND del ángulo MNA (D en $\overline{AC}$).

Si: $m\sphericalangle ABC - m\sphericalangle ACB = 80°$ y

$m\sphericalangle MDN = m\sphericalangle BMD$.

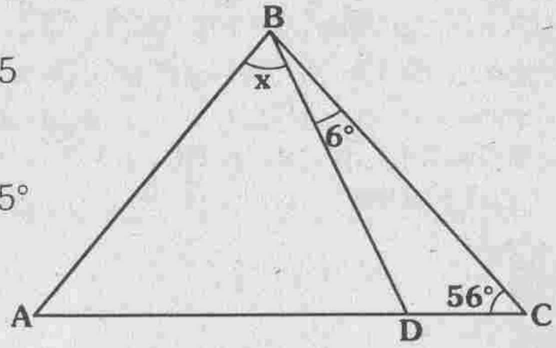
Calcule $m\sphericalangle NDM$.

A) 60° B) 56° C) 66°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 72 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico AD = BC, calcule x.

A) 60°
B) 61,5
C) 62°
D) 62,5°
E) 56°



PROBLEMA Nº 73 [1er. Seminario 98-II]

Dado el triángulo isósceles ABC(AB=BC),

a) Sobre la base se ubica M, demostrar que la suma de distancias de M sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es igual a una de las alturas congruentes del triángulo isósceles.

b) Si el punto M se encuentra en la prolongación de la base, demuestre que la longitud de una de las alturas congruentes es igual a la diferencia de distancias a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

PROBLEMA Nº 74 [1er. Seminario 98-II]

Dos rectas paralelas L_1 y L_2 son cortadas por otras rectas paralelas L_3 y L_4 en los puntos A, B, C y D; siendo $\{A\} = \overleftrightarrow{L_2} \cap \overleftrightarrow{L_3}$. Si las distancias de A a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_4}$ son "a" y "b" $(a < b)$; $\{D\} = \overleftrightarrow{L_2} \cap \overleftrightarrow{L_4}$, siendo F la intersección de las bisectrices de los ángulos en A y D.

Calcule la distancia de F a $\overleftrightarrow{L_1}$.

A) $\dfrac{a+b}{2}$ B) $a-b$ C) $\dfrac{2a+b}{2}$

D) $\dfrac{2a-b}{2}$ E) $\dfrac{2a-b}{3}$

PROBLEMA Nº 75 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, la bisectriz interior AM corta a la altura BH en O. Sobre $\overline{OM}$ se ubica un punto de tal forma que las distancias de dicho punto al cateto BC y a la altura BH suman 7. Si $AB = 14$. Calcule AC.

A) 25 B) $14\sqrt{2}$ C) 38

D) 28 E) 30

PROBLEMA Nº 76 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $AC = CD$, $BM = MD$ y $BC = 8$.

Calcule MN.

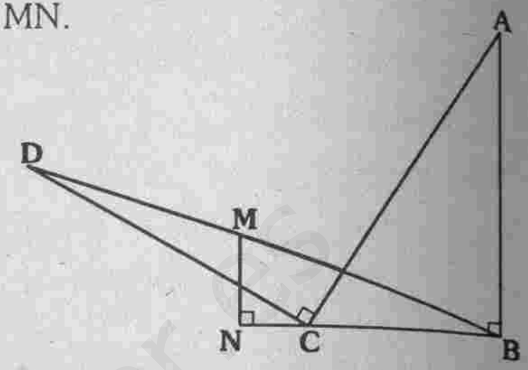
A) 2

B) $2\sqrt{2}$

C) 4

D) $4\sqrt{2}$

E) 5



PROBLEMA Nº 77

Por el vértice B del triángulo ABC se traza $\overline{BP}$ perpendicular a la bisectriz de A, luego por P. Se traza la paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{BC}$ en Q. Calcule la medida del segmento PQ. Sabiendo que:

$$AB = 6\mu \quad y \quad AC = 8\mu$$

A) 1μ B) 2μ C) 3μ

D) 4μ E) 5μ

PROBLEMA Nº 78 [1er. Seminario 97-II]

En el gráfico, $AB = DC$. Calcule x

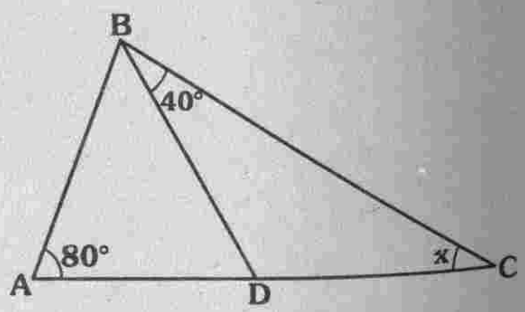
A) 22,5°

B) 30°

C) 40°

D) 45°

E) 50°



PROBLEMA Nº 79 [1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $AC = AD = BD$

Calcule x.

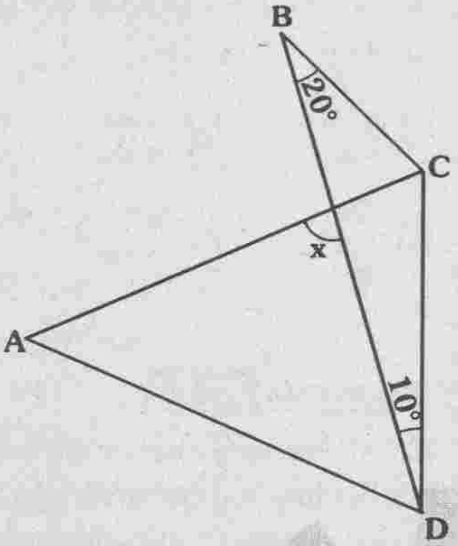
A) 60°

B) 65°

C) 70°

D) 75°

E) 80°



PROBLEMA Nº 80 [1er. Seminario 2008-I]

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que:

$m\sphericalangle BAC = 20°$, $m\sphericalangle CAD = 10°$,
$m\sphericalangle ACB = 50°$ y $m\sphericalangle ACD = 30°$

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 90° B) 75° C) 45°
D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 81 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $AB = CD$; si $m\sphericalangle BAD = 100°$ y $m\sphericalangle BCA = 20°$.

Calcule $m\sphericalangle CBD$

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 18° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 82 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, se cumple que $AB = 6$, $BC = 7$ y $AC = 8$. Por el vértice B, se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ a la bisectriz interior del ángulo A y $\overline{BQ}$ a la bisectriz exterior del ángulo C. ¿Cuánto mide $\overline{PQ}$?

A) 3,5 B) 4 C) 4,5
D) 5 E) 5,5

PROBLEMA Nº 83 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BQ, tal que:

$AB = QC$; $m\sphericalangle A = 40°$ y $m\sphericalangle C = 30°$

Calcule $m\sphericalangle QBC$.

A) 55° B) 60° C) 45°
D) 30° E) 50°

PROBLEMA Nº 84 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, $\overline{BM}$ es mediana, N es punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si $PM = 3\mu$ y $m\sphericalangle MBC = 90°$. Halle AC

A) 18μ B) 12μ C) 10μ
D) 15μ E) 6μ

PROBLEMA Nº 85 [1er. Seminario 2005-II]

ABC es un triángulo en el que $m\sphericalangle C = 75°$ y la altura $\overline{BH}$, mide la mitad de $\overline{AC}$. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 75° B) 37° C) 30°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 86 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC (recto en B), se cumple $m\sphericalangle C = 15°$ se traza la altura BH y la mediana BM. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$

que al prolongarse, intersea en P a $\overline{BC}$. Si $AC = b$. Calcule FP.

A) $\frac{b}{3}$ B) $\frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}$

C) $\frac{b(\sqrt{3}+1)}{2}$ D) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$

E) $\frac{b}{2}$

PROBLEMA Nº 87 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC acutángulo se trazan las bisectrices interiores desde A y C, luego desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices BP y BQ respectivamente. Si $\frac{PQ}{AC} = \frac{1}{4}$

Halle la razón entre el perímetro del triángulo ABC y PQ.

A) 10 B) 2 C) 3

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 88 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, sobre AC se tiene el punto F de modo que $AF = 3(FC)$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N, si $AM = 17$. Calcule MN.

A) 1 B) 2 C) 3/2

D) 9/5 E) 17/7

PROBLEMA Nº 89 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B y $AB < BC$. Se ubica D en $\overline{BC}$ de modo que $DC = AB$ y $AB = a$. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

A) a B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ C) 2a

D) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{a}{2}$

PROBLEMA Nº 90 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas interiores BD y BE de modo que: $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle EBC)$, $AB = DC$ y $BD = BE$. Calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 45° B) $\frac{45°}{2}$ C) 37°

D) $\frac{53°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 91 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo isósceles $ABC(AB = BC)$ sea P en la prolongación de $\overline{AB}$, de modo que $BP = AC$ y $m\measuredangle BPC = 30°$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 60° B) 75° C) 30°

D) 72° E) 45°

PROBLEMA Nº 92 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo $ABC(AB = BC)$ sea P en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $BP=AC$ y $2(m\measuredangle A) - m\measuredangle BPC = 60°$.

Calcule $m\measuredangle B$.

A) 5° B) 7° C) 10°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 93 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle A = 30^\circ$, se traza la ceviana interior CD de modo que CB=BD y CD=AB.

Calcule $m\sphericalangle DCA$.

A) 5° B) 7,5° C) 9°
D) 10° E) 12°

PROBLEMA Nº 94 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) se ubica D en la región interior de modo que $m\sphericalangle BAD = 50^\circ$, $m\sphericalangle DAC = 30^\circ$ y $m\sphericalangle DCB = 25^\circ$.

Calcule $m\sphericalangle DBC$.

A) 5° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 10°

PROBLEMA Nº 95 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles $ABC(\overline{AB} \cong \overline{BC})$, se ubican M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, tal que:

$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle BCN = 30^\circ$ y
$m\sphericalangle MBC = 70^\circ$

Calcule $m\sphericalangle BMN$.

A) 60° B) 65° C) 75°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 96 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC (AB = AC), se construye exteriormente el triángulo isósceles APB, tal que:

$AP = PB = BC$ y
$m\sphericalangle APB = 2(m\sphericalangle ABC)$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 60° B) 80° C) 70°
D) 75° E) 65°

PROBLEMA Nº 97 [1er. Seminario 2007-II]

Se ubica M en el triángulo ABC ($M \in \overline{AC}$), tal que:

$$\frac{m\sphericalangle ABM}{5} = \frac{m\sphericalangle MBC}{3} = \frac{m\sphericalangle BAC}{2}$$

y AM = BC. Calcule $m\sphericalangle BCA$

A) 15° B) 30° C) 35°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 98 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las cevianas interiores $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ de modo que AB = DC y BD = BE. Si $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle EBC)$.

Calcule $m\sphericalangle ABD$.

A) 20° B) 22,5° C) 24°
D) 25° E) 26°

PROBLEMA Nº 99 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo escaleno ABC, se cumple:

AB = 3u y BC = 10u

Halle el menor valor entero de la longitud de la mediana relativa a $\overline{AC}$.

A) 3μ B) 4μ C) 5μ
D) 6μ E) 7μ

PROBLEMA Nº 100 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que:

$AM = BC = 9\mu$ y

$m\measuredangle ABM = m\measuredangle BAC + m\measuredangle CBM$

Calcule AB.

A) 4,9 B) 8 C) 9

D) 13,5 E) 18

PROBLEMA Nº 101 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Si $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$, entonces demuestre que: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$

PROBLEMA Nº 102 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $LM = LK$, $QM = KP$ y $m\measuredangle MKP = mKNP$, entonces $m\measuredangle RQN$ es:

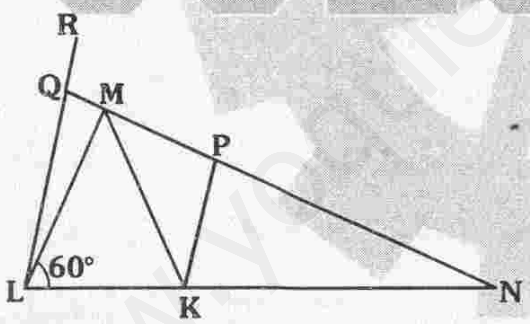
A) 100°

B) 110°

C) 115°

D) 120°

E) 135°



PROBLEMA Nº 103 [1er. Seminario 2007-II]

Sobre los dos lados AB y BC del triángulo ABC se construye exteriormente los triángulos rectángulos isósceles ABP y CBQ $AB = BP$ y $CB = BQ$. Por B se traza una recta perpendicular a $\overline{PQ}$, la cual corta a $\overline{AC}$ en M. Si $PQ = 8\mu$, calcule BM.

A) 8μ B) 6μ C) 4μ

D) 9μ E) 12μ

PROBLEMA Nº 104 [1er. Seminario 2007-II]

En el exterior y relativo a $\overline{AC}$ del triángulo acutángulo ABC se ubica el punto F y en las prolongaciones de $\overline{FA}$ y $\overline{FC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $PB = BC$, $QB = AB$ y los ángulos PBC y QBA son rectos entonces la medida del ángulo AFC.

A) 45° B) 60° C) 75°

D) 53° E) 90°

PROBLEMA Nº 105

En el triángulo ABC, obtuso en B, se traza la altura BH y la ceviana BP $(P \in \overline{CH})$, tal que $AP = BC$, $m\measuredangle BCA = 2(m\measuredangle PBH)$ y $m\measuredangle ABH = 3(m\measuredangle PBH)$.

Calcule $m\measuredangle PBH$.

A) 16° B) 14° C) 15°

D) 18° E) 22°

PROBLEMA Nº 106 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AF}$. Si $\overline{AF} \cong \overline{BC}$,

$m\measuredangle ABC = 4(m\measuredangle BAF)$ y

$2(m\measuredangle FBC) = 3(m\measuredangle BAF)$

entonces $m\measuredangle BCA$ es:

A) 35° B) 40° C) 45°

D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 107 [1er. Seminario 2007-II]

En el interior del triángulo rectángulo ABC se ubica P. Si $\overline{AP} \cong \overline{BC}$, $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ y $m\measuredangle PAB = m\measuredangle ACP$, entonces $m\measuredangle PCA$ es:

A) 20° B) 22,5° C) 30°

D) 36° E) 40°

PROBLEMA Nº 108 [1ra. Prueba C. 2007-I]

Sea R un punto interior al triángulo equilátero ABC de manera que:

$$m\sphericalangle BAR = \frac{m\sphericalangle CBR}{3} = \frac{m\sphericalangle ACR}{5}$$

Calcule $m\sphericalangle BAR$.

A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 109 [1ra. Prueba C. 2006-I]

Se tiene el triángulo ABC, se traza la mediana BD, la prolongación de la mediana AE del triángulo ABD interseca a $\overline{BC}$ en F, entonces se cumple:

A) $FC = \frac{1}{2}(BF)$ B) $FC = BF$

C) $FC = 2(BF)$ D) $FC = 3(BF)$

E) $FC = 4(BF)$

PROBLEMA Nº 110 [1ra. Prueba C. 2006-I]

Se tiene el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en E, en dicha mediatriz se ubica P (P en la región interior del triángulo) de manera que $AB = AP = PC$, si:

$$\frac{m\sphericalangle B}{4} = \frac{m\sphericalangle BAP}{2} = m\sphericalangle BCP$$

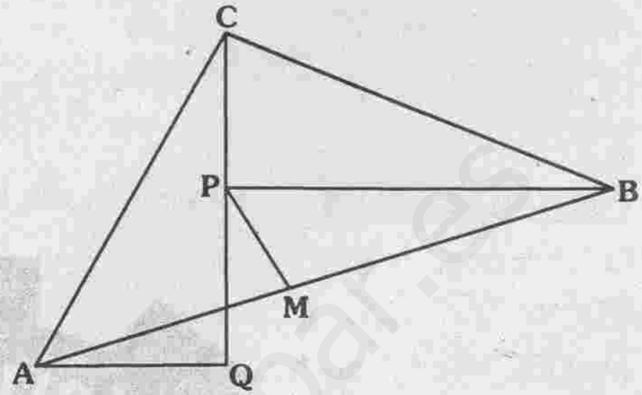
Calcule $m\sphericalangle BCP$.

A) 22° B) 23° C) 24°

D) 25° E) 26°

PROBLEMA Nº 111 [1ra. Prueba C. 2004-II]

En el gráfico, M es punto medio de $\overline{AB}$. Los segmentos BP y AQ son perpendiculares al segmento CQ. Si MP=L, entonces la longitud de $\overline{MQ}$ es:



A) $\frac{L}{3}$ B) $\frac{L}{2}$ C) L

D) $\frac{2L}{3}$ E) $\frac{3L}{4}$

PROBLEMA Nº 112 [1ra. Prueba C. 2004-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $\overline{AB} \cong \overline{PC}$. Si:

$$\frac{m\sphericalangle ABP}{7} = \frac{m\sphericalangle PBC}{1} = \frac{m\sphericalangle BCP}{2},$$

entonces, $m\sphericalangle ABC$ es:

A) 60° B) 70° C) 75°

D) 80° E) 90°

PROBLEMA Nº 113 [1er. Seminario 2001-II]

Dado el triángulo ABC, donde AB=2, 5; BC = 8,5 ; se traza la mediana BR de modo que BR pertenece los naturales. Calcule BR.

A) 7 B) 4 C) 2

D) 8 E) 7

PROBLEMA Nº 114 [1er. Seminario 2007-I]

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM. Si $m\sphericalangle ABM = 105°$ y $m\sphericalangle MBC = 30°$.

Calcule $m\sphericalangle C$.

A) 15° B) 18° C) 25°

D) 30° E) 45°

PROBLEMA Nº 115 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana BQ. Si $\overline{AB} \cong QC$ y $m\sphericalangle BAC = 90° + x$; $m\sphericalangle QBC = x$ y $m\sphericalangle BCA = 2x$.

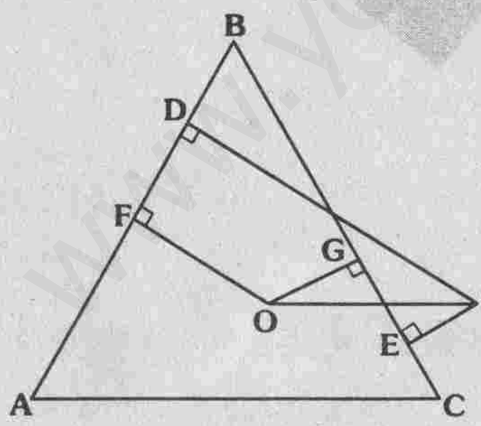
Calcule x.

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 116 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $\overline{PO} // \overline{AC}$, $OF = a$, $OG = b$ y $PE = C$, entonces la longitud de $\overline{PD}$ es:



A) $a + b - c$ B) $a + b + c$

C) $a + 2b + c$ D) $2a + b - c$

E) $2a + 2b - 3c$

PROBLEMA Nº 117 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Si $F \in \overline{EC}$, $\overline{BF} \cap \overline{AD} = \{G\}$, $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ $(M \in \overline{AD})$, $m\sphericalangle EBF = m\sphericalangle FBC$ y $BE - BD = k$.

Calcule FM.

A) $\frac{k}{2}$ B) $\frac{k}{3}$ C) $\frac{4k}{5}$

D) k E) $\frac{3k}{2}$

PROBLEMA Nº 118 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, P y Q están en $\overline{BC}$ y M es punto medio de $\overline{AC}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{BP} \cong \overline{QC}$, calcule $m\sphericalangle PMQ$.

A) 60° B) 75° C) 90°

D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 119 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto D exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que $AB = BC = CD$.

Si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle ADC)$.

Calcule $m\sphericalangle DAC$.

A) 15° B) 18° C) 22,5°

D) 30° E) 32°

PROBLEMA Nº 120 [1er. Seminario 2008-I]

En el interior del triángulo ABC se ubica 0, tal que OB=AC y las medidas de los ángulos ABO, CBO y ACB son proporcionales a 4; 5 y 13, además $\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo BAC.

Calcule $m\sphericalangle ABO$.

A) 16° B) 15° C) 20°

D) 18° E) 12°

PROBLEMA Nº 121 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana iinterior BD, si $AD = BC$ y

$$\frac{m\sphericalangle BAC}{2} = \frac{m\sphericalangle ABD}{5} = \frac{m\sphericalangle DBC}{3}$$

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 6° B) 8° C) 30°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 122 [1er. Seminario 2007-I]

Un punto en la región interior de un triángulo equilátero, dista 1μ, 2μ y 3μ de los lados. Entonces el lado del triángulo mide (en u).

A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA Nº 123 [1er. Seminario 2007-I]

ABC es un triángulo acutángulo, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ de manera que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$. Si $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle DBC + 2r$ y $m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle BAC - r$. Calcule $m\sphericalangle ABD$.

A) r B) $\frac{r}{2}$ C) 2r

D) $\frac{2r}{3}$ E) $\frac{3r}{4}$

PROBLEMA Nº 124 [1er. Seminario 2006-I]

El ángulo exterior en B del triángulo ABC mide 50°, si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en P y Q. Halle $m\sphericalangle PBQ$.

A) 70° B) 75° C) 80°

D) 85° E) 90°

PROBLEMA Nº 125 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo ABC se ubica el punto exterior Q, tal que $\overline{BQ}$ interseca a $\overline{AC}$. Si: $m\sphericalangle ABQ = 6\alpha$; $m\sphericalangle BAC = 2\alpha$; $m\sphericalangle BCA = \alpha$; $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ y $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle ACQ$, entonces " α " es:

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 16° E) 18°

PROBLEMA Nº 126 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la bisectriz del ángulo exterior trazado de A interseca a la prolongación de la altura BH en F. Si $AB + AH = 4$ y $HF = 3$. Halle BH.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 3,5 E) 4

PROBLEMA Nº 127 [1er. Seminario 2006-II]

En el gráfico, $DA = BD$, $m\sphericalangle AMD = 50°$ y $AE = BC + EC$. Halle $m\sphericalangle ABC$.

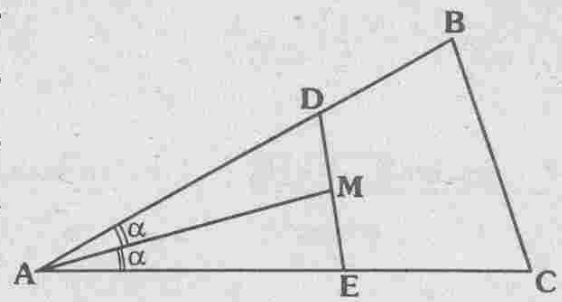
A) 70°

B) 80°

C) 85°

D) 90°

E) 95°



PROBLEMA Nº 128 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo ABC se ubican M en $\overline{BC}$, P y Q en $\overline{AC}$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle PMQ) = 2(m\measuredangle MCQ)$, entonces $m\measuredangle PMQ$ es:

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA Nº 129 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, $m\measuredangle B = 90°$ se traza la ceviana interior $\overline{AF}$ de manera que $m\measuredangle BAF = 12°$, $G \in \overline{AC}$ y $m\measuredangle AFG = m\measuredangle C = 54°$. Si $BF = a$. Calcule FG.

A) 2a B) $\dfrac{4a}{3}$ C) 3a
D) $\dfrac{3a}{2}$ E) $\dfrac{5a}{3}$

PROBLEMA Nº 130 [1er. Seminario 2005-II]

En el lado AC del triángulo ABC se construye exteriormente el triángulo rectángulo ACD (recto en D) de manera que $m\measuredangle ECB = 2(m\measuredangle CAD)$, E está en la prolongación de $\overline{DC}$. Si $AD + DC = CB$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 45° C) 35°
D) 60° E) 40°

PROBLEMA Nº 131 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle A = 22°$ y $m\measuredangle C = 8°$. Se construye exteriormente el triángulo ADC, tal que:

$m\measuredangle A = 22°$, $m\measuredangle ACD = 23°$ y $BC = 2$

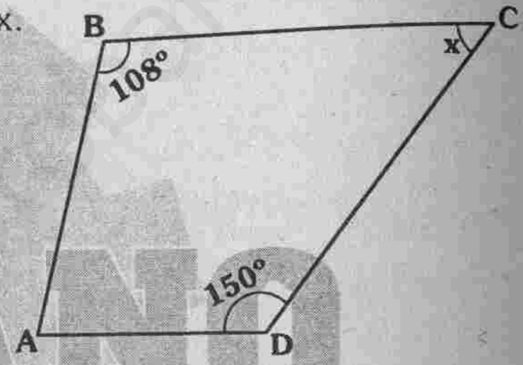
Calcule DC.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 132 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $AB = BC = CD$

Calcule x.



A) 36°
B) 54°
C) 48°
D) 42°
E) 60°

PROBLEMA Nº 133 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC (AB=BC) se traza la mediana AM y se prolonga hasta H de modo que:

$m\measuredangle AHC = 90°$, $m\measuredangle MAC = m\measuredangle BCH$

y $MH = a$

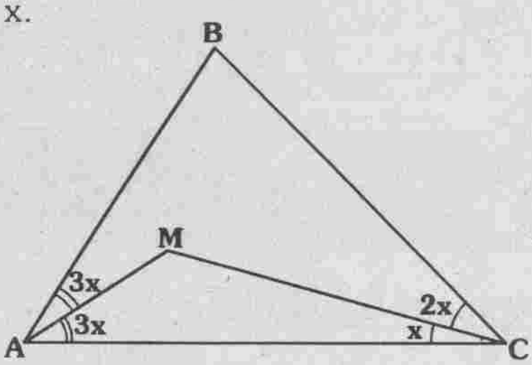
Calcule AM.

A) 2a B) $\dfrac{4a}{3}$ C) 4a
D) $\dfrac{3a}{2}$ E) 6a

PROBLEMA Nº 134 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $MC = BC$.

Calcule x.



A) 2,5°

B) 4°

C) 3°

D) 4,5°

E) 7,5°

PROBLEMA Nº 135 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo isósceles ABC(AB = BC) se ubica D punto exterior tal que $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$. Si:

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle BDC = 2(m\sphericalangle ADB)$ y

$m\sphericalangle DBC = 3(m\sphericalangle ABD)$

entonces $m\sphericalangle ADB$ es:

A) 5° B) 8° C) 10°

D) 12° E) $\dfrac{15°}{2}$

PROBLEMA Nº 136 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior CD, en el triángulo ADC se traza la ceviana interior DE. Si: $m\sphericalangle BCD = 10°$, $m\sphericalangle DCA = 20°$ y $DE = 2(DB)$. Calcule $m\sphericalangle CDE$.

A) 50° B) 60° C) 62°

D) 65° E) 75°

PROBLEMA Nº 137 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC los ángulos internos en A y B miden 18° y 99° respectivamente, si D es un punto de la bisectriz interior trazada desde A. Si $BC = CD$, calcule $m\sphericalangle BCD$.

A) 36° B) 38° C) 40°

D) 42° E) 44°

PROBLEMA Nº 138 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AP y se traza $\overline{PE}$ $(E \in \overline{AC})$.

Si: $m\sphericalangle PAE = 2(m\sphericalangle BAP)$;

$m\sphericalangle APE = m\sphericalangle PCE$ y $BP = 1$.

Halle EP.

A) 2 B) 1,8 C) 1,5

D) 1,25 E) 1

PROBLEMA Nº 139 [1er. Seminario 2008-I]

Demostrar que en un triángulo, los extremos de un lado equidistan de la recta que contiene a la mediana relativa a dicho lado.

PROBLEMA Nº 140 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BM}$ tal que $AB = MC$, si $m\sphericalangle A = \alpha$ y $m\sphericalangle ABM = 90° - \dfrac{3\alpha}{2}$.

Calcule $m\sphericalangle C$.

A) $\dfrac{\alpha}{2}$ B) α C) $\dfrac{2\alpha}{2}$

D) 2α E) 3α

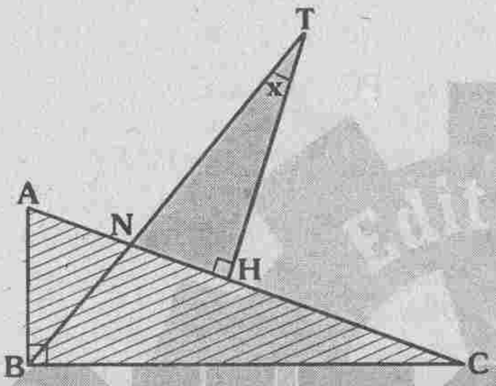
Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 141

En el gráfico, los triángulos NTH y ACB son congruentes y $AH = HC$.

Calcule x.



A) 30°

B) 20

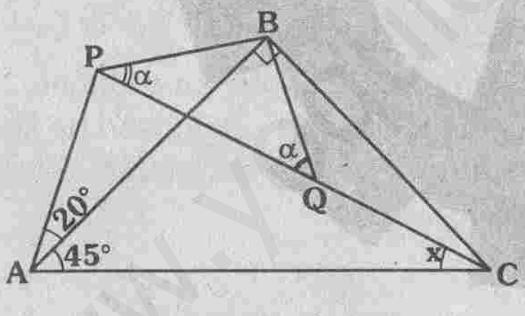
C) 18°

D) 36°

E) 23°

PROBLEMA Nº 142

Del gráfico $AP = QC$, calcule x.



A) 35°

B) 20°

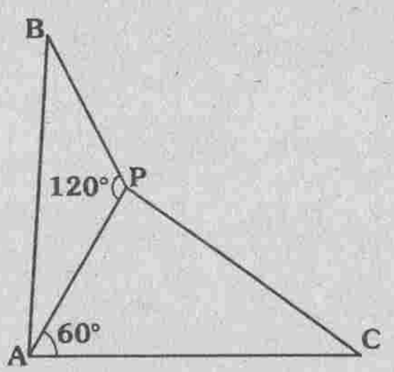
C) 15°

D) 25°

E) 30°

PROBLEMA Nº143

Del gráfico, $AC = AP + BP$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{PC}$.



A) 120°

B) 100°

C) 90°

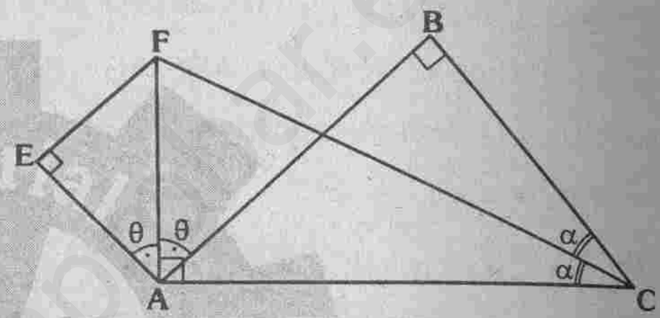
D) 25°

E) 70°

PROBLEMA Nº 144

Del gráfico, $AC = 13$ y $AB = 12$

Calcule EF



A) 10 B) 8 C) 7

D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº 145

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $m\sphericalangle ACB = 80°$; $m\sphericalangle BAD = 40°$, $AD = BC$ y $AB = DC$.

Calcule $m\sphericalangle DBC$.

A) 20° B) 30° C) 24°

D) 36° E) 18°

PROBLEMA Nº 146

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AD}$, se ubica E en $\overline{AD}$ tal que $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle ECD$, $AB = EC$ y $CD = AE$. Calcule $m\sphericalangle BDA$.

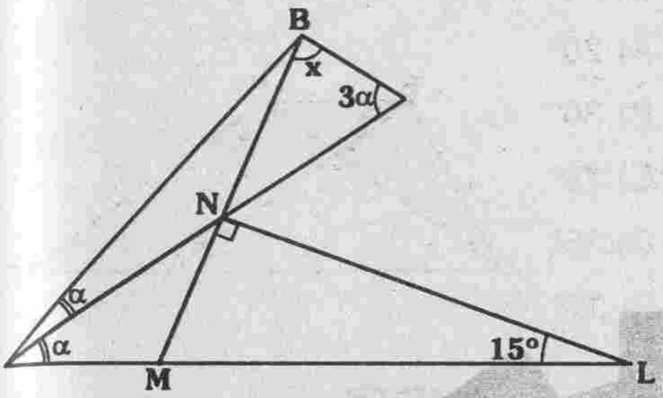
A) 80° B) 40° C) 60°

D) 50° E) 30°

PROBLEMA Nº 147

Del gráfico, $ML = 2(BN)$.

Calcule x.



A) 50° B) 40° C) 30°

D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 148

En el triángulo ABC se cumple que $m\sphericalangle ABC = 100°$, en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos M y N respectivamente. Tal que $AM = MC$ y $AN = NB + BC$.

Calcule $m\sphericalangle ANM$.

A) 60° B) 70° C) 80°

D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 149

Del gráfico, $AE = ED = 2$. Calcule BC

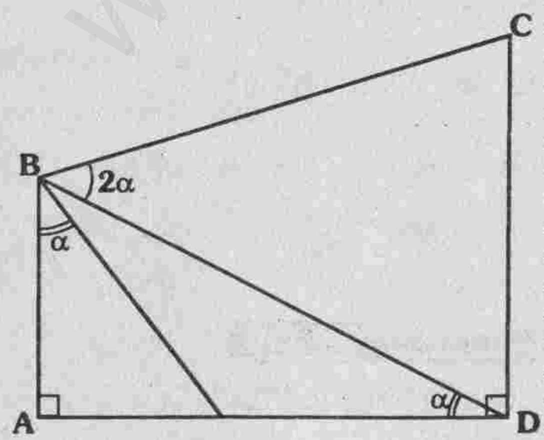
A) 5

B) $2\sqrt{6}$

C) $\sqrt{21}$

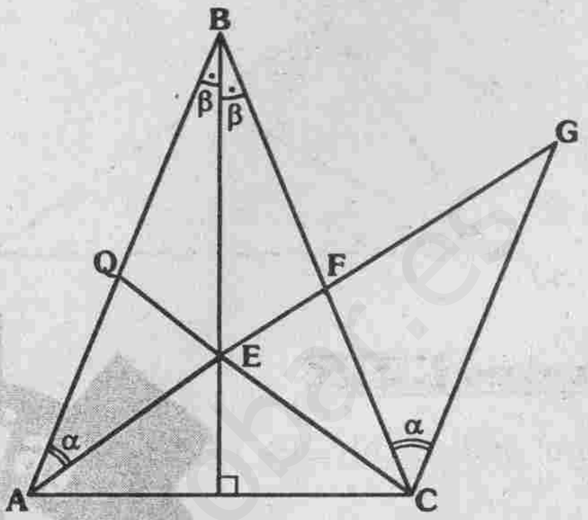
D) $\sqrt{31}$

E) 8



PROBLEMA Nº 150

En el gráfico, $AE = a$, $CG = b$ y $\alpha + 3\beta = 90°$. Calcule EQ



A) $2a - b$ B) $b - a$ C) $2b - a$

D) $3a - b$ E) $2(b - a)$

PROBLEMA Nº 151

En el triángulo ABE, se ubican M y C en $\overline{BE}$, tal que $\overline{CD} \perp \overline{AE}$ $(D \in \overline{AE})$, $AB = 2(BM) = 2(MC)$, $m\sphericalangle BAE = 75°$, $m\sphericalangle DCE = 45°$ y $MD = 3\sqrt{2}$.

Calcule AB.

A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA Nº 152

Se tiene el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM y BN de modo que $AB = BN$, $AM = MC$ y $BM = NC$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 30° B) 40° C) 50°

D) 60° E) 80°

PROBLEMA Nº 153

En el gráfico, BC = 2(AP).

Calcule x.

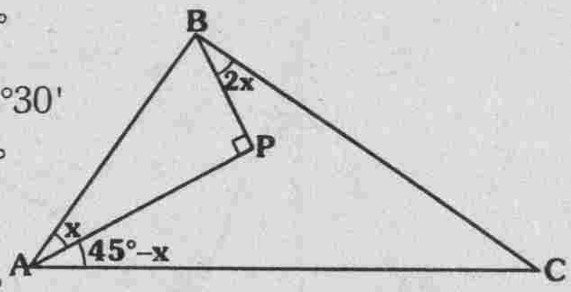
A) 15°

B) 22°30'

C) 16°

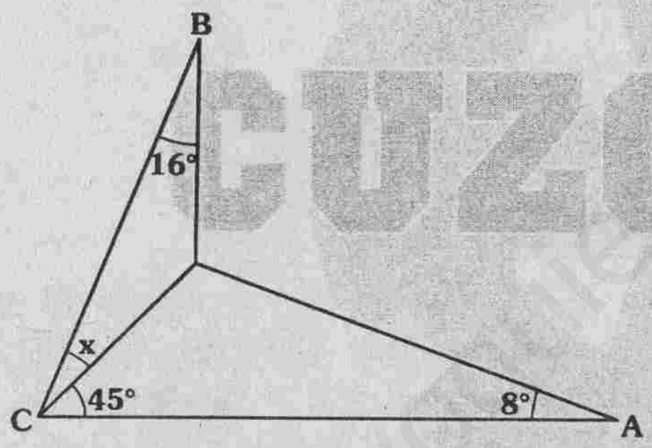
D) 8°

E) 30°



PROBLEMA Nº 154

En el gráfico, AL = BL + BC, calcule x.



A) 37° B) 53° C) 45°

D) 30° E) 60°

PROBLEMA Nº 155

En el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca en P a la recta perpendicular a $\overline{AC}$ trazada por C.

Calcule m∢BPC.

A) 37°/2 B) 53°/2 C) 30°

D) 45° E) 15°

PROBLEMA Nº 156

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, $\overline{AD} // \overline{BC}$ y el ángulo entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ mide 96°. Calcule x

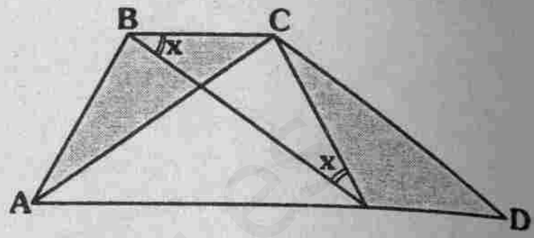
A) 20°

B) 30°

C) 28°

D) 35°

E) 32°



PROBLEMA Nº 157

En el triángulo ABC, se traza la altura BH en cuya prolongación se ubica D. Si: m∢BAC = 50°, m∢ACB = 20° y m∢DAC = 30°. Calcule m∢ACD.

A) 5° B) 10° C) 7,5°

D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 158

Se ubica P en la región interior del triángulo equilátero ABC, tal que AP=a, BP=b y PC=c. Si b>c indique la relación que siempre se cumple:

A) $a < b - c$

B) $a^2 < b^2 + c^2$

C) $b - c < a < b + c$

D) $a^2 < b^2 - c^2$

E) $a^2 > b^2 + c^2$

PROBLEMA Nº 159

En el triángulo ABC, se cumple:

$m\sphericalangle BAC = 23°$ y $2(AB) = 5(BC)$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 37° C) 53°

D) 60° E) 76°

PROBLEMA Nº 160

En el triángulo equilátero ABC, de centro O, se ubica M y N en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si MB=NC y ON = a.

Calcule MN.

A) a B) $a\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{3}$

D) 2a E) $\frac{3}{2}a$

PROBLEMA Nº 161

En el gráfico, AB = 3 y HC=1.

Calcule x.

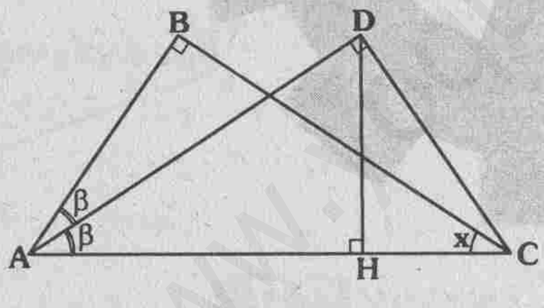
A) 37°

B) $\frac{37°}{2}$

C) 53°

D) $\frac{53°}{2}$

E) 8°



PROBLEMA Nº 162

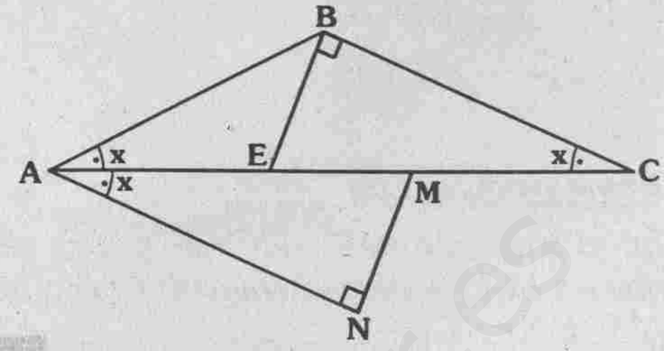
En el gráfico ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, luego se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$). Si BH = 9, AC = 15 y $m\sphericalangle HAC = 37°$. Calcule AH.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 163

En el gráfico, BE = 4, MN = 3 y AM=MC. Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 8°

D) 37° E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 164

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se trazan las cevianas interiores BM y CN, tal que:

$m\sphericalangle MBC = 50°$ y

$m\sphericalangle BCN = m\sphericalangle ABM = 30°$

Calcule $m\sphericalangle MNC$.

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 35° E) 40°

PROBLEMA Nº 165

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la bisectriz interior AM, tal que $m\sphericalangle AMB = 45°$, $m\sphericalangle ABC = 127°$ y $AB + AC = 25$. Calcule BC.

A) 5 B) 6 C) 4

D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 166

En el triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC = 45°$ y

$m\sphericalangle ACB = 30°$. Se traza la mediana AM, tal que AM=6. Calcule la distancia de M hacia $\overline{AB}$.

A) 2 B) 2,5 C) 3

D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 167

En el triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican M y N respectivamente tal que AM=MN=NC.

Si: $\dfrac{m\sphericalangle BAC}{7} = \dfrac{m\sphericalangle AMN}{10} = \dfrac{m\sphericalangle ACN}{5}$,

calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 72° B) 45° C) 60°

D) 40° E) 80°

PROBLEMA Nº 168

En el triángulo ABC, se cumple:

$m\sphericalangle BAC = 16°$ y $7(AB) = 20(BC)$

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 30° B) 53° C) 45°

D) 37° E) 60°

PROBLEMA Nº 169

En la región exterior relativo a $\overline{AB}$ del triángulo equilátero ABC, se ubica P, tal que $m\sphericalangle PBC = 90°$, si $PB = \sqrt{3}$ y $AC = 6$. Calcule la distancia de P hacia $\overleftrightarrow{AC}$.

A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 170

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que $BM = AC = 10$.

Si: $m\sphericalangle BCA = 2(m\sphericalangle ABM) + m\sphericalangle MBC$,

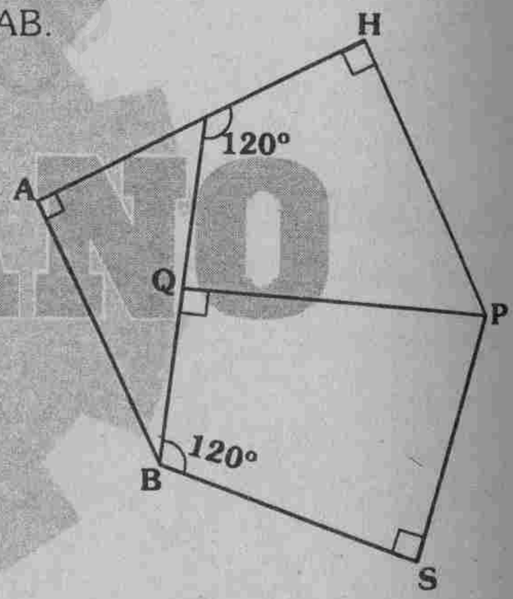
Calcule BC.

A) 2,5 B) 4 C) 5

D) 7,5 E) 10

PROBLEMA Nº 171

En el gráfico, HP=5, SP=6 y PQ=7. Calcule AB.



A) 4,5

B) 6

C) 4

D) 5

E) 5,5

PROBLEMA Nº 172

En el triángulo ABC, se cumple:

$m\sphericalangle BCA = 3(m\sphericalangle BAC)$ y

$AB = BC(\sqrt{2}+1)$

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

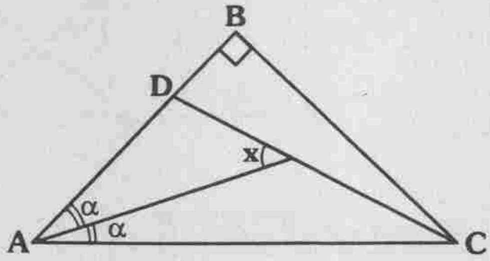
A) 30° B) 22°30'

C) 15° D) 45°

E) 26°30'

PROBLEMA Nº 173

En el gráfico, $AD = BC = 3(DB)$, calcule x.



A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

PROBLEMA Nº 174

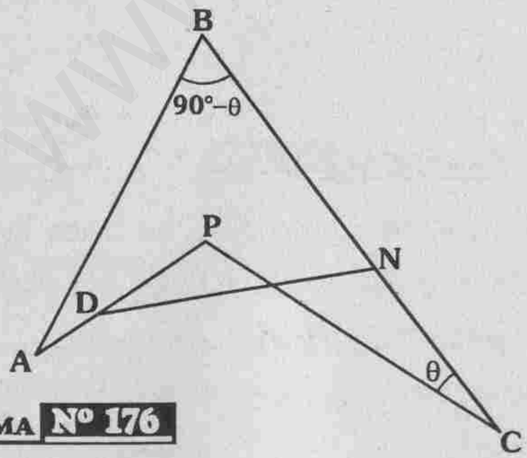
En la región exterior relativa a $\overline{BC}$ del triángulo ABC, se ubica P de modo que $m\sphericalangle PCA = 90°$, $m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle PAC = 53°$, $BC = AC = 5$.

Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 15° B) $\frac{53°}{2}$ C) 30°
D) $\frac{37°}{2}$ E) 37°

PROBLEMA Nº 175

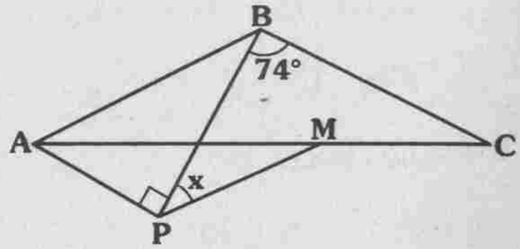
En el gráfico, D y N son puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$, si $8(ND) = 5(PC)$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{ND}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.



A) 30°
B) 60°
C) 53°
D) 45°
E) 37°

PROBLEMA Nº 176

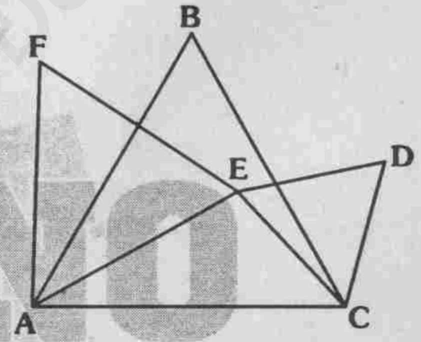
En el gráfico, AB=6, BC=10, PM=4 y AM=MC. Calcule x.



A) 69°
B) 37°
C) 74°
D) 53°
E) 60°

PROBLEMA Nº 177

Según el gráfico, los triángulos ABC, AFE y CDE son equiláteros. Si AC=12, calcule el menor valor entero de BF+BD.

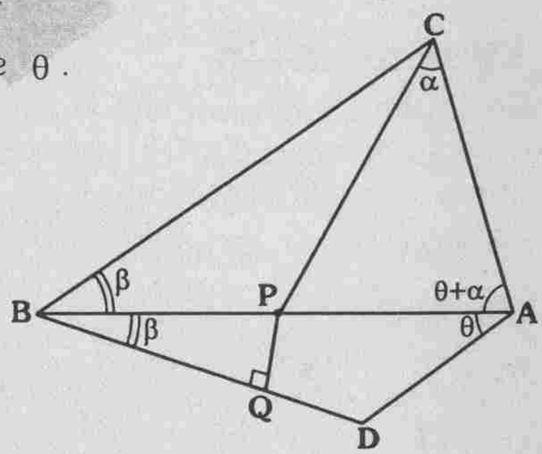


A) 11
B) 12
C) 13
D) 15
E) 18

PROBLEMA Nº 178

En el gráfico, AB=BC, PQ=3 y DA=5.

Calcule θ.



A) 30°
B) 37°
C) 53°
D) 74°
E) 60°

PROBLEMA Nº 179

Se tiene el triángulo ABC recto en B, se ubica N en $\overline{AC}$, M en $\overline{NC}$ y Q en la región exterior relativa a $\overline{BC}$.

Si: $BN = CQ$, $MN = MQ$, $AM = MC$, $m\sphericalangle ABN = 10°$ y $m\sphericalangle MQC = 80°$.

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

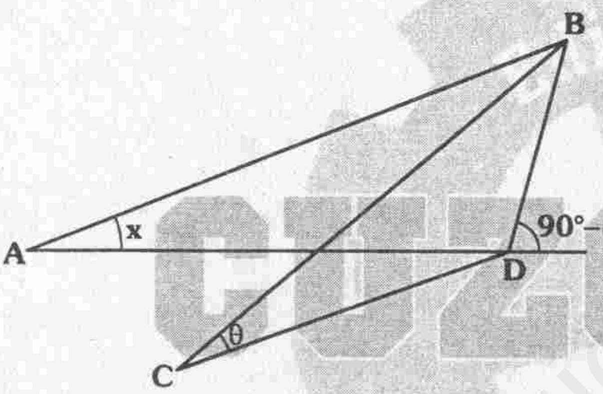
A) 25° B) 30° C) 15°

D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 180

En el gráfico, $AB = BC$ y $BD = CD$.

Calcule x.



A) 18° B) 18°30' C) 30°

D) 26°30' E) 45°

PROBLEMA Nº 181

En la región interior del triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, se ubica P en la región interior, tal que $m\sphericalangle BPA = 90°$, $AP = 5$ y $BP = 2$.

Calcule PC.

A) 7 B) $\sqrt{13}$ C) 5

D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, $BC + 2(AB) = 10$.

Calcule LB.

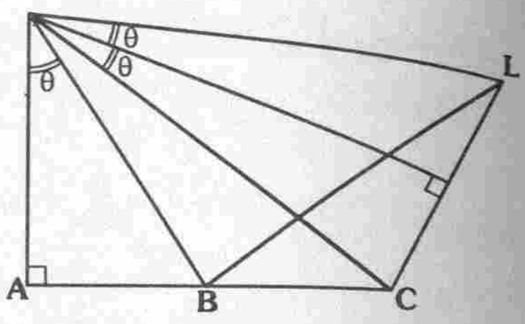
A) 5

B) 7,5

C) 10

D) 6

E) 8



PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, $AB = 6$, $AD = 6\sqrt{2}$ y $CD = 10$. Calcule CB.

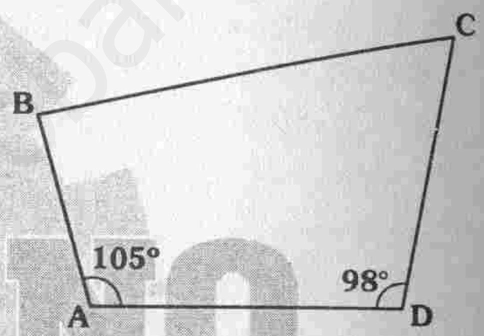
A) $2\sqrt{37}$

B) $2\sqrt{39}$

C) $\sqrt{37}$

D) $\sqrt{39}$

E) $\sqrt{29}$



PROBLEMA Nº 184

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y $\overline{BH} \perp \overline{AM}$ (H en $\overline{AM}$). Calcule cuantos valores enteros puede tomar AB, si $AC = 6$ y $AB = 2(MH)$.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 1

PROBLEMA Nº 185

En el triángulo ABC se traza la mediana BM y luego $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$), si $AH = 7$, $HB = 1$ y $BC = 10$.

Calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 74° B) 76° C) 53°

D) 75° E) 51°

PROBLEMA Nº 186

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, en la prolongación de la ceviana interior AD se ubica Q, si $BD=1$; $DC=2$; $QB=3$ y $m\measuredangle BCA=60°$. Calcule $m\measuredangle CBQ$.

A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 37°

PROBLEMA Nº 187

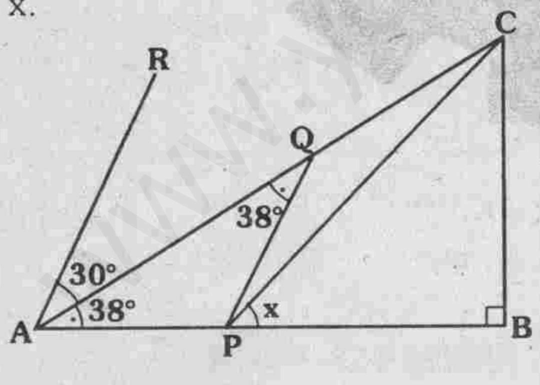
En el triángulo ABC se cumple $m\measuredangle BAC=20°$, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $BC=CD$ y $m\measuredangle CAD=40°$, $m\measuredangle ACD=30°$ y $m\measuredangle ABC>90°$. Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 16° B) 18° C) 15°
D) 20° E) 10°

PROBLEMA Nº 188

En el gráfico, Q equidista de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$. Calcule x.

A) 51°
B) 53°
C) 55°
D) 57°
E) 59°



PROBLEMA Nº 189

En el triángulo equilátero ABC; en $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{CA}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $AQ=BP$, $\overline{PQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en M. Calcule $m\measuredangle BMP$, si $MB=2(AM)$.

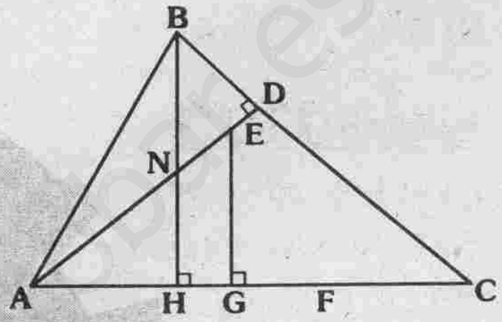
A) 22,5 B) 26,5° C) 30°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA Nº 190

En el gráfico, $BH=20$; $AH=8$; $AN=NB$ y $AE=AF$.

Calcule EG.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 12
E) 15



PROBLEMA Nº 191

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, si $BD=AC$ y

$$6(m\measuredangle ABD)=3(m\measuredangle BAC)=4(m\measuredangle BCA)$$

Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 72° B) 54° C) 36°
D) 28° E) 68°

PROBLEMA Nº 192

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y $\overline{BD}\perp\overline{AM}(D\in\overline{AM})$; $m\measuredangle ABD=3(m\measuredangle MAC)$; además: $AB=2(DM)$.

Calcule $m\measuredangle MAC$

A) 18° B) 15° C) 20°
D) 12° E) 10°

PROBLEMA Nº 193

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, tal que $BM = AC$;

$$\frac{m\measuredangle MBC}{2} = \frac{m\measuredangle ABM}{3} = \frac{m\measuredangle BCA}{8}.$$

Calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 10° B) 18° C) 20°
D) 35° E) 24°

PROBLEMA Nº 194

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la mediana $\overline{CM}$ y la altura $\overline{BH}$ $(H \in \overline{AC})$, $m\measuredangle BMC = m\measuredangle BCA$ además $BH = 12$. Calcule CM.

A) 12 B) 18 C) 20
D) 24 E) 16

PROBLEMA Nº 195

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{AE}$ tal que: $m\measuredangle EAC = 2(m\measuredangle EAB)$ y $AC = AE + 2(EB)$

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 36° B) 15° C) 18°
D) 24° E) 25°

PROBLEMA Nº 196

En el triángulo rectángulo ABC recta en B se traza la ceviana interior $\overline{AS}$ y la bisectriz interior $\overline{CP}$; $m\measuredangle BAS = 40°$ $m\measuredangle SAC = 30°$. Calcule $m\measuredangle BSP$.

A) 50° B) 30° C) 40°
D) 20° E) 70°

PROBLEMA Nº 197

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ si:

$m\measuredangle BAD = 20°$, $m\measuredangle DAC = 10°$,
$m\measuredangle ABE = 40°$ y $m\measuredangle BCA = 30°$

Calcule $m\measuredangle DEC$.

A) 15° B) 18° C) 50°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 198

En el triángulo ABC donde $AB = BC$ se ubica el punto M en su región interior,

$m\measuredangle MCA = 10°$, $m\measuredangle MAC = 20°$,
$m\measuredangle MCB = 40°$

Calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 60° B) 50° C) 40°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 199

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se trazan las cevianas interiores $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$, tal que: $m\measuredangle MBC = 50°$ y $m\measuredangle BCN = m\measuredangle ABM = 30°$.

Calcule $m\measuredangle MNC$.

A) 30° B) 60° C) 50°
D) 40° E) 20°

PROBLEMA Nº 200

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, $m\measuredangle BAC = 30°$, $m\measuredangle BMA = 40°$, $AM = BC$.

Calcule $m\measuredangle BCA$.

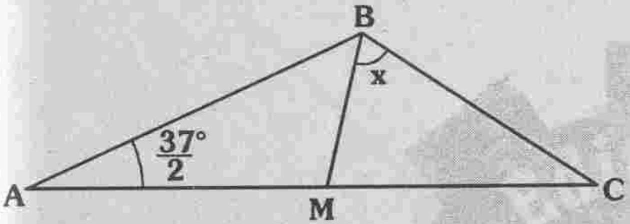
A) 30° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 25°

Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, $AM = MC$ y $BC = 2(BM)$. Calcule x.



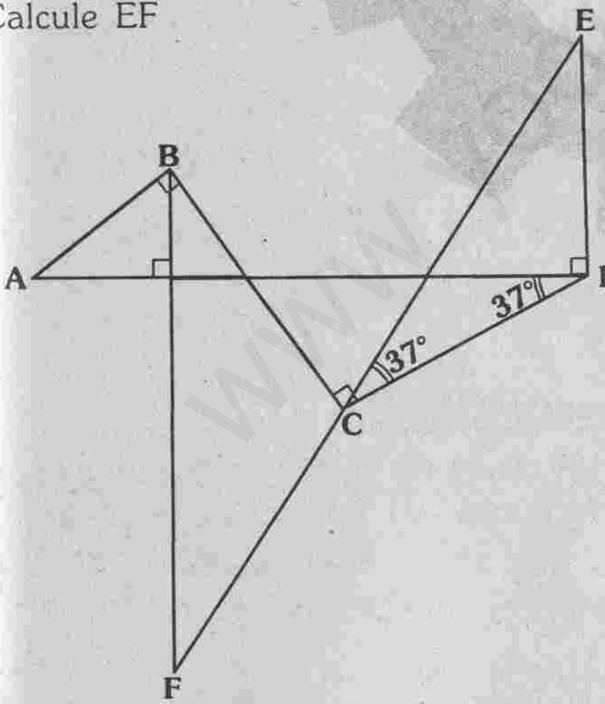
A) 143° B) 127° C) 120°

D) 90° E) 150°

PROBLEMA Nº 202

En el gráfico, $BC = 2(BH) = 2$.

Calcule EF



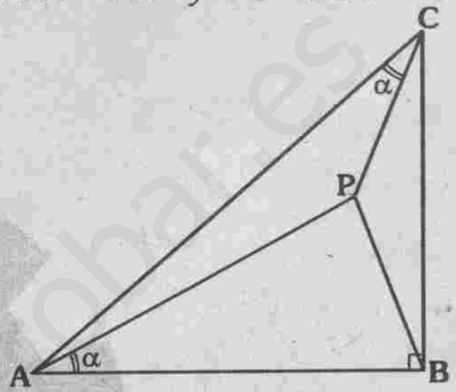
A) 12,5 B) 5 C) 50/7

D) 13 E) 15/4

PROBLEMA Nº 203

En el gráfico, $PA = AB$ y $PC = PB$.

Calcule α.



A) 10°

B) 15°

C) 22,5°

D) 12°

E) 30°

PROBLEMA Nº 204

En el triángulo ABC, $AB = BC = 2\sqrt{10}$, se ubican los puntos D, E y F en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EC}$ respectivamente tal que $DE = EF$; $\overline{AE} \perp \overline{DF}$; $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, por B se traza una recta que interseca perpendicularmente a la prolongación de $\overline{AE}$ en H y a la prolongación de $\overline{AC}$ en G.

Si $AG = 8$ y $EH = \sqrt{2}$, calcule EB.

A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{5}$

D) 4 E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 205

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $\overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{BA}$ se cortan.

Si: $AB = BC$ y $PR = 3(AP)$.

Calcule x.

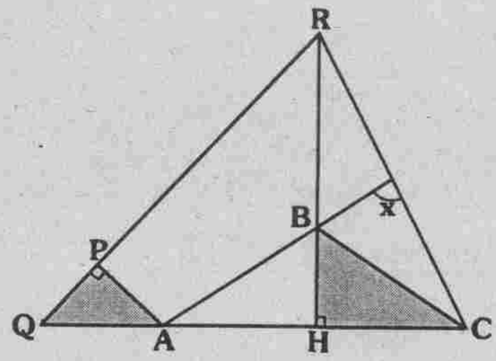
A) 80°30'

B) 82°

C) 71°30'

D) 73°30'

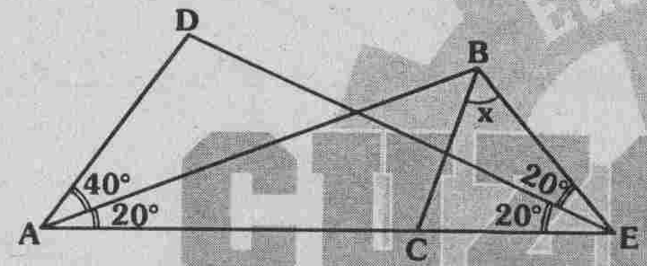
E) 72°30'



PROBLEMA Nº 206

En el gráfico, $AD = EC$.

Calcule x.



A) 30° B) 50° C) 70°

D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 207

En el gráfico, $BC = AD$. Calcule x

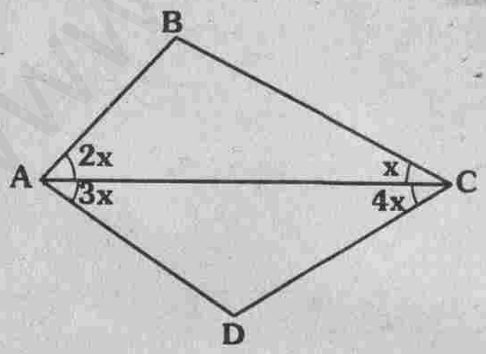
A) 5°

B) 6°

C) 7°

D) 8°

E) 10°



PROBLEMA Nº 208

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $m\sphericalangle ABP = 70°$ y $m\sphericalangle BAC = 80°$. Si $AB = PC$.

Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 20° B) 12° C) 18°

D) 10° E) 15°

PROBLEMA Nº 209

Del gráfico, $AB = CE = AE + 2$ y $BE = \sqrt{10}$. Calcule x.

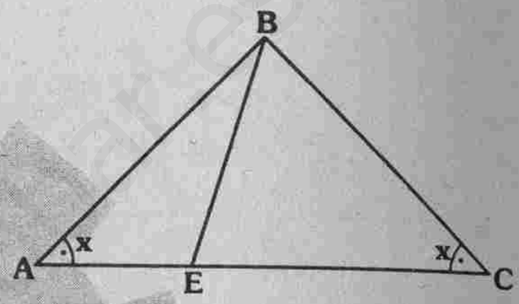
A) 53°

B) 30°

C) 40°

D) 37°

E) 52°



PROBLEMA Nº 210

En el triángulo ABC, se trazan las cevianas interioes $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$, tal que $\overline{BQ} = CP$, sean M y N puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ respectivamente.

Si $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle MNQ)$.

Calcule $m\sphericalangle BQC$.

A) 60° B) 120° C) 90°

D) 75° E) 45°

PROBLEMA Nº 211

En el triángulo ABC, la prolongación de la altura $\overline{AH}$ interseca a la mediatriz de $\overline{AC}$ en P. Si: $m\sphericalangle BPC = 90°$ y $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle BCA)$.

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 70° B) 80° C) 90°

D) 100° E) 110°

PROBLEMA Nº 212

En el triángulo equilátero ABC, en $\overline{AB}=\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos D, E y L respectivamente, luego se ubican el punto medio M de $\overline{ED}$. Si $AL = AD + LC$ y la suma de distancias de E y D hacia $\overleftrightarrow{AC}$ es K. calcule LM.

A) K B) $\frac{K}{2}$ C) $\frac{K}{3}$

D) $K\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3}{2}K$

PROBLEMA Nº 213

Se tiene el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, en la región eterior relativo a $\overline{BC}$ se ubica E de modo que BC=EB y AE=10. Calcule la distancia de A a $\overline{EC}$.

A) 6 B) 8 C) 5

D) $5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 214

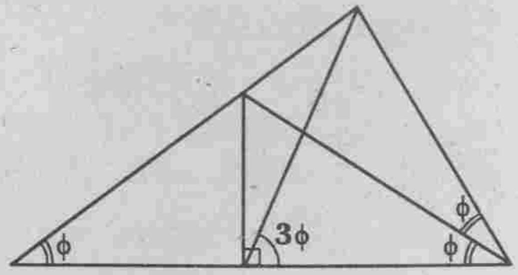
En el triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, tal que AP=CQ=10 y $m\measuredangle PAB = m\measuredangle BCQ = 15°$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$.

A) 10 B) 5 C) $5\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{3}$ E) $\frac{5}{2}$

PROBLEMA Nº 215

Del gráfico, calcule ϕ.



A) 10°

B) 12°

C) 15°

D) 20°

E) 18°

PROBLEMA Nº 216

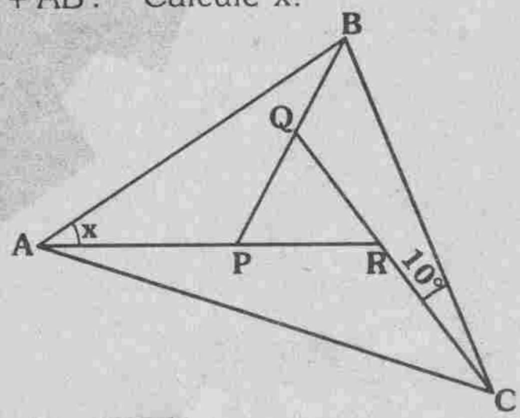
En un triángulo dos de sus lados miden $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$, el ángulo entre ellos mide 18°30'. Calcule la medida del ángulo opuestos al lado que mide $\sqrt{2}$.

A) 26°30' B) 30° C) 45°

D) 18°30' E) 37°

PROBLEMA Nº 217

En el gráfico, el triángulo PQR es equilátero. Si $PQ = QB = PA$ y $RC = PQ + AB$. Calcule x.



A) 20°

B) 30°

C) 40°

D) 50°

E) 60°

PROBLEMA Nº 218

Se tiene el ángulo AOB, se traza la bisectriz OP, tal que AP=AB y $m\measuredangle APB = 60°$. ¿Qué tipo de triángulo es APB?

A) Isósceles B) Equilátero

C) Rectángulo D) Escaleno

E) Obtusángulo

PROBLEMA Nº 219

En el triángulo ABC, se ubica S en la región interior y M es punto medio de $\overline{BC}$, si, $m\sphericalangle BAS = 40°$; $m\sphericalangle SAC = 30°$, $m\sphericalangle ASB = 90°$ y $m\sphericalangle SBC = 20°$.

Calcule $m\sphericalangle SMB$.

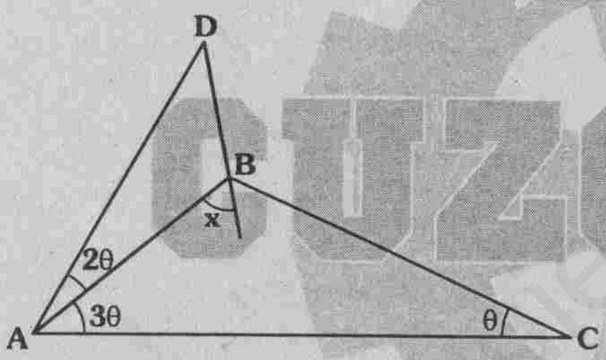
A) 60° B) 40° C) 30°

D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 220

En el gráfico, $BC = AB + AD$.

Calcule x en función de θ.



A) 4θ B) $\frac{5}{2}\theta$ C) 3θ

D) $\frac{9}{2}\theta$ E) $\frac{7}{2}\theta$

PROBLEMA Nº 221

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, luego en $\overline{BC}$ se ubica Q, tal que : $AB = PC$, $AP = QC$ y $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle BPQ$.

Calcule $\dfrac{m\sphericalangle ABP}{m\sphericalangle PBQ}$.

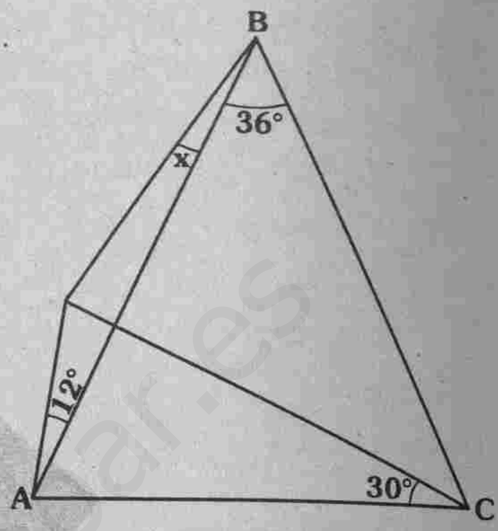
A) 1/2 B) 1 C) 2/3

D) 2/5 E) 3/4

PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, $AB = BC$.

Calcule x.



A) 6°

B) 10°

C) 12°

D) 8°

E) 18°

PROBLEMA Nº 223

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\sphericalangle BAC = 90° - 6\theta \quad y$$

$$m\sphericalangle ABC = 90° + 2\theta$$

se ubica P en la región interior tal que $AB = AP$, $m\sphericalangle APC = 60° + x$, $m\sphericalangle BCP = m\sphericalangle PCA$. Calcule x.

A) 70° B) 80° C) 90°

D) 50° E) 100°

PROBLEMA Nº 224

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior rrelativa a $\overline{AB}$ se ubica P tal que $AB = AC = PC$; $mBPC = 40°$ y $m\sphericalangle BCP = 30°$.

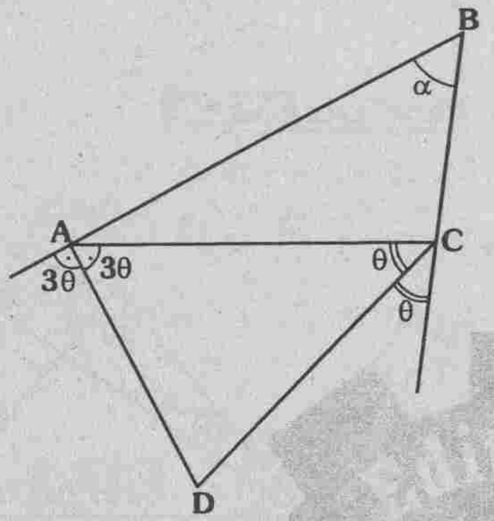
Calcule $m\sphericalangle PCA$.

A) 30° B) 40° C) 50°

D) 35° E) 25°

PROBLEMA Nº 225

En el gráfico, $\alpha < 60°$ y $CD = 38$. Calcule la mayor distancia entera del punto D a $\overline{AC}$.



A) 13
B) 20
C) 19
D) 24
E) 18

PROBLEMA Nº 226

Se tiene ell triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en donde $m\sphericalangle ABC = 30°$, se traza la ceviana interior $\overline{CQ}$ tal que $AC = \sqrt{2}(BQ)$. Calcule $m\sphericalangle BCQ$.

A) 15° B) 16° C) 30°

D) $\frac{37°}{2}$ E) $\frac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 227

En la región interior del triángulo ABC se ubica P, tal que $m\sphericalangle PAC = 48°$; $m\sphericalangle PCA = 18°$; $m\sphericalangle APB = 120°$ y $AC = BP$.

Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 10° B) 15° C) 18°

D) 24° E) 36°

PROBLEMA Nº 228

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM y la ceviana BN. Si: $MN = 4$; $m\sphericalangle AMN = 22°$; $m\sphericalangle AMB = 37°$ y $m\sphericalangle BAC = 16°$.

Calcule MB.

A) 2 B) $3\sqrt{3}$ C) 3

D) 4 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 229

En la región interior del triángulo acutángulo ABC se ubica P, tal que $PA + PB + PC$ es mínimo.

Calcule $m\sphericalangle CPB$.

A) 90° B) 75° C) 120°

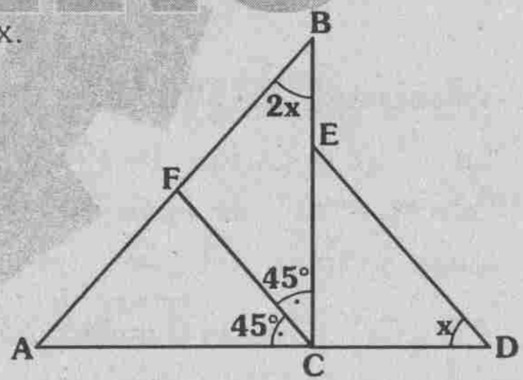
D) 135° E) 127°

PROBLEMA Nº 230

En el gráfico, $FB = ED$ y $BE = CD$.

Calcule x.

A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 60°
E) 53°



PROBLEMA Nº 231

En la región exterior del triángulo isósceles ABC(AB = BC) y relativo a $\overline{BC}$ se ubica D de modo que $AD = AC$, $m\sphericalangle ADB = 90°$ y $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle BAD)$.

Calcule $m\sphericalangle DCB$.

A) 8° B) 10° C) 15°

D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 232

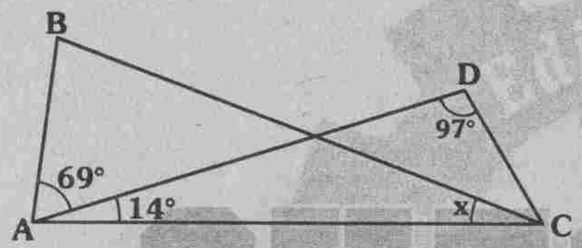
En el triángulo ABC se traza la mediana BM, luego se traza $\overline{MH}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (H en $\overline{BC}$). Si $BC = 2(BM)$ y $2(MC) = 5(MH)$. Calcule $m\measuredangle AMB$

A) 30° B) 45° C) 37°

D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 233

En el gráfico, $AB = CD$. Calcule x



A) 30° B) 14° C) 28°

D) 36° E) 20°

PROBLEMA Nº 234

En la prolongación de $\overline{CB}$ del triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica E, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$). Si $AE = QC$ (Q es la intersección de $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$). Calcule $m\measuredangle ABE$.

A) 80° B) 90° C) 120°

D) 45° E) 75°

PROBLEMA Nº 235

En el triángulo ABC se cumple $AC = 2(BC)$, se traza la bisectriz interior CF y la ceviana interior $\overline{BL}$ del triángulo FBC. Si $m\measuredangle BAC = m\measuredangle LBC$.

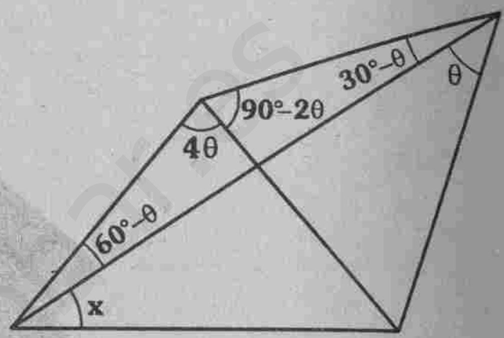
Calcule $\dfrac{LC}{FL}$

A) 1 B) 3/4 C) 2

D) 1/4 E) 5/3

PROBLEMA Nº 236

Del gráfico, calcule x.



A) 60°

B) 53°

C) 37°

D) 45°

E) 30°

PROBLEMA Nº 237

En el triángulo ABC se cumple $m\measuredangle ACB = 29°$ y $\dfrac{AB}{BC} = 0{,}68$.

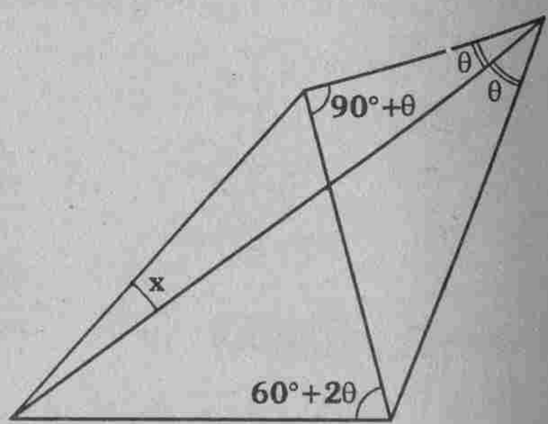
Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 31° C) 45°

D) 46° E) 52°

PROBLEMA Nº 238

Del gráfico, calcule el mayor valor entero de x.



A) 24°

B) 27°

C) 29°

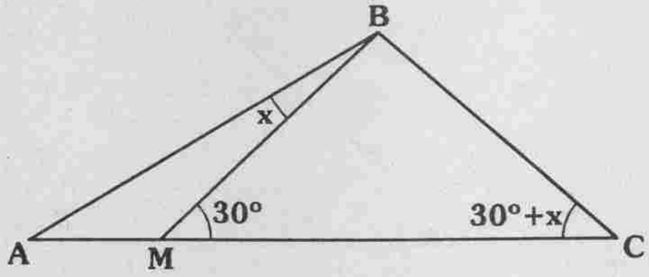
D) 44°

E) 36°

PROBLEMA Nº 239

En el gráfico, AB=MC.

Calcule x



A) 5° B) 10° C) 20°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 240

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (AB=BC), se ubica P en el región interior del triángulo. Si $m\sphericalangle PBA = 5x$, $m\sphericalangle PAC = 2x$ y $m\sphericalangle PCB = 3x$.

Calcule x.

A) 10° B) 9° C) 5°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 241

En la región interior del triángulo ABC se ubica P tal que $AB = AP$, $m\sphericalangle PBC = 18°30'$; $m\sphericalangle BAP = 37°$ y $m\sphericalangle PAC = 8°$. Calcule $m\sphericalangle PCB$

A) 8° B) 15° C) 30°

D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 242

En el triángulo ABC, se ubica P en la región interior tal que:

$$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle PAC = 14° \quad y$$

$$m\sphericalangle PCB = 2(m\sphericalangle PCA) = 32°$$

Calcule $m\sphericalangle ABP$.

A) 18° B) 30° C) 37°

D) $\dfrac{53°}{2}$ E) $\dfrac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 243

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM. Si $m\sphericalangle ACB = 30°$ y $m\sphericalangle BAM = 2(m\sphericalangle MAC)$.

Calcule $m\sphericalangle CAM$.

A) 15° B) 22,5° C) 18°

D) 16° E) 14°

PROBLEMA Nº 244

En el gráfico, $AB = AT = TC$. Calcule x.

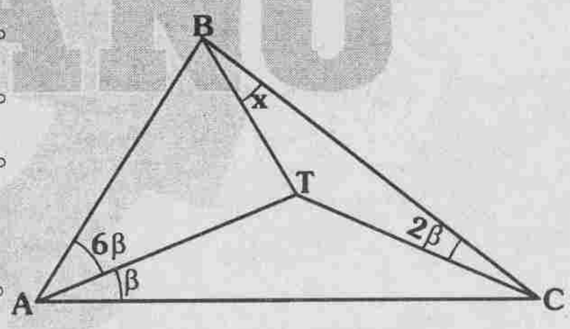
A) 10°

B) 15°

C) 12°

D) 8°

E) 20°



PROBLEMA Nº 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AQ}$ y $\overline{PQ}$ tal que:

$$m\sphericalangle BAQ = 3(m\sphericalangle QAC) = 3(m\sphericalangle PCA)$$

$$= 3(m\sphericalangle PCB) = 60°$$

entonces:

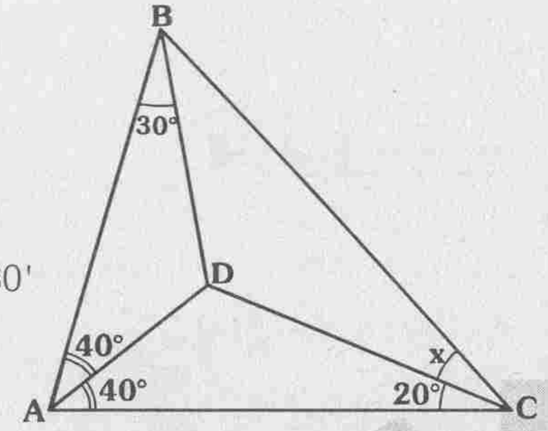
A) $AQ = CP$ B) $PB = CQ$

C) $AQ > CP$ D) $AB = CP$

E) $AQ = BC$

PROBLEMA Nº 246

En el gráfico, calcule x.



A) 10°

B) 15°

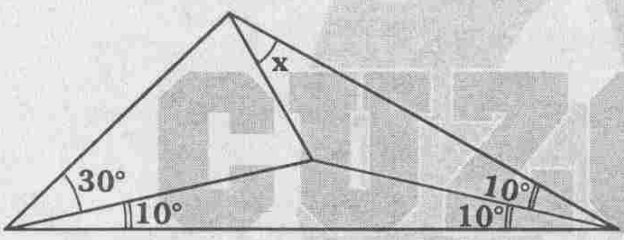
C) 30°

D) 20°

E) 22°30'

PROBLEMA Nº 247

Del gráfico, calcule x.

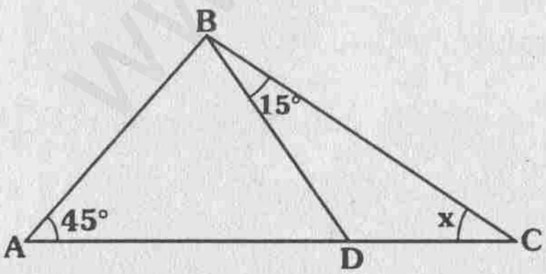


A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 248

En el gráfico, AD=BC, calcule x.

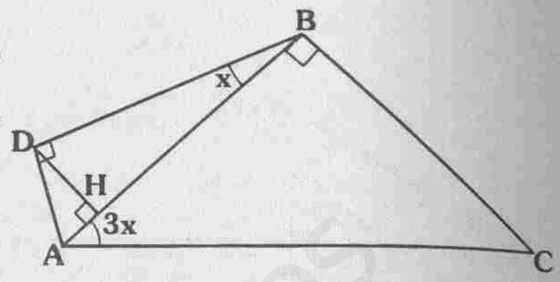


A) 10° B) 15° C) 30°

D) $\frac{53°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 249

En el gráfico, BC = 4(HD) , calcule x.



A) 10°

B) 15°

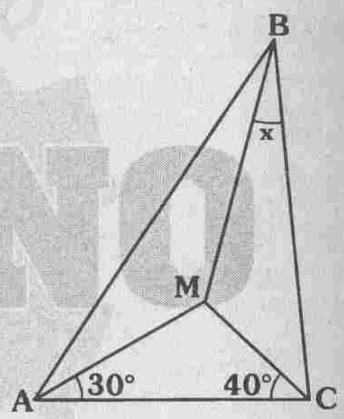
C) 12°

D)6°

E) 18°

PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, BM = AC y AB = MC + MB



A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 40°

E) 60°

PROBLEMA Nº 251

En el triángulo ABC se traza la mediana BM.

Si: $m\sphericalangle BAC = 45°$ y

$m\sphericalangle MBC = 90° - 2(m\sphericalangle ACB)$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 18° B) 20° C) 26,5°

D) 30° E) 18,5°

PROBLEMA Nº 252

En el triángulo ABC, se ubica E y D en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Si $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB)$, $ED = DC$ y $AB = AD = EC$.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 10° B) 20° C) 15°
D) 30° E) 36°

PROBLEMA Nº 253

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BP, tal que $m\measuredangle BPC = 60°$ y $AB = BP + PC$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 15° B) 30° C) 45°/2
D) 20° E) 40°

PROBLEMA Nº 254

Demostrar que en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 44 y 117 sus ángulos agudos miden 21° y 69°.

PROBLEMA Nº 255

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle CAD)$, $m\measuredangle ADC = 90°$ y la altura $\overline{DH}$ del triángulo ADC mide 4. Calcule BC.

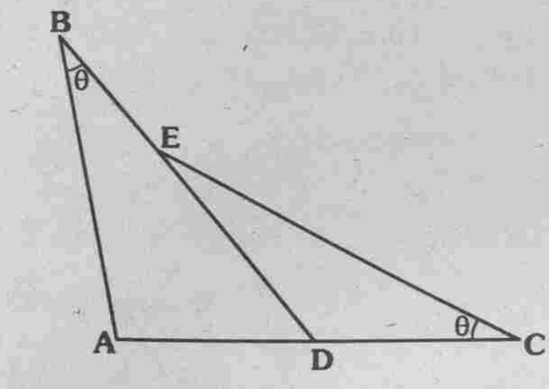
A) 4 B) 2 C) 6
D) 8 E) 12

PROBLEMA Nº 256

En el gráfico, $AB = EC$ y $AD = 5$.

Calcule ED.

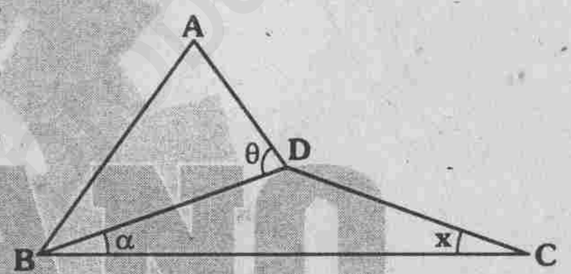
A) 6
B) 2,5
C) 5
D) 10
E) 7,5



PROBLEMA Nº 257

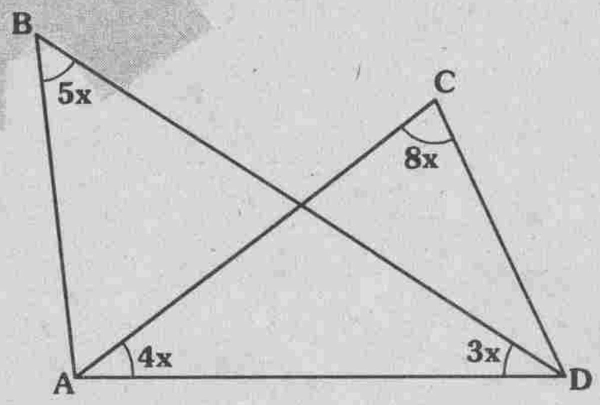
En el gráfico, $AB = BD$, $AD = DC$ y $\theta + \alpha = 3x$. Calcule x

A) 37°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 30°



PROBLEMA Nº 258

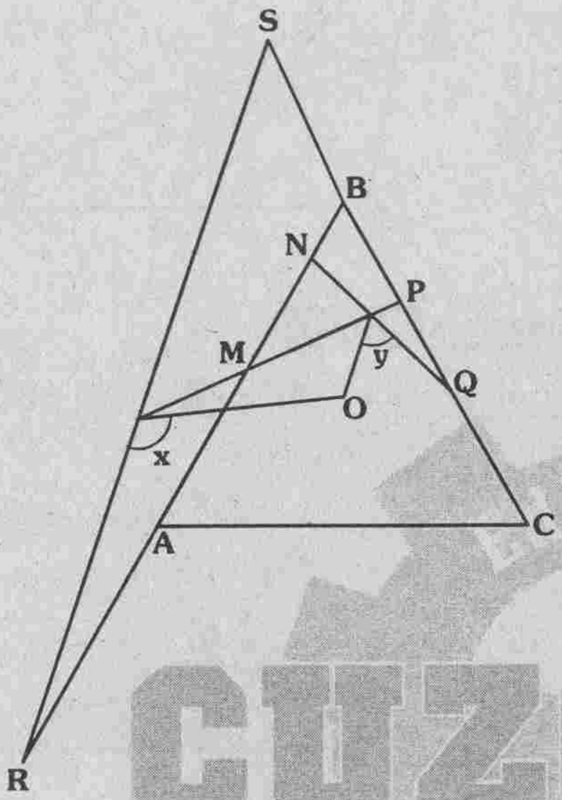
En el gráfico, $AB = CD$. Calcule x



A) 5° B) 8° C) 10°
D) 7,5° E) 15°

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico el triángulo ABC es equilátero de centro O. Si AR=SB, AM=BP y MN=PQ. Calcule $x+y$.



A) 90° B) 180° C) 120°
D) 135° E) 136°

PROBLEMA Nº 260

Se tienen 64 triángulos congruentes (regiones triangulares) de cartulina los cuales tienen perímetro "P", se desea formar con todos ellos un nuevo triángulo de las mismas medidas angulares.

Indique el perímetro del nuevo triángulo.

A) 12 P B) 24P C) 32P
D) 8P E) 64P

Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente de igual medida, entonces son congruentes.

II. Si dos triángulos que tienen sus lados de igual longitud respectivamente son congruentes.

III. Se tienen los triángulos ABC y MNL, si $AB = MN$, $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NML$ y $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle NLM$, entonces son congruentes.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) FVF

PROBLEMA Nº 262

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos triángulos equiláteros tiene igual perímetro, son congruentes.

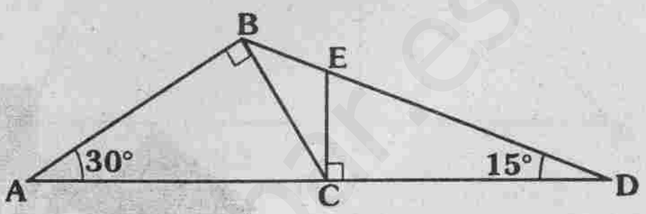
II. Dos triángulos isósceles tienen igual base y un ángulo de igual medida, son congruentes.

III. Dos triángulos rectángulos tienen un lado en común y un ángulo agudo son congruentes.

A) VFV B) VFF C) FFV
D) VVV E) FVF

PROBLEMA Nº 263

En el gráfico, calcule $\dfrac{ED}{AB}$



A) 1 B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 264

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica E en $\overline{BC}$, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$), Q es la intersección de $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$, si $AE = QC$.

Calcule $m\sphericalangle ABE$.

A) 80° B) 90° C) 110°
D) 100° E) 79°

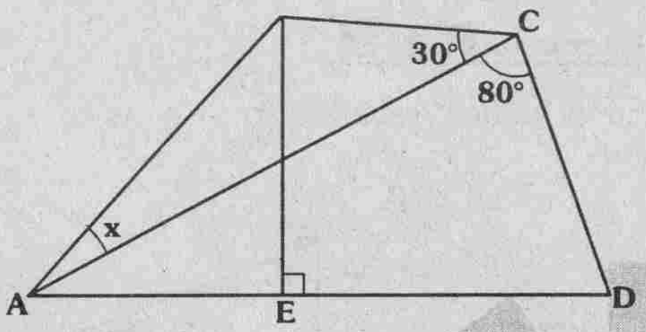
PROBLEMA Nº 265

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que $m\sphericalangle BAC = 2\alpha$; $m\sphericalangle ACB = \alpha$; $m\sphericalangle ABM = 90° + \alpha$ y $AM = BC$. Calcule α.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 18° E) 25°

PROBLEMA Nº 266

En el gráfico, $AC = AD$ y $AE = ED$. Calcule x.

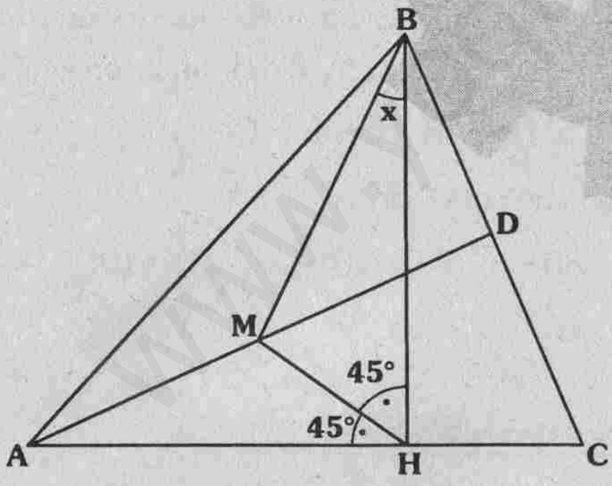


A) 50° B) 30° C) 40°

D) 20° E) 55°

PROBLEMA Nº 267

Según el gráfico, $BD = DC$ y $AM = MD$, calcule x.

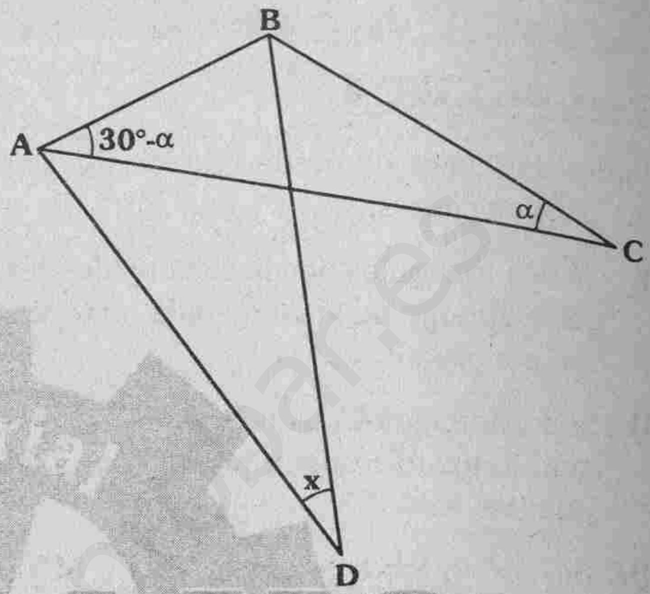


A) 30° B) $\frac{53°}{2}$ C) 16°

D) 8° E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 268

En el gráfico, calcule x en función de α si $AD = DB = AC$.

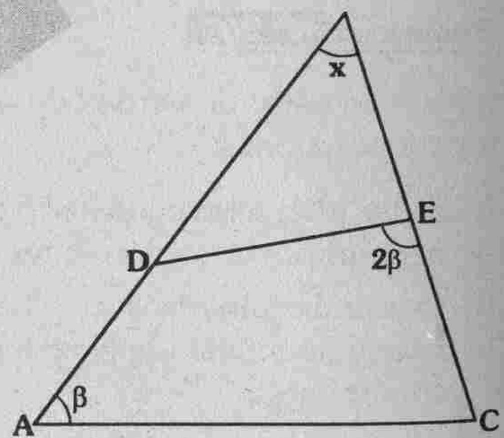


A) α B) 2α C) 3α

D) $45° - \alpha$ E) $60° - \alpha$

PROBLEMA Nº 269

Del gráfico, $AD = DE = EC$, calcule x.



A) 30°

B) 45°

C) 90°

D) 60°

E) 75°

PROBLEMA Nº 270

En el triángulo isósceles $ABC(AB = BC)$, se ubican los puntos R y M en $\overline{AC}$, si $AR = RM = MC$ y $m\measuredangle RBM = 2(m\measuredangle ACB)$.

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 18° B) 36° C) 30°

D) 45° E) 54°

PROBLEMA Nº 271

En el triángulo ABC, se ubica D en la región interior, tal que $BC = CD$;

$$m\sphericalangle BCD = 90° - 7(m\sphericalangle DCA) \quad y$$

$$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DAC = 2(m\sphericalangle DCA)$$

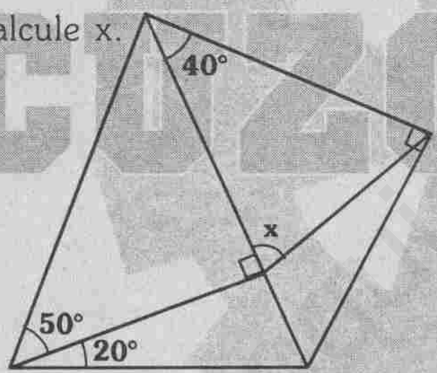
Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 70° B) 90° C) 80°

D) 100° E) 110°

PROBLEMA Nº 272

Del gráfico, calcule x.



A) 60°

B) 70°

C) 80°

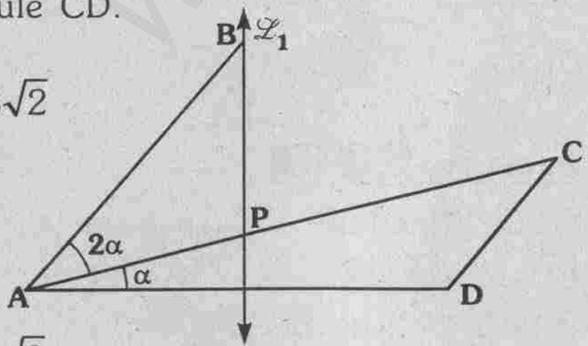
D) 75°

E) 85°

PROBLEMA Nº 273

Dell gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$; $AB = PC$ y $BP = 6$.

Calcule CD.



A) $3\sqrt{2}$

B) 6

C) 3

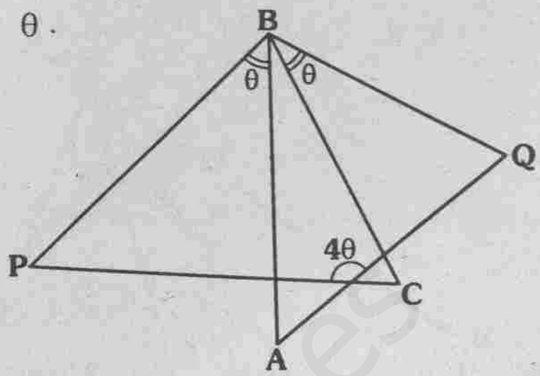
D) 2

E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 274

Del gráfico $PB=AB$ y $BQ=BC$.

Calcule θ.



A) 30°

B) 10°

C) 36°

D) 45°

E) 20°

PROBLEMA Nº 275

En el triángulo ABC recto en B, exterior y relativo al lado BC se ubica el punto D, tal que $m\sphericalangle BDC = 90° - m\sphericalangle BAC$; además $AC = CD$, $AB = 3$.

Calcule la distancia de C hasta $\overline{BD}$.

A) 4 B) 6 C) 9

D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº 276

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la altura $\overline{AH}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica el punto Q, tal que:

$$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle CBQ \quad ; \quad m\sphericalangle BQC = 90°$$

Calcule $\dfrac{m\sphericalangle HAC}{m\sphericalangle HQC}$

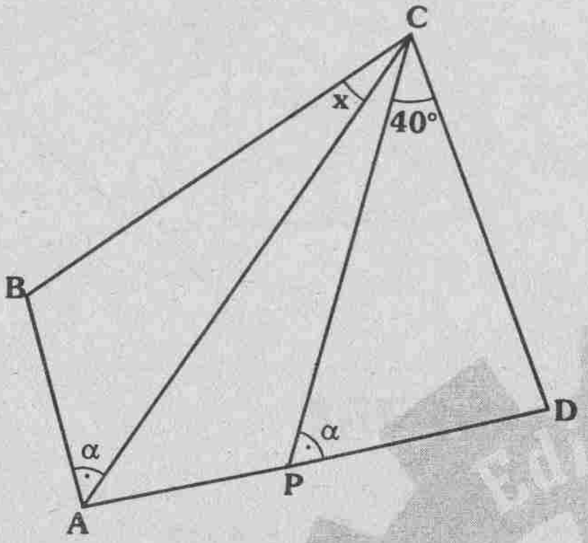
A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 2

D) 1 E) $\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 277

Del gráfico, $AB = PD$ y $AC = PC + CD$.

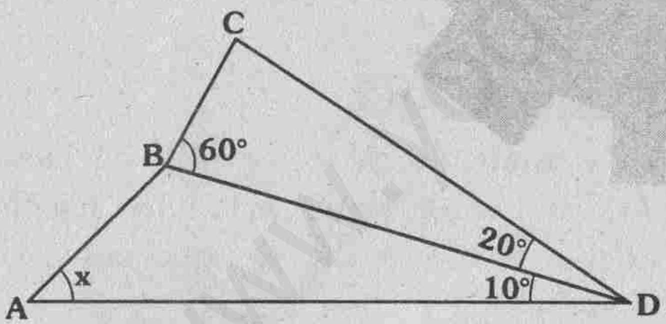
Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 278

En el gráfico, $AB = BC$. Calcule x.

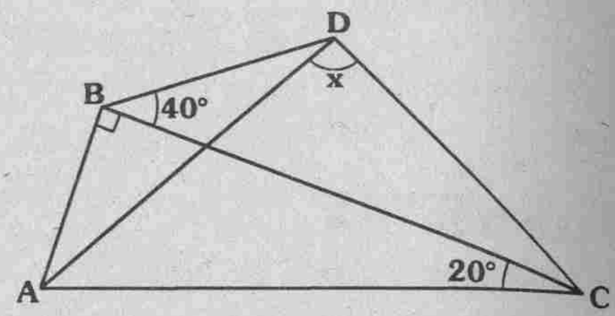


A) 30° B) 15° C) $\frac{53°}{2}$
D) 37° E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 279

En el gráfico, $AC = 2(BD)$.

Calcule x.



A) 40° B) 80° C) 60°
D) 90° E) 120°

PROBLEMA Nº 280

En el triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ tal que $HC = 3(AH)$,

Si: $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$

Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 15° B) 20° C) 10°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 281

En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ en la cual se ubica el punto E de tal modo que $BE = 4(AC) = 8$, si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ respectivamente.

Calcule MN.

A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{17}$ C) 4
D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 282

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ $(H \in \overline{AC})$, si $HC = 4(AH)$ y $m\measuredangle ABH = 2(m\measuredangle BCA)$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

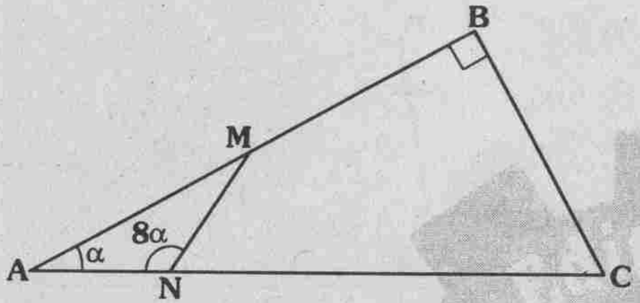
A) 53°   B) 30°   C) 14°

D) 37°   E) 75°

PROBLEMA Nº 283

Del gráfico, $AM = MB$ y $NC = 3(AN)$.

Calcule, α.



A) 10°   B) 12°   C) 15

D) 18°   E) 20°

PROBLEMA Nº 284

Del gráfico $AB = PC$, $BM = MP$ y $AN = NC$. Calcule x

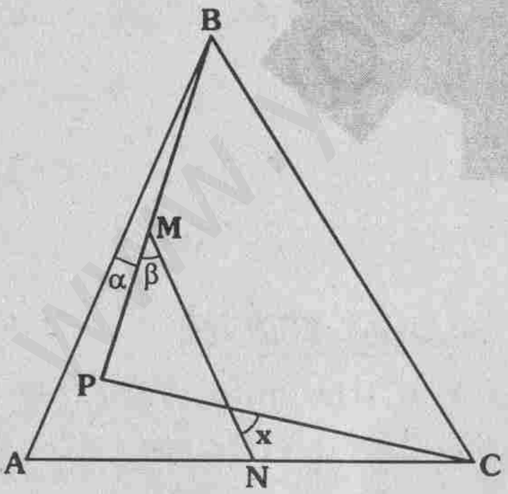
A) $\dfrac{\beta+\alpha}{2}$

B) $\beta-\alpha$

C) $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

D) $\alpha+\beta$

E) $2\alpha+\beta$



PROBLEMA Nº 285

Del gráfico, $AB = PC$, $AC = 16$.

Calcule AP.

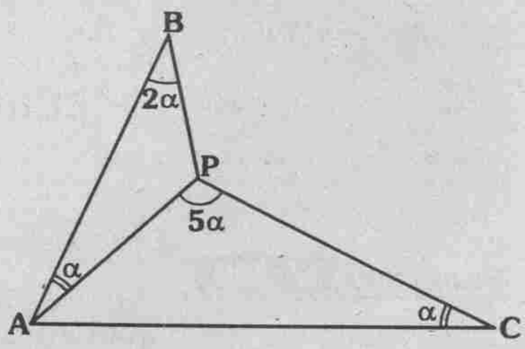
A) 4

B) 8

C) 12

D) 10

E) 16



PROBLEMA Nº 286

En el gráfico, $AH = HQ$; $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{BC}$.

Calcule x.

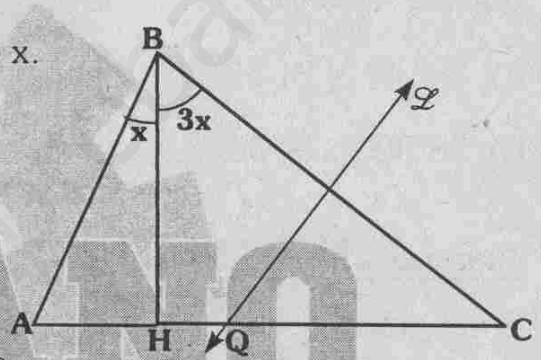
A) 15°

B) 20°

C) 18°

D) 16°

E) 18,5°



PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, $AB = PC$.

Calcule x

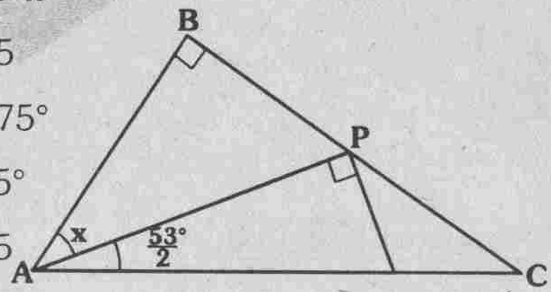
A) 63,5

B) 31,75°

C) 18,5°

D) 71,5

E) 26,5°



PROBLEMA Nº 288

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $AD = BC$ y

$$\frac{m\measuredangle BAC}{6} = \frac{m\measuredangle ABD}{7} = m\measuredangle DBC$$

Calcule $m\measuredangle DBC$.

A) 8° B) 9° C) 10°
D) 11° E) 12°

PROBLEMA Nº 289

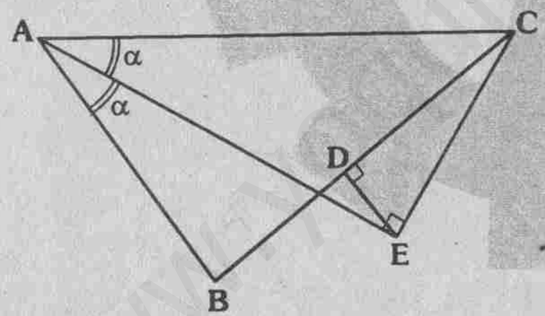
En el triángulo rectángulo ABC recto en B, $m\measuredangle BAC = 53°$ en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos R, P y M tal que $\overline{PM}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ y $AR = AM = MC$. Calcule $m\measuredangle MRP$.

A) 28°30' B) 53° C) 40°30'
D) 38°30' E) 30°

PROBLEMA Nº 290

En el gráfico, $AC = 12$, $ED = 2$.
Calcule AB.

A) 7
B) 8
C) 6
D) 5
E) 4



PROBLEMA Nº 291

Se tiene el triángulo ABC, se ubica Q en $\overline{AC}$ y P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ tal que los triángulos ABC y QPC sean congruentes si:

$$m\measuredangle ABC = 4(m\measuredangle BCA) = 4(m\measuredangle QPC) = 80°$$

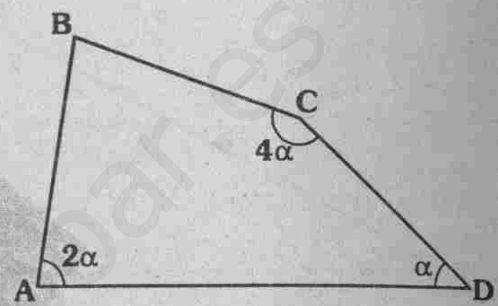
Calcule $m\measuredangle BQP$.

A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico, $AB = BC = CD$.
Calcule α.

A) 20°
B) 60°
C) 30°
D) 50°
E) 40°



PROBLEMA Nº 293

En el triángulo ABC donde $AB=4$, $BC=7$ y $AC=9$, se ubica P en la bisectriz del ángulo exterior en B; P y Q están en la región exterior relativo a $\overline{BC}$, tal que $\overline{PQ} // \overline{AB}$ y

$$m\measuredangle APC = m\measuredangle BQC = 90°$$

Calcule PQ.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

PROBLEMA Nº 294

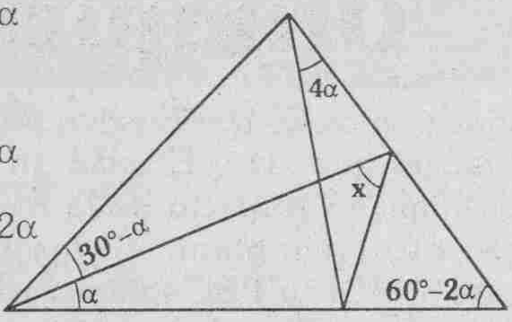
En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM, $AC = AB + MC$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$.

Ccalcule $m\measuredangle ABC$.

A) 25° B) 68° C) $\frac{720°}{7}$
D) 35° E) 48°

PROBLEMA Nº 295

Del gráfico, calcule x.



A) $30° - \alpha$

B) $30°$

C) $45° - \alpha$

D) $60° - 2\alpha$

E) $22{,}5°$

PROBLEMA Nº 296

En el triángulo ABC se traza la mediana BF, si se cumple que:

$$AF = AB \quad y \quad m\measuredangle FBC = 14°$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 105° B) 106° C) 120°

D) 90° E) 108°

PROBLEMA Nº 297

En el triángulo ABC se cumple:

$$m\measuredangle BAC = 23° \quad y \quad 5(AC) = 8(AB)$$

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 22° B) 30° C) 37°

D) 45° E) 67°

PROBLEMA Nº 298

Se tiene el triángulo ABC, en los lados BC y AC se ubican los puntos M y N respectivamente.

Si: $BM = MC$, $NC = AB + AN$ y

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle BCA = 120°$$

Calcule $m\measuredangle MNC$.

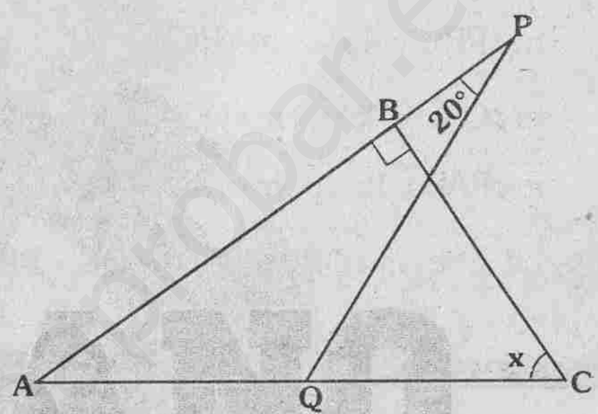
A) 20° B) 30° C) 40°

D) 15° E) 50°

PROBLEMA Nº 299

En el gráfico, $AQ = QC = BP$.

Calcule x.



A) 20° B) 40° C) 50°

D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 300

Dado el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y en la región exteriorrelativa a $\overline{AC}$ se ubican los puntos D y E respectivamente de modo que el triángulo DCE es equilátero.

Si $AD = BC$, $m\measuredangle BCA = 60°$ y $EB = a$.

Calcule AB.

A) a B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{3a}{2}$

D) $\frac{5a}{4}$ E) 2a

Problemas Propuestos Olímpicos

PROBLEMA Nº1 [17º - IMO]

Dado cualquier triángulo ABC, se construye los triángulos exteriores ABR, BCP y CAQ sobre los lados de modo que:

$$m\sphericalangle PBC = 45°\ ,\ m\sphericalangle PCB = 30°\ ,$$

$$m\sphericalangle QAC = 45°\ ,\ m\sphericalangle QCA = 30°\ ,$$

$$m\sphericalangle RAB = 15°\ \text{y}\ m\sphericalangle RBA = 15°\ ,$$

pruebe que $m\sphericalangle QRP = 90°$ y $QR = RP$.

PROBLEMA Nº2

En una recta se ubican los puntos A y B, tal que $AB = 2a$. Tomando como base este segmento se construye los triángulos isósceles ACB, AC'B y AC"B siendo las longitudes de sus respectivas alturas a; 2a y 3a respectivamente y relativas a $\overline{AB}$. Demuestre que las medidas de los ángulos de vértices C, C' y C" suman 180°.

PROBLEMA Nº3

En triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Demostrar que existe el triángulo cuyas longitudes de los lados son AQ, CP y PQ.

PROBLEMA Nº4

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, P y B, luego se ubican los puntos C, D y E exteriores a la recta, tal que D y E están en el mismo semiplano respecto de la recta y C en el otro semiplano. Si los triángulos ACB, ADP y PBE son isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ respectivamente.

Si: $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle ADP = m\sphericalangle PEB = 120°$.

Demuestre que el triángulo CDE es equilátero.

PROBLEMA Nº5

En el triángulo ABC se consideran los puntos A', B' y C' en el interior de los lados BC, CA y AB, respectivamente tales que:

$$m\sphericalangle AC'B' = m\sphericalangle B'A'C$$

$$m\sphericalangle CB'A' = m\sphericalangle A'C'B$$

$$\text{y}\ \ m\sphericalangle BA'C' = m\sphericalangle C'B'A$$

Demuestre que A', B' y C' son puntos medios de los lados correspondientes.

PROBLEMA Nº6 [42º - IMO 2001]

ABC es un triángulo, X está situado en $\overline{BC}$ y $\overline{AX}$ biseca al ángulo A. Y está situado en $\overline{CA}$ y $\overline{BY}$ biseca al ángulo B. El ángulo en A mide 60° $AB + BX = AY + YB$.

Halle todos los valores posibles para el ángulo en B.

PROBLEMA N°7

ABC es un triángulo acutángulo, O es su circuncentro, P es el pie de la perpendicular de A a $\overline{BC}$.

Si: $m\measuredangle BCA \geq m\measuredangle ABC + 30°$.

Pruebe que: $m\measuredangle CAB + m\measuredangle COP < 30°$.

PROBLEMA N°8

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica D en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AC}$ tal que:

$$\overline{DQ} \perp \overline{AC} \quad , \quad m\measuredangle ADQ = 2(m\measuredangle BAD)$$

$$y \quad 2(AB) = AD + 2(DQ)$$

Calcule $m\measuredangle BAD$.

PROBLEMA N°9

Sea P un punto en el interior del triángulo equilátero ABC, tal que $PA = 5$; $PB = 7$ y $PC = 8$. Halle la longitud del lado del triángulo.

PROBLEMA N°10

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle ABC = 90°$ y AB=BC. Se ubica D en el interior de dicho triángulo tal que:

$$AB = DC \quad y \quad m\measuredangle DAC = m\measuredangle DCB$$

Calcule $m\measuredangle DAC$.

PROBLEMA N°11

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ABM y CDP luego trazamos interiormente los triángulos equiláteros BCN y DAQ. Demostrar que el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

PROBLEMA N°12

Sea ABC un triángulo, con $m\measuredangle ABC = 45°$, desde A se traza el segmento AD (con D en $\overline{BC}$) de forma que $DC = 2(BD)$ y $m\measuredangle BAD = 15°$. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

PROBLEMA N°13

En el triángulo isósceles ABC (AB=BC) se traza la bisectriz interior AM (M en $\overline{BC}$), si $AC = BM + AM$. Calcule $m\measuredangle BAM$.

PROBLEMA N° 14 [2008- Olimpiada Rioplatence]

Sea ABC un triángulo obtusángulo en C tal que $2B\hat{A}C = A\hat{B}C$. Sea P un punto sobre el lado AB tal que BP=2BC. Sea M punto medio de AB(M está entre P y B). Probar que la perpendicular al lado AC, trazada por M, corta a PC en su punto medio.

PROBLEMA N° 15

Se tiene el hexágono convexo ABCDEF tal que:

$$AB=DE \ , \quad BC=FE \quad y \quad CD=AF$$

Si $m\measuredangle BAF + m\measuredangle BCD + m\measuredangle FED = 360°$.

Demostrar que los ángulos opuestos en el hexágono son congruentes.

ANEXOS

CONGRUENCIA DE FIGURAS

Tratemos de acercarnos a la definición, analicemos primero el caso de los polígonos.

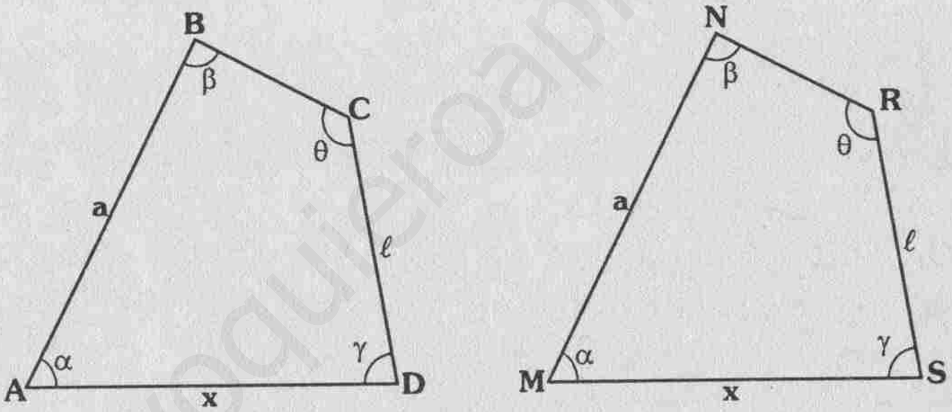
Dos polígonos $P_1P_2P_3....P_n$ y $Q_1Q_2Q_3....Q_n$ son congruentes si:

$$P_1P_2 = Q_1Q_2 \ ; \ P_2P_3 = Q_2Q_3 \ ; \ .... \ ; P_nP_1 = Q_nQ_1$$

y

$$m\hat{P}_1 = m\hat{Q}_2 \ ; \ .... \ ; m\hat{P}_n = m\hat{Q}_n$$

Ejemplo:



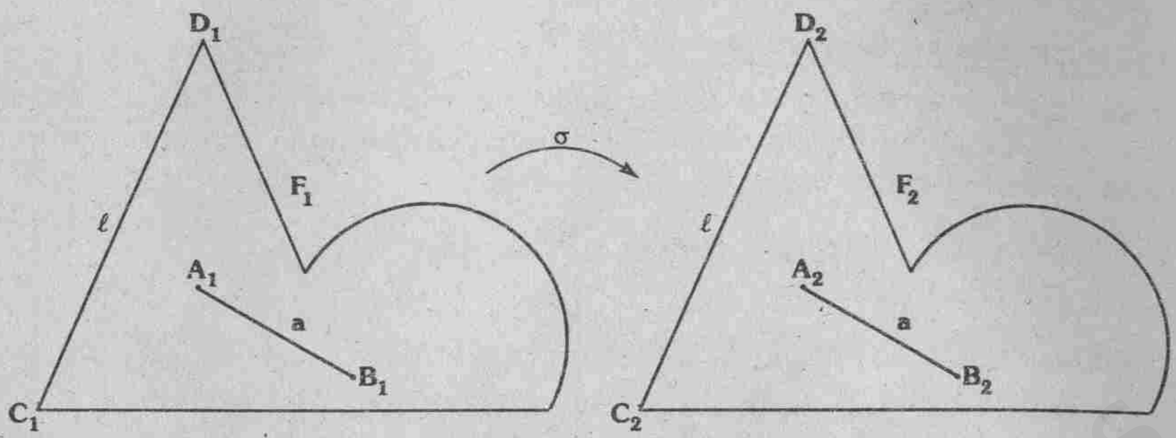
En el gráfico : $\boxed{\triangle ABCD \cong \triangle MNRS}$

No es difícil referirse a la congruencia de polígonos con elementos geométricos, en cambio para referirnos a la congruencia de figuras en general es necesario algunos conceptos del cálculo superior.

DEFINCIÓN DE FIGURAS CONGRUENTES

Sean F_1 y F_2 dos figuras, del plano o del espacio. Se dice que F_1 y F_2 son congruentes, cuando existe una correspondencia biyectiva $\sigma : F_1 \rightarrow F_2$, entre los puntos de F_1 y los puntos de F_2, con la siguiente propiedad:

Si A_1 y B_1 son puntos arbitrarios de F_1 y $\sigma(A_1) = A_2$, $\sigma(B_1) = B_2$ son sus correspondientes en F_2, entonces $A_1B_1 = A_2B_2$



La correspondencia biyectiva de $\sigma : F_1 \rightarrow F_2$ con la propiedad señalada, se llama congruencia entre F_1 , pues $\sigma : F_1 \rightarrow F_2$, la función inversa $\sigma^{-1} : F_2 \rightarrow F_1$ también es una congruencia.

ACERCA DE LA DISTANCIA

Axioma de distancia :

A cada par de puntos le corresponde un único número real no negativo.

Definición :

La distancia entre dos puntos es el número obtenido mediante el axioma de la distancia. Si los puntos son P y Q, entonces indicaremos la distancia por PQ.

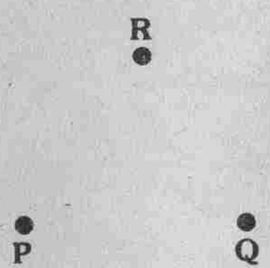
Admitimos la posibilidad de que P=Q, es decir de que P y Q sean el mismo punto, en este caso, PQ=0.

La distancia se define en relación a un par de puntos y no depende del orden, en consecuencia: PQ=QP.

En diversos problemas, se utilizan distintas unidades como centímetros, pies, pulgada, etc. todos los teoremas serán aplicables a cualquiera de estas unidades, siempre que se utilice sólo una unidad cada vez que se apliquen un teorema (no podemos cambiar las unidades en medio de un teorema).

Propiedades:

Sean P, Q y R tres puntos cualesquiera:

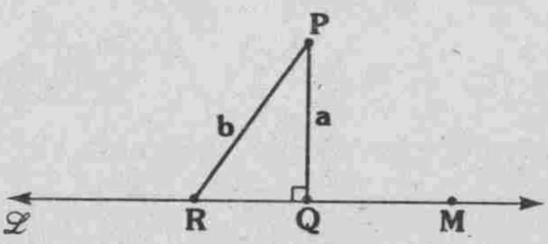


Se cumple:

a) $PQ > 0$, si $P \neq Q$
b) $P = 0$, si $P = Q$
c) $PQ = QP$
d) $PQ \leq PR + RQ$

Distancia entre una recta y un punto :

La distancia entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. La distancia entre una recta y un punto de la misma recta se define como cero.



Denotemos: $d_{(P,\mathscr{L})}$, distancia entre P y $\mathscr{L}$ en el gráfico:

$$P \notin \mathscr{L} \Rightarrow d_{(P;\mathscr{L})} = a > 0$$

$$M \in \mathscr{L} \Rightarrow d_{(M;\mathscr{L})} = 0$$

Teorema :

El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular.

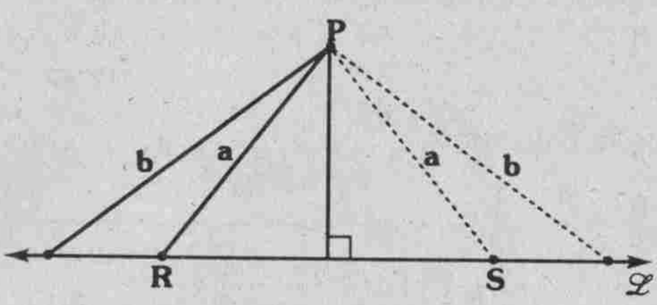
O de otro modo: se dan una recta $\mathscr{L}$ y un punto P fuera de ella, si $PQ \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, $(Q \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}})$ y R es otro punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces $PQ < PR$

Prueba :

La prueba es directa, pues en $\triangle$RQP, por teorema de la correspondencia: a<b

Observación

Sean una recta $\mathscr{L}$ *y los puntos* P *y* R *tal que* $P \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \wedge R \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, *si* $\overline{RP}$ *no es perpendicular a* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, *entonces existe otro punto "S" en* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ *tal que* PR=PS



LECTURA

La Geometría como ciencia del espacio

El estudio del espacio desde un punto de vista matemático está íntimamente relacionado con la descripción y el análisis de la "forma". Intentar buscar una definición de forma abstracta sería entrar en una visión filosófica fuera de nuestro alcance. Cuando aquí hablamos de forma nos referimos al "aspecto" que pueden tener los objetos que estructuran el espacio.

La noción de "aspecto" a que nos hemos referido anteriormente es una aproximación intuitiva e ingenua con el único objetivo de tener una representación mental de lo que sería una entidad abstracta de los objetos, donde no se consideran ni la "materia" de que están constituidos, ni el tamaño o dimensión, ni la textura, ni el color, etc.

En el análisis de la forma hoy se distingue lo que es la configuración figural de lo que es la representación gráfica. La configuración figural expresa la imagen de la forma que tenemos en la mente, mientras que la representación gráfica es el modelo arbitrario o comercial de expresar esta imagen en un soporte físico ya sea una hoja de papel, la pantalla del ordenador o la reproducción física de un modelo tridimensional.

Lo que es la forma en sí, haciendo abstracción de los constituyentes de la materia y de las dimensiones de su tamaño, viene determinado por su configuración figural: es decir, la disposición de los elementos geométricos en lo que podemos llamar la estructura de la forma. Por otra parte, la representación es un modo convencional de "ver" o describir la forma.

El estudio de las formas poniendo énfasis en lo que hemos llamado configuración figural es uno de los puntos de entrada en el conocimiento geométrico.

Este enfoque permite relacionar los valores culturales, sociales y antropológicos del uso y la concepción de la forma en la sociedad, con las perspectivas de la educación geométrica. Explícitamente, al situarnos en la descripción de una forma, en sus aspectos figurales, estamos inicializando las habilidades propias de la educación geométrica. Este punto de vista permite aproximaciones a la educación geométrica integrando distintas disciplinas y contextos culturales: la forma en el arte, en la ciencia, en la literatura, etc.

La organización sistemática que nos proporciona el estudio de las configuraciones figuradas, marca las líneas organizadoras de lo que conocemos como ciencia del espacio. Así, podemos decir que la visión de la Geometría como ciencia del espacio, supone focalizar los aspectos geométricos en el análisis figural podemos distinguir distintas categorías. Por ejemplo, la categoría estructural analiza la forma viendo cómo está construida. Cómo se disponen los elementos que la constituyen. Sería, por ejemplo, en el caso de una forma poliédrica, cómo están dispuestas las caras que forman todo el poliedro.

En la descripción del grado de simetría de una forma (o de la definición de la forma como lugar geométrico) empleamos la noción de distancia y éste sería un caso de lo que podemos considerar como una categoría dinámica.

El tipo de relaciones, tanto cualitativas como cuantitativas entre los elementos de las figuras, por ejemplo, la relación entre caras, vértices y aristas de un poliedro, la caracterización de su convexidad o concavidad, las relaciones angulares, etc., constituyen las categorías que podemos llamar discretas. Finalmente, todo lo relativo a la extensión y dimensión (longitudes, áreas y volumen) serían casos de la categoría de medidas.

Estas categorías -estructural, dinámica, discreta y de medida -nos marcan los grandes ejes donde podemos vertebrar y organizar la enseñanza - aprendizaje de la Geometría entendida como la ciencia del espacio.

(Unas reflexiones sobre geometría y educación pag. 24–25/
¿Porqué Geometría? Claudi Alsina Catalá : – Josep Fortuny Aynemí
– Rafael Pérez Gómez)

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	10. A	19. A	28. A	37. B	46. A	55. D
2. D	11. B	20. B	29. C	38. E	47. C	56. C
3. A	12. E	21. D	30. A	39. D	48. B	57. C
4. E	13. C	22. E	31. A	40. D	49. B	58. B
5. C	14. D	23. C	32. B	41. D	50. B	59. D
6. C	15. B	24. A	33. E	42. E	51. B	60. B
7. C	16. C	25. E	34. D	43. A	52. A	
8. B	17. C	26. B	35. C	44. B	53. E	
9. B	18. D	27. E	36. A	45. C	54. D	

CEPRE-UNI

61. D	71. D	81. A	91. A	101. *	111. C	121. C	131. A
62. B	72. C	82. C	92. E	102. D	112. D	122. C	132. C
63. C	73. *	83. E	93. D	103. C	113. B	123. A	133. E
64. *	74. D	84. A	94. A	104. E	114. A	124. C	134. E
65. E	75 D	85. A	95. D	105. D	115. A	125. C	135. C
66. A	76. C	86. D	96. D	106. D	116. B	126. B	136. B
67. C	77. A	87. A	97. B	107. C	117. D	127. B	137. D
68. E	78. C	88. E	98. B	108. B	118. C	128. C	138. A
69. C	79. E	89. B	99. B	109. C	119. D	129. A	139. *
70. D	80. A	90. B	100. C	110. C	120. D	130. B	140. B

SEMESTRAL

141. C	150. B	159. E	168. B	177. C	185. B	193. C
142. D	151. A	160. C	169. D	178. B	186. C	194. B
143. A	152. D	161. A	170. E	179. E	187. E	195. A
144. B	153. B	162. C	171. C	180. C	188. D	196. B
145. A	154. A	163. A	172. B	181. B	189. C	197. D
146. C	155. B	164. C	173. D	182. C	190. D	198. A
147. D	156. C	165. A	174. D	183. A	191. B	199. D
148. D	157. B	166. C	175. C	184. E	192. A	200. B
149. B	158. C	167. C	176. A			

SEMESTRAL INTENSIVO

201. D	210. C	219. A	228. E	237. C	246. D	255. D
202. C	211. C	220. A	229. C	238. C	247. B	256. C
203. E	212. D	221. B	230. A	239. B	248. C	257. E
204. B	213. E	222. A	231. A	240. B	249. B	258. C
205. C	214. B	223. C	232. D	241. E	250. B	259. B
206. E	215. C	224. B	233. B	242. B	251. C	260. D
207. E	216. A	225. E	234. B	243. A	252. E	
208. D	217. C	226. A	235. A	244. E	253. A	
209. D	218. B	227. D	236. E	245. B	254. A	

REPASO

261. B	267. E	273. B	279. D	285. B	291. D	297. B
262. B	268. B	274. C	280. D	286. C	292. E	298. B
263. D	269. D	275. D	281. B	287. B	293. B	299. C
264. B	270. C	276. D	282. A	288. B	294. C	300. A
265. B	271. E	277. B	283. D	289. C	295. B	
266. D	272. B	278. A	284. D	290. D	296. B	

Bibliografía

- **Olivera Diaz, Carlos** — Geometría Plana
2da. edición
- **Pogorelov, A.V. (1974)** — Geometría Elemental.
Editorial MIR Moscú
- **Martín Isaacs** — Geometría Universitaria
Internacional Thomson Editores S.A. de C.V.
México - 2002
- **I. Shariguin** — Problemas de Planimetría
Editorial MIR - 1989
- **Pedro Puig Adam** — Curso de Geometría Métrica
Editorial Nuevas Gráficas - Madrid - 1961
- **Edwin Moise - Floyd Downs** — Geometría - Serie Matemática Moderna IV
Editorial Norma - Fondo Educativo
Interamericano S.A. 1972
- **Hans Rademacher - Erna Toeplitz** — Números y Figuras.
Alianza Editorial S.A. Madrid 1970
- **Radmila Bujajick - José Gómez Ortega** — Geometría / Cuaderno de Olimpiadas
Matemáticas
Instituto de Matemáticas UNAM - 2004

Páginas web consultadas:

- http:/www.campus-oei.org/oim/revistaoim/
- http:/www.mscs.mu.edu/~paul/puzzle/
- http:/www.fmat.cl/
- http:/www.forumgeometricorum.com/