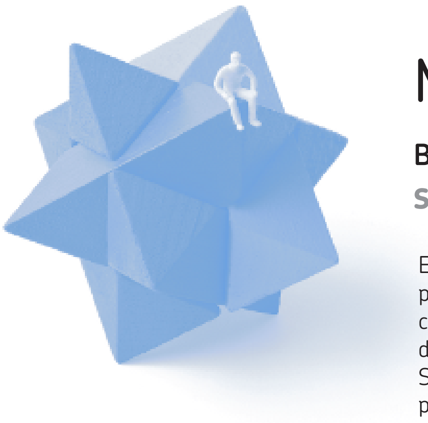


Matemáticas 3 ESO

Biblioteca del profesorado

SOLUCIONARIO

El Solucionario de **Matemáticas** para 3.º de ESO es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Enrique Juan Redal**.

En su realización ha participado el siguiente equipo:

Ana María Gaztelu
Augusto González

EDICIÓN
Angélica Escoredo
Pilar García
Carlos Pérez

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

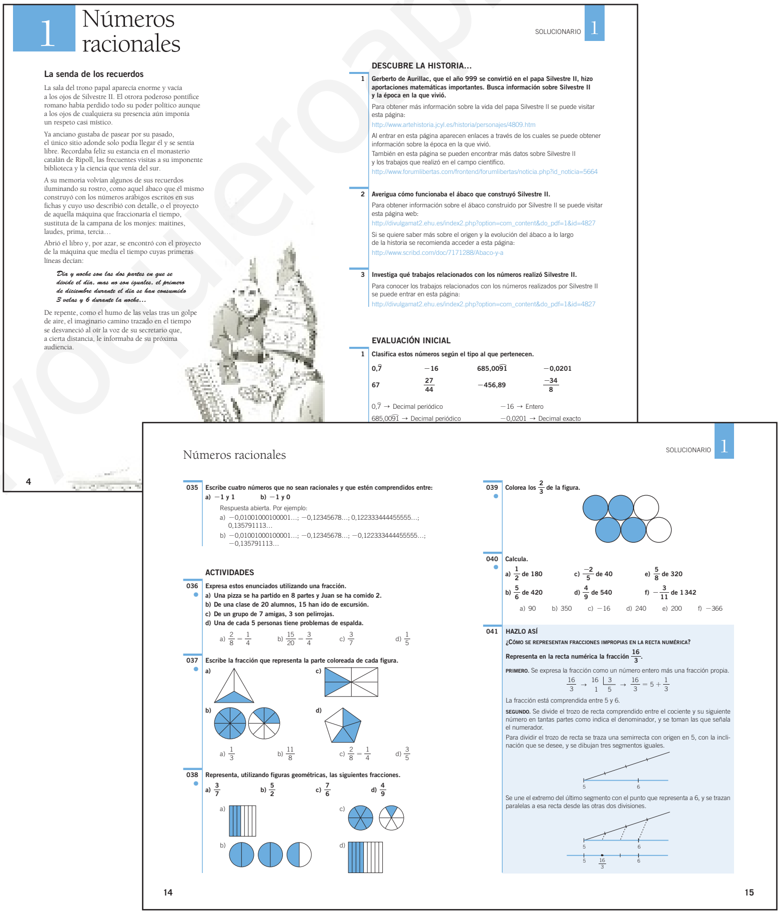
Proyecto **Los Caminos del Saber**

Santillana

Presentación

El nombre de la serie, **Los Caminos del Saber**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático, dentro de la etapa obligatoria de la enseñanza, debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.

En este sentido, y considerando las Matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno. Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.



Índice

1 Números racionales

La senda de los recuerdos

La sala del trono papal aparecía enorme y vacía a los ojos de Silvestre II. El otrora poderoso pontífice romano había perdido todo su poder político aunque a los ojos de cualquiera su presencia aún imponía un respeto casi místico.

Ya anciano gustaba de pasear por su pasado, el único sitio adonde solo podía llegar él y se sentía libre. Recordaba feliz su estancia en el monasterio catalán de Ripoll, las frecuentes visitas a su imponente biblioteca y la ciencia que venía del sur.

A su memoria volvían algunos de sus recuerdos iluminando su rostro, como aquel ábaco que él mismo construyó con los números arábigos escritos en sus fichas y cuyo uso describió con detalle, o el proyecto de aquella máquina que fraccionaría el tiempo, sustituta de la campana de los monjes: maitines, laudes, prima, tercia…

Abrió el libro y, por azar, se encontró con el proyecto de la máquina que medía el tiempo cuyas primeras líneas decían:

> *Día y noche son las dos partes en que se divide el día, mas no son iguales, el primero de diciembre durante el día se han consumido 3 velas y 6 durante la noche…*

De repente, como el humo de las velas tras un golpe de aire, el imaginario camino trazado en el tiempo se desvaneció al oír la voz de su secretario que, a cierta distancia, le informaba de su próxima audiencia.

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Gerberto de Aurillac, que el año 999 se convirtió en el papa Silvestre II, hizo aportaciones matemáticas importantes. Busca información sobre Silvestre II y la época en la que vivió.**

Para obtener más información sobre la vida del papa Silvestre II se puede visitar esta página:

http://www.artehistoria.jcyl.es/historia/personajes/4809.htm

Al entrar en esta página aparecen enlaces a través de los cuales se puede obtener información sobre la época en la que vivió.
También en esta página se pueden encontrar más datos sobre Silvestre II y los trabajos que realizó en el campo científico.

http://www.forumlibertas.com/frontend/forumlibertas/noticia.php?id_noticia=5664

2 **Averigua cómo funcionaba el ábaco que construyó Silvestre II.**

Para obtener información sobre el ábaco construido por Silvestre II se puede visitar esta página web:

http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=4827

Si se quiere saber más sobre el origen y la evolución del ábaco a lo largo de la historia se recomienda acceder a esta página:

http://www.scribd.com/doc/7171288/Abaco-y-a

3 **Investiga qué trabajos relacionados con los números realizó Silvestre II.**

Para conocer los trabajos relacionados con los números realizados por Silvestre II se puede entrar en esta página:

http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=4827

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Clasifica estos números según el tipo al que pertenecen.**

$0,\widehat{7}$	-16	$685,00\widehat{91}$	$-0,0201$
67	$\frac{27}{44}$	$-456,89$	$\frac{-34}{8}$

$0,\widehat{7}$ → Decimal periódico

-16 → Entero

$685,00\widehat{91}$ → Decimal periódico

$-0,0201$ → Decimal exacto

67 → Entero

$\frac{27}{44} = 0,61\widehat{36}$ → Decimal periódico

$-456,89$ → Decimal exacto

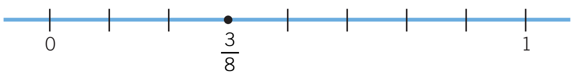
$\frac{-34}{8} = -4,25$ → Decimal exacto

2 **Representa las siguientes fracciones en la recta numérica.**

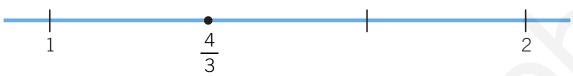
a) $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{32}{12}$

b) $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{-24}{15}$

a)



b) $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$



c) $\frac{32}{12} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

d) $\frac{-24}{15} = \frac{-8}{5} = -1 - \frac{3}{5}$

3 **Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de estos números.**

a) 16 y 64 **b) 46 y 124** **c) 108 y 11**

a) $16 = 2^4$ $64 = 2^6$
m.c.d. $(16, 64) = 2^4$
m.c.m. $(16, 64) = 2^6$

b) $46 = 2 \cdot 23$ $124 = 2^2 \cdot 31$
m.c.d. $(46, 124) = 2$
m.c.m. $(46, 124) = 2^2 \cdot 23 \cdot 31$

c) $108 = 2^2 \cdot 3^3$ $11 = 11$
m.c.d. $(108, 11) = 1$
m.c.m. $(108, 11) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$

EJERCICIOS

001 **Calcula.**

a) $\frac{4}{5}$ **de 450** **b)** $\frac{3}{7}$ **de 350**

a) $\frac{4}{5} \cdot 450 = 360$ b) $\frac{3}{7} \cdot 350 = 150$

002 **Comprueba si son equivalentes.**

a) $\frac{7}{2}$ **y** $\frac{21}{6}$

b) $\frac{12}{60}$ **y** $\frac{10}{25}$

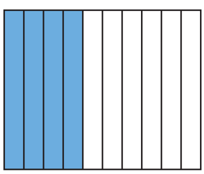
a) Son equivalentes, ya que: $7 \cdot 6 = 42 = 2 \cdot 21$

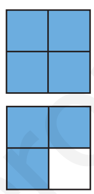
b) No son equivalentes, pues: $12 \cdot 25 = 300 \neq 600 = 60 \cdot 10$

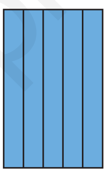
003 **Representa como partes de la unidad.**

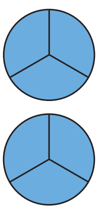
a) $\frac{4}{10}$ **c)** $\frac{5}{5}$

b) $\frac{7}{4}$ **d)** $\frac{6}{3}$

a) 

b) 

c) 

d) 

004 **Escribe fracciones cuyo valor numérico sea:**

a) 2 **c)** $0,5$

b) -2 **d)** $1,5$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{14}{7} = 2$ c) $\frac{1}{2} = 0,5$

b) $\frac{-6}{3} = -2$ d) $\frac{3}{2} = 1,5$

005 **Escribe dos fracciones equivalentes a cada una de las siguientes por amplificación y otras dos por simplificación.**

a) $\frac{120}{60}$ **b)** $\frac{690}{360}$ **c)** $\frac{12}{28}$

	AMPLIFICACIÓN	SIMPLIFICACIÓN
a)	$\frac{120}{60} = \frac{240}{120} = \frac{360}{180}$	$\frac{120}{60} = \frac{60}{30} = \frac{40}{20}$
b)	$\frac{690}{360} = \frac{1\,380}{720} = \frac{2\,070}{1\,080}$	$\frac{690}{360} = \frac{230}{120} = \frac{69}{36}$
c)	$\frac{12}{28} = \frac{24}{56} = \frac{36}{84}$	$\frac{12}{28} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

006 **Calcula la fracción irreducible de estas fracciones.**

a) $\frac{18}{40}$ **b)** $\frac{60}{75}$ **c)** $\frac{42}{56}$

a) m.c.d. (18, 40) $= 2 \longrightarrow \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

b) m.c.d. (60, 75) $= 15 \rightarrow \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$

c) m.c.d. (42, 56) $= 14 \rightarrow \frac{42}{56} = \frac{3}{4}$

007 **Halla fracciones de denominador 100 que sean equivalentes a las fracciones** $\frac{13}{25}$, $\frac{39}{50}$ **y** $\frac{11}{20}$.

$\frac{13}{25} = \frac{52}{100}$ $\frac{39}{50} = \frac{78}{100}$ $\frac{11}{20} = \frac{55}{100}$

008 **Escribe una fracción. ¿Puedes amplificarla? ¿Y simplificarla? ¿Cuántas veces podemos amplificar una fracción? ¿Y simplificarla?**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Una fracción se puede amplificar multiplicando su numerador y su denominador por un mismo número, distinto de cero, y se puede simplificar dividiendo su numerador y su denominador por un divisor común a ambos.

Una fracción se puede amplificar todo lo que se quiera y se puede simplificar hasta obtener la fracción irreducible correspondiente.

009 **Ordena, de menor a mayor.**

a) $\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ **y** $\frac{11}{30}$ **b)** $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{7}$ **y** $\frac{4}{9}$

a) m.c.m. (9, 3, 5, 30) $= 90$

$$\frac{4}{9} = \frac{40}{90}, \frac{1}{3} = \frac{30}{90}, \frac{2}{5} = \frac{36}{90}, \frac{11}{30} = \frac{33}{90} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{11}{30} < \frac{2}{5} < \frac{4}{9}$$

b) m.c.m. (5, 4, 7, 9) $= 1\,260$

$$\frac{3}{5} = \frac{756}{1\,260}, \frac{3}{4} = \frac{945}{1\,260}, \frac{3}{7} = \frac{540}{1260}, \frac{4}{9} = \frac{560}{1\,260}$$

$$\frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

010 **Ordena, de menor a mayor: $\frac{5}{9}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{8}{5}$ y $\frac{6}{7}$**

m.c.m. (9, 3, 4, 5, 7) = 1 260

$$\frac{5}{9} = \frac{700}{1\,260}, \frac{-2}{3} = \frac{-840}{1\,260}, \frac{-3}{4} = \frac{-945}{1\,260}, \frac{8}{5} = \frac{2\,016}{1\,260}, \frac{6}{7} = \frac{1\,080}{1\,260}$$

$$\frac{-3}{4} < \frac{-2}{3} < \frac{5}{9} < \frac{6}{7} < \frac{8}{5}$$

011 **¿Cuánto tiene que valer *a* para que $\frac{a}{5} > \frac{7}{5}$?**

a debe ser cualquier número mayor que 7: $a > 7$

012 **Calcula.**

a) $\frac{7}{8} + \frac{3}{8}$ **b) $5 + \frac{7}{8}$** **c) $\frac{5}{3} - \frac{4}{3}$** **d) $4 - \frac{8}{3}$**

a) $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

b) $5 + \frac{7}{8} = \frac{40}{8} + \frac{7}{8} = \frac{47}{8}$

c) $\frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

d) $4 - \frac{8}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

013 **Realiza estos productos.**

a) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3}$ **b) $(-4) \cdot \frac{11}{2}$**

a) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{84}{15} = \frac{28}{5}$

b) $(-4) \cdot \frac{11}{2} = \frac{-44}{2} = -22$

014 **Haz las siguientes operaciones.**

a) $-\frac{7}{2} + \frac{9}{4} - \frac{5}{8}$ **b) $-5 - \frac{9}{4} - \frac{3}{14}$**

a) $-\frac{7}{2} + \frac{9}{4} - \frac{5}{8} = -\frac{28}{8} + \frac{18}{8} - \frac{5}{8} = \frac{-15}{8}$

b) $-5 - \frac{9}{4} - \frac{3}{14} = -\frac{140}{28} - \frac{63}{28} - \frac{6}{28} = \frac{209}{28}$

015 **Completa con una fracción.**

a) $\frac{1}{3} + \square = \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{7} - \square = \frac{-1}{21}$

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{12} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{-1}{12} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{7} + \frac{1}{21} = \frac{10}{21} \rightarrow \frac{3}{7} - \frac{10}{21} = \frac{-1}{21}$

016 **Realiza las divisiones.**

a) $\frac{9}{5} : \frac{4}{7}$ **c)** $4 : \frac{7}{2}$

b) $\frac{8}{11} : \frac{3}{5}$ **d)** $\frac{10}{9} : (-5)$

a) $\frac{9}{5} : \frac{4}{7} = \frac{63}{20}$

b) $\frac{8}{11} : \frac{3}{5} = \frac{40}{33}$

c) $4 : \frac{7}{2} = \frac{8}{7}$

d) $\frac{10}{9} : (-5) = \frac{10}{-45} = -\frac{2}{9}$

017 **Calcula.**

a) $\frac{5}{9} + \left(\frac{7}{5} - \frac{4}{15}\right)$ **b)** $\frac{4}{25} - \left(\frac{8}{2} - \frac{7}{20}\right)$

a) $\frac{5}{9} + \left(\frac{7}{5} - \frac{4}{15}\right) = \frac{5}{9} + \frac{17}{15} = \frac{76}{45}$

b) $\frac{4}{25} - \left(\frac{8}{2} - \frac{7}{20}\right) = \frac{4}{25} - \frac{73}{20} = \frac{349}{100}$

018 **Opera.**

a) $-\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right)$ **b)** $\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{6} + \frac{8}{9}\right) : \left(-\frac{6}{5}\right)$

a) $-\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) = \frac{-7}{3} \cdot \frac{51}{60} = \frac{-357}{180}$

b) $\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{6} + \frac{8}{9}\right) : \left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{83}{36} : \left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{-415}{216}$

019 **Completa con una fracción para que estas igualdades sean ciertas.**

a) $\frac{3}{5} : \square = \frac{21}{20}$ **b)** $\square : \frac{3}{5} = \frac{6}{3}$

a) $\frac{3}{5} : \frac{21}{20} = \frac{60}{105} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{6}{5} : \frac{3}{5} = \frac{30}{15} = \frac{6}{3}$

020 **Indica la parte entera, la parte decimal, el período y el anteperíodo.**

a) 0,333...
b) 234,4562525...
c) 3,37888...
d) 0,012333...

a) Parte entera: 0
Período: 3

b) Parte entera: 234
Anteperíodo: 456
Período: 25

c) Parte entera: 3
Anteperíodo: 37
Período: 8

d) Parte entera: 0
Anteperíodo: 012
Período: 3

021 **Clasifica estos números.**

a) 0,333... **b) 34,45666...** **c) 125,6**

a) Decimal periódico puro.
b) Decimal periódico mixto.
c) Decimal exacto.

022 **Completa hasta diez cifras decimales.**

a) 1,347347...
b) 2,7474...
c) 3,2666...
d) 0,253737...

a) 1,3473473473…
b) 2,7474747474…
c) 3,2666666666…
d) 0,2537373737…

023 **Escribe dos números decimales no exactos y no periódicos.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: 2,12345678… y 56,12112111211112…

024 **Sin realizar la división, clasifica estas fracciones según se expresen como un número entero, decimal exacto o periódico. Explica cómo lo haces.**

a) $\frac{5}{3}$ **b)** $\frac{7}{6}$ **c)** $\frac{9}{5}$ **d)** $\frac{175}{25}$ **e)** $\frac{111}{240}$ **f)** $\frac{17}{6}$ **g)** $\frac{-85}{17}$ **h)** $\frac{-84}{210}$ **i)** $\frac{346}{222}$

a) Decimal periódico.
b) Decimal periódico.
c) Decimal exacto.
d) Entero.
e) $\frac{111}{240} = \frac{37}{80}$ → Decimal exacto.
f) Decimal periódico.
g) Entero.
h) $\frac{-84}{210} = \frac{-2}{5}$ → Decimal exacto.
i) $\frac{346}{222} = \frac{173}{111}$ → Decimal periódico.

025 **Escribe dos fracciones que expresen:**

a) Un número entero.

b) Un número decimal exacto.

c) Un número decimal periódico.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{4}{2}$ y $\frac{20}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ y $\frac{8}{35}$

026 **Una fracción cuyo numerador no es múltiplo del denominador, y el denominador tiene factores distintos de 2 y 5, ¿qué tipo de número decimal expresa?**

Expresa un número decimal periódico, ya que no es entero y los factores del denominador son distintos de 2 y 5.

027 **Obtén la fracción generatriz de estos números decimales.**

a) 3,54

b) 9,87

c) 0,000004

d) 24,75

e) $-7{,}002$

f) $0{,}\widehat{8}$

g) $0{,}\widehat{7}$

h) $5{,}\widehat{211}$

i) $37{,}\widehat{117}$

j) $-2{,}\widehat{02}$

a) $\frac{354}{100}=\frac{177}{50}$

b) $\frac{987}{100}$

c) $\frac{4}{1\,000\,000}=\frac{1}{250\,000}$

d) $\frac{2\,475}{100}=\frac{99}{4}$

e) $\frac{-7\,002}{1\,000}=\frac{-3\,501}{500}$

f) $\frac{8}{9}$

g) $\frac{7}{9}$

h) $\frac{5\,206}{999}$

i) $\frac{4\,120}{111}$

j) $\frac{-200}{99}$

028 **Expresa en forma de fracción.**

a) $3{,}\widehat{9}$ **b) $17{,}\widehat{9}$** **c) $15{,}\widehat{9}$**

¿A qué equivale el período formado por 9?

a) $\frac{36}{9}=4$ b) $\frac{162}{9}=18$ c) $\frac{144}{9}=16$

El número decimal periódico puro con período 9 equivale al número entero inmediatamente superior.

029 **Completa.** **a) $5{,}33=\frac{533}{\square}$** **b) $5{,}6=\frac{\square}{5}$**

a) $5{,}33=\frac{533}{100}$ b) $5{,}6=\frac{28}{5}$

030 **Obtén la fracción generatriz de estos números.**

a) $3,2\widehat{4}$ **b)** $11,8\widehat{7}$ **c)** $5,9\widehat{25}$

a) $\dfrac{292}{90}$ b) $\dfrac{1\,069}{90}$ c) $\dfrac{5\,866}{990}$

031 **Calcula, utilizando fracciones generatrices.**

a) $2,75 + 3,8$ **b)** $5,0\widehat{6} - 2,9\widehat{5}$

a) $\dfrac{275}{100} + \dfrac{38}{10} = \dfrac{275 + 380}{100} = \dfrac{655}{100} = 6,55$

b) $\dfrac{456}{90} - \dfrac{266}{90} = \dfrac{190}{90} = 2,\widehat{1}$

032 **Razona, sin hallar la fracción generatriz, por qué son falsas las igualdades.**

a) $0,2\widehat{43} = \dfrac{241}{999}$ **b)** $0,0\widehat{23} = \dfrac{321}{990}$ **c)** $12,3\widehat{7} = \dfrac{55}{45}$ **d)** $0,12\widehat{4} = \dfrac{56}{495}$

a) Es falsa, porque el denominador debe ser 990, siendo 99 del período y 0 del anteperíodo.

b) Es falsa, porque el numerador no puede ser mayor que la parte entera, el período y el anteperíodo juntos, en este caso 23.

c) Es falsa, porque el cociente es menor que 2 ($55 < 2 \cdot 45$) y el número es mayor que 12.

d) Es falsa, porque el denominador debe ser divisor de 900 y no lo es.

033 **Completa esta tabla, teniendo en cuenta que un número puede estar en más de una casilla.**

−0,224466881010... **−1,897897897...** **24**

0,67543 **−3,0878787...** **−1,5**

Número natural	Número entero	Decimal exacto	Decimal periódico	Decimal no exacto y no periódico	Número racional
24	24	0,67543	−1,897897897…	−0,224466881010…	0,67543
		−1,5	−3,0878787…		−1,897897897…
					−3,0878787…
					24
					−1,5

034 **Escribe cuatro fracciones que representen números racionales que sean:**

a) Menores que 1 y mayores que −1. **b) Mayores que −1 y menores que 0.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\dfrac{-7}{9}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{48}{65}$ b) $\dfrac{-5}{9}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-2}{5}, \dfrac{-51}{65}$

035 **Escribe cuatro números que no sean racionales y que estén comprendidos entre:**

a) -1 **y** 1 **b)** -1 **y** 0

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $-0{,}01001000100001\ldots$; $-0{,}12345678\ldots$; $0{,}122333444455555\ldots$; $0{,}135791113\ldots$

b) $-0{,}01001000100001\ldots$; $-0{,}12345678\ldots$; $-0{,}122333444455555\ldots$; $-0{,}135791113\ldots$

ACTIVIDADES

036 **Expresa estos enunciados utilizando una fracción.**

a) Una pizza se ha partido en 8 partes y Juan se ha comido 2.

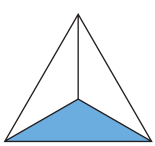
b) De una clase de 20 alumnos, 15 han ido de excursión.

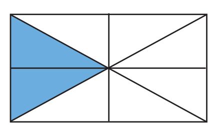
c) De un grupo de 7 amigas, 3 son pelirrojas.

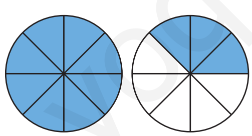
d) Una de cada 5 personas tiene problemas de espalda.

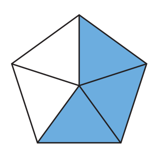
a) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{1}{5}$

037 **Escribe la fracción que representa la parte coloreada de cada figura.**

a)


c)


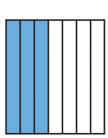
b)


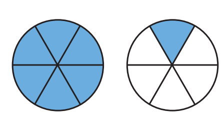
d)


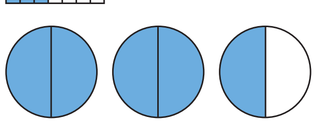
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{11}{8}$ c) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{5}$

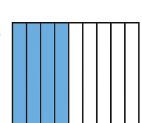
038 **Representa, utilizando figuras geométricas, las siguientes fracciones.**

a) $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{7}{6}$ **d)** $\frac{4}{9}$

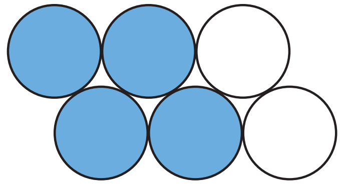
a)


c)


b)


d)


039 Colorea los $\frac{2}{3}$ de la figura.



040 Calcula.

a) $\frac{1}{2}$ de 180 c) $\frac{-2}{5}$ de 40 e) $\frac{5}{8}$ de 320

b) $\frac{5}{6}$ de 420 d) $\frac{4}{9}$ de 540 f) $-\frac{3}{11}$ de 1 342

a) 90 b) 350 c) -16 d) 240 e) 200 f) -366

041 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REPRESENTAN FRACCIONES IMPROPIAS EN LA RECTA NUMÉRICA?

Representa en la recta numérica la fracción $\frac{16}{3}$.

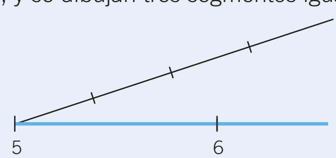
PRIMERO. Se expresa la fracción como un número entero más una fracción propia.

$$\frac{16}{3} \rightarrow \begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \rightarrow \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$$

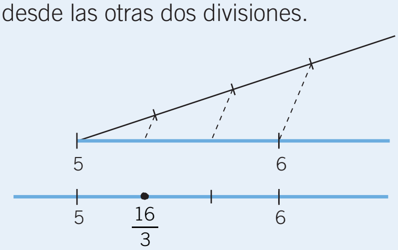
La fracción está comprendida entre 5 y 6.

SEGUNDO. Se divide el trozo de recta comprendido entre el cociente y su siguiente número en tantas partes como indica el denominador, y se toman las que señala el numerador.

Para dividir el trozo de recta se traza una semirrecta con origen en 5, con la inclinación que se desee, y se dibujan tres segmentos iguales.



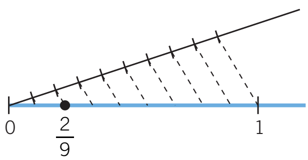
Se une el extremo del último segmento con el punto que representa a 6, y se trazan paralelas a esa recta desde las otras dos divisiones.



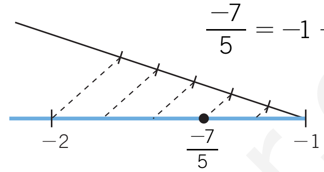
042 Representa estos números racionales.

a) $\dfrac{2}{9}$ b) $\dfrac{13}{3}$ c) $\dfrac{-7}{5}$ d) $\dfrac{-28}{-8}$

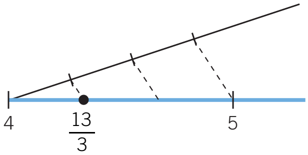
a)



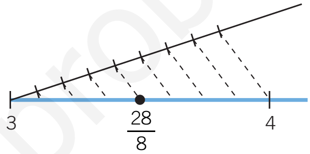
c) $\dfrac{-7}{5} = -1 - \dfrac{2}{5}$



b) $\dfrac{13}{3} = 4 + \dfrac{1}{3}$

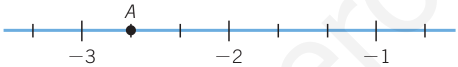


d) $\dfrac{-28}{-8} = \dfrac{28}{8} = 3 + \dfrac{4}{8}$



043 ¿Qué fracción representa cada letra?

a)



b)

c)

a) $-2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{-8}{3}$ b) $1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$ c) $6 + \dfrac{2}{6} = \dfrac{38}{6}$

044 Indica si son o no equivalentes estos pares de fracciones.

a) $\dfrac{3}{10}$ y $\dfrac{21}{7}$

b) $\dfrac{-1}{7}$ y $\dfrac{-14}{30}$

c) $\dfrac{6}{10}$ y $\dfrac{3}{8}$

d) $\dfrac{-2}{3}$ y $\dfrac{-4}{5}$

e) $\dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{8}{20}$

f) $\dfrac{20}{50}$ y $\dfrac{120}{450}$

a) $3 \cdot 7 \neq 10 \cdot 21$. No son equivalentes.

b) $-1 \cdot 30 \neq 7 \cdot (-14)$. No son equivalentes.

c) $6 \cdot 8 \neq 10 \cdot 3$. No son equivalentes.

d) $-2 \cdot 5 \neq 3 \cdot (-4)$. No son equivalentes.

e) $2 \cdot 20 = 5 \cdot 8$. Sí son equivalentes.

f) $20 \cdot 450 \neq 50 \cdot 120$. No son equivalentes.

045 Calcula el valor de *x* para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{10}{4} = \frac{x}{6}$ b) $\frac{9}{x} = \frac{6}{4}$ c) $\frac{x}{12} = \frac{6}{9}$ d) $\frac{14}{42} = \frac{x}{9}$

a) $x = \frac{10 \cdot 6}{4} = 15$

c) $x = \frac{12 \cdot 6}{9} = 8$

b) $x = \frac{9 \cdot 4}{6} = 6$

d) $x = \frac{14 \cdot 9}{42} = 3$

046 Completa.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{\square} = \frac{\square}{6} = \frac{\square}{30} = \frac{30}{\square}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \frac{30}{45}$$

047 Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{20}{40} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{-10}{-5} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{-3}{6}$$

$\frac{20}{40}$ y $\frac{2}{4}$ $\quad$ $\frac{4}{2}$ y $\frac{-10}{-5}$ $\quad$ $\frac{-1}{2}$ y $\frac{-3}{6}$

048 Obtén dos fracciones equivalentes a cada una de las dadas por amplificación y otras dos por simplificación.

$$\frac{8}{100} \quad \frac{60}{36} \quad \frac{30}{45} \quad \frac{504}{72}$$

Amplificación: $\frac{8}{100} = \frac{16}{200} = \frac{24}{300}$

Amplificación: $\frac{30}{45} = \frac{300}{450} = \frac{600}{900}$

Simplificación: $\frac{8}{100} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

Simplificación: $\frac{30}{45} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Amplificación: $\frac{60}{36} = \frac{300}{180} = \frac{600}{360}$

Amplificación: $\frac{504}{72} = \frac{1\,008}{144} = \frac{1\,512}{216}$

Simplificación: $\frac{60}{36} = \frac{30}{18} = \frac{10}{6}$

Simplificación: $\frac{504}{72} = \frac{252}{36} = \frac{126}{18}$

049 Amplifica las siguientes fracciones, de forma que el denominador de la fracción amplificada sea un número mayor que 300 y menor que 400.

a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{27}{52}$ c) $\frac{3}{11}$ d) $\frac{-3}{37}$ e) $\frac{3}{8}$ f) $\frac{-11}{5}$

a) $\frac{100}{360}$

c) $\frac{90}{330}$

e) $\frac{120}{320}$

b) $\frac{162}{312}$

d) $\frac{-30}{370}$

f) $\frac{-770}{350}$

050 Simplifica hasta obtener la fracción irreducible de estas fracciones.

a) $\frac{20}{40}$ d) $\frac{15}{12}$ g) $\frac{55}{11}$

b) $\frac{210}{8}$ e) $\frac{16}{18}$ h) $\frac{30}{21}$

c) $\frac{8}{18}$ f) $\frac{40}{60}$ i) $\frac{6}{18}$

a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{4}$ g) $\frac{5}{1} = 5$

b) $\frac{105}{4}$ e) $\frac{8}{9}$ h) $\frac{10}{7}$

c) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{2}{3}$ i) $\frac{1}{3}$

051 Señala cuáles de estas simplificaciones de fracciones están mal hechas y razona por qué.

a) $\frac{22}{13} = \frac{\cancel{11} + 11}{\cancel{11} + 2} = \frac{11}{2}$ c) $\frac{20}{18} = \frac{\cancel{15} + 5}{\cancel{15} + 3} = \frac{5}{3}$

b) $\frac{22}{14} = \frac{\cancel{2} \cdot 11}{\cancel{2} \cdot 7} = \frac{11}{7}$ d) $\frac{40}{80} = \frac{40 : \cancel{20}}{80 : \cancel{20}} = \frac{2}{4}$

a) Mal, pues no se pueden simplificar sumandos del numerador y del denominador.

b) Bien.

c) Mal, ya que no se pueden simplificar sumandos del numerador y del denominador.

d) Bien, aunque se podría simplificar más.

052 Escribe una fracción equivalente a $\frac{1}{5}$ y otra equivalente a $\frac{4}{6}$, ambas con el mismo denominador.

m.c.m. $(5, 6) = 30 \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{6}{30}$ y $\frac{4}{6} = \frac{20}{30}$

053 Ordena, de mayor a menor.

a) $\frac{4}{9}, \frac{-7}{8}$ d) $\frac{-4}{6}, \frac{-21}{6}, \frac{-5}{12}$

b) $\frac{-11}{8}, \frac{-7}{8}$ e) $\frac{-43}{60}, \frac{10}{40}, \frac{-8}{10}$

c) $\frac{3}{8}, \frac{10}{24}, \frac{20}{48}$ f) $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{8}{35}, \frac{1}{2}$

a) $\frac{4}{9} > \frac{-7}{8}$

b) $\frac{-7}{8} > \frac{-11}{8}$

c) $\frac{3}{8} = \frac{18}{48}, \frac{10}{24} = \frac{20}{48} \rightarrow \frac{10}{24} = \frac{20}{48} > \frac{3}{8}$

d) $\frac{-4}{6} = \frac{-8}{12}, \frac{-21}{6} = \frac{-42}{12} \rightarrow \frac{-5}{12} > \frac{-4}{6} > \frac{-21}{6}$

e) $\frac{10}{40} = \frac{15}{60}, \frac{-8}{10} = \frac{-48}{60} \rightarrow \frac{10}{40} > \frac{-43}{60} > \frac{-8}{10}$

f) $\frac{2}{5} = \frac{28}{70}, \frac{4}{7} = \frac{40}{70}, \frac{8}{35} = \frac{16}{70}, \frac{1}{2} = \frac{35}{70} \rightarrow \frac{4}{7} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{8}{35}$

054 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE OBTIENE UNA FRACCIÓN COMPRENDIDA ENTRE DOS FRACCIONES?

Encuentra y escribe una fracción comprendida entre las fracciones $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{6}$.

PRIMERO. Se suman ambas fracciones.

$$\frac{4}{9} + \frac{7}{6} = \frac{8}{18} + \frac{21}{18} = \frac{29}{18}$$

SEGUNDO. Se divide entre 2 la fracción obtenida.

$$\frac{29}{18} : 2 = \frac{29}{36}$$

La fracción $\frac{29}{36}$ está comprendida entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{6}$.

055 **Escribe una fracción comprendida entre:**

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{8}$ **c)** $\frac{7}{6}$ y $\frac{8}{6}$ **e)** $\frac{-1}{6}$ y $\frac{1}{5}$

b) $\frac{9}{7}$ y $\frac{11}{9}$ **d)** $-\frac{3}{7}$ y $-\frac{2}{5}$ **f)** $-\frac{5}{9}$ y $-\frac{6}{9}$

a) $\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{8}\right) : 2 = \frac{67}{80}$

b) $\left(\frac{9}{7} + \frac{11}{9}\right) : 2 = \frac{158}{126}$

c) $\left(\frac{7}{6} + \frac{8}{6}\right) : 2 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

d) $\left[-\frac{3}{7} + \left(-\frac{2}{5}\right)\right] : 2 = \frac{-29}{70}$

e) $\left(\frac{-1}{6} + \frac{1}{5}\right) : 2 = \frac{1}{60}$

f) $\left[-\frac{5}{9} + \left(-\frac{6}{9}\right)\right] : 2 = \frac{-11}{18}$

056 Calcula.

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{2}+2+\frac{8}{6}$ c) $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}$ d) $9+\frac{5}{7}-\frac{6}{7}$

a) $\frac{8}{4}$

b) $\frac{21}{6}+\frac{12}{6}+\frac{8}{6}=\frac{41}{6}$

c) $\frac{-7}{2}$

d) $\frac{63}{7}+\frac{5}{7}-\frac{6}{7}=\frac{62}{7}$

057 Haz las siguientes restas.

a) $\frac{33}{11}-\frac{10}{11}$ b) $\frac{5}{10}-\frac{1}{15}$ c) $\frac{3}{2}-\frac{1}{7}-\frac{2}{12}$ d) $\frac{7}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{11}$

a) $\frac{23}{11}$

b) $\frac{15}{30}-\frac{2}{30}=\frac{13}{30}$

c) $\frac{126}{84}-\frac{12}{84}-\frac{14}{84}=\frac{100}{84}$

d) $\frac{154}{66}-\frac{33}{66}-\frac{6}{66}=\frac{115}{66}$

058 Calcula.

a) $\frac{25}{7}+\frac{11}{7}-\frac{2}{7}$ c) $\frac{10}{11}+\frac{10}{7}-\frac{12}{11}$ e) $1+\frac{1}{12}-\frac{5}{13}$

b) $\frac{5}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{3}$ d) $4-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}$ f) $3-\frac{1}{21}-\frac{1}{7}+\frac{2}{9}$

a) $\frac{34}{7}$

b) $\frac{150}{210}-\frac{21}{210}+\frac{70}{210}=\frac{199}{210}$

c) $\frac{70}{77}+\frac{110}{77}-\frac{84}{77}=\frac{96}{77}$

d) $\frac{24}{6}-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}=\frac{30}{6}=5$

e) $\frac{156}{156}+\frac{13}{156}-\frac{60}{156}=\frac{109}{156}$

f) $\frac{189}{63}-\frac{3}{63}-\frac{9}{63}+\frac{14}{63}=\frac{191}{63}$

059 Opera.

a) $\frac{3}{2}+\frac{5}{16}-\frac{3}{8}$ c) $\frac{-2}{5}+\frac{3}{4}-1$ e) $\frac{9}{12}+\frac{5}{8}-8$

b) $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}$ d) $\frac{7}{15}-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$ f) $-\frac{6}{7}-3-\frac{7}{3}$

a) $\frac{24}{16}+\frac{5}{16}-\frac{6}{16}=\frac{23}{16}$

b) $\frac{10}{12}+\frac{20}{12}+\frac{15}{12}=\frac{45}{12}=\frac{15}{4}$

c) $\frac{-8}{20}+\frac{15}{20}-\frac{20}{20}=\frac{-13}{20}$

d) $\frac{14}{30}-\frac{20}{30}-\frac{5}{30}=\frac{-11}{30}$

e) $\frac{18}{24}+\frac{15}{24}-\frac{192}{24}=\frac{-159}{24}$

f) $-\frac{18}{21}-\frac{63}{21}-\frac{49}{21}=\frac{-130}{21}$

060 **Efectúa estas operaciones.**

a) $\dfrac{-5}{16}+\dfrac{-2}{16}$ c) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1}{9}+\dfrac{2}{18}$ e) $\dfrac{7}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{5}{14}$

b) $\dfrac{5}{7}+\dfrac{-1}{10}$ d) $5+\dfrac{10}{11}+\dfrac{10}{7}$ f) $\dfrac{13}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{11}{9}$

a) $\dfrac{-7}{16}$

b) $\dfrac{50}{70}+\dfrac{-7}{70}=\dfrac{43}{70}$

c) $\dfrac{9}{18}+\dfrac{-2}{18}+\dfrac{2}{18}=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{385}{77}+\dfrac{70}{77}+\dfrac{110}{77}=\dfrac{565}{77}$

e) $\dfrac{588}{924}+\dfrac{77}{924}+\dfrac{330}{924}=\dfrac{995}{924}$

f) $\dfrac{1\,521}{1\,287}+\dfrac{99}{1\,287}+\dfrac{1\,573}{1\,287}=\dfrac{3\,193}{1\,287}$

061 **Completa los huecos.**

a) $\dfrac{1}{3}+\boxed{}=\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{7}+\dfrac{3}{8}+\boxed{}=\dfrac{3}{9}$

b) $\dfrac{4}{5}-\boxed{}=\dfrac{4}{6}$ d) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}-\boxed{}=\dfrac{1}{6}$

a) $\boxed{}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

b) $\boxed{}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{15}$

c) $\boxed{}=\dfrac{3}{9}-\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{-79}{504}$

d) $\boxed{}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{-7}{60}$

062 **Realiza estos productos.**

a) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{6}{5}$ b) $\dfrac{5}{14}\cdot 8$ c) $\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{10}{3}$ d) $21\cdot\dfrac{4}{9}$

a) $\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{40}{14}=\dfrac{20}{7}$ c) $\dfrac{70}{6}=\dfrac{35}{3}$ d) $\dfrac{84}{9}=\dfrac{28}{3}$

063 **Opera.**

a) $\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{3}{6}$ c) $\dfrac{9}{6}\cdot\dfrac{3}{7}$ e) $\dfrac{9}{7}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot 3$

b) $\dfrac{2}{9}\cdot\left(-\dfrac{7}{4}\right)$ d) $\left(-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{6}\right)$ f) $\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{11}{3}$

a) $\dfrac{36}{30}=\dfrac{6}{5}$

b) $-\dfrac{14}{36}=-\dfrac{7}{18}$

c) $\dfrac{27}{42}=\dfrac{9}{14}$

d) $\dfrac{3}{24}=\dfrac{1}{8}$

e) $\dfrac{162}{35}$

f) $\dfrac{9\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{11}}{4\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{3}}=\dfrac{9}{4}$

064 Calcula.

a) $\frac{5}{8} : \frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{12} : \frac{7}{4}$

c) $\frac{9}{5} : \frac{6}{7}$

d) $\frac{8}{15} : \left(\frac{-6}{5}\right)$

a) $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

b) $\frac{20}{84} = \frac{5}{21}$

c) $\frac{63}{30} = \frac{21}{10}$

d) $\frac{-40}{90} = \frac{-4}{9}$

065 Efectúa las divisiones.

a) $\frac{7}{5} : \frac{21}{2}$

b) $8 : \frac{3}{8}$

c) $\frac{11}{3} : 7$

d) $\frac{5}{6} : \left(-\frac{10}{3}\right)$

a) $\frac{14}{105} = \frac{2}{15}$

b) $\frac{64}{3}$

c) $\frac{11}{21}$

d) $-\frac{15}{60} = -\frac{1}{4}$

066 Completa los huecos.

a) $\frac{1}{3} \cdot \square = \frac{1}{4}$

b) $\frac{4}{5} : \square = \frac{-4}{6}$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \square = \frac{3}{9}$

d) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \square = \frac{1}{6}$

e) $(-5) \cdot \square = -\frac{10}{3}$

f) $\frac{4}{5} : \square = -2$

a) $\square = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

b) $\square = \frac{4}{5} : \frac{-4}{6} = \frac{-6}{5}$

c) $\square = \frac{3}{9} : \frac{3}{7} : \frac{3}{8} = \frac{56}{27}$

d) $\square = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

e) $\square = \frac{-10}{3} : (-5) = \frac{2}{3}$

f) $\square = \frac{4}{5} : (-2) = \frac{-2}{5}$

067 **Calcula.**

a) $\frac{4}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3}$ d) $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} : \frac{3}{4} - 1$ g) $\left(9 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{7}{3} + \frac{2}{5}$

b) $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{7}{3}$ e) $9 - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} + \frac{2}{5}$ h) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7}$

c) $2 \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{7} : \frac{3}{4}$ f) $9 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{5}\right)$

a) $\frac{4}{5} - \frac{7}{12} = \frac{48 - 35}{60} = \frac{13}{60}$

b) $\frac{11}{20} \cdot \frac{7}{3} = \frac{77}{60}$

c) $\frac{6}{5} - \frac{16}{21} = \frac{46}{105}$

d) $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$

e) $9 - \frac{7}{12} + \frac{2}{5} = \frac{529}{60}$

f) $9 - \frac{1}{4} \cdot \frac{41}{15} = 9 - \frac{41}{60} = \frac{499}{60}$

g) $\frac{35}{36} \cdot \frac{7}{3} + \frac{2}{5} = \frac{245}{108} + \frac{2}{5} = \frac{1\,441}{540}$

h) $\frac{8}{9} - \frac{3}{35} = \frac{253}{315}$

068 **Realiza las operaciones.**

a) $\frac{7}{6} - \left(\frac{3}{20} + \frac{8}{15}\right)$ d) $\left(\frac{8}{3} : \frac{5}{9}\right) : \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{3}\right)$ g) $\frac{2}{7} + 3 : \frac{21}{35}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{24} - \frac{4}{9}\right)$ e) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{4}$ h) $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} + \frac{7}{5} : \frac{4}{3}$

c) $\frac{8}{5} : \left(\frac{3}{5} + \frac{11}{30}\right)$ f) $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} - \frac{7}{18}$

a) $\frac{7}{6} - \frac{41}{60} = \frac{29}{60}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{-17}{72}\right) = \frac{-17}{90}$

c) $\frac{8}{5} : \frac{7}{30} = \frac{48}{7}$

d) $\frac{72}{15} : \frac{13}{15} = \frac{72}{13}$

e) $\frac{3}{10} - \frac{5}{4} = \frac{-19}{20}$

f) $\frac{4}{3} - \frac{7}{18} = \frac{17}{18}$

g) $\frac{2}{7} + 5 = \frac{37}{7}$

h) $\frac{3}{5} + \frac{21}{20} = \frac{33}{20}$

069 **Señala la parte entera y decimal de los siguientes números.**

a) 0,75 **c)** 1,8989... **e)** 2,161820...

b) 274,369 **d)** 127,4555... **f)** −7,0222...

a) Parte entera: 0 Parte decimal: 75

b) Parte entera: 274 Parte decimal: 369

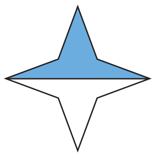
c) Parte entera: 1 Parte decimal: 8989…

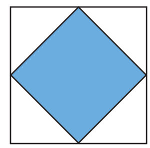
d) Parte entera: 127 Parte decimal: 4555…

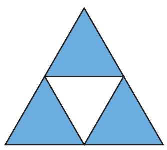
e) Parte entera: 2 Parte decimal: 161820…

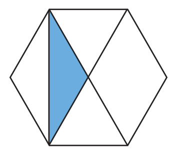
f) Parte entera: −7 Parte decimal: 0222…

070 Expresa, mediante una fracción y mediante un número decimal, la parte coloreada de cada una de las figuras.

a)


c)


b)


d)


a) $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$

b) $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$

c) $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$

d) $\dfrac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$

071 Indica cuáles de los números son periódicos y cuáles no. Señala el período para los que sean periódicos.

a) 1,333...
b) 2,6565...
c) 3,02333...
d) 6,7891011...
e) 0,010101...
f) 1,001002003...

a) Periódico, de período 3.
b) Periódico, de período 65.
c) Periódico, de período 3.
d) No periódico.
e) Periódico, de período 01.
f) No periódico.

072 Clasifica estos números decimales en exactos, periódicos puros, periódicos mixtos o no exactos y no periódicos.

a) 1,052929...
b) 0,89555...
c) −7,606162...
d) 120,8
e) −98,99100101...
f) 13,12345666...
g) −1 001,034034...
h) 0,0000111...
i) −1,732
j) 0,123456777...

a) Periódico mixto.
b) Periódico mixto.
c) No exacto y no periódico.
d) Exacto.
e) No exacto y no periódico.
f) Periódico mixto.
g) Periódico puro.
h) Periódico mixto.
i) Exacto.
j) Periódico mixto.

073 **Razona qué tipo de número: entero, decimal exacto o periódico, expresan las siguientes fracciones.**

a) $\frac{27}{36}$ **c)** $\frac{4}{24}$ **e)** $\frac{-34}{30}$ **g)** $\frac{22}{-1}$ **i)** $\frac{19}{90}$

b) $-\frac{44}{11}$ **d)** $\frac{51}{20}$ **f)** $\frac{15}{21}$ **h)** $\frac{21}{420}$

a) $\frac{27}{36} = \frac{3}{4} \rightarrow$ Decimal exacto, porque el denominador de su fracción irreducible solo tiene 2 como factor.

b) Entero, porque el numerador es múltiplo del denominador.

c) $\frac{4}{24} = \frac{1}{6} \rightarrow$ Decimal periódico, porque el denominador de su fracción irreducible tiene factores distintos de 2 y 5.

d) Decimal exacto, porque el denominador solo tiene como factores 2 y 5.

e) $\frac{-34}{30} = \frac{-17}{15} \rightarrow$ Decimal periódico, porque el denominador de su fracción irreducible tiene factores distintos de 2 y 5.

f) $\frac{15}{21} = \frac{5}{7} \rightarrow$ Decimal periódico, porque el denominador de su fracción irreducible tienen factores distintos de 2 y 5.

g) Entero, porque el numerador es múltiplo del denominador.

h) $\frac{21}{420} = \frac{1}{20} \rightarrow$ Decimal exacto, porque el denominador de su fracción irreducible solo tiene como factores 2 y 5.

i) Decimal periódico, porque el denominador tiene factores distintos de 2 y 5.

074 **Obtén la fracción generatriz.**

a) $5{,}24$ **b)** $1{,}735$ **c)** $3{,}\overset{\frown}{7}$ **d)** $5{,}\overset{\frown}{43}$ **e)** $5{,}1\overset{\frown}{2}$ **f)** $0{,}2\overset{\frown}{35}$

a) $\frac{524}{100} = \frac{131}{25}$

b) $\frac{1\,735}{1\,000} = \frac{347}{200}$

c) $\frac{34}{9}$

d) $\frac{538}{99}$

e) $\frac{461}{90}$

f) $\frac{233}{990}$

075 **Expresa en forma de fracción estos números.**

a) -7 **c)** $-0{,}00182$ **e)** $4{,}\overset{\frown}{07}$ **g)** $9{,}5\overset{\frown}{4}$ **i)** $0{,}01\overset{\frown}{23}$

b) $6{,}05$ **d)** $9{,}\overset{\frown}{6}$ **f)** $-14{,}\overset{\frown}{413}$ **h)** $0{,}3\overset{\frown}{15}$

a) $\frac{-7}{1}$

b) $\frac{605}{100} = \frac{121}{20}$

c) $-\frac{182}{100\,000} = -\frac{91}{50\,000}$

d) $\frac{87}{9} = \frac{29}{3}$

e) $\frac{403}{99}$

f) $-\frac{14\,399}{999}$

g) $\frac{859}{90}$

h) $\frac{312}{990} = \frac{52}{165}$

i) $\frac{122}{9\,900} = \frac{61}{4\,950}$

076 ●

Expresa en forma decimal las fracciones, y en forma fraccionaria, los decimales.

a) $\dfrac{9}{8}$ **f)** $\dfrac{9}{11}$ **k)** $\dfrac{101}{90}$

b) $7{,}35$ **g)** $0{,}278$ **l)** $1{,}0435$

c) $13{,}\widehat{7}$ **h)** $6{,}1\widehat{6}$ **m)** $1{,}\widehat{274}$

d) $8{,}9\widehat{1}$ **i)** $18{,}\widehat{57}$ **n)** $0{,}31\widehat{5}$

e) $\dfrac{48}{10}$ **j)** $2{,}26\widehat{5}$ **ñ)** $0{,}0\widehat{12}$

a) $1{,}125$ f) $0{,}\widehat{81}$ k) $1{,}1\widehat{2}$

b) $\dfrac{735}{100} = \dfrac{147}{20}$ g) $\dfrac{278}{1\,000} = \dfrac{139}{500}$ l) $\dfrac{10\,435}{10\,000} = \dfrac{2\,087}{2\,000}$

c) $\dfrac{124}{9}$ h) $\dfrac{555}{90} = \dfrac{37}{6}$ m) $\dfrac{1\,273}{999}$

d) $\dfrac{802}{90} = \dfrac{401}{45}$ i) $\dfrac{1\,839}{99} = \dfrac{613}{33}$ n) $\dfrac{284}{900} = \dfrac{71}{225}$

e) $4{,}8$ j) $\dfrac{2\,039}{900}$ ñ) $\dfrac{12}{990} = \dfrac{2}{165}$

077 ●●

Calcula, utilizando las fracciones generatrices.

a) $0{,}2777... + 2{,}333...$ **c)** $0{,}44... \cdot 2{,}5151...$

b) $3{,}5666... - 2{,}2727...$ **d)** $1{,}13888... : 0{,}9393...$

a) $\dfrac{25}{90} + \dfrac{21}{9} = \dfrac{235}{90} = \dfrac{47}{18}$ c) $\dfrac{44}{100} \cdot \dfrac{249}{99} = \dfrac{913}{825}$

b) $\dfrac{321}{90} - \dfrac{225}{99} = \dfrac{1\,281}{990}$ d) $\dfrac{1\,025}{900} : \dfrac{93}{99} = \dfrac{451}{372}$

078 ●●

Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando tu respuesta.

a) **Cualquier número decimal puede expresarse en forma de fracción.**

b) **Un número entero se puede expresar como una fracción.**

c) **En un número decimal periódico, las cifras decimales se repiten indefinidamente después de la coma.**

d) **Si un número decimal tiene como período 0, es un número exacto.**

a) Falso, porque los decimales no exactos y no periódicos no se pueden expresar como fracción.

b) Verdadero, la fracción será el cociente del número y la unidad.

c) Verdadero en el caso de los decimales periódicos puros, pero no en los periódicos mixtos.

d) Verdadero, ya que se puede eliminar la parte decimal.

079 Se dispone de 30 metros de tela. Calcula cuántos metros son:

a) $\frac{3}{5}$ **de la tela** **b)** $\frac{7}{30}$ **de la tela** **c)** $\frac{5}{6}$ **de la tela**

a) $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$ m

b) $\frac{7}{30} \cdot 30 = 7$ m

c) $\frac{5}{6} \cdot 30 = 25$ m

080 **Una empresa ha ingresado esta semana dos quintos de 12 300 €. Calcula el dinero que ha ingresado.**

Ha ingresado: $\frac{2}{5} \cdot 12\,300 = 4\,920$ €

081 **Un padre le da a su hija mayor 30 €, y a su hijo menor, la tercera parte de lo que ha recibido la hija mayor. ¿Cuánto ha recibido el hijo menor?**

El hijo menor ha recibido: $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ €

082 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNA PARTE DEL TOTAL?

En una clase, las $\frac{2}{5}$ partes son chicos. ¿Cuántas chicas hay si son 25 alumnos en total?

PRIMERO. Se resta la parte conocida, $\frac{2}{5}$, del total, 1, para calcular la parte desconocida.

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ son chicas.}$$

SEGUNDO. Se calcula lo que representa esa parte en el total de alumnos, 25.

$$\frac{3}{5} \text{ de } 25 = \frac{3}{5} \cdot 25 = \frac{3 \cdot 25}{5} = \frac{75}{5} = 15 \text{ chicas}$$

083 **Para el cumpleaños de mi madre le hemos regalado una caja de bombones. Hemos comido ya las $\frac{3}{4}$ partes de la caja. Si la caja contenía 40 bombones, ¿cuántos bombones quedan?**

Queda $\frac{1}{4}$ de la caja, es decir: $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ bombones

084 Los tres octavos del total de alumnos de un instituto llevan gafas. Si llevan gafas 129 alumnos, ¿cuántos alumnos son en total?

Son en total: $\frac{3}{8} = \frac{129}{x} \rightarrow x = \frac{129 \cdot 8}{3} = 344$ alumnos

085 Un granjero quiere vallar un terreno de 2 275 m de perímetro. El primer día hace los $\frac{3}{7}$ del trabajo, y el segundo día, los $\frac{2}{5}$. ¿Cuántos metros faltan por vallar?

Faltan: $1 - \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{5}\right) = 1 - \frac{29}{35} = \frac{6}{35} \rightarrow \frac{6}{35} \cdot 2\,275 = 390$ m

086 Unos amigos recorren 105 km en bicicleta. El primer día hacen $\frac{1}{3}$ del camino y el segundo día $\frac{4}{15}$, dejando el resto para el tercer día.

¿Cuántos kilómetros recorren cada día?

1.er día $\rightarrow \frac{1}{3} \cdot 105 = 35$ km

2.º día $\rightarrow \frac{4}{15} \cdot 105 = 28$ km

3.er día $\rightarrow 105 - (28 + 35) = 42$ km

087 Una familia gasta $\frac{1}{5}$ de sus ingresos mensuales en el alquiler del piso, $\frac{1}{60}$ en el teléfono y $\frac{1}{8}$ en transporte y ropa.

¿Cómo se distribuyen los gastos si sus ingresos mensuales son 3 000 €?

Alquiler $\longrightarrow \frac{1}{5} \cdot 3\,000 = 600$ €

Teléfono $\rightarrow \frac{1}{60} \cdot 3\,000 = 50$ €

Transporte y ropa $\rightarrow \frac{1}{8} \cdot 3\,000 = 375$ €

088 En un campamento, $\frac{3}{8}$ de los jóvenes son europeos, $\frac{1}{5}$ asiáticos y el resto africanos.

Si hay en total 800 jóvenes:

a) ¿Cuántos jóvenes europeos hay?

b) Si la mitad de los asiáticos son chicas, ¿cuántas chicas asiáticas habrá?

c) ¿Cuántos de estos jóvenes son africanos?

a) Europeos $\rightarrow \frac{3}{8} \cdot 800 = 300$

b) Asiáticas $\rightarrow \left(\frac{1}{5} \cdot 800\right) : 2 = 160 : 2 = 80$

c) Africanos $\rightarrow 800 - 300 - 160 = 340$

089 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNA PARTE DE UNA FRACCIÓN?

Cristina debe leer un libro para el colegio. El primer día lee la cuarta parte del libro, y el segundo día, la mitad de lo que le quedaba. ¿Qué fracción representa lo que lee el segundo día?

PRIMERO. Se calcula la fracción de la que se hallará su parte.

El primer día lee $\frac{1}{4}$, y le quedan: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

SEGUNDO. Se calcula la parte de la fracción.

El segundo día lee: $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$

Por tanto, el segundo día lee $\frac{3}{8}$ del libro.

090 **Tenemos una pieza de alambre de 90 m. Vendemos las $\frac{2}{3}$ partes a 3 €/m, $\frac{1}{6}$ del resto a 4 €/m y los metros que quedan a 2 €/m. ¿Cuánto hemos ganado si habíamos comprado el metro de alambre a 2 €?**

$\frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ m, a 3 €/m, son 180 €.

$\frac{1}{6} \cdot (90 - 60) = 5$ m, a 4 €/m, son 20 €.

$90 - 60 - 5 = 25$ m, a 2 €/m, son 50 €.

El alambre costó: $90 \cdot 2 = 180$ € y hemos cobrado: $180 + 20 + 50 = 250$ €.
Por tanto, hemos ganado: $250 - 180 = 70$ €

091 **Tres amigos se reparten 90 € que han ganado en la quiniela de la siguiente manera: el primero se queda con la quinta parte, el segundo con la tercera parte de lo que recibe el primero, y el tercero con la mitad de lo que recibe el segundo.**

a) ¿Qué fracción representa lo que obtiene cada uno?

b) ¿Cuánto dinero se queda cada amigo?

c) ¿Y cuánto dinero dejan de bote?

a) El 1.º $\rightarrow \frac{1}{5}$ El 2.º $\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ El 3.º $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$

b) El 1.º $\rightarrow \frac{1}{5} \cdot 90 = 18$ € El 2.º $\rightarrow \frac{1}{15} \cdot 90 = 6$ € El 3.º $\rightarrow \frac{1}{30} \cdot 90 = 3$ €

c) $90 - (18 + 6 + 3) = 63$ € dejan de bote.

092 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL TOTAL CONOCIENDO UNA PARTE?

Una piscina está llena hasta los $\frac{7}{9}$ de su capacidad. Aún se necesitan 880 litros para que esté completamente llena. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

PRIMERO. Se calcula la fracción que representa la parte vacía de la piscina.

$$1 - \frac{7}{9} = \frac{9}{9} - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

SEGUNDO. Se designa por x la capacidad total de la piscina.

$$\frac{2}{9} \text{ de } x = \frac{2}{9} \cdot x = 880$$

Despejando x:

$$x = 880 : \frac{2}{9} = \frac{880 \cdot 9}{2} = \frac{7\,920}{2} = 3\,960$$

La piscina tiene 3960 litros de capacidad.

093 ●●● **De un calentador, primero se gasta la mitad del agua y luego la cuarta parte de lo que quedaba. Si todavía quedan 12 litros, ¿cuál es la capacidad del calentador?**

Primero se gasta: $\frac{1}{2}$

Después, se gasta: $\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

Quedan en el calentador: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

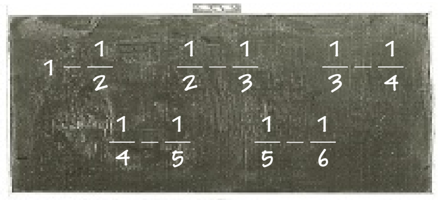
$x = 12 : \frac{3}{8} = 32$ ℓ es la capacidad del calentador.

094 ●●● **Unos amigos organizan una excursión a la montaña: el primer día recorren un cuarto de lo programado, el segundo día un tercio, dejando los 25 kilómetros restantes para el tercer día. ¿Qué fracción representan los kilómetros recorridos el tercer día? ¿Cuántos kilómetros han recorrido en total?**

El tercer día recorren: $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Han recorrido en total: $x = 25 : \frac{5}{12} = 60$ km

095 ●●● **Calcula las siguientes diferencias.**



a) Con los resultados, efectúa esta suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿cuál crees que será el resultado de esta suma?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{1\,001\,000}$$

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\qquad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} =$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

b) $\frac{1}{1\,001\,000} = \frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,001}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{1\,001\,000} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1\,001} = \frac{1\,000}{1\,001}$$

096 ●●● **Si vaciamos estos dos recipientes en una jarra, ¿cuál es la proporción de agua y de vinagre en la jarra?**

MEZCLA
2 partes de agua
1 parte de vinagre

MEZCLA
3 partes de agua
1 parte de vinagre

La mezcla resultante tendrá 5 partes de agua y 2 partes de vinagre.

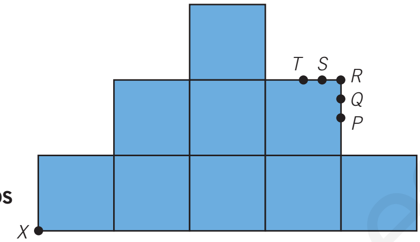
La proporción de agua es $\frac{5}{7}$ y la de vinagre es $\frac{2}{7}$.

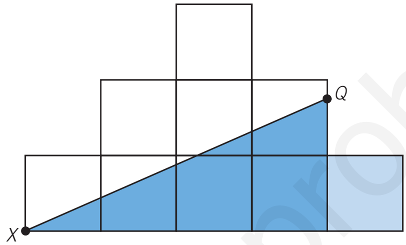
097 ●●

Esta figura contiene nueve cuadrados, todos de lado 1. Los puntos señalados verifican:

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{ST} = \frac{1}{4}$$

Una recta une a *X* con uno de esos puntos y divide la figura en dos regiones de igual área. ¿Cuál es esa recta?





Es la recta *XQ*, que forma un triángulo y un cuadrado. El triángulo tiene de base 4 y de altura: $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, por lo que su área será: $\left(4 \cdot \frac{7}{4}\right) : 2 = 3{,}5$

Por su parte, el área del cuadrado es 1.

El área es: $3{,}5 + 1 = 4{,}5$, que es la mitad del área total: $\frac{9}{2} = 4{,}5$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

098 ●●●

Una comunidad de vecinos quiere instalar placas solares. Han consultado con una empresa instaladora y les ha proporcionado los siguientes datos:

La empresa instaladora les ha informado de que ciertos organismos oficiales conceden subvenciones para la instalación de placas solares.

> INSTITUTO PARA LA DIVERSIFICACIÓN Y AHORRO DE LA ENERGÍA
>
> En relación con la subvención solicitada por su comunidad para la instalación de placas solares en el edificio situado en la calle del Sol, número 23, le informamos de que dicha subvención ha sido otorgada, y que su cuantía asciende a la mitad del coste de las placas y su instalación.

La compañía eléctrica suministradora de la comunidad cobra a 8,6726 céntimos el kWh. En el último recibo bimensual, cada uno de los 48 vecinos ha pagado 46,34 €.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿Cuántos kWh, aproximadamente, han gastado en el último mes?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

b) ¿Cuánto les permite ahorrar la instalación?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

c) Si un vecino ha decidido vender su casa en los próximos 5 años, ¿le proporcionará beneficios la instalación de las placas solares?

a) El coste del recibo bimensual ha sido:

$$46{,}34 \cdot 48 = 2\,224{,}32 \text{ €}$$

Por tanto, se han consumido:

$$2\,224{,}32 : 8{,}6726 = 256{,}48 \text{ kWh}$$

Suponiendo que el consumo durante los dos meses haya sido uniforme, el consumo en el último mes ha sido:

$$256{,}48 : 2 = 128{,}24 \text{ kWh}$$

Unos 128 kilowatios, aproximadamente.

b) Si la instalación de placas solares les permite ahorrar $\frac{2}{7}$ del consumo, y suponiendo que el consumo sea uniforme durante todo el año:

$$128 \cdot \frac{2}{7} = 36{,}57 \text{ kWh}$$

Ahorrarían unos 36 kWh mensuales. Por tanto resulta que:

$$36 \cdot 8{,}6726 = 312{,}22 \text{ €}$$

$$312{,}22 : 48 = 6{,}50 \text{ €}$$

Cada vecino ahorraría mensualmente 6,50 €, aproximadamente.

c) La instalación de placas solares costaría:

$$22\,000 - \frac{1}{2} \cdot 22\,000 = 11\,000 \text{ € a toda la comunidad}$$

$$11\,000 : 48 = 229{,}17 \text{ € a cada vecino}$$

Por tanto, cada vecino amortizaría la instalación en:

$$229{,}17 : 6{,}5 = 35{,}25 \text{ meses}$$

Es decir, en 36 meses, o lo que es lo mismo, en 3 años.

099 ●●●

Las noticias sobre los accidentes de carretera ocurridos durante la Semana Santa destacan un importante aumento de siniestros.

Siniestralidad durante la Semana Santa en la carretera

48 personas han muerto en accidentes de carretera

La mitad de los fallecidos en turismos no utilizaba el cinturón.

Uno de cada tres fallecidos en motocicletas no llevaba casco.

La mitad de los fallecidos tenía menos de 35 años, y de estos, uno de cada cuatro era menor de 25 años.

La distracción aparece como el factor fundamental en dos de cada cinco fallecidos, la infracción de las normas de tráfico en uno de cada tres y el exceso de velocidad en tres de cada diez.

Vehículo	Fallecidos
Turismos	36
Motocicletas	11

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Completa esta tabla:

Edades	Fallecidos
Menores de 35 años	
Mayores de 35 años	
Menores de 25 años	
Entre 25 y 35 años	

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Según este informe, ¿cuántos fallecidos cumplían las medidas de seguridad, es decir, llevaban cinturón o casco?

c) ¿Cuántos fallecimientos no se pueden atribuir a distracción, infracción de las normas de tráfico o exceso de velocidad?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Las compañías de seguros establecen tarifas diferentes según el perfil de los conductores asegurados. ¿Cuál consideras que será el perfil de las personas aseguradas que más pagarán?

a)

Edades	Fallecidos
Menores de 35 años	$\frac{1}{2} \cdot 48 = 24$
Mayores de 35 años	$48 - 24 = 24$
Menores de 25 años	$\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$
Entre 25 y 35 años	$24 - 4 = 20$

b)

	Fallecidos
No utilizaba cinturón	$\frac{1}{2} \cdot 36 = 18$
No llevaba casco	$\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$
Total	**22**

Cumplían las medidas de seguridad: $48 - 22 = 16$ personas

c)

	Fallecidos
Distracción	$\frac{3}{8} \cdot 48 = 18$
Infracción	$\frac{1}{3} \cdot 48 = 16$
Exceso de velocidad	$\frac{1}{6} \cdot 48 = 8$
Total	**42**

Si suponemos que la causa de fallecimiento es única, es decir, en ningún accidente se ha computado más de una de las circunstancias anteriores, hay: $48 - 42 = 6$ fallecimientos que no se pueden atribuir a distracción, infracción de tráfico o exceso de velocidad.

d) El número de fallecimientos entre los conductores menores de 35 años y mayores de 35 años ha sido el mismo. Considerando que existe un mayor número de conductores mayores de 35 años, la incidencia sobre los conductores de esta edad es menor que sobre los menores de 35 años. Esto quiere decir que la tarifa para conductores menores de 35 años debería ser mayor.

2 Números reales

La razón irracional

El gran Pitágoras, el que estudió el mundo y su relación con los números, el descubridor de la belleza racional de todas las cosas creadas, al final de su vida, en los albores del siglo V a.C., se confesaba a uno de sus discípulos amargamente:

–Escucha –le decía a Hipaso de Metaponto–: Toda mi vida he buscado la verdad en los números; la explicación de lo divino y lo humano estaba en ellos o en sus razones, todo era perfecto y explicable, todo razonable…

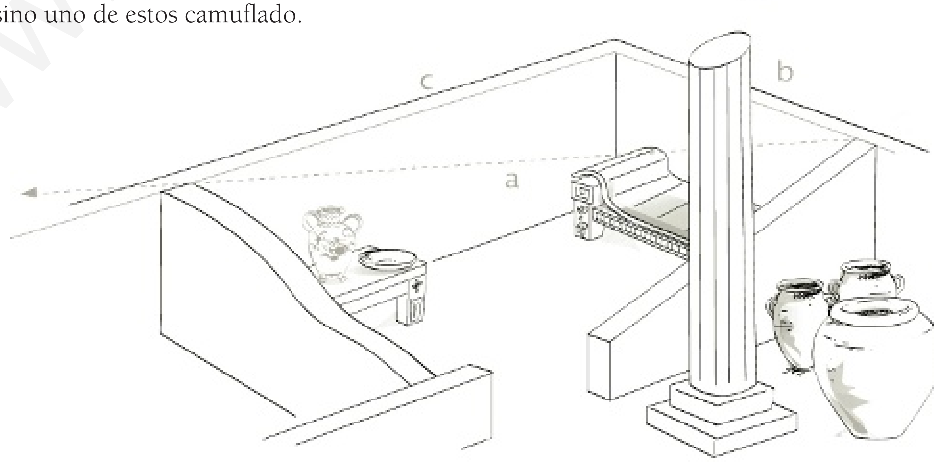
Hipaso miraba a su maestro con admiración, mientras asentía con la cabeza.

Mientras tanto, Pitágoras continuaba:

–Ahora que ha llegado el final de mi vida he de confesarte una horrible verdad: hace tiempo que los descubrí, hay *otros*.

–¿Otros? –preguntó Hipaso.

–Sí, están ahí pero son inconmensurables: cualquiera puede construir un cuadrado cuyo lado mida 1; sin embargo, será incapaz de medir su diagonal. Incluso la razón de la Pentalfa no es tal, sino uno de estos camuflado.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Pitágoras fue un matemático griego del siglo VI a.C. Busca información sobre su vida y sus descubrimientos matemáticos.**

Una biografía de Pitágoras aparece en estas páginas:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pitagoras.htm
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/12-1-b-pitagoras.html

2 **¿A qué se refiere Pitágoras cuando habla de los *otros* números? ¿Qué es la razón de la Pentalfa?**

La respuesta la puedes encontrar visitando las siguientes páginas:
http://www.cienciamisterio.com/Pitadocum.htm
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Pitagoras6.asp

3 **Investiga quién fue Hipaso de Metaponto y sus aportaciones al estudio de los números reales.**

Una relación de sus descubrimientos matemáticos aparece en esta página:
http://es.wikipedia.org/wiki/Hipaso_de_Metaponto

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Calcula.**

a) $7^3 = 343$ **b)** $6^4 = 1\,296$ **c)** $(-4)^4 = 256$ **d)** $(-2)^3 = -8$

2 **Expresa los siguientes productos en forma de potencia, si es posible.**

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

c) $(-4) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

d) $5 \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

a) 4^7 b) $(-4)^7$ c) -4^7 d) $5 \cdot (-4)^6$

3 **Resuelve estas operaciones.**

a) $(-2)^3 + 5^3$ **b)** $7^3 - (-3)^4$ **c)** $(-4)^4 \cdot 6^3$

a) $-8 + 125 = 117$ b) $343 - 81 = 262$ c) $256 \cdot 216 = 55\,296$

4 **Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.**

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

5 **Halla el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y el otro cateto, 4 cm.**

$$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$$

6 **¿Cuánto mide cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles que tiene una hipotenusa de $\sqrt{2}$ cm?**

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 2 = 2x^2 \rightarrow x = 1 \text{ cm mide cada cateto.}$$

EJERCICIOS

001 **Calcula las siguientes potencias.**

a) 3^2 **d)** $(-5)^3$ **g)** $(4{,}25)^4$

b) 7^4 **e)** $(-2{,}02)^4$ **h)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

c) $(-9)^2$ **f)** $\left(-\frac{5}{8}\right)^5$ **i)** $(-14{,}32)^8$

a) 9 d) -125 g) 326,25390625

b) 2401 e) 16,64966416 h) $-\frac{1}{27}$

c) 81 f) $-\frac{3125}{32\,768}$ i) 1 768 251 942,2108350730469376

002 **Calcula $(-0{,}8)^2$, $(-0{,}8)^3$ y $(-0{,}8)^4$. ¿Cuál es mayor?**

$(-0{,}8)^2 = 0{,}64$ $(-0{,}8)^3 = -0{,}512$ $(-0{,}8)^4 = 0{,}4096$

El mayor es $(-0{,}8)^2$.

003 **Expresa en forma de potencia.**

a) $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3$ **b)** $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

a) 3^6 b) $\left(-\frac{1}{7}\right)^3$

004 **Calcula estas potencias.**

a) 7^{-3} **d)** $(-5)^{-2}$ **g)** $\left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$ **j)** $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-5}$

b) 7^1 **e)** $(-5)^0$ **h)** $\left(\frac{8}{5}\right)^1$ **k)** $\left(-\frac{8}{5}\right)^0$

c) 7^{-1} **f)** $(-5)^{-1}$ **i)** $\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$ **l)** $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-1}$

a) $\frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$ e) 1 i) $\frac{5}{8}$

b) 7 f) $\frac{1}{(-5)^1} = -\frac{1}{5}$ j) $-\frac{5^5}{8^5} = -\frac{3125}{32\,768}$

c) $\frac{1}{7}$ g) $\frac{5^4}{8^4} = \frac{625}{4\,096}$ k) 1

d) $\frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$ h) $\frac{8}{5}$ l) $-\frac{5}{8}$

005 **Contesta si es verdadero o falso.**

a) Una potencia de exponente negativo es siempre positiva.

b) Una potencia de exponente 0 es siempre positiva.

a) Falso, depende de la base.

b) Verdadero, siempre vale 1.

006 **¿Cómo calcularías $(0{,}2)^{-3}$ sin la calculadora?**

$$0{,}2 = \frac{1}{5} \rightarrow (0{,}2)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$$

007 **Calcula.**

a) $(8 \cdot 4)^3$

b) $[(-1) \cdot (-4)]^3$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

d) $(6 \cdot 5)^{-2}$

e) $[(-3) \cdot 5]^{-2}$

f) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$

a) $8^3 \cdot 4^3 = 512 \cdot 64 = 32\,768$

b) $(-1)^3 \cdot (-4)^3 = (-1) \cdot (-64) = 64$

c) $\frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$

d) $\frac{1}{6^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{36 \cdot 25} = \frac{1}{900}$

e) $\frac{1}{(-3)^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{9 \cdot 25} = \frac{1}{225}$

f) $\frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

008 **Resuelve.**

a) $\left(2 \cdot \frac{7}{3}\right)^5$

b) $\left[\frac{3}{5} \cdot (-10)\right]^{-2}$

a) $\left(\frac{14}{3}\right)^5 = \frac{14^5}{3^5} = \frac{537\,824}{243}$

b) $(-6)^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

009 **Señala qué desigualdad es cierta.**

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{4}$

b) $[2 \cdot (-1)]^4 < \frac{1}{2}$

a) Es cierta: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

b) Es falsa: $[2 \cdot (-1)]^4 = 2^4 = 16 > \frac{1}{2}$

010 **Expresa como una sola potencia.**

a) $5^4 \cdot 5^6$

b) $(-9)^6 : (-9)^2$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10} : \left(\frac{5}{6}\right)^6$

d) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^2$

e) $(2^2)^3$

f) $[(-2)^2]^3$

g) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3$

h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 : \left(-\frac{4}{3}\right)^3$

a) $5^{4+6} = 5^{10}$

b) $(-9)^{6-2} = 9^4$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10-6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{4\cdot 2} = \left(\frac{3}{5}\right)^8$

e) $2^{2\cdot 3} = 2^6$

f) $(-2)^{2\cdot 3} = 2^6$

g) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{3+3} = \left(\frac{4}{3}\right)^6$

h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{3-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

011 **Simplifica estas operaciones con potencias.**

a) $(4^3 \cdot 4^2)^3$

b) $[(-5)^3 : (-5)^2]^2$

c) $[(4,2)^4 \cdot (4,2)^3]^4$

d) $(7^{11} : 7^5)^2$

e) $(7^2 \cdot 9^4)^2$

f) $[(-3)^5 \cdot 4^5]^2$

a) $4^{(3+2)\cdot 3} = 4^{15}$

b) $(-5)^{(3-2)\cdot 2} = 5^2$

c) $(4,2)^{(4+3)\cdot 4} = (4,2)^{28}$

d) $7^{(11-5)\cdot 2} = 7^{12}$

e) $7^4 \cdot 9^8$

f) $3^{10} \cdot 4^{10}$

012 **Expresa como una sola potencia.**

a) $2^5 \cdot 4^3$

b) $(3^{-5} \cdot 9^3)^{-2}$

a) $2^5 \cdot 4^3 = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$

b) $(3^{-5} \cdot 9^3)^{-2} = (3^{-5} \cdot 3^6)^{-2} = 3^{-2}$

013 **Escribe en notación científica.**

a) 493 000 000

b) 315 000 000 000

c) 0,0004464

d) 12,00056

e) 253

f) 256,256

a) $4,93 \cdot 10^8$

b) $3,15 \cdot 10^{11}$

c) $4,464 \cdot 10^{-4}$

d) $1,200056 \cdot 10$

e) $2,53 \cdot 10^2$

f) $2,56256 \cdot 10^2$

014 **Escribe, con todas sus cifras, los siguientes números dados en notación científica.**

a) $2,51 \cdot 10^6$

b) $9,32 \cdot 10^{-8}$

c) $3,76 \cdot 10^{12}$

a) 2 510 000

b) 0,0000000932

c) 3 760 000 000 000

015 **Estos números no están correctamente escritos en notación científica. Corrígelos.**

a) $0{,}247 \cdot 10^{8}$ **b)** $24{,}7 \cdot 10^{8}$ **c)** $0{,}247 \cdot 10^{-8}$

a) $2{,}47 \cdot 10^{7}$ b) $2{,}47 \cdot 10^{9}$ c) $2{,}47 \cdot 10^{-9}$

016 **Los activos financieros de una entidad bancaria son aproximadamente 52 billones de euros. Expresa esa cantidad en notación científica.**

$5{,}2 \cdot 10^{13}$ €

017 **Resuelve estas operaciones utilizando la notación científica.**

a) $7{,}77 \cdot 10^{9} - 6{,}5 \cdot 10^{9}$
b) $0{,}05 \cdot 10^{2} + 1{,}3 \cdot 10^{3}$
c) $37{,}3 \cdot 10^{-2} + 0{,}01 \cdot 10^{2}$
d) $(34 \cdot 10^{3}) \cdot (25{,}2 \cdot 10^{-2})$
e) $(0{,}75 \cdot 10^{7}) : (0{,}3 \cdot 10^{3})$
f) $(8{,}06 \cdot 10^{9}) \cdot (0{,}65 \cdot 10^{7})$

No olvides expresar el resultado en notación científica.

a) $1{,}27 \cdot 10^{9}$
b) $0{,}005 \cdot 10^{3} + 1{,}3 \cdot 10^{3} = 1{,}305 \cdot 10^{3}$
c) $0{,}373 + 1 = 1{,}373$
d) $3{,}4 \cdot 10^{4} \cdot 2{,}52 \cdot 10^{-1} = 8{,}568 \cdot 10^{3}$
e) $(7{,}5 \cdot 10^{6}) : (3 \cdot 10^{2}) = 2{,}5 \cdot 10^{4}$
f) $(8{,}06 \cdot 10^{9}) \cdot (6{,}5 \cdot 10^{6}) = 52{,}39 \cdot 10^{15} = 5{,}239 \cdot 10^{16}$

018 **Calcula el término que falta en cada caso.**

a) $2{,}5 \cdot 10^{6} - \square = 8{,}4 \cdot 10^{5}$
b) $9{,}32 \cdot 10^{-3} + \square = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$
c) $(2{,}5 \cdot 10^{6}) \cdot \square = 8{,}4 \cdot 10^{5}$
d) $(9{,}52 \cdot 10^{-3}) : \square = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$

a) $\square = 1{,}66 \cdot 10^{6}$ c) $\square = 3{,}36 \cdot 10^{-1}$
b) $\square = 4{,}668 \cdot 10^{-2}$ d) $\square = 1{,}7 \cdot 10^{-1}$

019 **Resuelve esta suma: $7{,}8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99}$. Luego utiliza la calculadora para realizarla. ¿Qué ocurre? ¿Por qué crees que sucede esto?**

$7{,}8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99} = 1{,}28 \cdot 10^{100}$. Con la calculadora sale un mensaje de error porque el orden de magnitud es 100, que tiene 3 cifras, y la calculadora solo trabaja con 2 cifras de orden de magnitud.

020 **Clasifica los siguientes números decimales en racionales o irracionales.**

a) 4,325325325...
b) 4,3303003000300003000000...
c) 1,2323323332333323333...
d) 3,12359474747...

a) Racional b) Irracional c) Irracional d) Racional

021 **Escribe cinco números racionales y cinco números irracionales.**

Racionales $\longrightarrow$ $1{,}1\widehat{6}$; $1{,}\widehat{6}$; 8; $2{,}8\widehat{3}$; 0,4625
Irracionales $\rightarrow$ 2,12345678...; 6,1112131415...; 0,010010001...; π; $\sqrt{2}$

022 **¿Puede existir un número irracional con un solo dígito después de la coma? ¿Y con dos dígitos?**

No, ya que se necesitan infinitos dígitos después de la coma.

023 **Trunca y redondea los siguientes números a las centésimas y las milésimas.**

a) $1{,}234564668$
b) $2{,}\widehat{7}$
c) $4{,}\widehat{51}$
d) $1{,}43643625$
e) $2{,}222$
f) $3{,}12\widehat{7}$
g) $\sqrt{5}$
h) $3{,}222464$
i) $\sqrt{5}$
j) $1{,}6467538$
k) $1{,}1234...$
l) $5{,}\widehat{5}$

a) Truncamiento: 1,23 y 1,234 Redondeo: 1,23 y 1,235
b) Truncamiento: 2,77 y 2,777 Redondeo: 2,78 y 2,778
c) Truncamiento: 4,51 y 4,515 Redondeo: 4,52 y 4,515
d) Truncamiento: 1,43 y 1,436 Redondeo: 1,44 y 1,436
e) Truncamiento: 2,22 y 2,222 Redondeo: 2,22 y 2,222
f) Truncamiento: 3,12 y 3,127 Redondeo: 3,13 y 3,128
g) Truncamiento: 2,23 y 2,236 Redondeo: 2,24 y 2,236
h) Truncamiento: 3,22 y 3,222 Redondeo: 3,22 y 3,222
i) Truncamiento: 1,73 y 1,732 Redondeo: 1,73 y 1,732
j) Truncamiento: 1,64 y 1,646 Redondeo: 1,65 y 1,647
k) Truncamiento: 1,12 y 1,123 Redondeo: 1,12 y 1,123
l) Truncamiento: 5,55 y 5,555 Redondeo: 5,56 y 5,556

024 **Halla el error absoluto y relativo cometido en cada uno de los casos del ejercicio anterior.**

a)

Aproximación	1,23	1,234	1,235
Error absoluto	0,004564668	0,000564668	0,000435332
Error relativo	0,003697391	0,000457382	0,00035262

b)

Aproximación	2,77	2,777	2,78	2,778
Error absoluto	0,007777778	0,000777778	0,002222222	0,000222222
Error relativo	0,0028	0,00028	0,0008	0,00008

c)

Aproximación	4,51	4,515	4,52
Error absoluto	0,005151515	0,000151515	0,004848485
Error relativo	0,00114094	$3{,}3557 \cdot 10^{-5}$	0,001073826

d)

Aproximación	1,43	1,436	1,44
Error absoluto	0,00643625	0,00043625	0,00356375
Error relativo	0,004480707	0,000303703	0,002480966

e)

Aproximación	2,22	2,222
Error absoluto	0,002	0
Error relativo	0,00090009	0

f)

Aproximación	3,12	3,127	3,13	3,128
Error absoluto	0,007777778	0,000777778	0,002222222	0,000222222
Error relativo	0,002486679	0,000248668	0,00071048	0,00007

g)

Aproximación	2,23	2,236	2,24
Error absoluto	0,006067977	0,000067977	0,003932023
Error relativo	0,002713682	0,000030400	0,001758454

h)

Aproximación	3,22	3,222
Error absoluto	0,002464000	0,000464000
Error relativo	0,000764632	0,000143989

i)

Aproximación	1,73	1,732
Error absoluto	0,002050808	0,000050808
Error relativo	0,001184034	0,000029334

j)

Aproximación	1,64	1,646	1,65	1,647
Error absoluto	0,006753800	0,000753800	0,003246200	0,000246200
Error relativo	0,004101281	0,000457749	0,001971272	0,000149506

k)

Aproximación	1,12	1,123
Error absoluto	0,003456789	0,000456789
Error relativo	0,003076922	0,000406592

l)

Aproximación	5,55	5,555	5,56	5,556
Error absoluto	0,005555556	0,000555556	0,004444444	0,000444444
Error relativo	0,001000000	0,000100000	0,000800000	0,000080000

025 **Al aproximar el peso de un gusano de 2,1236 g hemos cometido un error absoluto de 0,0236 g. Y al aproximar el peso de un buey de 824,36 kg hemos cometido un error de 4,36 kg. ¿En qué caso hemos cometido mayor error?**

El error relativo, en el caso del gusano, es 0,01111.

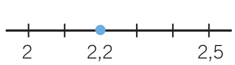
El error relativo, en el caso del buey, es 0,00528.

Hemos cometido mayor error en el peso del gusano.

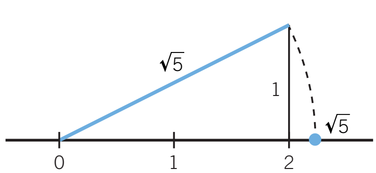
026 **Representa el número $\sqrt{5}$ de forma exacta y aproximada a las décimas. Utiliza un triángulo rectángulo de catetos 1 cm y 2 cm.**

$\sqrt{5} = 2{,}236067 \rightarrow 2{,}2$

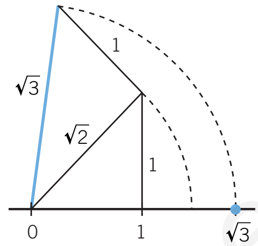
Aproximada:



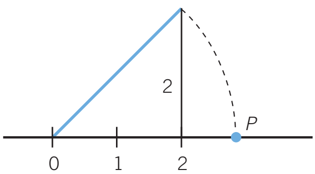
Exacta:



027 **Representa el número $\sqrt{3}$ de forma exacta en la recta real. Hazlo construyendo un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 cm y $\sqrt{2}$ cm.**



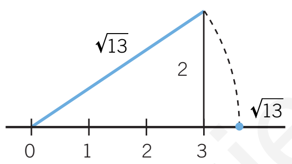
028 **¿Qué número es el representado en la figura?**



$\overline{OP}^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow \overline{OP} = \sqrt{8}$

El número representado es $P = \sqrt{8}$.

029 **Representa de forma exacta el número $\sqrt{13}$. ¿Cómo lo haces?**



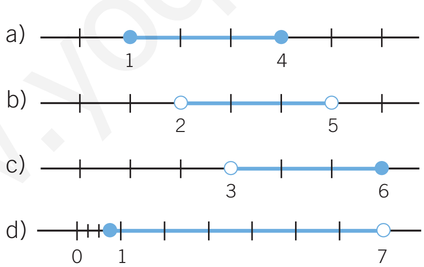
Se toman 3 unidades sobre el eje horizontal y 2 unidades sobre el vertical.

La hipotenusa medirá:

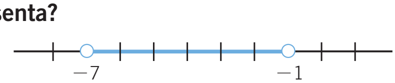
$$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

030 **Representa los siguientes intervalos.**

a) $[1, 4]$ **b)** $(2, 5)$ **c)** $(3, 6]$ **d)** $\left[\frac{3}{4}, 7\right)$



031 **¿Qué intervalo se representa?**



Es el intervalo $(-7, -1)$.

032 **¿Qué números pertenecen al intervalo $(-1, 4]$?**

a) 0 **b)** 3,98 **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $-0,\widehat{3}$

Todos los números pertenecen al intervalo.

033 **¿Cuántos puntos hay en el intervalo [1, 2]? ¿Y en [1,1; 1,2]? ¿Y en [1,11; 1,12]?**

En cualquier intervalo no vacío hay infinitos puntos.

ACTIVIDADES

034 **Escribe en forma de potencia los siguientes productos, y calcula el resultado.**

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

c) $\left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)$

a) $2^4 = 16$

b) $(-5)^6 = 15\,625$

c) $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{-8}{125}$

035 **Expresa en forma de producto, y calcula el resultado.**

a) $(-3)^4$ **c)** 5^6 **e)** $(2,5)^3$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$ **d)** $\left(\frac{10}{3}\right)^2$ **f)** $(-2,3)^4$

a) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$

c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$

d) $\left(\frac{10}{3}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$

e) $(2,5) \cdot (2,5) \cdot (2,5) = 15,625$

f) $(-2,3) \cdot (-2,3) \cdot (-2,3) \cdot (-2,3) = 27,9841$

036 **Escribe en forma de potencia, si es posible, estas expresiones.**

a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

c) $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4$

d) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5$

e) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3)$

f) $(6 + 6 + 6 + 6) \cdot 6$

g) $23 + 23 + 23 + 23$

h) $5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

a) 9^5

b) No es posible.

c) No es posible.

d) No es posible.

e) 6^3

f) 12^2

g) No es posible.

h) No es posible.

037 Halla el resultado de las siguientes potencias utilizando la calculadora.

a) 2^5 **d)** $\left(\frac{1}{4}\right)^6$ **g)** $(0,7)^2$ **j)** $(-2)^5$

b) 6^4 **e)** $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ **h)** $(0,04)^6$ **k)** $(-6)^4$

c) 12^3 **f)** $\left(\frac{3}{10}\right)^3$ **i)** $(1,32)^8$ **l)** $(-12)^3$

a) 32
b) 1 296
c) 1 728
d) 0,000244140625
e) 5,0625
f) 0,027
g) 0,49
h) 0,000000004096
i) 9,2170395205042176
j) −32
k) 1 296
l) −1 728

038 Expresa cada número como potencia de un número positivo.

a) 8 **b)** 27 **c)** 16 **d)** 81 **e)** 64 **f)** 125 **g)** 49 **h)** 121

a) 2^3 b) 3^3 c) 2^4 d) 3^4 e) 2^6 f) 5^3 g) 7^2 h) 11^2

039 Escribe estos números como potencia de un número negativo.

a) 16 **b)** −125 **c)** 49 **d)** −128 **e)** 121 **f)** 144 **g)** −27 **h)** −216 **i)** 64

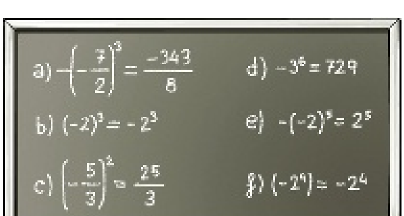
a) $(-4)^2$
b) $(-5)^3$
c) $(-7)^2$
d) $(-2)^7$
e) $(-11)^2$
f) $(-12)^2$
g) $(-3)^3$
h) $(-6)^3$
i) $(-8)^2$

040 Calcula las siguientes potencias.

a) $(-2)^2$ **b)** $(-3)^3$ **c)** $-(-8^2)$ **d)** -4^2 **e)** $-(-2)^3$ **f)** 4^2

a) 4
b) −27
c) −64
d) −16
e) 8
f) 16

041 Indica si son ciertas las igualdades.



a) Falsa
b) Verdadera
c) Falsa
d) Falsa
e) Verdadera
f) Verdadera

042 Escribe cada número como potencia de un número entero.

a) -81 **d)** $-1\,000$ **g)** -49
b) -8 **e)** -25 **h)** $-2\,187$
c) -16 **f)** -512 **i)** $-7\,776$

a) -3^4 d) $(-10)^3$ g) -7^2
b) $(-2)^3$ e) -5^2 h) $(-3)^7$
c) -2^4 f) $(-2)^9$ i) $(-6)^5$

043 Halla el valor de *a* en las siguientes igualdades.

a) $2^a = 32$ **c)** $a^4 = 2\,401$
b) $3^a = 729$ **d)** $a^3 = 216$

a) $a = 5$ c) $a = 7$
b) $a = 6$ d) $a = 6$

044 Calcula estas potencias.

a) 2^{-3} **d)** 4^{-2} **g)** $(-5{,}02)^{-3}$
b) $(1{,}3)^{-2}$ **e)** $(-3)^{-2}$ **h)** $(-2)^{-4}$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **f)** $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3}$ **i)** $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

b) $\frac{1}{(1{,}3)^2} = \frac{1}{1{,}69} = 0{,}5917159$

c) $2^2 = 4$

d) $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

e) $\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} = 0{,}\widehat{1}$

f) $\frac{5^3}{(-3)^3} = -\frac{125}{27} = -4{,}629$

g) $\frac{1}{(-5{,}02)^3} = \frac{1}{126{,}506008} = 0{,}0079047629$

h) $\frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

i) $(-6)^2 = 36$

045 Halla el resultado de las potencias utilizando la calculadora.

a) 7^{-4}
b) $(-4)^{-7}$
c) $(-0{,}07)^{-4}$
d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$
e) $(0{,}12)^{-7}$
f) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}$

a) 0,0004164931
b) −0,00006103515625
c) 41 649,312786339
d) 0,19753086419753
e) 2 790 816,47233653
f) −0,064

046 Considera las potencias 2^{-2}, 2^{-3} y 2^{-5}.

a) ¿Cuál es la mayor?
b) ¿Cómo es la potencia a medida que el exponente negativo aumenta en valor absoluto?
c) Contesta a las cuestiones anteriores para las potencias $0{,}7^{-3}$; $0{,}7^{-4}$ y $0{,}7^{-5}$.

a) La potencia mayor es 2^{-2}.
b) La potencia disminuye a medida que aumenta el exponente en valor absoluto.
c) La mayor es $0{,}7^{-5}$. La potencia aumenta a medida que lo hace el exponente en valor absoluto. La diferencia con el caso anterior es porque la base es ahora menor que la unidad.

047 Halla el valor de estas potencias.

a) $2^5 \cdot 2^3$
b) $2^5 : 2^3$
c) $3^7 \cdot 3^2 \cdot 3^4$
d) $(-4)^9 \cdot (-4)^5 \cdot (-4)$
e) $(-4)^9 : (-4)^5 : (-4)$
f) $(7 \cdot 4)^0$

a) $2^8 = 256$
b) $2^2 = 4$
c) $3^{13} = 1\,594\,323$
d) $(-4)^{15} = -1\,073\,741\,824$
e) $(-4)^3 = -64$
f) 1

048 Obtén el resultado de las siguientes operaciones con potencias utilizando la calculadora.

a) $(0{,}03)^2 \cdot (0{,}03)^4$
b) $(4{,}1)^6 \cdot (4{,}1)^4$
c) $(1{,}2)^2 \cdot (1{,}2)^5 \cdot (1{,}2)^8$
d) $(0{,}6)^2 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}6)^{12}$
e) $(0{,}7)^6 \cdot (0{,}7)^{13} \cdot (0{,}7)^{11}$

a) 0,000000000729
b) 1 342 265,931
c) 15,40702157
d) $1{,}015599567 \cdot 10^{-4}$
e) $2{,}25393403 \cdot 10^{-5}$

049 ●●

Expresa el resultado como una sola potencia.

a) $(3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^8) : 3^9$

b) $(-2)^4 \cdot (-2)^6 \cdot (-2)^5$

c) $(-7)^8 : (-7)^4 \cdot (-7)^2$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^6$

e) $\left[\left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^3\right] : \left[\left(\frac{-1}{9}\right)^4 : \left(\frac{-1}{9}\right)\right]$

f) $(-5)^8 : [(-5)^3 : (-5)^3]$

g) $[6^9 \cdot 6^5] : [6^4 \cdot 6^2]$

a) 3^6

b) $(-2)^{15}$

c) $(-7)^6 = 7^6$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^1$

e) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2$

f) $(-5)^8$

g) 6^8

050 ●●

Aplica las propiedades de las potencias para resolver las expresiones.

a) $(7 \cdot 3)^4$

b) $[(-5) \cdot 3]^5$

c) $\left[\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{8}{6}\right)\right]^3$

d) $[(-8) : 5]^3$

e) $[(0{,}16) : (-3)]^2$

f) $\left[\left(\frac{4}{6}\right) : \left(-\frac{7}{3}\right)\right]^5$

g) $(-6)^2 \cdot (-6)^4 \cdot (-6)^{12}$

h) $(0{,}3)^2 \cdot (0{,}3)^4$

i) $(-0{,}5)^6 \cdot (-0{,}5)^{13} \cdot (-0{,}5)^{11}$

j) $\left(-\frac{3}{6}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{6}\right)^2$

a) $7^4 \cdot 3^4 = (7 \cdot 3)^4 = 21^4 = 194\,481$

b) $(-5)^5 \cdot 3^5 = (-5 \cdot 3)^5 = (-15)^5 = -759\,375$

c) $\left[\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)\right]^3 = \left[\left(-\frac{4}{3}\right)^2\right]^3 = -\left(\frac{4}{3}\right)^6 = -\frac{4\,096}{729}$

d) $(-8)^3 : 5^3 = -512 : 125 = -4{,}096$

e) $(0{,}16)^2 : (-3)^2 = 0{,}0256 : 9 = 0{,}02\overset{\frown}{84}$

f) $\left[\left(\frac{4}{6}\right)^5 : \left(-\frac{7}{3}\right)^5\right] = -\frac{4^5 \cdot 3^5}{6^5 \cdot 7^5} = -\frac{2^5}{7^5}$

g) $(-6)^{18}$

h) $(0{,}3)^6 = 0{,}000729$

i) $(-0{,}5)^{30}$

j) $\left(-\frac{3}{6}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{2^5} = 0{,}03125$

051 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PRODUCTOS DE POTENCIAS CON BASES OPUESTAS?

Expresa como una sola potencia: $(-3)^4 \cdot 3^2$

PRIMERO. Se descompone la base negativa, y se aplica después la propiedad de potencia de un producto.

$$(-3)^4 \cdot 3^2 = (-1 \cdot 3)^4 \cdot 3^2 = (-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2$$

SEGUNDO. Se efectúan las operaciones con potencias de la misma base y se opera.

$$(-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2 = (-1)^4 \cdot 3^{4+2} = 1 \cdot 3^6 = 3^6$$

052 ●●

Expresa el resultado de cada división como una sola potencia.

a) $3^8 : (-3)^4$

b) $(-9)^{12} : (-9)^4$

c) $(-12)^{15} : 12^3 : 12^5$

d) $31^{40} : (-31)^4 : (-31)$

e) $(-0,5)^{30} : (-0,5)^5 : (-0,5)^3$

a) 3^4

b) $(-9)^8$

c) -12^7

d) -31^{35}

e) $(0,5)^{22}$

053 ●●

Completa.

a) $2^3 \cdot \square = 2^5$

b) $(-4)^5 \cdot \square = (-4)^{10}$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6 \cdot \square = \left(\frac{7}{2}\right)^7$

d) $(-3)^{12} : \square = (-3)^6$

e) $\square : 5^6 = 5$

f) $\square : \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

b) $(-4)^5 \cdot (-4)^5 = (-4)^{10}$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^7$

d) $(-3)^{12} : (-3)^6 = (-3)^6$

e) $5^7 : 5^6 = 5$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

054 ●●●

Averigua el valor de *a* en estas igualdades.

a) $5^a \cdot 5^3 = 5^6$

b) $(-2)^{5a} : (-2)^{2a} = (-2)^6$

c) $(-6)^a : (-6)^8 = (-6)^0$

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2a} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$

a) $a = 3$

b) $a = 2$

c) $a = 8$

d) $a = 3$

055 Resuelve las operaciones.

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3$

b) $(2^{-2})^3 \cdot 2^{-4}$

c) $(-3)^{-5} : (-3)^2 \cdot (-3)^4$

d) $[(-3)^{-2}]^{-4} : (-3)^5$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$

f) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-6} : \left[\left(\frac{-1}{4}\right)^2\right]^{-3}$

g) $3^{-6} : 3^{-7} \cdot 3^2$

h) $(-5)^8 : (-5)^{-2} : (-5)^{-1}$

i) $[(-6)^3]^{-5} \cdot [(-6)^{-5}]^4$

a) 2^5

b) $2^{-6} \cdot 2^{-4} = 2^{-10}$

c) $(-3)^{-3}$

d) $(-3)^8 : (-3)^5 = (-3)^3$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^9$

f) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-6} : \left(\frac{-1}{4}\right)^{-6} = \left(\frac{-1}{4}\right)^0 = 1$

g) 3^3

h) $(-5)^{11}$

i) $(-6)^{-15} \cdot (-6)^{-20} = (-6)^{-35}$

056 Indica y corrige los errores de estas igualdades.

a) $3^2 + 3^3 + 3^5 = 3^{2+3+5} = 3^{10}$

b) $3^2 \cdot 3^3 - 3^5 = 3^{2+3} - 3^5 = 3^5 - 3^5 = 3^0 = 1$

c) $4^9 : 4^2 \cdot 4^4 = 4^9 : 4^{2+4} = 4^9 : 4^6 = 4^{9-6} = 4^3$

d) $(-2)^6 \cdot (-2)^3 = [(-2) \cdot (-2)]^{6+3} = 4^9$

e) $-3^2 \cdot 3^2 = (-3)^{2+2} = (-3)^4 = 3^4$

f) $2 \cdot (-3)^2 = [2 \cdot (-3)]^2 = (-6)^2 = 6^2$

g) $8^5 \cdot 8^7 = (8 + 8)^{5+7} = 16^{12}$

h) $3^1 \cdot 3^0 = 3^{1 \cdot 0} = 3^0 = 1$

a) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^5 = 3^{2+3+5} = 3^{10}$

b) $3^2 \cdot 3^3 : 3^5 = 3^{2+3} : 3^5 = 3^5 : 3^5 = 3^0 = 1$

c) $4^9 : 4^2 \cdot 4^4 = 4^{9-2} \cdot 4^4 = 4^7 \cdot 4^4 = 4^{7+4} = 4^{11}$

d) $(-2)^6 \cdot (-2)^3 = (-2)^{6+3} = (-2)^9$

e) $-3^2 \cdot 3^2 = -3^{2+2} = -3^4$

f) $2^2 \cdot (-3)^2 = [2 \cdot (-3)]^2 = (-6)^2 = 6^2$

g) $8^5 \cdot 8^7 = 8^{5+7} = 8^{12}$

h) $3^1 \cdot 3^0 = 3^{1+0} = 3$

057 Justifica si son ciertas o no las igualdades.

a) $9^{-1} = -9$

b) $(-2)^{-4} = 2^4$

c) $(-3)^{-6} = 3^{-6}$

d) $(-3)^{-3} = (-3)^{-2} \cdot 3^{-1}$

e) $4^{-3} = (-4)^{-1} \cdot (-4)^4$

f) $(2^{-5})^{-1} = 2^{-6}$

a) Falsa: un número es positivo y el otro negativo.
b) Falsa: $(-2)^{-4} = 2^{-4}$
c) Verdadera: $(-3)^{-6} = (-1)^{-6} \cdot 3^{-6}$
d) Falsa: $(-3)^{-3} = (-3)^{-2} \cdot (-3)^{-1} \neq (-3)^{-2} \cdot 3^{-1}$
e) Falsa: $(-4)^{-1} \cdot (-4)^{4} = (-4)^{3} \neq 4^{-3}$
f) Falsa: $(2^{-5})^{-1} = 2^{5}$

058 **Expresa como potencia única.**

a) $(2^3)^4$ **b)** $[(-3)^3]^2$ **c)** $[-6^4]^3$ **d)** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4$ **e)** $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^3\right]^5$ **f)** $[-5^2]^4$

a) 2^{12} b) $(-3)^6$ c) -6^{12} d) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$ e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{15}$ f) 5^8

059 **Calcula el valor de estas potencias.**

a) $[(-3)^2]^2 \cdot [(-3)^3]^3$ **b)** $[(5)^8]^2 : [(-5)^4]^3$

a) $(-3)^4 \cdot (-3)^9 = (-3)^{13} = 1\,594\,323$
b) $5^{16} : (-5)^{12} = 5^{16} : 5^{12} = 5^4 = 625$

060 **Resuelve.**

a) $(-2)^{-4} \cdot [(-2)^2]^3$ **d)** $(-2)^{-3} \cdot 2^{-3}$ **g)** $(-3)^4 \cdot (-3^4)$
b) $3^4 \cdot [(-3)^2]^{-2}$ **e)** $-2^{-3} \cdot (-2^{-4})$ **h)** $4^{-3} \cdot 2^{-2}$
c) $(-8)^3 \cdot 2^{-4}$ **f)** $(-2^6) \cdot (-2^{-6})$

a) $(-2)^{-4} \cdot (-2)^6 = (-2)^2$
b) $3^4 \cdot 3^{-4} = 3^0 = 1$
c) $(-2)^9 \cdot 2^{-4} = (-2)^5$
d) $-2^{-3} \cdot 2^{-3} = -2^{-6}$
e) 2^{-7}
f) $2^0 = 1$
g) -3^8
h) $2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-8}$

061 **Completa las siguientes igualdades.**

a) $[(-5)^3]^{\square} : (-5)^7 = (-5)^5$ **c)** $(7^3)^5 : 7^{\square} = 1$
b) $(\square^2)^5 \cdot \square^4 = (-3)^{14}$ **d)** $11^9 \cdot (11^2)^3 = 11^{\square}$

a) $[(-5)^3]^4 : (-5)^7 = (-5)^5$
b) $[(-3)^2]^5 \cdot (-3)^4 = (-3)^{14}$
c) $(7^3)^5 : 7^{15} = 1$
d) $11^9 \cdot (11^2)^3 = 11^{15}$

062 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PRODUCTOS DE POTENCIAS CUANDO LAS BASES TIENEN LOS MISMOS FACTORES?

Resuelve $16^2 \cdot 32^{-2}$.

PRIMERO. Se descomponen las bases en factores.

$$16^2 \cdot 32^{-2} = (2^4)^2 \cdot (2^5)^{-2}$$

SEGUNDO. Se efectúan las operaciones de potencias con la misma base.

$$(2^4)^2 \cdot (2^5)^{-2} = 2^8 \cdot 2^{-10} = 2^{(8-10)} = 2^{-2}$$

063 Simplifica estos productos de potencias.

a) $5^4 \cdot 25^3$ **c)** $6^3 \cdot 12^5$ **e)** $-12^3 \cdot 18^5$ **g)** $-72^3 \cdot (-4)^7$

b) $8^4 \cdot 16^2$ **d)** $4^7 \cdot 32$ **f)** $(-63)^5 \cdot 21^2$ **h)** $32^2 \cdot (-24)^3$

a) $5^4 \cdot 5^6 = 5^{10}$

b) $2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$

c) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 = 2^{13} \cdot 3^8$

d) $2^{14} \cdot 2^5 = 2^{19}$

e) $-2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = -2^{11} \cdot 3^{13}$

f) $-3^{10} \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = -3^{12} \cdot 7^7$

g) $-3^6 \cdot 2^9 \cdot (-2^{14}) = 3^6 \cdot 2^{23}$

h) $2^{10} \cdot (-2)^9 \cdot 3^3 = (-2)^{19} \cdot 3^3$

064 Expresa el resultado como una sola potencia.

a) $(5^2 \cdot 25^2)^3$ **c)** $[(-2)^{12}]^3 \cdot 8^5$ **e)** $[(3)^{12}]^3 \cdot [(-27)^5]^2$

b) $[9^2 : (-27)^4]^4$ **d)** $(6^3 \cdot 36^2)^6$ **f)** $(16^2 : 64^3)^5 \cdot 4^4$

a) $(5^6)^3 = 5^{18}$

b) $(-3^4 : 3^{12})^4 = 3^{-32}$

c) $2^{36} \cdot 2^{15} = 2^{41}$

d) $(6^7)^6 = 6^{42}$

e) $3^{36} \cdot 3^{30} = 3^{66}$

f) $(4^4 : 4^9)^5 \cdot 4^4 = 4^{-25} \cdot 4^4 = 4^{-21}$

065 Efectúa las siguientes operaciones entre potencias, simplificando el resultado todo lo que puedas.

a) $40^{12} : [(-4)^6]^{-6}$ **c)** $(9^2 : 27^4)^{-4} \cdot (6^{-3} \cdot 36^{-2})$

b) $(-45)^{15} \cdot [(-15)^3]^{-6}$ **d)** $\left[\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2} \cdot (-4)\right)\right]^{-1}$

a) $5^{12} \cdot 2^{36} : 2^{-72} = 5^{12} \cdot 2^{108}$

b) $-3^{30} \cdot 5^{15} \cdot 3^{-18} \cdot 5^{-18} = -3^{12} \cdot 5^{-3}$

c) $(3^{-8})^{-4} \cdot (2^{-7} \cdot 3^{-7}) = 2^{-7} \cdot 3^{-39}$

d) $[1^{-3} : (-2 \cdot 3)]^{-1} = -2 \cdot 3$

066 Expresa como potencia de base 10 el resultado de las siguientes operaciones.

a) 0,000000001 · 1 000 000 **c)** 0,00000000001 : 1 000 000 000

b) 0,0000000010 · 10 000 000 **d)** 0,000001 : 1 000

a) 10^{-3} b) 10^{-2} c) 10^{-20} d) 10^{-9}

067 Escribe en notación científica.

a) Tres billones y medio. **c)** Diez millonésimas.

b) Doscientas milésimas. **d)** Cien mil millones y medio.

a) $3{,}5 \cdot 10^{12}$ b) $2 \cdot 10^{-1}$ c) $1 \cdot 10^{-5}$ d) $1{,}000005 \cdot 10^{11}$

068 Escribe, con todas sus cifras, los siguientes números escritos en notación científica.

a) $3{,}432 \cdot 10^4$ **b)** $1{,}3232 \cdot 10^{-3}$ **c)** $3{,}124 \cdot 10^{-7}$ **d)** $5{,}3732 \cdot 10^7$

a) 34 320 b) 0,0013232 c) 0,0000003124 d) 53 732 000

069 Sin hacer las operaciones previamente, ¿sabrías decir cuál es el orden de magnitud del resultado de estas operaciones?

a) $6{,}3 \cdot 10^2 + 4{,}5 \cdot 10^2$ **c)** $(2{,}6 \cdot 10^3) \cdot (3{,}1 \cdot 10^4)$

b) $7{,}7 \cdot 10^4 - 7{,}2 \cdot 10^4$ **d)** $(5 \cdot 10^7) : (2{,}5 \cdot 10^6)$

a) 3 b) 3 c) 7 d) 1

070 Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en notación científica.

a) $113{,}5 \cdot 10^{-6} + 0{,}0001 \cdot 10^4$
b) $7\,693{,}57 \cdot 10^{-2} + 0{,}7861 \cdot 10^6$
c) $3\,023\,500 \cdot 10 - 0{,}0317 \cdot 10^{12}$
d) $4\,023 \cdot 10^4 - 1\,234{,}57 \cdot 10^{11}$
e) $(20\,100 \cdot 10^3) : (2{,}7 \cdot 10^5)$
f) $0{,}35 \cdot (1{,}24 \cdot 10^{-8})$
g) $(1\,435 \cdot 10^3) \cdot (6{,}7 \cdot 10^7)$
h) $(32{,}130 \cdot 10^{-6}) : (3{,}7 \cdot 10^7)$
i) $(54{,}3 \cdot 10^{-7}) : (6{,}7 \cdot 10^5)$

a) $1{,}0001135 \cdot 10^0$
b) $7{,}861769357 \cdot 10^5$
c) $-3{,}1669765 \cdot 10^{10}$
d) $-1{,}2345695977 \cdot 10^{14}$
e) $7{,}444444444 \cdot 10^1$
f) $4{,}34 \cdot 10^{-9}$
g) $9{,}6145 \cdot 10^{13}$
h) $8{,}683783784 \cdot 10^{-13}$
i) $8{,}104477612 \cdot 10^{-12}$

071 Calcula el término que falta en cada caso.

a) $15 \cdot 10^4 + \square = 13 \cdot 10^3$
b) $4{,}6 \cdot 10^{11} + \square = 2{,}1 \cdot 10^4$
c) $(32{,}15 \cdot 10^4) \cdot \square = 65{,}53 \cdot 10^4$
d) $(3{,}6 \cdot 10^2) : \square = 6{,}12 \cdot 10^{12}$

a) $-1{,}37 \cdot 10^5$
b) $-4{,}59999979 \cdot 10^{11}$
c) $2{,}038258165 \cdot 10^0$
d) $5{,}882352941 \cdot 10^{-11}$

072 Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número o expresión.

a) 7,65444...
b) $-11{,}2$
c) 999
d) 9,88777...
e) $\pi - e$
f) 1,010222...
g) 300,301302...
h) $\sqrt{169}$
i) $\sqrt{99}\,e$
j) 6,585959...
k) 1,00111...

a) $7{,}65\overset{\frown}{4} \longrightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto $\mathbb{Q}$
b) $-11{,}2 \longrightarrow$ Decimal exacto; conjunto $\mathbb{Q}$
c) $999 \longrightarrow$ Natural; conjunto $\mathbb{N}$
d) $9{,}88\overset{\frown}{7} \longrightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto $\mathbb{Q}$
e) $\pi - e \longrightarrow$ Irracional; conjunto $\mathbb{I}$
f) $1{,}010\overset{\frown}{2} \longrightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto $\mathbb{Q}$
g) $300{,}301302\ldots \rightarrow$ Irracional; conjunto $\mathbb{I}$
h) $\sqrt{169} = 13 \longrightarrow$ Natural; conjunto $\mathbb{N}$
i) $\sqrt{99}\,e \longrightarrow$ Irracional; conjunto $\mathbb{I}$
j) $6{,}58\overset{\frown}{59} \longrightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto $\mathbb{Q}$
k) $1{,}00\overset{\frown}{1} \longrightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto $\mathbb{Q}$

073 **Ordena, de mayor a menor, estos números.**

a) $-\sqrt{3}$; $-\dfrac{7}{5}$; $-1{,}7333...$; $-1{,}73206$

b) 1; $1{,}00111...$; $\dfrac{10}{9}$; $1{,}111...$; $1{,}08999...$

a) $-\sqrt{3} = -1{,}7320508...$; $-\dfrac{7}{5} = -1{,}4$

$$-1{,}4 > -1{,}7320508... > -1{,}73206 > -1{,}7\overset{\frown}{3}$$

$$-\frac{7}{5} > -\sqrt{3} > -1{,}73206 > -1{,}7\overset{\frown}{3}$$

b) $\dfrac{10}{9} = 1{,}\overset{\frown}{1} \rightarrow 1{,}\overset{\frown}{1} > 1{,}08\overset{\frown}{9} > 1{,}00\overset{\frown}{1} > 1$

074 **Averigua cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.**

a) $0{,}444444...$
b) $0{,}323232...$
c) $0{,}151155111555...$
d) $0{,}234432234432...$

Determina, cuando sea posible, la expresión fraccionaria del número.

a) Racional, $\dfrac{4}{9}$.

b) Racional, $\dfrac{32}{99}$.

c) Irracional.

d) Racional, $\dfrac{234\,432}{999\,999} = \dfrac{2\,368}{10\,101}$.

075 **HAZLO ASÍ**

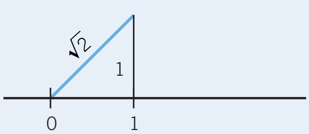
¿CÓMO SE REPRESENTAN, DE FORMA EXACTA, LAS RAÍCES CUYO RADICANDO NO ES SUMA DE CUADRADOS PERFECTOS?

Utilizando la regla y el compás, dibuja el número $\sqrt{3}$ en la recta real.

PRIMERO. Se descompone el radicando en suma de cuadrados perfectos.

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$

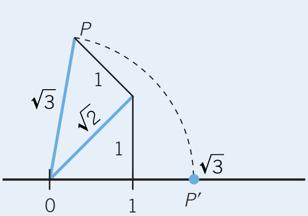
SEGUNDO. Sobre la recta real se construye un triángulo rectángulo cuyos catetos son las raíces de los dos primeros cuadrados perfectos.



La primera relación es:

$$1^2 + 1^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

TERCERO. Sobre la hipotenusa del triángulo anterior se construye otro triángulo rectángulo cuyo segundo cateto mida la raíz del siguiente cuadrado perfecto, repitiendo el proceso hasta acabar con los cuadrados.



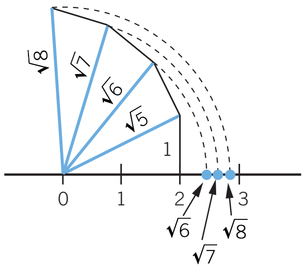
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

Después, con centro en 0 y radio la hipotenusa del último triángulo, se traza un arco que corta a la recta en el punto P', que es la raíz buscada.

076 Utilizando los procedimientos anteriores, representa los siguientes números reales.

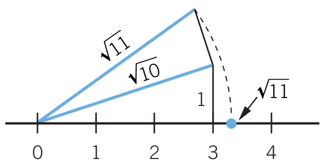
a) $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt{11}$

a), b) y c)



$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 1^2$$
$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 1^2$$
$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + 1^2$$
$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 1^2$$

d)

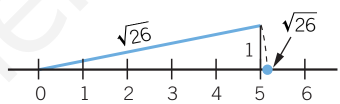


$$\left(\sqrt{10}\right)^2 = 3^2 + 1^2$$
$$\left(\sqrt{11}\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 1^2$$

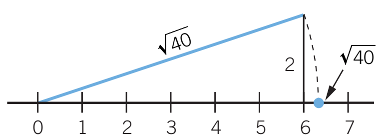
077 Representa, con regla y compás, estos números reales.

a) $\sqrt{26}$ **b)** $\sqrt{40}$ **c)** $\sqrt{161}$ **d)** $\sqrt{187}$

a) $26 = 5^2 + 1^2$

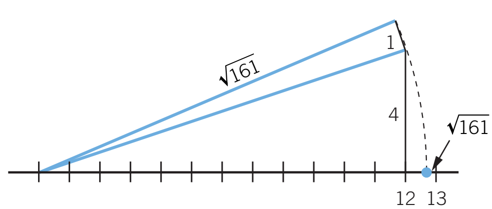


b) $40 = 6^2 + 2^2$



c) $161 = 12^2 + 17$

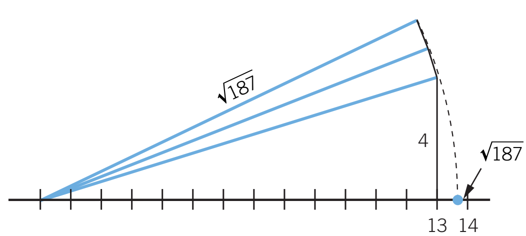
$17 = 4^2 + 1^2$



d) $187 = 13^2 + 18$

$18 = 4^2 + 2$

$2 = 1^2 + 1^2$



078 **Explica razonadamente la forma de representar los siguientes números reales.**

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **d)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow$ Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\dfrac{1}{2}$.

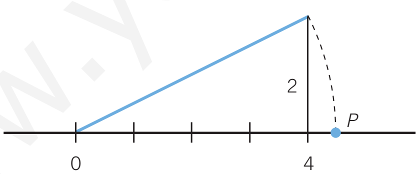
b) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2 \rightarrow$ Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y 1.

c) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow$ Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$.

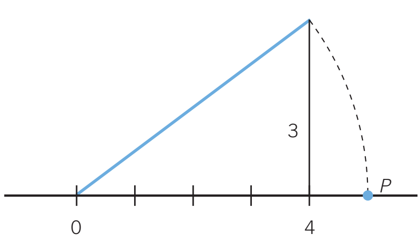
d) $1^2+1^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow$ Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, para representar $\sqrt{2}$.
$\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow$ Dibujamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{2}$ y 1, para representar $\sqrt{3}$.
Trasladamos con el compás la medida de $\sqrt{3}$ a partir del punto que representa a $\sqrt{2}$ y obtenemos la representación de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

079 **¿Qué número representa el punto *P* en cada caso?**

a)



b)



a) $\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$. Por tanto, *P* representa al número $\sqrt{20}$.

b) $\sqrt{16+9}=5$. Por tanto, *P* representa al número 5.

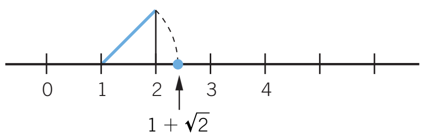
080 El número $1 + \sqrt{2}$:

a) ¿Es racional o irracional?

b) Represéntalo de forma exacta sobre la recta real.

a) Irracional

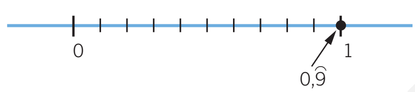
b)



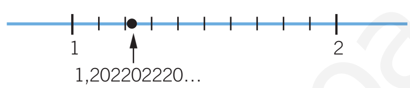
081 Representa de forma aproximada en la recta real estos números.

a) $0,\widehat{9}$ **b)** 1,202202220... **c)** $-\sqrt{15}$

a)



b)



c)

082 Escribe tres números irracionales, utilizando los dígitos 0 y 1 en su parte decimal. Razona el proceso de construcción de cada uno.

Comenzamos la parte decimal por 1 y entre dos dígitos 1 consecutivos añadimos un 0 más que entre los anteriores: 1,1101001000100001…

Comenzamos por un 1 y un 0, a continuación dos 1 y dos 0: 1,10110011100011110000…

En las posiciones correspondientes a números primos ponemos 1 y en el resto 0: 1,01101010001010001000001…

083 Escribe dos números reales y dos números irracionales comprendidos entre:

a) 7,1 y 7,11

b) $\frac{8}{9}$ y 1

c) $0,6\widehat{3}$ y 0,636633666333...

d) π y $\sqrt{10}$

a) Reales: 7,102 y 7,109. Irracionales: $\sqrt{50,5}$ y 7,10110111011110...

b) Reales: $0,\widehat{9}$ y 0,95. Irracionales: $\sqrt{0,9}$ y 0,919293949596...

c) Reales: 0,634 y 0,635. Irracionales: 0,636465666768... y 0,636261605958...

d) Reales: 3,15 y 3,16. Irracionales: 3,15012384… y 3,162122334489…

084 Redondea y trunca los siguientes números a las milésimas, y calcula el error absoluto cometido.

a) $1,2468$ **d)** $0,\widehat{67}$ **g)** $\sqrt{19}$

b) $5,\widehat{3}$ **e)** $3,2\widehat{8}$ **h)** $9,\widehat{12}$

c) $21,9673$ **f)** $\sqrt{17}$ **i)** $6,5\widehat{4}$

a) Redondeo: 1,247. Error: 0,0002
Truncamiento: 1,246. Error: 0,0008

b) Redondeo: 5,333. Error: $0,000\widehat{3}$
Truncamiento: 5,333. Error: $0,000\widehat{3}$

c) Redondeo: 21,967. Error: 0,0003
Truncamiento: 21,967. Error: 0,0003

d) Redondeo: 0,677. Error: $0,000\widehat{32}$
Truncamiento: 0,0676. Error: $0,000\widehat{76}$

e) Redondeo: 3,283. Error: $0,000\widehat{17}$
Truncamiento: 3,282. Error: $0,000\widehat{82}$

f) Redondeo: 4,123. Error: 0,000105626...
Truncamiento: 4,123. Error: 0,000105626...

g) Redondeo: 4,359. Error: 0,000101056...
Truncamiento: 4,358. Error: 0,000898944...

h) Redondeo: 9,121. Error: $0,000\widehat{21}$
Truncamiento: 9,121. Error: $0,000\widehat{21}$

i) Redondeo: 6,545. Error: $0,000\widehat{45}$
Truncamiento: 6,545. Error: $0,000\widehat{45}$

085 Calcula el mayor error que se puede cometer al aproximar los siguientes números a las décimas.

a) $5,697$ **b)** $0,2\widehat{8}$ **c)** $\sqrt{21}$

¿Qué resultado has obtenido? ¿Depende del número que has aproximado?

a) 0,097 b) 0,088888 c) 0,0852575695...

En los tres casos, el mayor error se comete cuando se truncan los números.

086 Escribe un número tal que:

a) Al redondearlo y truncarlo a las décimas, dé el mismo resultado.

b) Al redondearlo a las centésimas, dé como resultado 5,87.

c) Al redondearlo a las centésimas, dé como resultado 11,56 y el error absoluto cometido sea 0,003.

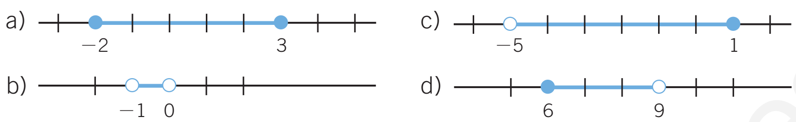
d) Al truncarlo a las décimas, dé como resultado 0,7 y el error absoluto sea 0,025.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

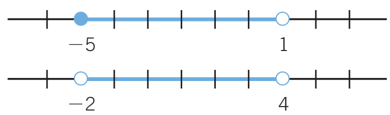
a) 1,23 b) 5,8685 c) 11,563 d) 0,675

087 Representa los siguientes intervalos.

a) $[-2, 3]$ **b)** $(-1, 0)$ **c)** $(-5, 1]$ **d)** $[6, 9)$



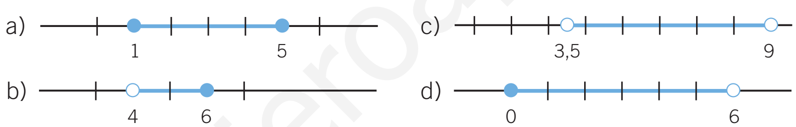
088 ¿Qué intervalos son los representados?



Son $[-5, 1)$ y $(-2, 4)$.

089 Representa sobre la recta real estos intervalos, e indica dos números que pertenezcan a los cuatro intervalos a la vez.

a) $[1, 5]$ **b)** $(4, 6]$ **c)** $(3,5; 9)$ **d)** $[0, 6)$



Todos los números del intervalo $(4, 5]$. Por ejemplo: 5 y 4,5.

090 Observa el ejemplo y expresa cada intervalo usando desigualdades.

$(2, 5]$ equivale a $2 < x \leq 5$

a) $[-1, 2]$ **c)** $[0, \pi]$ **e)** $(11, 15]$

b) $(1, 5)$ **d)** $(6, 7)$ **f)** $[0, 11)$

a) $-1 \leq x \leq 2$ c) $0 \leq x \leq \pi$ e) $11 < x \leq 15$

b) $1 < x < 5$ d) $6 < x < 7$ f) $0 \leq x < 11$

091 Escribe dos intervalos que contengan al número $-0,\widehat{8}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:
$[-5, 0)$ y $(-0,9; -0,8)$

092 ¿Cuál de estos intervalos utilizarías para expresar el conjunto de los números reales mayores que -3 y menores o iguales que 5?

a) $(-3, 5)$ **b)** $[-3, 5)$ **c)** $(-3, 5]$ **d)** $[-3, 5]$

La opción c): $(-3, 5]$

093 Expresa en forma de potencia cuántos abuelos, bisabuelos y tatarabuelos tienes.

Abuelos: 2^2, bisabuelos: 2^3, tatarabuelos: 2^4.

094 ●● **Se ha organizado un concurso de tiro con arco. Después de seleccionar a los concursantes se han formado cinco equipos de cinco miembros cada uno. Cada miembro del equipo dispone de cinco flechas para lanzar a la diana. ¿Cuántas flechas se necesitan?**

$5^3 = 125$. Se necesitan 125 flechas.

095 ●● **La biblioteca del aula tiene tres estanterías. Cada estantería consta de tres baldas y cada balda tiene tres apartados que contienen tres libros. ¿Cuántos libros tiene la biblioteca? Expresa el resultado en forma de potencia.**

Libros: $3^4 = 81$

096 ●●● **La paga semanal de Mario es de 32 €. Sus padres le han castigado reduciéndosela a la mitad cada semana.**

a) Expresa este proceso en forma de potencias.

b) ¿Cuántas semanas tienen que pasar para que la paga quede reducida a 25 céntimos?

a) $2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots$

b) Tienen que pasar 7 semanas.

097 ●● **Un piso tiene una superficie de 117,13 m² y la de otro es 73,65 m². Redondea y trunca la superficie de cada piso a metros cuadrados. Indica qué aproximación es más precisa.**

En el primero, el redondeo es 117 m², igual que el truncamiento, por lo que el error absoluto es el mismo: 0,13 m².

En el segundo, el redondeo es 74 m², con error absoluto 0,35 m². En el truncamiento es 73 m², con error absoluto 0,65 m². Por tanto, es más preciso el redondeo.

098 ●● **La distancia a la estación de tren más próxima es de 16,74 km. Luis dice que dicha distancia es 16 km y Sara afirma que es 17 km. ¿Quién aproxima de forma más precisa?**

Se aproxima más Sara, con un error de 0,26 km, pues Luis comete un error de 0,74 km.

099 ●● **Las notas que han obtenido los alumnos de 3.º ESO en la primera evaluación han sido:**

2,5	4,5	5,8	2,6
6,4	5,2	9,7	7,2
8,6	3,8	9,3	4,7
6,1	6,4	6,8	9,1
7,6	9,7	3,7	1,6
9	4,3	8,4	5
3,2			

El profesor pone en el boletín la nota resultante de truncar al número entero más próximo.

a) ¿Qué nota les corresponderá?

b) ¿Cuál sería la nota si el profesor redondeara?

a) 2, 6, 8, 6, 7, 9, 3, 4, 5, 3, 6, 9, 4, 5, 9, 9, 6, 3, 8, 2, 7, 4, 9, 1, 5

b) 3, 6, 9, 6, 8, 9, 3, 5, 5, 4, 6, 10, 4, 6, 10, 9, 7, 4, 8, 3, 7, 5, 9, 2, 5

100 **En una botella de 5 litros de agua mineral figura escrito «5 litros $\pm$ 5 %».**

a) ¿Qué quiere decir esa indicación?

b) ¿Entre qué valores está comprendida la capacidad de la botella?

a) Significa que el error máximo que pueden cometer cuando indican que son 5 litros es el 5 % por defecto o por exceso.

b) Entre 4,75 y 5,25 litros.

101 **Una potencia de exponente entero positivo, ¿es siempre mayor que la base? ¿En qué casos?**

No, es mayor que la base solo si esta es mayor que 1.

102 **Una potencia de exponente entero negativo, ¿es mayor que la base? ¿Hay algunos valores de la base para los que la potencia sea menor?**

Es mayor que la base si esta es menor que 1, y será menor si la base es mayor que 1.

103 **Continúa la serie.**

$2^2 = 1^2 + 3$	$2^2 = 1^2 + 3$
$3^2 = 2^2 + 5$	$3^2 = 2^2 + 5$
$4^2 = 3^2 + 7$	$4^2 = 3^2 + 7$
$5^2 = \square^2 + \square$	$5^2 = 4^2 + 9$
$n^2 = \dots$	$n^2 = (n - 1)^2 + (2n - 1)$

104 **Arquímedes, en el siglo III a.C., dio como aproximación del número π la fracción $\frac{22}{7}$.**

a) Escribe tres aproximaciones por defecto y por exceso de π de dicha fracción.

b) Redondea a las milésimas π y su aproximación, y compara los resultados.

c) ¿Y si los redondeas a las centésimas?

a) Por defecto: 3; 3,1; 3,14

Por exceso: 4; 3,2; 3,15

b) $\frac{22}{7} \approx 3{,}143$; $\pi \approx 3{,}142$. La diferencia del redondeo es 1 milésima.

c) $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$; $\pi \approx 3{,}14$. El redondeo a las centésimas es el mismo.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

105 ●●● **Navegando en Internet hemos llegado a la siguiente página:**

Formación de los planetas

Los planetas se formaron hace unos 4 500 millones de años, al mismo tiempo que el Sol.

En general, los materiales ligeros que no se quedaron en el Sol se alejaron más que los pesados. En la nube de gas y polvo original, que giraba en espirales, había zonas más densas, *proyectos* de planetas. La gravedad y las colisiones llevaron más materia a estas zonas y el movimiento rotatorio las redondeó.

Planetas	Radio ecuatorial	Distancia al Sol (km)	Lunas	Periodo de rotación	Órbita
Mercurio	2 440 km	$5{,}791 \cdot 10^7$	0	58,6 días	87,97 días
Venus	6 052 km	$1{,}082 \cdot 10^8$	0	–243 días	224,7 días
Tierra	6 378 km	$1{,}496 \cdot 10^8$	1	23,93 horas	365,256 días
Marte	3 397 km	$2{,}2794 \cdot 10^8$	2	24,62 horas	686,98 días
Júpiter	71 492 km	$7{,}7833 \cdot 10^8$	16	9,84 horas	11,86 años
Saturno	60 268 km	$1{,}429 \cdot 10^9$	18*	10,23 horas	29,46 años
Urano	25 559 km	$2{,}87 \cdot 10^9$	15	17,9 horas	84,01 años
Neptuno	24 746 km	$4{,}5 \cdot 10^9$	8	16,11 horas	164,8 años

*Algunos astrónomos atribuyen 23 satélites al planeta Saturno.

Lab
Diversión
Noticias
Astronautas
Estaciones espaciales
Vivir en el espacio
Exploración
¿Estamos solos?

Exploración

Navegación espacial

Hasta ahora, casi todas las misiones espaciales han utilizado motores cohete alimentados con combustibles y comburentes químicos. Por desgracia, esos motores no son muy eficaces; por ejemplo, más de la mitad del peso de la sonda espacial Rosetta de la ESA en el momento de su lanzamiento era de combustible.

La ESA está estudiando actualmente las formas de reducir la cantidad de combustible que transportan las naves. Una de las ideas consiste en un motor de iones que utilice una 'pistola' eléctrica para 'disparar' gas hacia el espacio. Aunque la fuerza de empuje del motor cohete eléctrico de iones es muy pequeña, va aumentando gradualmente su velocidad hasta que, llegado el momento, permite que la nave espacial se desplace con mucha rapidez. La sonda SMART 1 ha probado con éxito un motor de iones en su viaje de la Tierra a la Luna. Por cada kilogramo de combustible consumido, ese motor produce un aumento de la velocidad de la nave diez veces mayor que si fuera un motor cohete ordinario.

La ESA también está estudiando usar naves espaciales que utilicen 'velas solares' en lugar de motores cohete. La luz solar 'sopla' sobre una vela de gran tamaño y puede propulsar una nave espacial hacia otros planetas. Después de muchos meses de viaje con el viento del Sol, una nave de ese tipo podría alcanzar una velocidad de 360 000 km/h.

Exploración
ExoMars
Futuras exploraciones en Marte
Nueva formas de transporte

Eres capaz de... Comprender

a) ¿Qué distancia hay entre Mercurio y Saturno?

b) ¿Qué distancia puede recorrer la nave espacial que se describe en la segunda página en un día?

Eres capaz de... Resolver

c) Con una nave como la que describe la segunda página, ¿cuánto se tardaría en ir y volver de la Tierra a Neptuno?

Eres capaz de... Decidir

d) Se ha descubierto un planeta que puede estar habitado a $1{,}73448 \cdot 10^{11}$ km de la Tierra. ¿Se podría mandar una nave tripulada?

a) La distancia de Mercurio a Saturno es:

$$1{,}429 \cdot 10^9 - 5{,}791 \cdot 10^7 = 1{,}429 \cdot 10^9 - 0{,}05791 \cdot 10^9 = $$
$$= 1{,}37109 \cdot 10^9 \text{ km}$$

b) $360\,000 \cdot 24 = 8\,640\,000$ km recorre en un día.

c) Distancia de la Tierra a Neptuno, ida y vuelta:
$(4{,}5 \cdot 10^9 - 0{,}1496 \cdot 10^9) \cdot 2 = 4{,}3504 \cdot 10^9 \cdot 2 = 8{,}7008 \cdot 10^9$
$8{,}7008 \cdot 10^9 : 360\,000 = 24\,168{,}9$ horas $\approx 1\,007$ días

d) $1{,}73448 \cdot 10^{11} : 360\,000 = 481\,800$ horas $= 20\,075$ días $= 55$ años
No se puede mandar una nave tripulada porque serían 110 años de ida y vuelta.

106 ●●● **Sergio, antes de viajar a Londres, cambió en el banco 200 libras.**

COMPRA DE BILLETES EXTRANJEROS Y/O
CHEQUES DE VIAJE EN DIVISA Y/O
PAGO DE CHEQUE DE CUENTA EN DIVISA

BANCO

ENTIDAD - OFICINA - CUENTA
2038 - 5538948273647783 EUR

D. SERGIO AVELLANEDA GIL
Domicilio AVENIDA DE LA LUZ, S/N
Población MADRID
28082 D.N.I./C.I. 978687623
REF. 6036786
Concepto: OPERACION INVISIBLE

DOCUMENTO	DIVISA	IMPORTE	CAMBIO	CONTRAVALOR
BILLETES	GBP	200,0	0,649900	307,74 EUR
				307,74 EUR
Comisiones y gastos				
FECHA OPERACIÓN: 31/07/2007	FECHA VALOR: 31/07/2007		TOTAL	307,74 EUR

(firma del interesado)

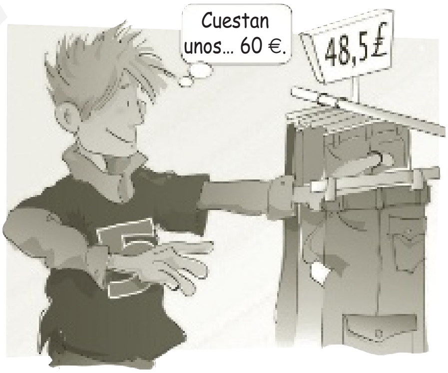
BANCO (firma y sello)

Eres capaz de... Comprender

a) ¿Cuántos euros le costaron las 200 libras? ¿Cuántas libras vale 1 euro?

Eres capaz de... Resolver

b) Sergio quiere comprarse unos pantalones.



¿Crees que es correcta su estimación? ¿Qué error comete?

Eres capaz de... Decidir

c) En el aeropuerto ha encontrado un videojuego que cuesta 51,20 libras. Ese videojuego en España cuesta 83 €. En este momento solo le quedan 4,60 libras, y al ir a cambiar euros por libras le han dicho que solamente aceptan billetes de 10, 20 y 50 euros. ¿Crees que le conviene cambiar dinero y comprar el videojuego?

a) Le costaron 307,74 €.
   200 : 307,74 = 0,649899 libras vale 1 euro.
   Aproximadamente, 0,65 libras son 1 euro.

b) $60 \cdot 0,65 = 39$ libras
   No es correcta su estimación, su error es, aproximadamente, de 9,50 libras.

c) En España el videojuego cuesta, aproximadamente, $83 \cdot 0,65 = 53,95$ €
   1 : 0,65 = 1,538463 € vale 1 libra.
   Una libra vale, aproximadamente, 1,54 €.
   $51,20 - 4,60 = 46,60$ libras necesita.
   $46,60 \cdot 1,54 = 71,764$ € tiene que cambiar, aproximadamente.
   Tiene que cambiar, como mínimo, un billete de 50, otro de 20 y otro de 10 euros, en total, 80 €.
   No le conviene cambiar dinero y comprar el videojuego, pues es más económico comprarlo en España.

3 Polinomios

El servidor del califa

Mohamed recorría nervioso las salas de la Casa de la Sabiduría buscando al sabio Al-Khwarizmi, el cual le había enseñado un método para contar y operar con cantidades desconocidas que el joven aplicaba en su trabajo como funcionario de abastos del palacio del califa.

Por fin, sentado al lado de una fuente encontró a su maestro.

–Maestro, ¿podemos repasar los cálculos de ayer?

–Me alegra tu afán de conocimiento. –Al-Khwarizmi se extrañaba de que Mohamed dedicara cada rato libre a aprender.

–La riqueza de los pobres es la bondad y el conocimiento, y como cualquier hombre, yo deseo ser rico; además, ningún ladrón puede robártela –repuso Mohamed con una sonrisa.

–¡Está bien, está bien! –contestó, y entre asombrado y divertido el sabio le propuso unos ejercicios aritméticos mientras él estudiaba el lenguaje algebraico y las ecuaciones.

En la tablilla podía leerse: «Un cuadrado y diez raíces son igual a treinta y nueve unidades…».

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Investiga sobre las aportaciones de la cultura árabe al estudio de las matemáticas y sobre la vida y obra de Al-Khwarizmi.**

Una biografía con los aspectos más importantes de su vida se puede encontrar en la página:
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/AlJwarizmi.asp

En esta página puedes profundizar más sobre las repercusiones de sus estudios en la Europa medieval:
http://www.astromia.com/biografias/alkhwarizmi.htm

2 **¿A qué se llamó Casa de la Sabiduría de Bagdad? ¿Qué relación tiene con Al-Khwarizmi?**

La historia de la Casa de la Sabiduría de Bagdad y su relación con Al-Khwarizmi se puede hallar en esta página:
http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/alkhwarizmi.htm

3 **Busca información sobre las aportaciones de Al-Khwarizmi al álgebra.**

Una extensa relación de todos los estudios y descubrimientos matemáticos de Al-Khwarizmi está en:
http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo.php?num=3819

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Transforma en expresiones algebraicas.**

a) El doble del cuadrado de un número. **b) Un número más la mitad de otro.**

a) $2x^2$ b) $x + \frac{y}{2}$

2 **Expresa el resultado de la operación como una sola potencia.**

a) $(4^3 \cdot 4^2)^5$
b) $[(-5)^3 : (-5)^2]^2$
c) $(9^7 : 9^5)^2$
d) $(4^3 : 4^2)^3$
e) $[(4,2)^4 \cdot (4,2)^5]^4$
f) $(7^{11} : 7^5)^2$
g) $(3^2 \cdot 9^4)^2$
h) $[(-3)^5 \cdot 4^5]^2$

a) $(4^5)^5 = 4^{25}$
b) $[(-5)^1]^2 = (-5)^2$
c) $(9^2)^2 = 9^4$
d) $(4^1)^3 = 4^3$
e) $[(4,2)^9]^4 = (4,2)^{36}$
f) $(7^6)^2 = 7^{12}$
g) $(3^2 \cdot 3^8)^2 = 3^{10 \cdot 2} = 3^{20}$
h) $(-3)^{10} \cdot 4^{10} = [(-3) \cdot 4]^{10} = (-12)^{10}$

3 **Aplica la propiedad distributiva en las siguientes expresiones.**

a) $7 \cdot (4 + 2)$
b) $3 \cdot (x - 5)$
c) $9x \cdot (x - 4)$
d) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4x + 7)$

a) $7 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 28 + 14 = 42$
b) $3 \cdot x - 3 \cdot 5 = 3x - 15$
c) $9x^2 - 36x$
d) $-6x^3 + 8x^2 - 14x$

EJERCICIOS

001 Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de estos monomios.

a) $-3x^3y^2z^4$ **b)** $-5b^2c^3$ **c)** $x^{15}y$ **d)** $-\frac{2}{3}xy^5$

a) Coeficiente: -3 Parte literal: $x^3y^2z^4$ Grado: $3 + 2 + 4 = 9$
b) Coeficiente: -5 Parte literal: b^2c^3 Grado: $2 + 3 = 5$
c) Coeficiente: 1 Parte literal: $x^{15}y$ Grado: $15 + 1 = 16$
d) Coeficiente: $-\frac{2}{3}$ Parte literal: xy^5 Grado: $1 + 5 = 6$

002 Determina si los monomios son semejantes.

a) $\frac{1}{2}x^2y^3z^5$ **y** $-5z^5x^2y^3$
b) $6x^3y^4$ **y** $6x^4y^3$
c) xy^3 **y** $-xy^3$
d) $7x$ **y** $-x$

a) Son semejantes.
b) No son semejantes.
c) Son semejantes.
d) Son semejantes.

003 Escribe el monomio opuesto.

a) $\frac{1}{2}xy^3z^2$ **b)** $-4a^2b^3$ **c)** $-5x^9$ **d)** $9x^{11}$

a) $-\frac{1}{2}xy^3z^2$ b) $4a^2b^3$ c) $5x^9$ d) $-9x^{11}$

004 Escribe, si se puede, un monomio:

a) De coeficiente 2 y parte literal xy^6.
b) De coeficiente -3 y semejante a $-2x^3$.
c) De grado 7 y semejante a $-4x^2y$.
d) De parte literal x^3y^4 y opuesto a $-4x^3y$.

a) $2xy^6$
b) $-3x^3$
c) No es posible. No puede ser de grado 7 y 3 a la vez.
d) No es posible. No puede ser de grado 7 y 4 a la vez.

005 Realiza las operaciones.

a) $6x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x^2 - x^2$
b) $3x^2y^2 - 2x^2y^2 + 6x^2y^2 - x^2y^2$
c) $(-5ab) \cdot (6abc)$
d) $(-8x^2y) \cdot (-4xy^2)$
e) $(15xy) : (-3x)$
f) $(2xyz) : (-2xy)$

a) $9x^2$
b) $6x^2y^2$
c) $-30a^2b^2c$
d) $32x^3y^3$
e) $-5y$
f) $-z$

006 **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $-2x^3 - x^2 + 5x^2 - 6x + x - 2x^2 - 6x$

b) $5x - (x^2 + 3x^3) + 3x^2 - x^3 + 2x$

c) $11x^7y^3 + 4xy^5 - 9x^7y^3 + xy^5 - x^2$

a) $-2x^3 + (-1 + 5 - 2)x^2 + (-6 + 1 - 6)x = -2x^3 + 2x^2 - 11x$

b) $(-3 - 1)x^3 + (-1 + 3)x^2 + (5 + 2)x = -4x^3 + 2x^2 + 7x$

c) $(11 - 9)x^7y^3 + (4 + 1)xy^5 - x^2 = 2x^7y^3 + 5xy^5 - x^2$

007 **Calcula:** $-x^2y - (-3x^2 \cdot 7y) + (16x^2y^3z : 4y^2z)$

$-x^2y + 21x^2y + 4x^2y = 24x^2y$

008 **Determina el grado, las variables y el término independiente de estos polinomios.**

a) $P(x, y) = -2x^5 - x^2y^2 + 5x^3 - 1 + 3x^3 + 3$

b) $Q(x, y) = x^2 + 4x^3 - x - 9 + 4x^4y^3$

c) $R(x, y) = x^9 - x^7y^3 + y^{13} - 4$

d) $S(x, y, z) = 7x^2yz - 3xy^2z + 8xyz^2$

a) Grado: 5. Variables: x, y. Término independiente: $3 - 1 = 2$.

b) Grado: $3 + 4 = 7$. Variables: x, y. Término independiente: -9.

c) Grado: 13. Variables: x, y. Término independiente: -4.

d) Grado: $2 + 1 + 1 = 4$. Variables: x, y, z. Término independiente: 0, es decir, no tiene término independiente.

009 **Reduce este polinomio y calcula su opuesto.**

$$R(x) = x^5 + 1 - 3 + 4x^5 - 3x - 2x$$

$R(x) = 5x^5 - 5x - 2$, y su opuesto es: $-R(x) = -5x^5 + 5x + 2$

010 **Escribe un polinomio de dos variables, de grado 7, que tenga un término de grado 3, que sea reducido y no tenga término independiente.**

Por ejemplo: $5x^5y^2 - 3xy^2$

011 **Calcula el valor numérico del polinomio en cada caso.**

a) $P(x) = 3x^6 + 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 7x - 2$, **para** $x = 0$.

b) $P(x, y) = -x^4y - x^2y + 7xy - 2$, **para** $x = 1$, $y = 2$.

a) $P(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 0 + 7 \cdot 0 - 2 = -2$

b) $P(1, 2) = -1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 2 - 2 = 8$

012 **Dados los polinomios:**

$$\boldsymbol{P(x, y) = 3x^2y + xy - 7x + y - 2}$$
$$\boldsymbol{Q(x, y) = -xy^2 + 4y^2 - 3x}$$

halla los valores numéricos:

$\boldsymbol{P(0, 0)}$ $\boldsymbol{P(1, 1)}$ $\boldsymbol{Q(0, -1)}$ $\boldsymbol{Q(0, 2)}$

$P(0, 0) = 3 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 0 - 2 = -2$

$P(1, 1) = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 1 - 2 = -4$

$Q(0, -1) = -0 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 0 = 4$

$Q(0, 2) = -0 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 0 = 16$

013 **Reduce los siguientes polinomios y calcula su valor numérico para $\boldsymbol{x = 2}$.**

a) $\boldsymbol{P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1}$

b) $\boldsymbol{Q(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x}$

a) $P(x) = -4x^2 + x + 5 \xrightarrow{x\,=\,2} P(2) = -4 \cdot 2^2 + 2 + 5 = -9$

b) $Q(x) = -2x^4 - 4x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{x\,=\,2} Q(2) = -2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 =$
$= -55$

014 **Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ para que el polinomio $\boldsymbol{P(x) = 2x^2 - ax + 1}$ cumpla que $\boldsymbol{P(2) = 5}$.**

$P(2) = 2 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + 1 = 8 - 2a + 1 = 5 \rightarrow 9 - 2a = 5$
$\rightarrow 4 = 2a \rightarrow a = 2$

015 **Determina si los números $\boldsymbol{-1}$ y 1 son raíces del polinomio $\boldsymbol{P(x) = x^2 - 1}$. ¿Sabrías hallar otra raíz del polinomio?**

$P(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow -1$ es una raíz.

$P(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow 1$ es una raíz.

Las únicas raíces del polinomio $P(x)$ son -1 y 1.

016 **Halla la suma, la resta y el producto de cada par de polinomios.**

a) $\boldsymbol{R(x) = x^4 - x + 1}$ $\boldsymbol{S(x) = x^2 + 1}$

b) $\boldsymbol{R(x) = x + 1}$ $\boldsymbol{S(x) = x^2 + x - 1}$

c) $\boldsymbol{R(x) = 5x^7 - x^8 + 1}$ $\boldsymbol{S(x) = x^2 + x^6 - 1}$

d) $\boldsymbol{R(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1}$ $\boldsymbol{S(x) = x^3 + 2x}$

e) $\boldsymbol{R(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 3}$ $\boldsymbol{S(x) = x^4 + x^2 - 8}$

f) $\boldsymbol{R(x) = x^7 + 3}$ $\boldsymbol{S(x) = x^3 + x^2 + 4x + 2}$

a) $R(x) + S(x) = (x^4 - x + 1) + (x^2 + 1) = x^4 + x^2 - x + 2$

$R(x) - S(x) = (x^4 - x + 1) - (x^2 + 1) = x^4 - x^2 - x$

$R(x) \cdot S(x) = (x^4 - x + 1) \cdot (x^2 + 1) = x^6 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

b) $R(x) + S(x) = (x + 1) + (x^2 + x - 1) = x^2 + 2x$

$R(x) - S(x) = (x + 1) - (x^2 + x - 1) = -x^2 + 2$

$R(x) \cdot S(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 - 1$

c) $R(x) + S(x) = (5x^7 - x^8 + 1) + (x^2 + x^6 - 1) = -x^8 + 5x^7 + x^6 + x^2$

$R(x) - S(x) = (5x^7 - x^8 + 1) - (x^2 + x^6 - 1) = -x^8 + 5x^7 - x^6 - x^2 + 2$

$R(x) \cdot S(x) = (5x^7 - x^8 + 1) \cdot (x^2 + x^6 - 1) =$
$= -x^{14} + 5x^{13} - x^{10} + 5x^9 + x^8 - 5x^7 + x^6 + x^2 - 1$

d) $R(x) + S(x) = (x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x) =$
$= x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x + 1$

$R(x) - S(x) = (x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1) - (x^3 + 2x) = x^5 - x^4 + 1$

$R(x) \cdot S(x) = (x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1) \cdot (x^3 + 2x) =$
$= x^8 - x^7 + 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x$

e) $R(x) + S(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 3) + (x^4 + x^2 - 8) =$
$= x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 11$

$R(x) - S(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 3) - (x^4 + x^2 - 8) =$
$= -x^4 + 7x^3 + x^2 + x + 5$

$R(x) \cdot S(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 3) \cdot (x^4 + x^2 - 8) =$
$= 7x^7 + 2x^6 + 8x^5 - x^4 - 55x^3 - 19x^2 - 8x + 24$

f) $R(x) + S(x) = (x^7 + 3) + (x^3 + x^2 + 4x + 2) = x^7 + x^3 + x^2 + 4x + 5$

$R(x) - S(x) = (x^7 + 3) - (x^3 + x^2 + 4x + 2) = x^7 - x^3 - x^2 - 4x + 1$

$R(x) \cdot S(x) = (x^7 + 3) \cdot (x^3 + x^2 + 4x + 2) =$
$= x^{10} + x^9 + 4x^8 + 2x^7 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 6$

017 **Calcula $-A(x) + B(x)$ y $-A(x) - B(x)$ con los polinomios:**

$$A(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7$$
$$B(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$$

$-A(x) + B(x) = -(3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) + (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) =$
$= -6x^4 + 6x^3 - x^2 - 2x + 8$

$-A(x) - B(x) = -(3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) - (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) =$
$= 4x^3 - x^2 + 2x + 6$

018 **Calcula el valor de a para que: $(3x^3 + 2x^2 - 4) \cdot a = 6x^5 + 4x^4 - 8x^2$**

$$a = \frac{6x^5 + 4x^4 - 8x^2}{3x^3 + 2x^2 - 4} = \frac{2x^2(3x^3 + 2x^2 - 4)}{3x^3 + 2x^2 - 4} = 2x^2$$

019 **Calcula.**

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x) : x$

b) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x - 2)$

c) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 + x - 1)$

d) $(x^4 + x^3 - x^2 + x + 1) : (x^3 - 5)$

e) $(-6x^5 + x^3 + 2x + 2) : (4x^3 + 2x + 3)$

f) $(x^8 - 1) : (x^5 + x^3 + x + 2)$

g) $(x - 1) : x$

h) $(x^2 - 1) : (x + 1)$

i) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

a) $x^2 - 3x + 2$

b)
$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 4x^2 & 2x^2 + x - 3 \\ \cline{1-1}
x^2 - 5x - 5 & \\
-x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
-3x - 5 & \\
3x - 6 & \\ \cline{1-1}
-11 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 2x^2 + 2x & 2x - 5 \\ \cline{1-1}
-5x^2 + 6x - 3 & \\
5x^2 + 5x - 5 & \\ \cline{1-1}
11x - 8 &
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 & x^3 - 5 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 5x & x + 1 \\ \cline{1-1}
x^3 - x^2 + 6x + 1 & \\
-x^3 + 5 & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 6x + 6 &
\end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r|l}
-6x^5 + x^3 \phantom{+ \frac{9}{2}x^2} + 2x + 2 & 4x^3 + 2x + 3 \\ \cline{2-2}
6x^5 + 3x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 & -\dfrac{3}{2}x^2 + 1 \\ \cline{1-1}
4x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + 2x + 2 & \\
-4x^3 \phantom{+ \frac{9}{2}x^2} - 2x - 3 & \\ \cline{1-1}
\dfrac{9}{2}x^2 - 1 &
\end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r|l}
x^8 - 1 & x^5 + x^3 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^8 - x^6 - x^4 + 2x^3 & x^3 - x \\ \cline{1-1}
-x^6 - x^4 + 2x^3 - 1 & \\
x^6 + x^4 + x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
2x^3 + x^2 + 2x - 1 &
\end{array}$$

g)
$$\begin{array}{r|l}
x - 1 & x \\ \cline{2-2}
-x & 1 \\ \cline{1-1}
-1 &
\end{array}$$

h)
$$\begin{array}{r|l}
x^2 - 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^2 - x & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x - 1 & \\
x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

i)
$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^2 + 2x \phantom{{}+6} & x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x + 6 & \\
3x - 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

020 **Haz las siguientes divisiones, y comprueba que están bien realizadas.**

a) $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x^2 - 2)$

b) $(x^4 + x^2 + 3) : (x^3 + 3x^2 + 2x + 6)$

a)
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 \phantom{{}- 4x^2} + 2x \phantom{{}- 2} & x - 4 \\ \cline{1-1}
-4x^2 + 7x - 2 & \\
4x^2 \phantom{{}+ 7x} - 8 & \\ \cline{1-1}
7x - 10 &
\end{array}
$$

$(x^2 - 2) \cdot (x - 4) + (7x - 10) = (x^3 - 4x^2 - 2x + 8) + (7x - 10) =$
$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

b)
$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \phantom{{}- 3x^3} + x^2 \phantom{{}- 6x} + 3 & x^3 + 3x^2 + 2x + 6 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x \phantom{{}+ 3} & x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x^3 - x^2 - 6x + 3 & \\
3x^3 + 9x^2 + 6x + 18 & \\ \cline{1-1}
8x^2 \phantom{{}+ 6x} + 21 &
\end{array}
$$

$(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) \cdot (x - 3) + (8x^2 + 21) =$
$= (x^4 - 7x^2 - 18) + (8x^2 + 21) = x^4 + x^2 + 3$

021 **Calcula el resto de esta división sin realizarla.**

Dividendo $\rightarrow$ $P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3$

Divisor $\longrightarrow$ $Q(x) = x^3 + x - 1$

Cociente $\longrightarrow$ $C(x) = x^2$

$R(x) = P(x) - Q(x) \cdot C(x) = (x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3) - (x^3 + x - 1) \cdot x^2 =$
$= (x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3) - (x^5 + x^3 - x^2) =$
$= 5x - 3$

022 **Saca factor común en los siguientes polinomios.**

a) $8x^2 - 4x$

b) $18x^3y^2 - 12x^2y^3$

c) $30a^2b - 15ab^2 + 5a^2b^2$

d) $-12ab^3 + 4b^2 - 6b^4$

e) $34a^4 - 14a^3b + 28ab^3$

f) $20a^4b^2c + 36a^2b - 18a^3b^2$

a) $4x \cdot (2x - 1)$

b) $6x^2y^2 \cdot (3x - 2y)$

c) $5ab \cdot (6a - 3b + ab)$

d) $2b^2 \cdot (-6ab + 2 - 3b^2)$

e) $2a \cdot (17a^3 - 7a^2b + 14b^3)$

f) $2a^2b \cdot (10a^2bc + 18 - 9ab)$

023 **Extrae factor común en estos polinomios.**

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$ **b)** $x \cdot (xy^2 - y) + y^2 \cdot (4xy - 3y)$ **c)** $\frac{x^2 - 2x}{7} - \frac{x^2 - x}{5}$

a) $\frac{x}{2} \cdot (x - 1)$

b) $y[x \cdot (xy - 1) + y^2(4x - 3)]$

c) $x\left(\frac{x-2}{7} - \frac{x-1}{5}\right)$

024 **Calcula a para que el factor común de $ax^3y + 4x^4y^2 - 6x^ay^3$ sea $2x^2y$.**

Observando el tercer término, si $a > 2$ el factor común de los tres términos tendría x elevado a 3, lo cual no es posible; y si $a < 2$ el factor común de los tres términos tendría x elevado a un número menor que 2. Por tanto, la única solución es $a = 2$.

025 **Desarrolla los siguientes cuadrados.**

a) $(x + 7)^2$
b) $(2x + 1)^2$
c) $(6 + x)^2$
d) $(3x^2 + 2y)^2$
e) $(x - 4)^2$
f) $(3a - b)^2$
g) $(5 - a)^2$
h) $(2b^2 - 5b^3)^2$

a) $x^2 + 14x + 49$
b) $4x^2 + 4x + 1$
c) $36 + 12x + x^2$
d) $9x^4 + 12x^2y + 4y^2$
e) $x^2 - 8x + 16$
f) $9a^2 - 6ab + b^2$
g) $25 - 10a + a^2$
h) $4b^4 - 20b^5 + 25b^6$

026 **Desarrolla.**

a) $(3x^3 - a^2)^2$ **b)** $(x^2 + x^3)^2$ **c)** $(2x + x^3)^2$ **d)** $(6ab^2 - 2y)^2$

a) $9x^6 - 6x^3a^2 + a^4$
b) $x^4 + 2x^5 + x^6$
c) $4x^2 + 4x^4 + x^6$
d) $36a^2b^4 - 24ab^2y + 4y^2$

027 **Expresa como cuadrado de una suma o una diferencia, según convenga.**

a) $x^2 + 8x + 16$
b) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
c) $x^2 + 4xy + 4y^2$
d) $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $(x + 4)^2$
b) $(2x - 3y)^2$
c) $(x + 2y)^2$
d) $(x^2 + 1)^2$

028 **Calcula los siguientes productos.**

a) $(x + 7) \cdot (x - 7)$ **b)** $(7x + 4y) \cdot (7x - 4y)$

a) $x^2 - 49$
b) $49x^2 - 16y^2$

029 **Estudia si estas expresiones se pueden expresar como suma por diferencia.**

a) $x^2 - 1$ **b)** $x^4 - 9$ **c)** $16 - x^2$

a) $(x + 1) \cdot (x - 1)$ b) $(x^2 + 3) \cdot (x^2 - 3)$ c) $(4 - x) \cdot (4 + x)$

030 **Expresa en forma de producto.**

a) $4x^2 - 4x + 1$ **c)** $100x^2 - 4z^6$

b) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

a) $(2x - 1)^2$ b) $(3a - 5b)^2$ c) $(10x + 2z^3) \cdot (10x - 2z^3)$

031 **Observa el ejemplo y calcula mentalmente.**

$$1\,000^2 - 999^2 = (1\,000 + 999) \cdot (1\,000 - 999) = 1\,999 \cdot 1 = 1\,999$$

a) $46^2 - 45^2$ **b)** $120^2 - 119^2$ **c)** $500^2 - 499^2$

a) $46 + 45 = 91$ b) $120 + 119 = 239$ c) $500 + 499 = 999$

032 **Simplifica las fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x^3}{xy}$ **b)** $\dfrac{5x^3y^2}{3xy}$ **c)** $\dfrac{6x^2y}{3x^2y^2}$ **d)** $\dfrac{4x^2y}{4xy}$

a) $\dfrac{x^2}{y}$ b) $\dfrac{5x^2y}{3}$ c) $\dfrac{2}{y}$ d) x

033 **Simplifica.** **a)** $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 9}{2x - 6}$

a) $\dfrac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2$ b) $\dfrac{(x+3)\cdot(x-3)}{2(x-3)} = \dfrac{x+3}{2}$

034 **Calcula a para que $\dfrac{4x^2 + 4ax + a^2}{2x + 3} = 2x + 3$.**

$4x^2 + 4ax + a^2 = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \rightarrow a = 3$

ACTIVIDADES

035 **Indica si las siguientes expresiones son o no monomios.**

a) $2x^2 + yz$ **c)** $5x^5y^2$ **e)** $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{3}y$

b) $\dfrac{2x^2y^{-4}}{11}$ **d)** $\sqrt{xyz}$ **f)** $3ab + 2a^2$

a) No es monomio. c) Es monomio. e) No es monomio.

b) Es monomio. d) No es monomio. f) No es monomio.

036 Di si los monomios son semejantes.

a) xz, $3xy$, $-6xy$
b) ab, a^2b, $7b$
c) $4c^9d$, c^7d, cd^4
d) $8xy^2$, $7xy$

En a) son semejantes: $3xy$, $-6xy$; xz no es semejante a los anteriores.
No hay ningún monomio semejante en los apartados b), c) y d).

037 Realiza estas sumas de monomios.

a) $xz + 3xz + 6xz$
b) $a^2b + 9a^2b + 27a^2b$
c) $9c^9 + c^9 + c^9$
d) $8xy + 7xy + 43xy + 23xy$

a) $10xz$ b) $37a^2b$ c) $11c^9$ d) $81xy$

038 Efectúa las siguientes restas de monomios.

a) $3xz - 6xz$
b) $9a^2b - 2a^2b$
c) $18xy - 7xy - 3xy - 3xy$
d) $5x^9 - x^9 - x^9 - x^9$

a) $-3xz$
b) $7a^2b$
c) $5xy$
d) $2x^9$

039 Realiza las operaciones e indica el grado del monomio resultante.

a) $2x^2 + 3x^2 - 7x^2 + 8x^2 - x^2$
b) $5xy^3 - 2xy^3 + 7xy^3 - 3xy^3 + 12xy^3$
c) $3abc - 2abc + 6abc + 9abc - 4abc$
d) $5xz - 3xz + 15xz - 11xz + 8xz - 3xz$
e) $(2xyz) \cdot (2x^2yz^3)$
f) $(-2abc) \cdot (3a^2b^2c^2) \cdot (-bc)$
g) $7x \cdot (2xy) \cdot (-3xy^5) \cdot (xy)$
h) $(6ac^3) \cdot (-2a^2c^3) \cdot (-3ac) \cdot (-4a^3c^2)$
i) $(21x^2y^3) : (7xy^2)$
j) $(9abc) : (3bc)$
k) $(16x^4y^5a^3b^6) : (8x^2y^3a^2b^5)$
l) $(5m^3n^2g^4) : (2mng)$

a) $5x^2$	Grado 2	g) $-42x^4y^7$	Grado 11
b) $19xy^3$	Grado 4	h) $-144a^7c^9$	Grado 16
c) $12abc$	Grado 3	i) $3xy$	Grado 2
d) $11xz$	Grado 2	j) $3a$	Grado 1
e) $4x^3y^2z^4$	Grado 9	k) $2x^2y^2ab$	Grado 6
f) $6a^3b^4c^4$	Grado 11	l) $\frac{5}{2}m^2ng^3$	Grado 6

040 Haz las siguientes operaciones.

a) $-xz + 6xz + xyz - 8xz$
b) $9a^2b - 2a^2b + 8a^2b - a^2b$
c) $9c^9 - c^9 - c^9 + 10c^9$
d) $8xy + 7xy - xy + 3xy - xy$

a) $-3xz + xyz$ b) $14a^2b$ c) $17c^9$ d) $16xy$

041 Realiza estas multiplicaciones.

a) $xy \cdot 3xy \cdot (-6xy)$
b) $ab \cdot a^2b \cdot 7b \cdot ab$
c) $8xy^2 \cdot 7xy$
d) $15x^9 \cdot (-3x^9)$

a) $-18x^3y^3$ b) $7a^4b^4$ c) $56x^2y^3$ d) $-45x^{18}$

042 Efectúa las siguientes divisiones de monomios.

a) $9xy : 3xy$
b) $9ab : ab$
c) $15x^8 : 5x^8$
d) $8xy^2 : 2xy^2$
e) $15x^9 : 3x^9$
f) $32x^7 : 8x^4$

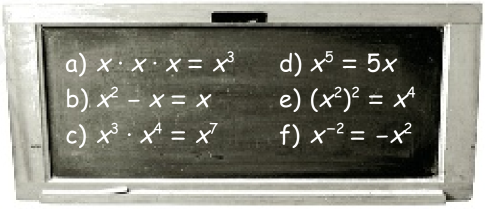
a) 3 b) 9 c) 3 d) 4 e) 5 f) $4x^3$

043 Calcula y simplifica el resultado todo lo que puedas.

a) $2x^2 - 5(-x^2) + 8x^2 - (2x) \cdot (3x)$
b) $2x \cdot (-y) + 7xy - yx + (-4x) \cdot (-5y)$
c) $3x^2 - (-x)^2 + 3(-x^2) + (-3) \cdot (-x)^2$
d) $(2xy - 3xy + 7xy) \cdot (2ab)$
e) $(x^2 - 3x^2 + 6x^2 - 2x^2) \cdot (-5zx)$

a) $2x^2 + 5x^2 + 8x^2 - 6x^2 = 9x^2$
b) $-2xy + 7xy - xy + 20xy = 24xy$
c) $3x^2 - x^2 - 3x^2 - 3x^2 = -4x^2$
d) $(6xy) \cdot (2ab) = 12xyab$
e) $(2x^2) \cdot (-5zx) = -10x^3z$

044 Razona si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.



a) Verdadera: $x \cdot x \cdot x = x^{1+1+1} = x^3$
b) Falsa, pues no podemos restar potencias con la misma base y distinto exponente.
c) Verdadera: $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$
d) Falsa, ya que una potencia consiste en multiplicar un determinado número de veces la base, y no sumarla.
e) Verdadera: $(x^2)^2 = x^{2\cdot 2} = x^4$
f) Falsa: $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

045 Indica el grado, el término independiente y el polinomio opuesto de los polinomios.

a) $P(x) = -x^3 + x^2 - 7x - 2$
b) $Q(x) = -x^2 + 2x + 6$
c) $R(x) = x + 1$
d) $S(x) = 8$
e) $T(x) = 12x - x^2 + x^4$
f) $U(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}$

a) Grado 3 Término independiente: -2 Opuesto: $x^3 - x^2 + 7x + 2$
b) Grado 2 Término independiente: 6 Opuesto: $x^2 - 2x - 6$
c) Grado 1 Término independiente: 1 Opuesto: $-x - 1$
d) Grado 0 Término independiente: 8 Opuesto: -8
e) Grado 4 Término independiente: 0 Opuesto: $-x^4 + x^2 - 12x$
f) Grado 2 Término independiente: $-\frac{1}{6}$ Opuesto: $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{6}$

046 Razona si es cierto o falso.

a) Un polinomio es la suma de dos monomios.
b) El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.
c) Los coeficientes de un polinomio son siempre números naturales.
d) Cualquier polinomio tiene un término donde aparece x^2.

a) Falso. Un polinomio es la suma o resta de dos o más monomios.
b) Verdadero.
c) Falso. Los coeficientes son cualquier tipo de número.
d) Falso. La variable no tiene por qué ser x, y no es necesario que tenga un término de grado 2.

047 Reduce los siguientes polinomios.

a) $P(x) = -x^2 - x - 2 - x^3 + x^2 - x - 2$
b) $Q(x) = -x^2 + x^2 + 6 - x + x^2 - 7x - 2$
c) $R(x) = x + 1 - x + x^2$
d) $S(x) = 8 - x + 34 - x + 324$
e) $T(x) = x^4 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$
f) $U(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6} - \frac{2}{7}x^2$

a) $P(x) = -x^3 - 2x - 4$
b) $Q(x) = x^2 - 8x + 4$
c) $R(x) = x^2 + 1$
d) $S(x) = -2x + 366$
e) $T(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$
f) $U(x) = \frac{3}{14}x^2 - x - \frac{1}{6}$

048 **Calcula el valor numérico de cada polinomio para los valores de la variable.**

a) $A(x) = x + 1$, **para** $x = 1$.

b) $B(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3$, **para** $x = 2$.

c) $C(x) = 4x^5 - x^2 + 3$, **para** $x = -1$.

d) $D(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, **para** $x = 1$.

e) $E(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, **para** $x = -2$.

f) $F(x) = x^4 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$, **para** $x = 0$.

g) $G(x) = -14$, **para** $x = -2$.

a) $A(1) = 1 + 1 = 2$

b) $B(2) = 8 + 3 = 11$

c) $C(-1) = -4 - 1 + 3 = -2$

d) $D(1) = -9 + 7 + 5 = 3$

e) $E(-2) = -8 + 4 - 2 + 2 = -4$

f) $F(0) = -2$

g) $G(-2) = -14$

049 **Halla los valores numéricos para el polinomio:**

$$P(x, y) = 2x^2y + xy^2 - 3xy + 5x - 6y + 9$$

a) $P(0, 0)$ **b)** $P(1, 1)$ **c)** $P(-1, 1)$ **d)** $P(1, -1)$ **e)** $P(1, 2)$ **f)** $P(2, 1)$

a) $P(0, 0) = 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 9 = 9$

b) $P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 9 = 8$

c) $P(-1, 1) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + 9 = 2$

d) $P(1, -1) = 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 9 = 11$

e) $P(1, 2) = 2 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 9 = 4$

f) $P(2, 1) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 9 = 17$

050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN COEFICIENTE DE UN POLINOMIO CONOCIENDO UNO DE SUS VALORES NUMÉRICOS?

Calcula el valor de k **en el polinomio** $P(x) = x^2 - x + k$, **si** $P(2) = 5$.

PRIMERO. Se sustituye, en el polinomio, la variable por su valor.

$$P(x) \xrightarrow{x\,=\,2} \left.\begin{array}{l} P(2) = 2^2 - 2 + k = 2 + k \\ P(2) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow 2 + k = 5$$

SEGUNDO. Se despeja k en la ecuación resultante.

$$2 + k = 5 \rightarrow k = 5 - 2 = 3$$

051 **Calcula el valor de k en cada polinomio, sabiendo que $P(1) = 6$.**

a) $P(x) = kx^7 + x^3 + 3x + 1$
b) $P(x) = kx^4 + kx^3 + 4$
c) $P(x) = 9x^5 + kx^2 + kx - k$
d) $P(x) = kx^6 - kx^3 + kx + k$
e) $P(x) = k$

a) $k + 1 + 3 + 1 = 6 \rightarrow k = 1$
b) $k + k + 4 = 6 \rightarrow k = 1$
c) $9 + k + k - k = 6 \rightarrow k = 3$
d) $k - k + k + k = 6 \rightarrow k = 3$
e) $k = 6$

052 **Dados los polinomios:**

$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ $\qquad$ $R(x) = 3x^2 - x + 1$
$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$ $\qquad$ $S(x) = 2x + 3$

calcula.

a) $P(x) + Q(x)$
b) $Q(x) + P(x)$
c) $P(x) - S(x)$
d) $Q(x) - P(x)$
e) $P(x) + R(x)$
f) $R(x) + S(x)$
g) $Q(x) - R(x)$
h) $R(x) - P(x)$

a) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) =$
$= 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7$

b) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) =$
$= 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7$

c) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (2x + 3) =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x - 9$

d) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) - (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) =$
$= -2x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 10x + 5$

e) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^2 - x + 1) =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + x^2 + 2x - 5$

f) $(3x^2 - x + 1) + (2x + 3) = 3x^2 + x + 4$

g) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) - (3x^2 - x + 1) =$
$= 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x - 2$

h) $(3x^2 - x + 1) - (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) =$
$= -2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 4x + 7$

053 **Suma y resta los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = -7x + 4$ $\qquad$ $Q(x) = 2x + 5$
b) $P(x) = -3x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = -x^2 + 2x$
c) $P(x) = -3x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = -x^2 + 2x + 6$
d) $P(x) = -5x^3 + x^2 - 7x - 2$ $\qquad$ $Q(x) = 5x^3 + x^2 + 4x - 2$
e) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - \frac{3}{2}y^2$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 - xy - y^2$
f) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - \frac{3}{2}y^2$ $\qquad$ $Q(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2xy - \frac{2}{3}y^2$
g) $P(x) = x^2 - \frac{x}{2} - 3$ $\qquad$ $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$
h) $P(x) = x^2 - 5x - 3$ $\qquad$ $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$

a) Suma: $-5x + 9$ Resta: $-9x - 1$

b) Suma: $-4x^2 + 2x + 1$ Resta: $-2x^2 - 2x + 1$

c) Suma: $-4x^2 + 2x + 7$ Resta: $-2x^2 - 2x - 5$

d) Suma: $2x^2 - 3x - 4$ Resta: $-10x^3 - 11x$

e) Suma: $\frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{5}{2}y^2$ Resta: $-\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2$

f) Suma: $\frac{5}{6}x^2 - 4xy - \frac{13}{6}y^2$ Resta: $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}y^2$

g) Suma: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x - 4$ Resta: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - 2$

h) Suma: $\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{8}{3}$ Resta: $\frac{3}{2}x^2 - 5x - \frac{10}{3}$

054 **Dados los polinomios:**

$$\boldsymbol{P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6} \qquad \boldsymbol{R(x) = 3x^2 - x + 1}$$
$$\boldsymbol{Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1} \qquad \boldsymbol{S(x) = 2x + 3}$$

calcula.

a) $\boldsymbol{P(x) + Q(x) + R(x) + S(x)}$

b) $\boldsymbol{P(x) - R(x) + S(x) - Q(x)}$

c) $\boldsymbol{[P(x) + Q(x)] - [R(x) + Q(x)]}$

d) $\boldsymbol{[P(x) - Q(x)] - [R(x) - Q(x)]}$

a) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) = 2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 3x - 3$

b) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) = 2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 13x - 3$

c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] =$
$= (2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7) - (3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x) =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] =$
$= [2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5] - [-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2] =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

055 **Halla cuál es el polinomio $\boldsymbol{Q(x)}$ que hay que sumar a $\boldsymbol{P(x) = x^2 + 2x - 1}$ para obtener como resultado $\boldsymbol{R(x)}$.**

a) $\boldsymbol{R(x) = x - 1}$

b) $\boldsymbol{R(x) = 2x^2 - x - 6}$

c) $\boldsymbol{R(x) = 5x^2 - x + 1}$

d) $\boldsymbol{R(x) = -7x^2 - 3x}$

e) $\boldsymbol{R(x) = x^3 - x}$

f) $\boldsymbol{R(x) = x^3 - x^2}$

$$Q(x) = R(x) - P(x)$$

a) $Q(x) = -x^2 - x$

b) $Q(x) = x^2 - 3x - 5$

c) $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

d) $Q(x) = -8x^2 - 5x + 1$

e) $Q(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$

f) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

056 Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$
$$Q(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1$$
$$R(x) = x^2 - x + 1$$

calcula.

a) $P(x) \cdot Q(x)$ b) $Q(x) \cdot R(x)$ c) $P(x) \cdot R(x)$ d) $R(x) \cdot R(x)$

a) $(2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (3x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1) =$
$= 6x^{11} - 25x^9 + 8x^8 + 6x^7 - 10x^6 + 10x^5 + x^4 + 3x^3 + 1$

b) $(3x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - x + 1) =$
$= 3x^7 - 3x^6 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 1$

c) $(2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - x + 1) =$
$= 2x^8 - 2x^7 - 5x^6 + 9x^5 - 11x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d) $(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

057 Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \qquad R(x) = 3x^2 - x + 1$$
$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \qquad S(x) = 2x + 3$$

calcula.

a) $[P(x) - Q(x)] \cdot S(x)$
b) $[R(x) - Q(x)] \cdot S(x)$
c) $[P(x) + Q(x) + R(x)] \cdot S(x)$
d) $[P(x) + Q(x) - R(x)] \cdot S(x)$

a) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) =$
$= (2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 - 6x^5 + 13x^3 - x^2 + 20x - 15$

b) $[(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) =$
$= (-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x + 3) =$
$= -6x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 22x + 6$

c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) +$
$+ (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 5x - 6) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 27x^3 + 8x^2 - 27x - 18$

d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) -$
$- (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 - 3x - 8) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 6x^2 - 25x - 24$

058 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x\right) - \left(\frac{5}{4}x + 7\right) + \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 3\right)$

b) $\left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + x - 7\right) \cdot \left(\frac{5}{2}x^2 - 3x\right)$

c) $\frac{2}{5}x^2 \cdot (x^3 - 3x^2 + x - 1) - x^3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}\right)$

d) $\frac{5}{6}x \cdot (x^5 - x^2 + 3x - 1) - x^5 \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{4}{3}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}\right)x^2-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}-\dfrac{9}{4}\right)x+(-7+3)=4x^2-\dfrac{11}{4}x-4$

b) $\dfrac{25}{6}x^5-6x^4+\dfrac{37}{10}x^3-\dfrac{41}{2}x^2+21x$

c) $\left(\dfrac{2}{5}x^5-\dfrac{6}{5}x^4+\dfrac{2}{5}x^3-\dfrac{2}{5}x^2\right)-\left(\dfrac{1}{2}x^5-x^4+\dfrac{2}{3}x^3\right)=$

$=-\dfrac{1}{10}x^5-\dfrac{1}{5}x^4-\dfrac{4}{15}x^3-\dfrac{2}{5}x^2$

d) $\left(\dfrac{5}{6}x^6-\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{5}{6}x\right)-\left(-\dfrac{5}{2}x^6+\dfrac{4}{3}x^5\right)=$

$=-\dfrac{1}{3}x^7+\dfrac{10}{3}x^6-\dfrac{4}{3}x^5-\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{5}{6}x$

059 **Divide.**

a) $(4x^4+3x^3-5x^2+x+7):(x-1)$

b) $(4x^4-2x^3+3x^2-2x+5):(x+1)$

c) $(7x^5+4x^4+3x^3-5x^2+2x-1):(x^2+x)$

d) $(x^4-2x^3+x^2-x+3):(x^2+x+1)$

e) $(4x^4-2x^3+7x^2-2x+3):(x^2-x-2)$

a)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +x & +7 & x-1 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & +4x^3 & & & & 4x^3+7x^2+2x+3 \\
\hline
 & 7x^3 & -5x^2 & +x & +7 & \\
 & -7x^3 & +7x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 2x^2 & +x & +7 & \\
 & & -2x^2 & +2x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 3x & +7 & \\
 & & & -3x & +3 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 10 &
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +5 & x+1 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & -4x^3 & & & & 4x^3-6x^2+9x-11 \\
\hline
 & -6x^3 & +3x^2 & -2x & +5 & \\
 & 6x^3 & +6x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 9x^2 & -2x & +5 & \\
 & & -9x^2 & -9x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -11x & +5 & \\
 & & & 11x & +11 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 16 &
\end{array}
$$

c)
$$\begin{array}{r|l}
7x^5+4x^4+3x^3-5x^2+2x-1 & x^2+x \\ \cline{2-2}
-7x^5-7x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & 7x^3-3x^2+6x-11 \\ \cline{1-1}
-3x^4+3x^3-5x^2+2x-1 & \\
3x^4+3x^3 \qquad\qquad\quad & \\ \cline{1-1}
6x^3-5x^2+2x-1 & \\
-6x^3-6x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-11x^2+2x-1 & \\
11x^2+11x \quad & \\ \cline{1-1}
13x-1 &
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3+x^2-x+3 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4-x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2-3x+3 \\ \cline{1-1}
-3x^3 \qquad -x+3 & \\
3x^3+3x^2+3x \qquad & \\ \cline{1-1}
3x^2+2x+3 & \\
-3x^2-3x-3 & \\ \cline{1-1}
-x \quad &
\end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r|l}
4x^4-2x^3+7x^2-2x+3 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2}
-4x^4+4x^3+8x^2 \qquad\qquad & 4x^2+2x+17 \\ \cline{1-1}
2x^3+15x^2-2x+3 & \\
-2x^3+2x^2+4x \qquad & \\ \cline{1-1}
17x^2+2x+3 & \\
-17x^2+17x+34 & \\ \cline{1-1}
19x+37 &
\end{array}$$

060 ● **Desarrolla.**

a) $(3x+2)^2$
b) $(3x-2)^2$
c) $(3x^2-2x)^2$
d) $(7x^3+4x^2)^2$
e) $(2x+7)\cdot(2x-7)$
f) $(2x^2+3x)\cdot(2x^2-3x)$
g) $(x^4+3x^5)\cdot(x^4-3x^5)$
h) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$

a) $9x^2+12x+4$
b) $9x^2-12x+4$
c) $9x^4-12x^3+4x^2$
d) $49x^6+56x^5+16x^4$
e) $4x^2-49$
f) $4x^4-9x^2$
g) x^8-9x^{10}
h) $4x^2-2x+\frac{1}{4}$

061 ●● **Desarrolla estos cuadrados.**

a) $(x+5)^2$
b) $(2y-7)^2$
c) $(-y-8)^2$
d) $(xy-6x)^2$
e) $(-x-y)^2$
f) $(x+2xy)^2$

a) $x^2+10x+25$
b) $4y^2-28y+49$
c) $y^2+16y+64$
d) $x^2y^2-12x^2y+36x^2$
e) $x^2+2xy+y^2$
f) $x^2+4x^2y+4x^2y^2$

062 Completa las siguientes igualdades.

a) $(2x + 3)^2 = \square + 12x + \square$

b) $(5 - 3x)^2 = 25 - \square + \square x^2$

c) $(9 + 7x) \cdot (9 - 7x) = \square - \square$

d) $(\square + \square)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$

a) $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

c) $(9 + 7x) \cdot (9 - 7x) = 9^2 - (7x)^2 = 81 - 49x^2$

d) $x^4 + 2x^3 + x^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 = (x^2 + x)^2$

063 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE OPERA UTILIZANDO LAS IGUALDADES NOTABLES?

Realiza la siguiente operación:

$$(2x - 3)^2 - (2 + x)^2$$

PRIMERO. Se desarrolla el polinomio, aplicando los resultados de las igualdades notables.

$$(2x - 3)^2 - (2 + x)^2 = (4x^2 - 12x + 9) - (4 + 4x + x^2)$$

SEGUNDO. Se quitan los paréntesis, teniendo en cuenta los signos.

$$(4x^2 - 12x + 9) - (4 + 4x + x^2) = 4x^2 - 12x + 9 - 4 - 4x - x^2$$

TERCERO. Se reduce el polinomio.

$$4x^2 - 12x + 9 - 4 - 4x - x^2 = 3x^2 - 16x + 5$$

Por tanto: $(2x - 3)^2 - (2 + x)^2 = 3x^2 - 16x + 5$

064 Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones.

a) $5x^2 + (2x^2 + 1)^2 - 2x^4 - (x - 1)^2$

b) $(x - 1)^2 - (x^2 + x + 1)$

c) $(5x + 5)^2 - (5x - 5)^2$

d) $(2x^3 - 3x^2)^2 - (2x + 2) \cdot (2x - 2)$

e) $(x + 6)^2 - (x - 6)^2 - (x - 5) \cdot (x + 5)$

f) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 + (2x + 1) \cdot (3x + 2)$

a) $5x^2 + (2x^2 + 1)^2 - 2x^4 - (x - 1)^2 =$
$= 5x^2 + 4x^4 + 4x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 + 2x - 1 = 2x^4 + 8x^2 + 2x$

b) $(x - 1)^2 - (x^2 + x + 1) = x^2 - 2x + 1 - x^2 - x - 1 = -3x$

c) $(5x + 5)^2 - (5x - 5)^2 = 25x^2 + 50x + 25 - 25x^2 + 50x - 25 = 100x$

d) $(2x^3 - 3x^2)^2 - (2x + 2) \cdot (2x - 2) =$
$= (2x^3)^2 - 2 \cdot 2x^3 \cdot 3x^2 + (3x^2)^2 - [(2x)^2 - 2^2] =$
$= 4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 4x^2 + 4$

e) $(x + 6)^2 - (x - 6)^2 - (x - 5) \cdot (x + 5) =$
$= x^2 + 12x + 36 - x^2 + 12x - 36 - x^2 + 25 = -x^2 + 24x + 25$

f) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 + (2x + 1) \cdot (3x + 2) =$
$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 - [(2x)^2 - 2 \cdot 2x + 1] + 6x^2 + 4x + 3x + 2 =$
$= 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 1 + 6x^2 + 7x + 2 = 6x^2 + 15x + 2$

065 ●●

Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $9x^2 + 18x + 9$

b) $16x^2 - 16x + 4$

c) $x^2 + 16x + 64$

d) $4x^2 + 4x + 1$

a) $3^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3x + 3^2 = (3x + 3)^2$

b) $4^2 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2^2 = (4x - 2)^2$

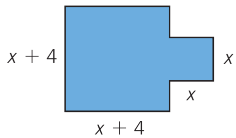
c) $1^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot 8x + 8^2 = (x + 8)^2$

d) $2^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1x + 1^2 = (2x + 1)^2$

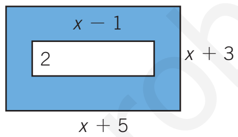
066 ●●

Expresa el área de cada figura mediante un polinomio. Simplifica su expresión.

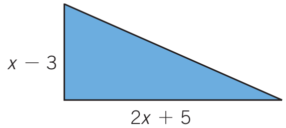
a)



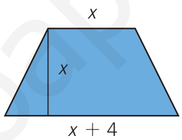
c)



b)



d)



a) $(x + 4)^2 + x^2 = 2x^2 + 8x + 16$

b) $\dfrac{(x - 3) \cdot (2x + 5)}{2} = x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{15}{2}$

c) $(x + 5) \cdot (x + 3) - 2(x - 1) = x^2 + 8x + 15 - 2x + 2 = x^2 + 6x + 17$

d) $\dfrac{x + (x + 4)}{2} \cdot x = x^2 + 2x$

067 ●●

Escribe los polinomios como producto de dos factores.

a) $x^2 - 16$

b) $x^4 - 36$

c) $4x^2 - 25$

d) $x^2 - 4x + 4$

e) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

f) $16x^4 + 24x^2 + 9$

a) $(x + 4) \cdot (x - 4)$

b) $(x^2 + 6) \cdot (x^2 - 6)$

c) $(2x + 5) \cdot (2x - 5)$

d) $(x - 2)^2$

e) $(4x - 3y)^2$

f) $(4x^2 + 3)^2$

068 ●●

Fíjate en el ejemplo resuelto y completa.

$$[(x + 2) + 3] \cdot [(x + 2) - 3] = (x + 2)^2 - 9$$

a) $[(3x - y) + 4] \cdot [(3x - y) - 4]$

b) $[(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c]$

a) $(3x - y)^2 - 16$

b) $(a + b)^2 - c^2$

069 Extrae factor común en estas expresiones.

a) $3x^2 - 4x$
b) $(x + 1) + 3(x + 1)$
c) $xy - 6xyz - 5xyzt$
d) $3x - 4x^2 - 6x^3$

a) $x(3x - 4)$
b) $(x + 1) \cdot (1 + 3) = 4(x + 1)$
c) $xy(1 - 6z - 5zt)$
d) $x(3 - 4x - 6x^2)$

070 Simplifica estas expresiones, aplicando las igualdades notables y extrayendo factor común.

a) $7x^2 - 14x + 7$
b) $16x^2 + 64x + 64$
c) $x^3 - 2x^2 + x$
d) $18x^4 - 12x^2 + 2$
e) $(2x + 4) \cdot (x - 2)$
f) $(x - 5) \cdot (x^2 + 5x)$
g) $(-x - 7) \cdot (x - 7)$
h) $(-x^2 + 5) \cdot (-x^2 - 5)$

a) $7(x^2 - 2x + 1) = 7(x - 1)^2$
b) $16(x^2 + 4x + 4) = 16(x + 2)^2$
c) $x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$
d) $2(9x^4 - 6x^2 + 1) = 2(3x^2 - 1)^2$
e) $2(x + 2) \cdot (x - 2) = 2(x^2 - 4)$
f) $x(x - 5) \cdot (x + 5) = x(x^2 - 25)$
g) $-(x + 7) \cdot (x - 7) = -(x^2 - 49) = 49 - x^2$
h) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5) = x^4 - 25$

071 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE SIMPLIFICAN FRACCIONES ALGEBRAICAS?

Simplifica. $$\frac{(y^4 - y^3) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)}$$

PRIMERO. Se descomponen el numerador y el denominador en tantos factores como sea posible.

$$\frac{(y^4 - y^3) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)} = \frac{y^3(y - 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)} =$$

Se saca factor común a y^3: $y^4 - y^3 = y^3(y - 1)$

Cuadrado de una diferencia: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

$$= \frac{y^3(y - 1) \cdot (x - 1)^2}{xy^2(x - 1)}$$

SEGUNDO. Se dividen el numerador y el denominador entre los factores comunes a ambos.

$$\frac{y^{\cancel{3}} \cdot (y - 1) \cdot (x - 1)^{\cancel{2}}}{x \cdot \cancel{y^2} \cdot \cancel{(x - 1)}} = \frac{y(y - 1)(x - 1)}{x}$$

072 Simplifica las fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}$

b) $\dfrac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)}$

c) $\dfrac{y^2(x^2-4x+4)}{x(x-2)}$

d) $\dfrac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2}$

a) $\dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)}=\dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{x^2(x+2)\cdot(x-2)}{x(x-2)}=x(x+2)$

c) $\dfrac{y^2(x-2)^2}{x(x-2)}=\dfrac{y^2(x-2)}{x}$

d) $\dfrac{(x+3)\cdot(x-3)\cdot(y+4)\cdot(y-4)}{2xy(x-3)\cdot(y+4)^2}=\dfrac{(x+3)\cdot(y-4)}{2xy(y+4)}$

073 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3(x^2-16)}{x(x+4)}$

b) $\dfrac{x(2x^2-16x+32)}{(x^2-16)}$

c) $\dfrac{18x^4-36x^2+18}{9x^2(x-1)^2}$

d) $\dfrac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$

e) $\dfrac{(6x+8)^2}{27x^2-48}$

f) $\dfrac{(3x+12)(x-4)}{2x^2-32}$

a) $\dfrac{x^2(x-4)\cdot(x+4)}{x(x+4)}=x(x-4)$

b) $\dfrac{2x(x-4)^2}{(x-4)\cdot(x+4)}=\dfrac{2x(x-4)}{(x+4)}$

c) $\dfrac{18(x^2-1)^2}{9x^2(x-1)^2}=\dfrac{18(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{9x^2(x-1)^2}=\dfrac{2(x+1)^2}{x^2}$

d) $\dfrac{(3x+2)^2}{(3x+2)\cdot(3x-2)}=\dfrac{3x+2}{3x-2}$

e) $\dfrac{4(3x+4)^2}{3(3x+4)\cdot(3x-4)}=\dfrac{4(3x+4)}{3(3x-4)}$

f) $\dfrac{3(x+4)\cdot(x-4)}{2(x+4)\cdot(x-4)}=\dfrac{3}{2}$

074 Si $P(x)$ tiene grado 5 y $Q(x)$ tiene grado 2, determina, cuando sea posible, los grados de los polinomios:

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $P(x)\cdot Q(x)$

d) Cociente y resto de $P(x):Q(x)$.

Haz lo mismo si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen grado 5.

a) Grado 5

b) Grado 5

c) Grado 7 = 5 + 2

d) Cociente $\rightarrow$ Grado 3 = 5 − 2
Resto $\longrightarrow$ Grado menor que 2

Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen grado 5:

a) No se puede saber, porque puede ocurrir que algunos de los términos se anulen en la suma, si los coeficientes son opuestos.

b) No se puede saber, porque quizá algunos de los términos se anulen en la resta, si los coeficientes son opuestos.

c) Grado 10 = 5 + 5

d) Cociente $\rightarrow$ Grado 0 = 5 − 5
Resto $\longrightarrow$ Grado menor que 5

075 **Estas sumas son cuadrados perfectos.**

$$1^2 + 2^2 + 1^2 \cdot 2^2 = 3^2$$
$$2^2 + 3^2 + 2^2 \cdot 3^2 = 7^2$$
$$\dots$$
$$9^2 + 10^2 + 9^2 \cdot 10^2 = 91^2$$

A la vista de los resultados, ¿sabrías determinar a qué cuadrado es igual la siguiente expresión?

$$x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2$$

Verifica que tu igualdad es correcta.

$$x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2 = [x(x + 1) + 1]^2$$

Para demostrar esta fórmula, partimos del segundo miembro:

$$\begin{aligned}[x(x + 1) + 1]^2 &= [x(x + 1)]^2 + 2x(x + 1) + 1 = \\ &= x^2(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + 1 = \\ &= x^2(x + 1)^2 + 2x^2 + 2x + 1 = \\ &= x^2(x + 1)^2 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = \\ &= x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2\end{aligned}$$

076 **Comprueba con algunos ejemplos que el producto de tres números enteros consecutivos, sumado con el número del medio, es siempre un cubo perfecto.**

Demuéstralo para cualesquiera tres números enteros consecutivos: $x - 1$, x y $x + 1$.

Ejemplos: $2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 = 27 = 3^3$
$4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 = 125 = 5^3$
$9 \cdot 10 \cdot 11 + 10 = 1\,000 = 10^3$

$$(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) + x = (x^3 - x) + x = x^3$$

077 ●●● **Siguiendo el método aplicado para hallar el desarrollo de las igualdades notables, averigua los desarrollos de:**

a) $(a + b)^3$

b) $(a - b)^3$

c) $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$

d) $(a - b)^4$

a) $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

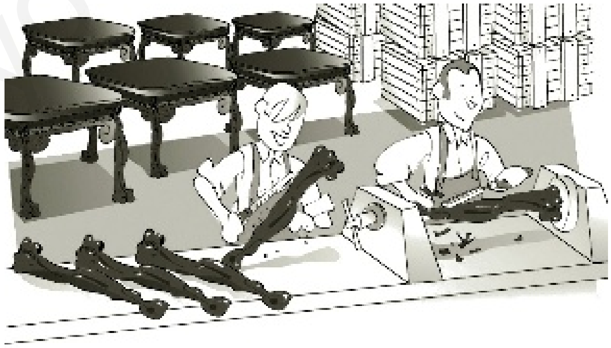
b) $(a - b)^3 = (a - b)^2 \cdot (a - b) = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a - b) =$
$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

c) $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2 = [(a + b) \cdot (a - b)] \cdot [(a + b) \cdot (a - b)] =$
$= (a^2 - b^2)^2 = [(a^2)^2 - 2a^2b^2 + (b^2)^2] =$
$= a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

d) $(a - b)^4 = (a - b)^3 \cdot (a - b) = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \cdot (a - b) =$
$= a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 - a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4 =$
$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

078 ●●● **Una fábrica produce mesas elaboradas a mano. El dueño de la fábrica ha observado que los costes de fabricación por unidad varían excesivamente dependiendo del número de mesas producidas.**



Además, ha llegado a la conclusión de que el coste total, en euros, de la producción de *x* mesas, a partir de 10 unidades, viene dado por la fórmula:

$$C(x) = x^3 + 5x + 16\,000$$

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) **¿Cuánto cuesta fabricar 10 mesas? ¿Y 12 mesas? ¿Y 15 mesas?**

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si fabrico 40 mesas, ¿cuánto cuesta producir cada unidad?

c) Y si fabrico 20 mesas, ¿cuánto cuesta producir cada unidad?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

Me han hecho un pedido de 18 mesas y tengo dos opciones:

- Fabricar 18 mesas y venderlas al precio de catálogo: 1 700 € por mesa.
- Ofrecer a mi cliente una oferta de 20 mesas a 1 640 € cada una.

d) ¿Qué opción le reportará mayor beneficio?

e) ¿Crees que la fórmula vale para calcular el precio de fabricación de cualquier número de mesas?

a) $C(10) = 10^3 + 5 \cdot 10 + 16\,000 = 17\,050$ € cuesta fabricar 10 mesas.
$C(12) = 12^3 + 5 \cdot 12 + 16\,000 = 17\,788$ € cuesta fabricar 12 mesas.
$C(15) = 15^3 + 5 \cdot 15 + 16\,000 = 19\,450$ € cuesta fabricar 15 mesas.

b) El coste de fabricación de 40 mesas es:

$$C(40) = 40^3 + 5 \cdot 40 + 16\,000 = 80\,200 \text{ €}$$

y la unidad cuesta producirla:

$$80\,200 : 40 = 2\,005 \text{ €}$$

c) Fabricar 20 mesas cuesta:

$$C(20) = 20^3 + 5 \cdot 20 + 16\,000 = 24\,100 \text{ €}$$

y la unidad cuesta producirla:

$$24\,100 : 20 = 1\,205 \text{ €}$$

d) Fabricar 18 mesas cuesta:

$$C(18) = 18^3 + 5 \cdot 18 + 16\,000 = 21\,922 \text{ €}$$

Los ingresos son:

$$1\,700 \cdot 18 = 30\,600 \text{ €}$$

Las ganancias son:

$$30\,600 - 21\,922 = 8\,678 \text{ €}$$

Fabricar de 20 mesas cuesta:

$$C(20) = 20^3 + 5 \cdot 20 + 16\,000 = 24\,100 \text{ €}$$

Los ingresos son:

$$1\,640 \cdot 20 = 32\,800 \text{ €}$$

Las ganancias son:

$$32\,800 - 24\,100 = 8\,700 \text{ €}$$

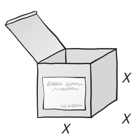
Obtiene mayor beneficio vendiendo 20 mesas a 1 640 €.

e) La fórmula no es válida para valores pequeños (1, 2, 3…) porque el precio por unidad sería muy caro.

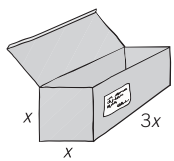
079 ●●●

Embalajes Cartilla fabrica cajas de cartón para embalar.

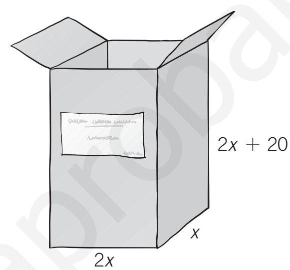
Tienen tres tipos diferentes de cajas y cada cliente puede elegir el formato y las dimensiones según sus necesidades.



Embalaje cúbico



Embalaje alargado



Embalaje tradicional

Todas las medidas están expresadas en centímetros y, por exigencias de producción y de resistencia del cartón, los valores de la variable tienen que ser mayores que 10 cm y menores que 50 cm.

Eres capaz de… Comprender

a) ¿Cuáles pueden ser las dimensiones mínimas y máximas de un embalaje cúbico? ¿Y de un embalaje tradicional?

Eres capaz de… Resolver

b) Expresa con un monomio la superficie de las caras del embalaje cúbico. ¿Cuál será la expresión de la superficie de las caras del embalaje alargado?

c) Utiliza un polinomio para expresar la cantidad de cartón que se necesita para fabricar cada embalaje. Si el precio del cartón es 0,02 €/m^2, ¿cuál será el precio del cartón necesario para fabricar 200 cajas de embalaje tradicional de 30 × 60 × 80 cm?

Eres capaz de… Decidir

d) ¿Qué tipo de cajas será más barato para embalar tres esferas?

a) Embalaje cúbico
Mínimas: 10 cm × 10 cm × 10 cm
Máximas: 50 cm × 50 cm × 50 cm

Embalaje tradicional
Mínimas: 20 cm × 10 cm × 40 cm
Máximas: 100 cm × 50 cm × 120 cm

b) La superficie de las caras del embalaje cúbico es x^2.

El embalaje alargado tiene 2 caras de superficie x^2 y 4 caras de superficie $3x^2$.

c) Embalaje cúbico: 6 caras de superficie x^2.

$$S(x) = 6x^2$$

Embalaje alargado: 2 caras de superficie x^2 y 4 caras de superficie $3x^2$.

$$S(x) = 2x^2 + 12x^2 = 14x^2$$

Embalaje tradicional: 2 caras de superficie $2x^2$, 2 caras de superficie $2x^2 + 20x$ y 2 caras de superficie $4x^2 + 40x$.

$$S(x) = 2(8x^2 + 60x) = 16x^2 + 120x$$

$x = 30 \rightarrow$ La superficie de cada caja con embalaje tradicional es:

$$S(30) = 16 \cdot 30^2 + 120 \cdot 30 = 18\,000 \text{ cm}^2 \rightarrow 18\,000 \text{ cm}^2 = 1{,}8 \text{ m}^2$$

Las 200 cajas tienen una superficie de: $200 \cdot 1{,}8 = 360$ m^2, y un coste de: $360 \cdot 0{,}02 = 7{,}20$ €.

d) La medida del diámetro de la esfera no debe exceder de 50 cm.

Si queremos que el embalaje sea individual, lo haremos en tres cajas cúbicas.

Si queremos embalar las tres esferas juntas, sin que sobre espacio, usaremos el embalaje alargado.

Y si queremos embalar las tres esferas juntas, y que sobre espacio, utilizaremos el embalaje tradicional.

El embalaje más económico es el alargado.

4 Ecuaciones de primer y segundo grado

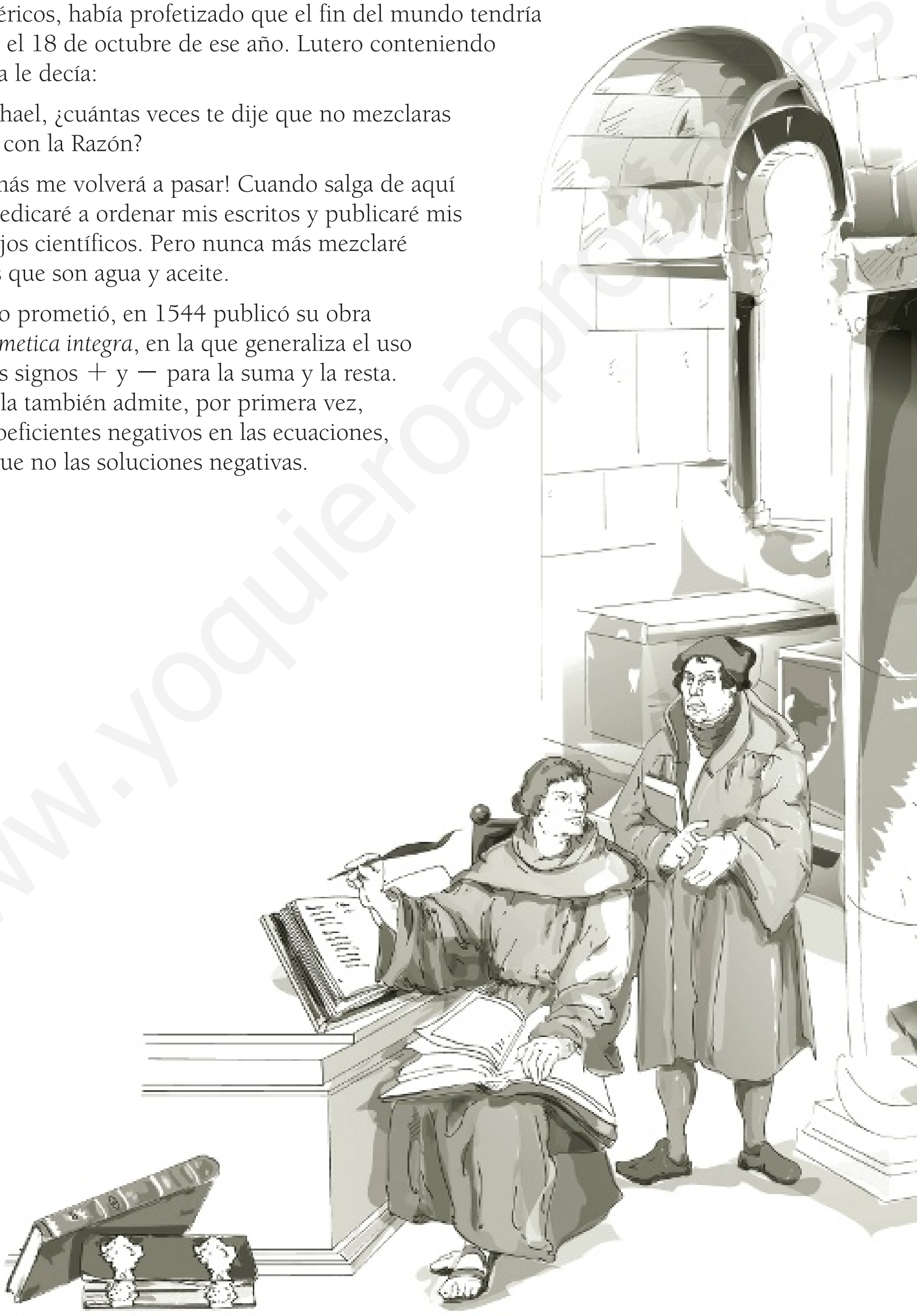
El fin del mundo

En octubre de 1533 la cárcel de Wittenberg acogió una curiosa reunión: allí estaba Lutero visitando a su íntimo amigo Michael Stifel. Este, aplicando a la Biblia cálculos numéricos, había profetizado que el fin del mundo tendría lugar el 18 de octubre de ese año. Lutero conteniendo la risa le decía:

–Michael, ¿cuántas veces te dije que no mezclaras la Fe con la Razón?

–¡Jamás me volveré a pasar! Cuando salga de aquí me dedicaré a ordenar mis escritos y publicaré mis trabajos científicos. Pero nunca más mezclaré cosas que son agua y aceite.

Como prometió, en 1544 publicó su obra *Arithmetica integra*, en la que generaliza el uso de los signos $+$ y $-$ para la suma y la resta. En ella también admite, por primera vez, los coeficientes negativos en las ecuaciones, aunque no las soluciones negativas.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 Busca información sobre Stifel y su relación con Lutero.

En esta página de la Universidad de Costa Rica puedes leer la versión digital del libro *Historia y filosofía de las matemáticas*, de Ángel Ruiz Zúñiga, en el que podrás buscar la biografía de Michael Stifel y su relación con Martín Lutero:
http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Biografias.htm

2 Investiga cómo Stifel aplicó cálculos numéricos a la Biblia y sus consecuencias.

Los cálculos numéricos que Stifel aplicó a la Biblia y sus repercusiones las puedes encontrar en el apartado de matemáticas de la enciclopedia Kalipedia:
http://www.kalipedia.com/matematicas-aritmetica/
En la misma página, en las operaciones con números enteros, del apartado de personajes aparece una biografía de Michael Stifel en la que se relatan estos hechos.

3 Explica la contribución de Stifel al avance de las matemáticas en el estudio de las ecuaciones.

En esta página chilena sobre los aspectos históricos de los números enteros hallarás las aportaciones matemáticas más importantes de Stifel:
http://www.profesorenlinea.cl/matematica/NumerosEnterosZ.htm
También puedes consultar la siguiente página:
http://es.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel

EVALUACIÓN INICIAL

1 Halla el grado de los siguientes polinomios.

a) $x^3y^2 - 7xy^3 + 12x^2y^4 - 45$

b) $a^2b^2c + 3xa^4b^3 + 12b^2c^4 - 1$

a) Grado: $2 + 4 = 6$

b) Grado: $1 + 4 + 3 = 8$

2 Calcula el valor de estos polinomios para $x = -3$.

a) $-2x^3 - 7x + 12x^2 - 45$

b) $3x^4 - 7x^2 + 5$

a) $-2 \cdot (-3)^3 - 7 \cdot (-3) + 12 \cdot (-3)^2 - 45 = 54 + 21 + 108 - 45 = 138$

b) $3 \cdot (-3)^4 - 7 \cdot (-3)^2 + 5 = 243 - 63 + 5 = 185$

3 Expresa en lenguaje algebraico.

a) **El triple de un número.**

b) **El doble de un número menos su cuadrado.**

c) **La suma de un número y su mitad.**

a) $3 \cdot x$

b) $2x - x^2$

c) $x + \dfrac{x}{2}$

Ecuaciones de primer y segundo grado

EJERCICIOS

001 **Determina si son ciertas estas igualdades para los valores que se indican.**

a) $2x + x^2 - 3 = 1$ **si** $x = 4$

b) $x^3 - 2x + 2 = -19$ **si** $x = -3$

c) $x^4 + x^3 - x = 1$ **si** $x = -1$

d) $x^4 + 2 = 3$ **si** $x = -1$

e) $3x + 4y = 7$ **si** $x = y = 2$

a) $8 + 16 - 3 = 21 \neq 1$. Es falsa.

b) $-27 + 6 + 2 = -19$. Es cierta.

c) $1 - 1 + 1 = 1$. Es cierta.

d) $1 + 2 = 3$. Es cierta.

e) $6 + 8 = 14 \neq 7$. Es falsa.

002 **Señala cuáles de estas igualdades son identidades o ecuaciones.**

a) $-6(x - 2) + 5 = -2(3x - 3) + 11$

b) $6(x - 1) = 4(x - 2) - 3(-x - 5)$

a) $-6x + 12 + 5 = -6x + 6 + 11 \rightarrow -6x + 17 = -6x + 17 \rightarrow$ Identidad

b) $6x - 6 = 4x - 8 + 3x + 15 \rightarrow 6x - 6 = 7x + 7 \rightarrow$ Ecuación

Es cierta solo para $x = -13$.

003 **Escribe dos igualdades algebraicas que sean identidades y otras dos que sean ecuaciones.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Identidades: $7x + 2x - 8 = 9x + 4 - 12$

$-7x - 2 = 7(-x - 1) + 5$

Ecuaciones: $2x + 3 = 85$

$6x + 8 = 2x + 6$

004 **Determina los elementos de estas ecuaciones.**

a) $x^2 + x - 1 = x^2 - 2x$ **b)** $2x - 5 = 4(x + 9)$

a) Primer miembro: $x^2 + x - 1$

Segundo miembro: $x^2 - 2x$

Incógnita: x

Grado: 1

b) Primer miembro: $2x - 5$

Segundo miembro: $4(x + 9)$

Incógnita: x

Grado: 1

005 **¿Cuál de los siguientes números es solución de la ecuación $5x - 9 = 4(x - 5)$?**

a) 4 **b) −3** **c) 14** **d) −11**

$5x - 9 = 4(x - 5)$

a) $\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 4 - 9 = 20 - 9 = 11 \\ 4(4 - 5) = 4(-1) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución.

b) $\left.\begin{array}{l} 5(-3) - 9 = -15 - 9 = -24 \\ 4(-3 - 5) = 4(-8) = -32 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución.

c) $\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 14 - 9 = 70 - 9 = 61 \\ 4(14 - 5) = 4 \cdot 9 = 36 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución.

d) $\left.\begin{array}{l} 5(-11) - 9 = -55 - 9 = -64 \\ 4(-11 - 5) = 4(-16) = -64 \end{array}\right\} \rightarrow$ La solución es $x = -11$.

006 **Escribe dos ecuaciones que tengan como solución $x = 1$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$3x = 3$ $\quad$ $2x + 5 = 7$

007 **Escribe dos ecuaciones que tengan:**

a) Dos soluciones.

b) Ninguna solución.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x^2 + 5x = 0$ $\quad$ $x^2 = 4$

b) $x^2 + 9 = 0$ $\quad$ $x^2 + x + 1 = 0$

008 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $2x + 5 = 2 + 4x + 3$

b) $3x - 5 = 2x + 4 + x - 9$

c) $3x + 8 = 5x + 2$

d) $4x - 5 = 3x - 2 + x - 5$

e) $-11x = -4x + 15$

a) $2x + 5 = 2 + 4x + 3 \rightarrow 2x + 5 = 4x + 5 \rightarrow 2x - 4x = 5 - 5$
$\rightarrow x = 0$

b) $3x - 5 = 2x + 4 + x - 9 \rightarrow 3x - 5 = 3x - 5 \rightarrow$ Identidad

c) $3x + 8 = 5x + 2 \rightarrow 3x - 5x = 2 - 8 \rightarrow -2x = -6 \rightarrow x = 3$

d) $4x - 5 = 3x - 2 + x - 5 \rightarrow 4x - 5 = 4x - 7 \rightarrow 4x - 4x = -7 + 5$
$\rightarrow 0 = -2 \rightarrow$ Ecuación incompatible

e) $-11x + 4x = 15 \rightarrow -7x = 15 \rightarrow x = -\dfrac{15}{7}$

009 **Indica si el paso es correcto o no.**

a) $2x + 5x = 2x + 4 \rightarrow 5x = 4$

b) $3x - 5 = x - 9 \rightarrow 4x = -4$

a) Sí es correcto $\rightarrow 2x + 5x - 2x = 4 \rightarrow 5x = 4$

b) No es correcto $\rightarrow 3x - x = -9 + 5 \rightarrow 2x = -4$

010 **¿Qué pasa cuando en los dos miembros de una ecuación aparece un mismo término?**

Entonces podemos eliminarlo de los dos miembros, porque transponiendo el término obtenemos la suma de uno de ellos más su opuesto.

011 **Resuelve.**

a) $x - 5(x - 2) = 6x$

b) $120 = 2x - (15 - 7x)$

a) $x - 5(x - 2) = 6x \rightarrow x - 5x + 10 = 6x \rightarrow -4x + 10 = 6x$
$\rightarrow 10 = 6x + 4x \rightarrow 10 = 10x \rightarrow x = 1$

b) $120 = 2x - (15 - 7x) \rightarrow 120 = 2x - 15 + 7x \rightarrow 120 = 9x - 15$
$\rightarrow 120 + 15 = 9x \rightarrow 135 = 9x \rightarrow x = 15$

012 **Calcula el valor de x.**

a) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x+3}{3}$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2x+7}{5} = 5$

c) $\dfrac{x}{4} + 5 = \dfrac{7x}{12}$

a) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x+3}{3} \rightarrow 6 \cdot \dfrac{x+2}{2} = 6 \cdot \dfrac{x+3}{3} \rightarrow 3(x+2) = 2(x+3)$

m.c.m. $(2, 3) = 6$

$\rightarrow 3x + 6 = 2x + 6 \rightarrow 3x - 2x = 6 - 6 \rightarrow x = 0$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2x+7}{5} = 5 \rightarrow 10 \cdot \dfrac{x}{2} - 10 \cdot \dfrac{2x+7}{5} = 10 \cdot 5$

m.c.m. $(2, 5) = 10$

$\rightarrow 5x - 2(2x + 7) = 50 \rightarrow 5x - 4x - 14 = 50$
$\rightarrow x = 50 + 14 \rightarrow x = 64$

c) $\dfrac{x}{4} + 5 = \dfrac{7x}{12} \rightarrow 12 \cdot \dfrac{x}{4} + 12 \cdot 5 = 12 \cdot \dfrac{7x}{12} \rightarrow 3x + 60 = 7x$

m.c.m. $(4, 12) = 12$

$\rightarrow 60 = 7x - 3x \rightarrow 60 = 4x \rightarrow x = \dfrac{60}{4} = 15$

013 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\mathbf{\frac{4(x-1)}{3} - \frac{2(x-3)}{6} = 5}$

b) $\mathbf{2x + \frac{(x+5)}{6} - \frac{3(x+4)}{8} = 7 - 3x}$

a) $\frac{4(x-1)}{3} - \frac{2(x-3)}{6} = 5 \rightarrow 6 \cdot \frac{4(x-1)}{3} - 6 \cdot \frac{2(x-3)}{6} = 6 \cdot 5$

m.c.m. (3, 6) = 6

$\rightarrow 8(x-1) - 2(x-3) = 30 \rightarrow 8x - 8 - 2x + 6 = 30$

$\rightarrow 6x - 2 = 30 \rightarrow 6x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

b) $2x + \frac{(x+5)}{6} - \frac{3(x+4)}{8} = 7 - 3x$

$\rightarrow 24 \cdot 2x + 24 \cdot \frac{(x+5)}{6} - 24 \cdot \frac{3(x+4)}{8} = 24(7-3x)$

m.c.m. (6, 8) = 24

$\rightarrow 48x + 4(x+5) - 9(x+4) = 24(7-3x)$

$\rightarrow 48x + 4x + 20 - 9x - 36 = 168 - 72x$

$\rightarrow 43x - 16 = 168 - 72x \rightarrow 43x + 72x = 168 + 16$

$\rightarrow 115x = 184 \rightarrow x = \frac{184}{115} = \frac{8}{5}$

014 **Escribe una ecuación de primer grado con paréntesis y denominadores que tenga como solución $x = -1$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\frac{x+3}{2} + 2(x+1) = \frac{4-x}{5}$$

015 **Resuelve.**

a) $\mathbf{x^2 - 7x + 12 = 0}$

b) $\mathbf{x^2 - 9x + 18 = 0}$

c) $\mathbf{2x^2 - 8x + 8 = 0}$

d) $\mathbf{x^2 - 9x + 14 = 0}$

e) $\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0}$

f) $\mathbf{3x^2 + 12x + 9 = 0}$

a) $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12}}{2} =$

$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

b) $x^2 - 9x + 18 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 18}}{2} =$

$= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$

c) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

d) $x^2 - 9x + 14 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 14}}{2} =$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

e) $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} =$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

f) $3x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} =$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{-12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{-12 \pm 6}{6} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix} \right.$$

016 **Expresa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y resuelve.**

a) $x^2 - x = 20$ b) $2x^2 = 48 - 10x$ c) $3x^2 - 8 = -2x$ d) $x^2 + 9 = 10x$

a) $x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 20}}{2} =$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

b) $2x^2 = 48 - 10x \rightarrow 2x^2 + 10x - 48 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 2 \cdot 48}}{2 \cdot 2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 384}}{4} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{4} = \frac{-10 \pm 22}{4} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -8 \end{matrix} \right.$$

c) $3x^2 - 8 = -2x \rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \pm 96}}{6} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \left\langle \begin{matrix} 8/6 = 4/3 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

d) $x^2 + 9 = 10x \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

017 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $2x^2 - 98 = 0$

b) $5x^2 + 20x = 0$

a) $2x^2 - 98 = 0 \rightarrow 2x^2 = 98 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = \pm\sqrt{49} = \begin{cases} 7 \\ -7 \end{cases}$

b) $5x^2 + 20x = 0 \rightarrow x^2 + 4x = 0$

$$\rightarrow x(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x + 4 = 0 \rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Otra forma de resorverlo es:

$$5x^2 + 20x = 0 \rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{10} =$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{400}}{10} = \frac{-20 \pm 20}{10} = \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$$

018 **Resuelve.**

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 - 7 = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$

d) $7x^2 - 6 = 0$

e) $2x^2 - 32 = 0$

f) $x^2 + 6 = 0$

g) $x^2 + 9 = 0$

h) $10x^2 + 11 = 0$

i) $3x^2 + 4 = 0$

j) $3x^2 - 243 = 0$

a) $x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

b) $x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

c) $4x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \dfrac{5}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

d) $7x^2 = 6 \rightarrow x^2 = \dfrac{6}{7} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

e) $2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \dfrac{32}{2} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

f) $x^2 = -6 \rightarrow$ No tiene solución.

g) $x^2 = -9 \rightarrow$ No tiene solución.

h) $10x^2 = -11 \rightarrow x^2 = \dfrac{-11}{10} \rightarrow$ No tiene solución.

i) $3x^2 = -4 \rightarrow x^2 = \dfrac{-4}{3} \rightarrow$ No tiene solución.

j) $3x^2 = 243 \rightarrow x^2 = \dfrac{243}{3} = 81 \rightarrow x = \pm\sqrt{81} = \pm 9$

019 **Calcula y comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula de la ecuación completa.**

a) $\mathbf{900x^2 = 9}$ **b)** $\mathbf{-x^2 = -10}$

a) $900x^2 = 9 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{100} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{100}} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/10 \\ x_2 = -1/10 \end{cases}$

$900x^2 - 9 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 + 4 \cdot 900 \cdot 9}}{2 \cdot 900} = \frac{\pm\sqrt{32\,400}}{1\,800} = \frac{\pm 180}{1\,800} = \begin{cases} 1/10 \\ -1/10 \end{cases}$$

b) $x^2 = 10 \rightarrow x = \pm\sqrt{10} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{10} \\ x_2 = -\sqrt{10} \end{cases}$

$$x^2 - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 + 4 \cdot 10}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{10}}{2} = \begin{cases} \sqrt{10} \\ -\sqrt{10} \end{cases}$$

020 **Escribe una ecuación de segundo grado con algún coeficiente igual a cero y dos soluciones.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

021 **Resuelve.**

a) $\mathbf{x^2 + 7x = 0}$
b) $\mathbf{6x^2 = 0}$
c) $\mathbf{-4x^2 + 5x = 0}$
d) $\mathbf{-2x^2 + 6x = 0}$
e) $\mathbf{14x^2 + x = 0}$
f) $\mathbf{-x^2 = 0}$
g) $\mathbf{10x^2 - 11x = 0}$
h) $\mathbf{x^2 + 9x = 0}$
i) $\mathbf{-x^2 - x = 0}$
j) $\mathbf{9x^2 = 0}$

a) $x \cdot (x + 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

b) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

c) $x \cdot (-4x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

d) $x \cdot (-2x + 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

e) $x \cdot (14x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-1}{14} \end{cases}$

f) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

g) $x \cdot (10x - 11) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{11}{10} \end{cases}$

h) $x \cdot (x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

i) $x \cdot (-x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

j) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

022 **Resuelve.**

a) $\mathbf{5x(2x - 1) = 7x}$ **b)** $\mathbf{(x - 2)(3x + 7) = 0}$

a) $10x^2 - 5x = 7x \rightarrow 10x^2 - 12x = 0 \rightarrow x \cdot (10x - 12) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

b) $(x - 2)(3x + 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \longrightarrow x_1 = 2 \\ 3x + 7 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-7}{3} \end{cases}$

023 **Escribe una ecuación de segundo grado con algún coeficiente igual a cero y una solución.**

La única ecuación de segundo grado que cumple todas las condiciones es la ecuación de la forma $ax^2 = 0$.

024 **Determina el número de soluciones.**

a) $\mathbf{x^2 - 7x - 12 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 + 9x + 18 = 0}$ **c)** $\mathbf{3x^2 - x + 12 = 0}$

a) $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 + 48 = 97 > 0 \rightarrow$ Tiene 2 soluciones.

b) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0 \rightarrow$ Tiene 2 soluciones.

c) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 1 - 144 = -143 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

025 **Halla cuántas soluciones tienen estas ecuaciones y calcula su valor.**

a) $\mathbf{x^2 - 6x + 4 = 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 - 5x + 9 = 0}$

b) $\mathbf{2x^2 = 4 - 10x}$ **e)** $\mathbf{7x^2 + 1 = 6x}$

c) $\mathbf{3x^2 = 6x}$ **f)** $\mathbf{8x^2 = -3}$

a) $x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} =$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6 + \sqrt{20}}{2} \\ \dfrac{6 - \sqrt{20}}{2} \end{cases}$$

b) $2x^2 = 4 - 10x \rightarrow 2x^2 + 10x - 4 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 32}}{4} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{132}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-10 + \sqrt{132}}{4} \\ \dfrac{-10 - \sqrt{132}}{4} \end{cases}$$

c) $3x^2 = 6x \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = x \cdot (3x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

d) $x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 36}}{2} =$

$= \dfrac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

e) $7x^2 + 1 = 6x \rightarrow 7x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 7}}{2 \cdot 7} =$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{14} = \dfrac{6 \pm \sqrt{8}}{14} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{2}}{14} = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{7} = \begin{cases} \dfrac{3 + \sqrt{2}}{7} \\ \dfrac{3 - \sqrt{2}}{7} \end{cases}$

f) $8x^2 = -3 \rightarrow x^2 = -\dfrac{3}{8} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{3}{8}} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

026 **Calcula el valor del discriminante y las soluciones en cada caso.**

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $2x^2 - 20x = -50$

c) $x^2 - 4x = -5$

d) $\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{5}x = 0$

a) $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $2x^2 - 20x + 50 = 0 \rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$

$2x^2 - 20x + 50 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 10x + 25) = 0$

$\rightarrow 2(x - 5)^2 = 0 \rightarrow x = 5$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{5}x = 0 \rightarrow \Delta = \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 0 = \dfrac{16}{25}$

$x\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{6}{5} \end{cases}$

027 **Escribe una ecuación de segundo grado con dos soluciones, otra con una solución doble y otra sin solución.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Con dos soluciones $\rightarrow x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -4$

Con una solución doble $\rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x = -3$ (doble)

Sin solución $\rightarrow x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

028 **La suma de dos números es 48. Si uno es la mitad del otro, ¿qué números son?**

Si los dos números son x y $2x$:

$$x + 2x = 48 \rightarrow 3x = 48 \rightarrow x = 16 \rightarrow 2x = 32$$

Es decir, los números son 16 y 32.

029 **María tiene 4 tebeos menos que Sara. Si María le da 2 de sus tebeos, Sara tendrá el triple que ella. ¿Cuántos tebeos tiene cada una?**

Tebeos de María: x

Tebeos de Sara: $x + 4$

$$x + 4 + 2 = 3(x - 2) \rightarrow x + 4 + 2 = 3x - 6$$
$$\rightarrow x - 3x = -6 - 4 - 2 \rightarrow -2x = -12 \rightarrow x = 6$$

María tiene 6 tebeos y Sara 10 tebeos.

030 **A una fiesta asisten 43 personas. Si se marchasen 3 chicos, habría el triple de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay?**

N.º de chicos: x

N.º de chicas: $43 - x$

$$43 - x = 3(x - 3) \rightarrow 43 - x = 3x - 9 \rightarrow 43 = 4x - 9$$
$$\rightarrow 52 = 4x \rightarrow x = 13$$

Sustituimos: $43 - 13 = 30$

Hay 13 chicos y 30 chicas.

031 **La suma de dos números consecutivos impares es 156. ¿De qué números se trata?**

Sean los dos números x y $x + 2$.

$$x + x + 2 = 156 \rightarrow 2x = 154 \rightarrow x = 77$$

Por tanto, los números son 77 y 79.

032 **El producto de un número por el doble de ese mismo número es 288. ¿Qué número es? ¿Existe más de una solución?**

Número: x

$x \cdot 2x = 288 \rightarrow 2x^2 = 288 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = \pm 12$

Tiene dos soluciones: 12 y -12.

033 **Alberto tiene el doble de edad que Ana. Si multiplicamos sus edades obtenemos el número 512. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Edad de Ana: x Edad de Alberto: $2x$

$x \cdot 2x = 512 \rightarrow 2x^2 = 512 \rightarrow x^2 = 256 \rightarrow x = \pm 16$

Como la edad es un número positivo, la solución es única.

Ana tiene 16 años y Alberto 32 años.

034 **La suma de un número y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?**

$$x + x^2 = 42 \rightarrow x^2 + x - 42 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 42}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Existen dos soluciones: Para $x = 6 \longrightarrow 6^2 + 6 = 36 + 6 = 42$
Para $x = -7 \rightarrow (-7)^2 + (-7) = 49 - 7 = 42$

035 **El producto de las edades de Luisa y su hermano, que tiene 5 años menos que ella, es 176. ¿Cuántos años tienen ambos?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Edad de Luisa: } x \\ \text{Edad de su hermano: } x - 5 \end{array}\right\} \rightarrow x(x-5) = 176 \rightarrow x^2 - 5x - 176 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 + 4 \cdot 176}}{2} = \frac{5 \pm 27}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -11 \end{cases}$$

La segunda solución no es válida (una edad no puede ser negativa), así que la edad de Luisa es 16 años y la de su hermano: $16 - 5 = 11$ años.

036 **Encuentra dos números consecutivos tales que al multiplicarlos se obtenga como resultado 380 unidades.**

Sean los dos números x y $x + 1$.

$$x(x+1) = 380 \rightarrow x^2 + x - 380 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 380}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1521}}{2} = \frac{-1 \pm 39}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 19 \\ x_2 = -20 \end{cases}$$

Existen dos soluciones: Para $x = 19 \longrightarrow$ Los números son 19 y 20.
Para $x = -20 \rightarrow$ Los números son -20 y -19.

037 **Para vallar una finca rectangular de 750 m² se utilizan 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.**

Los lados miden x y $55 - x$.

El área es: $A = x(55 - x) = 750$

Para hallar la medida de los lados resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x(55 - x) = 750 \rightarrow 55x - x^2 = 750 \rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$$

$$x = \frac{55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \cdot 750}}{2} = \frac{55 \pm \sqrt{3\,025 - 3\,000}}{2} =$$

$$= \frac{55 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{55 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = 30 \end{cases}$$

Las dimensiones son 25×30 m.

ACTIVIDADES

038 **Determina si las siguientes igualdades algebraicas son identidades o ecuaciones.**

a) $2x + 3 = 5(x - 1) - 3x + 8$

b) $2x - 3x - 7 = 5x + 1 - x$

c) $4x + 6 - x - 3x = 5 + 8x - 3 - 2x$

d) $(x + 2)^2 - x^2 - 4x = 4$

a) $2x + 3 = 5(x - 1) - 3x + 8 \rightarrow 2x + 3 = 5x - 5 - 3x + 8$
$\rightarrow 2x + 3 = 2x + 3 \rightarrow$ Identidad

b) $2x - 3x - 7 = 5x + 1 - x \rightarrow -x - 7 = 4x + 1 \rightarrow$ Ecuación

c) $4x + 6 - x - 3x = 5 + 8x - 3 - 2x \rightarrow 6 = 2 + 6x \rightarrow$ Ecuación

d) $(x + 2)^2 - x^2 - 4x = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x = 4$
$\rightarrow 4 = 4 \rightarrow$ Identidad

039 **Indica los miembros de estas ecuaciones.**

a) $2x + 3 = 5$

b) $2x - 3x - 7 = 5x + x - 5x$

c) $4x + 6 - x - 3x = 5 + 2x - 3 - 2x$

d) $(x + 2) - (x^2 - 2) = 4$

a) $\underbrace{2x + 3}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{5}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

b) $\underbrace{2x - 3x - 7}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{5x + x - 5x}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

c) $\underbrace{4x + 6 - x - 3x}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{5 + 2x - 3 - 2x}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

d) $\underbrace{(x + 2) - (x^2 - 2)}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{4}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

040 **Señala los términos de las ecuaciones.**

a) $5x + 1 = 25$

b) $2x - x - 9 = x + 3x - 5x$

c) $4x + 6 = 76 + 12x + 3 - 2x$

d) $9(x + 7) - 3(x^2 - 2) = 4$

a) $5x + 1 = 25 \rightarrow$ Términos: $5x$, 1, 25

b) $2x - x - 9 = x + 3x - 5x \rightarrow$ Términos: $2x$, $-x$, -9, x, $3x$, $-5x$

c) $4x + 6 = 76 + 12x + 3 - 2x \rightarrow$ Términos: $4x$, 6, 76, $12x$, 3, $-2x$

d) $9(x + 7) - 3(x^2 - 2) = 4 \rightarrow 9x + 63 - 3x^2 + 6 = 4$
$\rightarrow$ Términos: $9x$, 63, $-3x^2$, 6, 4

041 Indica el grado de las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 8 + x = 0$ **c)** $3x^2 + 75 = 0$

b) $2x^2 + x = 0$ **d)** $-4x^2 - 12x^5 = x^6$

a) Grado 4 b) Grado 2 c) Grado 2 d) Grado 6

042 ¿Cuál de estos números es solución de la ecuación $x(x - 1) = x^2 + x$?

a) $x = 1$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = 0$ **d)** $x = 2$ **e)** $x = -3$ **f)** $x = -2$

La solución es: c) $x = 0$, ya que $0(0 - 1) = 0 + 0$.

043 ¿Es el valor 4 solución de alguna de las ecuaciones?

a) $x^2 - 16 = 0$ **c)** $x^2 - 4 = 8$ **e)** $x^3 - 124 = 0$

b) $x + 4 = 0$ **d)** $x^2 - x + 8 = x + 4$ **f)** $x^2 - x + 8 = x + 4 - 8$

a) Sí, $16 - 16 = 0$.
b) No, $4 + 4 \neq 0$.
c) No, $16 - 4 \neq 8$.
d) No, $16 - 4 + 8 \neq 4 + 4$.
e) No, $64 - 124 \neq 0$.
f) No, $16 - 4 + 8 \neq 4 + 4 - 8$.

044 Escribe una ecuación:

a) Con dos incógnitas y términos independientes 5 y -3.
b) Con una incógnita y solución 7.
c) Con incógnita z y solución -9.

Respuesta abierta. Por ejemplo:
a) $x - 3y + 5 = 2x + y - 3$
b) $2x - 5 = 9 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7$
c) $1 - z = 10 \rightarrow -z = 10 - 1 = 9 \rightarrow z = -9$

045 Averigua cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución $x = 6$.

a) $4x = 24$ **c)** $-x = \frac{4}{3}$ **e)** $-x = -6$

b) $8x = 12$ **d)** $3x = 32$ **f)** $4x = \frac{8}{3}$

a) Sí, $x = 6$.
b) No, $x = \frac{3}{2}$.
c) No, $x = -\frac{4}{3}$.
d) No, $x = \frac{32}{3}$.
e) Sí, $x = 6$.
f) No, $x = \frac{2}{3}$.

046 Escribe dos ecuaciones en cada caso.

a) Que tengan como solución $x = 3$.
b) Que tengan como solución $x = -2$.
c) Cuya solución sea $x = 5$.
d) Cuya solución sea $x = -1$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:
a) $2x = 6$ y $3x + 6 = 15$
b) $3x = -6$ y $9 - 2x = 13$
c) $x - 5 = 0$ y $2x = 10$
d) $x + 1 = 0$ y $3x = -3$

047 Resuelve.

a) $10 - x = 3$
b) $9 + x = 2$
c) $-12 - x = 3$
d) $16 + 3x = -12$
e) $4x + 5 = 11$
f) $3x + 7 = 14$
g) $-5 + 20x = 95$
h) $-9 - 11x = 2$

a) $10 - x = 3 \rightarrow 10 - 3 = x \rightarrow x = 7$

b) $9 + x = 2 \rightarrow 9 + x - 9 = 2 - 9 \rightarrow x = -7$

c) $-12 - x = 3 \rightarrow -12 - x + 12 = 3 + 12 \rightarrow -x = 15 \rightarrow x = -15$

d) $16 + 3x = -12 \rightarrow 3x = -28 \rightarrow x = -\dfrac{28}{3}$

e) $4x + 5 = 11 \rightarrow 4x = 11 - 5 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

f) $3x + 7 = 14 \rightarrow 3x = 14 - 7 \rightarrow 3x = 7 \rightarrow x = \dfrac{7}{3}$

g) $-5 + 20x = 95 \rightarrow 20x = 95 + 5 \rightarrow x = \dfrac{100}{20} = 5$

h) $-9 - 11x = 2 \rightarrow -11x = 2 + 9 \rightarrow x = \dfrac{11}{-11} = -1$

048 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $4x + 5 = -3x + 12$
b) $3x + 7 = 2x + 16$
c) $5 + 20x = 7 + 12x$
d) $6x + 40 = 2x + 50$
e) $-3x - 42 = -2x - 7$
f) $3x - 50 = 10 - 2x$
g) $9x + 8 = -7x + 16$
h) $-5x - 13 = -2x - 4$
i) $9x - 8 = 8x - 9$

a) $4x + 5 = -3x + 12 \rightarrow 4x + 3x = 12 - 5 \rightarrow 7x = 7 \rightarrow x = 1$

b) $3x + 7 = 2x + 16 \rightarrow 3x - 2x = 16 - 7 \rightarrow x = 9$

c) $5 + 20x = 7 + 12x \rightarrow 20x - 12x = 7 - 5 \rightarrow 8x = 2 \rightarrow x = \dfrac{1}{4}$

d) $6x + 40 = 2x + 50 \rightarrow 6x - 2x = 50 - 40 \rightarrow 4x = 10 \rightarrow x = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

e) $-3x - 42 = -2x - 7 \rightarrow -3x + 2x = -7 + 42 \rightarrow x = -35$

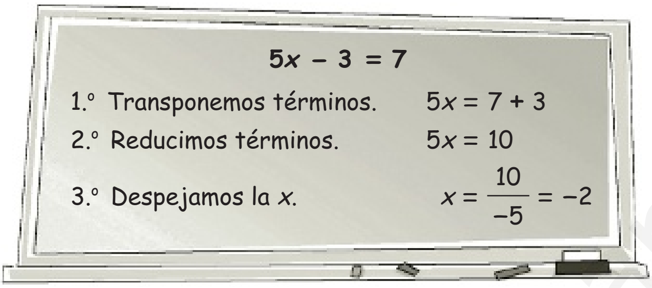
f) $3x - 50 = 10 - 2x \rightarrow 3x + 2x = 10 + 50 \rightarrow 5x = 60 \rightarrow x = 12$

g) $9x + 8 = -7x + 16 \rightarrow 9x + 7x = 16 - 8 \rightarrow 16x = 8 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

h) $-5x - 13 = -2x - 4 \rightarrow -5x + 2x = -4 + 13 \rightarrow x = \dfrac{9}{-3} = -3$

i) $9x - 8 = 8x - 9 \rightarrow 9x - 8x = -9 + 8 \rightarrow x = -1$

049 ●● **Corrige los errores en la resolución de la ecuación.**



En el tercer paso, al despejar la x, el 5 debe pasar dividiendo con el mismo signo con el que multiplica a x, en este caso positivo, $x = \dfrac{10}{5} = 2$.

050 ● **Resuelve.**

a) $6(x + 11) = 40 + 6(x + 2)$

b) $2(x - 17) = x - 3(12 - 2x)$

c) $x - 5(x - 2) = 6$

d) $120 = 2x - (15 - 7x)$

e) $5(x + 4) = 7(x - 2)$

f) $3(x + 7) - 6 = 2(x + 8)$

a) $6(x + 11) = 40 + 6(x + 2) \rightarrow 6x + 66 = 40 + 6x + 12$
$\rightarrow 6x + 66 = 6x + 52$
$\rightarrow 6x - 6x = 52 - 66$
$\rightarrow 0 = 14 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $2(x - 17) = x - 3(12 - 2x) \rightarrow 2x - 34 = x - 36 + 6x$
$\rightarrow 2x - 34 = 7x - 36 \rightarrow 2x - 7x = -36 + 34$
$\rightarrow -5x = -2 \rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

c) $x - 5(x - 2) = 6 \rightarrow x - 5x + 10 = 6 \rightarrow -4x = -4 \rightarrow x = 1$

d) $120 = 2x - (15 - 7x) \rightarrow 120 = 2x - 15 + 7x \rightarrow 120 + 15 = 9x$
$\rightarrow x = \dfrac{135}{9} = 15$

e) $5(x + 4) = 7(x - 2) \rightarrow 5x + 20 = 7x - 14 \rightarrow 5x - 7x = -14 - 20$
$\rightarrow -2x = -34 \rightarrow x = 17$

f) $3(x + 7) - 6 = 2(x + 8) \rightarrow 3x + 21 - 6 = 2x + 16$
$\rightarrow 3x + 15 = 2x + 16 \rightarrow 3x - 2x = 16 - 15 \rightarrow x = 1$

051 ● **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\dfrac{4x}{20} = 3$

b) $\dfrac{3x}{6} = -21$

c) $\dfrac{-2x}{3} = 4$

d) $\dfrac{7x}{4} = 28$

e) $\dfrac{9x}{3} = -5$

f) $\dfrac{-3x}{2} = -25$

a) $\dfrac{4x}{20} = 3 \rightarrow 4x = 3 \cdot 20 \rightarrow 4x = 60 \rightarrow x = 15$

b) $\dfrac{3x}{6} = -21 \rightarrow 3x = -21 \cdot 6 \rightarrow 3x = -126 \rightarrow x = -\dfrac{126}{3} = -42$

c) $\dfrac{-2x}{3} = 4 \rightarrow -2x = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{-2} = -6$

d) $\dfrac{7x}{4} = 28 \rightarrow 7x = 28 \cdot 4 \rightarrow x = \dfrac{112}{7} = 16$

e) $\dfrac{9x}{3} = -5 \rightarrow 9x = -15 \rightarrow x = \dfrac{-15}{9} = -\dfrac{5}{3}$

f) $\dfrac{-3x}{2} = -25 \rightarrow -3x = -50 \rightarrow x = \dfrac{50}{3}$

052 **Resuelve.**

a) $\dfrac{x-2}{5} = 1$

b) $\dfrac{3x+15}{6} = -7$

c) $\dfrac{3x}{2} + 20 = x + 25$

d) $\dfrac{3x}{4} - 1 = 12 - 3x$

a) $\dfrac{x-2}{5} = 1 \rightarrow x - 2 = 5 \rightarrow x = 5 + 2 = 7$

b) $\dfrac{3x+15}{6} = -7 \rightarrow 3x + 15 = -42 \rightarrow 3x = -57 \rightarrow x = \dfrac{-57}{3} = -19$

c) $\dfrac{3x}{2} + 20 = x + 25 \rightarrow \dfrac{3x}{2} - x = 25 - 20 \rightarrow \dfrac{1}{2}x = 5$

$\rightarrow x = 2 \cdot 5 = 10$

d) $\dfrac{3x}{4} - 1 = 12 - 3x \rightarrow \dfrac{3x}{4} + 3x = 12 + 1 \rightarrow \dfrac{3+12}{4}x = 13$

$\rightarrow 15x = 13 \cdot 4 \rightarrow x = \dfrac{52}{15}$

053 **Calcula el valor de *x*.**

a) $\dfrac{3x}{5} + 7 = \dfrac{2x}{6} + 9$

b) $\dfrac{x+2}{3} = 5x - 46$

c) $x - \dfrac{x+4}{5} = 1 + \dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{x+8}{2} - \dfrac{x-4}{6} = 2$

e) $\dfrac{x-5}{5} + \dfrac{8-x}{2} + \dfrac{2x-10}{2} = 3$

f) $\dfrac{x-10}{2} - \dfrac{x-20}{4} - \dfrac{x-30}{3} = 5$

a) $\dfrac{3x}{5} + 7 = \dfrac{2x}{6} + 9 \rightarrow \dfrac{3x}{5} - \dfrac{2x}{6} = 9 - 7 \rightarrow \left(\dfrac{3 \cdot 6 - 2 \cdot 5}{30}\right)x = 2$

m.c.m. (5, 6) = 30

$\rightarrow \dfrac{8}{30}x = 2 \rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 30}{8} = \dfrac{15}{2}$

b) $\dfrac{x+2}{3} = 5x - 46 \rightarrow x + 2 = 15x - 138 \rightarrow x - 15x = -138 - 2$
$\rightarrow -14x = -140 \rightarrow x = 10$

c) $x - \dfrac{x+4}{5} = 1 + \dfrac{x}{2} \rightarrow 10x - 2(x+4) = 10 + 5x$

m.c.m. (5, 2) = 10

$\rightarrow 10x - 2x - 8 = 10 + 5x$
$\rightarrow 8x - 8 = 10 + 5x$
$\rightarrow 8x - 5x = 10 + 8 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6$

d) $\dfrac{x+8}{2} - \dfrac{x-4}{6} = 2 \rightarrow 6 \cdot \dfrac{x+8}{2} - 6 \cdot \dfrac{x-4}{6} = 6 \cdot 2$

m.c.m. (2, 6) = 6

$\rightarrow 3(x+8) - (x-4) = 12$
$\rightarrow 3x + 24 - x + 4 = 12 \rightarrow 2x + 28 = 12$
$\rightarrow 2x = 12 - 28 \rightarrow x = \dfrac{-16}{2} = -8$

e) $\dfrac{x-5}{5} + \dfrac{8-x}{2} + \dfrac{2x-10}{2} = 3$

$\rightarrow 10 \cdot \dfrac{x-5}{5} + 10 \cdot \dfrac{8-x}{2} + 10 \cdot \dfrac{2x-10}{2} = 10 \cdot 3$

m.c.m. (5, 2) = 10

$\rightarrow 2(x-5) + 5(8-x) + 5(2x-10) = 30$
$\rightarrow 2x - 10 + 40 - 5x + 10x - 50 = 30$
$\rightarrow 7x - 20 = 30 \rightarrow 7x = 50 \rightarrow x = \dfrac{50}{7}$

f) $\dfrac{x-10}{2} - \dfrac{x-20}{4} - \dfrac{x-30}{3} = 5$

$\rightarrow 12 \cdot \dfrac{x-10}{2} - 12 \cdot \dfrac{x-20}{4} - 12 \cdot \dfrac{x-30}{3} = 12 \cdot 5$

m.c.m. (2, 4, 3) = 12

$\rightarrow 6(x-10) - 3(x-20) - 4(x-30) = 60$
$\rightarrow 6x - 60 - 3x + 60 - 4x + 120 = 60$
$\rightarrow -x + 120 = 60 \rightarrow -x = 60 - 120 = -60 \rightarrow x = 60$

054 **Obtén la solución de estas ecuaciones.**

a) $\dfrac{2x-10}{3} - \dfrac{3(x-12)}{4} = -1$

b) $\dfrac{-3x-3}{5} = 3 - 4(x+2)$

c) $\dfrac{2x-5}{5} + \dfrac{x+1}{4} = 20 - x$

d) $\dfrac{3-x}{7} - x = \dfrac{3+2(x-1)}{14}$

e) $\dfrac{4x-6}{10} + 2x = 21 - \dfrac{3(x+1)}{12}$

a) $\dfrac{2x-10}{3} - \dfrac{3(x-12)}{4} = -1 \underset{\text{m.c.m. }(3,\,4)\,=\,12}{\rightarrow} 12 \cdot \dfrac{2x-10}{3} - 12 \cdot \dfrac{3(x-12)}{4} = -12$

$\rightarrow 4(2x - 10) - 9(x - 12) = -12$

$\rightarrow 8x - 40 - 9x + 108 = -12$

$\rightarrow -x + 68 = -12 \rightarrow -x = -12 - 68 = -80 \rightarrow x = 80$

b) $\dfrac{-3x-3}{5} = 3 - 4(x+2) \rightarrow 5 \cdot \dfrac{-3x-3}{5} = 15 - 20(x+2)$

$\rightarrow -3x - 3 = 15 - 20x - 40 \rightarrow -3x + 20x = -25 + 3$

$\rightarrow 17x = -22 \rightarrow x = -\dfrac{22}{17}$

c) $\dfrac{2x-5}{5} + \dfrac{x+1}{4} = 20 - x$

$\underset{\text{m.c.m. }(5,\,4)\,=\,20}{\rightarrow} 20 \cdot \dfrac{2x-5}{5} + 20 \cdot \dfrac{x+1}{4} = 20(20 - x)$

$\rightarrow 4(2x - 5) + 5(x + 1) = 20(20 - x)$

$\rightarrow 8x - 20 + 5x + 5 = 400 - 20x$

$\rightarrow 13x + 20x = 400 + 15 \rightarrow 33x = 415$

$\rightarrow x = \dfrac{415}{33}$

d) $\dfrac{3-x}{7} - x = \dfrac{3+2(x-1)}{14} \rightarrow 14 \cdot \dfrac{3-x}{7} - 14x = 14 \cdot \dfrac{3+2(x-1)}{14}$

$\rightarrow 2(3 - x) - 14x = 3 + 2(x - 1)$

$\rightarrow 6 - 2x - 14x = 3 + 2x - 2$

$\rightarrow 6 - 16x = 1 + 2x$

$\rightarrow -16x - 2x = 1 - 6 \rightarrow -18x = -5 \rightarrow x = \dfrac{5}{18}$

e) $\dfrac{4x-6}{10} + 2x = 21 - \dfrac{3(x+1)}{12}$

$\underset{\text{m.c.m. }(10,\,12)\,=\,60}{\rightarrow} 60 \cdot \dfrac{4x-6}{10} + 60 \cdot 2x = 60 \cdot 21 - 60 \cdot \dfrac{3(x+1)}{12}$

$\rightarrow 6(4x - 6) + 120x = 1\,260 - 15(x + 1)$

$\rightarrow 24x - 36 + 120x = 1\,260 - 15x - 15$

$\rightarrow 144x + 15x = 1\,245 + 36 \rightarrow 159x = 1\,281$

$\rightarrow x = \dfrac{1281}{159} = \dfrac{427}{53}$

055 **Resuelve.**

a) $\dfrac{2(x+5)}{2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{3}$

b) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{4(x-1)}{2} = \dfrac{5(x-2)}{2}$

a) $3(x+5) = (x+1)(x-3) \rightarrow 3x + 15 = x^2 - 2x - 3$
$\rightarrow x^2 - 5x - 18 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+72}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+\sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \dfrac{5-\sqrt{97}}{2} \end{cases}$$

b) $x - 2x - 12(x-1) = 15(x-2)$
$\rightarrow x - 2x - 12x + 12 = 15x - 30 \rightarrow -28x = -42 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

056 **¿Está bien resuelta esta ecuación? Corrige los errores que se han cometido.**

$$\frac{4x-2}{7} = 2x - \frac{x-1}{4}$$

1.º Se calcula el m.c.m.	**m.c.m. (7, 4) = 28**
2.º Se multiplica por 28.	$4(4x-2) = 2x - 7(x-1)$
3.º Se eliminan paréntesis.	$16x - 2 = 2x - 7x - 7$
4.º Se transponen términos.	$16x - 2x + 7x = -7 + 2$
5.º Se reducen términos.	$15x = -5$
6.º Se despeja *x*.	$x = \dfrac{15}{-5} = -3$

2.º No se ha multiplicado $2x$ por 28:
$4(4x-2) = 56x - 7(x-1)$

3.º Está mal aplicada la propiedad distributiva:
$16x - 8 = 56x - 7x + 7$

4.º $16x - 56x + 7x = 7 + 8$

5.º No está bien sumado:
$-33x = 15$

6.º Se ha despejado mal la x:
$x = -\dfrac{15}{33} = -\dfrac{5}{11}$

057 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO A PARTIR DE CIERTAS CONDICIONES?

Escribe una ecuación que tenga un paréntesis, un denominador y solución 5.

PRIMERO. Se escribe en forma de igualdad la solución de la ecuación.
En este caso, $x = 5$.

SEGUNDO. Se añade a los dos miembros cada una de las condiciones que debe cumplir.

- Tiene un paréntesis.

$$(x - 7) = (5 - 7) \rightarrow 3(x - 7) = 3(5 - 7) \rightarrow 3(x - 7) = -6$$

- Tiene un denominador.

$$\frac{3(x-7)}{2} = -\frac{6}{2} \rightarrow \frac{3(x-7)}{2} = -3$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación obtenida para comprobar el resultado.

$$\frac{3(x-7)}{2} = -3 \rightarrow 3(x - 7) = -6 \rightarrow 3x - 21 = -6 \rightarrow x = 5$$

058 **Escribe una ecuación:**

a) Que tenga un paréntesis y solución −1.

b) Que tenga un denominador y solución 3.

c) Que tenga dos paréntesis y solución 4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(x - 3) = -4$ b) $\frac{x-5}{2} = -1$ c) $3(x - 1) - 6(5 - x) = 3$

059 **Resuelve las ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.**

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 13 = 0$

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

d) $3x^2 + 2x - 16 = 0$

e) $x^2 - 2x + 1 = 0$

f) $7x^2 - 3x + 1 = 0$

g) $-x^2 - 4x + 5 = 0$

a) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

b) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 104}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{-88}}{4} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = -4$ (doble)

d) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 14}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{-2 - 14}{6} = -\frac{8}{3} \end{cases}$

e) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$ (doble)

f) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 28}}{14} = \frac{3 \pm \sqrt{-19}}{14} \rightarrow$ No tiene solución.

g) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \end{cases}$

060 **Sin resolverlas, averigua el número de soluciones de estas ecuaciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$
b) $-2x^2 - 6x + 8 = 0$
c) $x^2 - 8x + 16 = 0$
d) $-x^2 + x + 1 = 0$
e) $x^2 + 8x + 16 = 0$
f) $2x^2 - 4x + 13 = 0$
g) $7x^2 - 3x + 1 = 0$

a) $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \longrightarrow$ 2 soluciones
b) $\Delta = 36 + 64 = 100 > 0 \longrightarrow$ 2 soluciones
c) $\Delta = 64 - 64 = 0 \longrightarrow$ 1 solución
d) $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0 \longrightarrow$ 2 soluciones
e) $\Delta = 64 - 64 = 0 \longrightarrow$ 1 solución
f) $\Delta = 16 - 104 = -88 < 0 \rightarrow$ Sin solución
g) $\Delta = 9 - 28 = -19 < 0 \longrightarrow$ Sin solución

061 **Determina el número de soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 1 = 0$
b) $x^2 + 2x = 0$
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
d) $x^2 + 8x + 16 = 0$
e) $x^2 - x - 2 = 0$
f) $x^2 = 7x - 12$
g) $2x^2 - 4 + 3x = x^2 + 2 + 2x$

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

b) $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$

e) $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

f) $x^2 = 7x - 12 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

g) $2x^2 - 4 + 3x = x^2 + 2 + 2x \rightarrow 2x^2 - x^2 + 3x - 2x - 4 - 2 = 0$

$$\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

062 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado incompletas.**

a) $x^2 - 8 = 0$
b) $2x^2 + 50 = 0$
c) $3x^2 + 75x = 0$
d) $x^2 - 16 = 0$
e) $-8x^2 - 24x = 0$
f) $-x^2 - x = 0$
g) $x^2 - 1 = 0$
h) $4x^2 - 2x = 0$

a) $x = \pm\sqrt{8}$

b) $x^2 = -25 \longrightarrow$ No tiene solución.

c) $3x(x + 25) \longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -25$

d) $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

e) $-8x(x + 3) \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -3$

f) $-x(x + 1) \longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1$

g) $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

h) $2x(2x - 1) \longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

063 **Resuelve las ecuaciones por el método más adecuado.**

a) $7x^2 = 63$
b) $x^2 - 24 = 120$
c) $x^2 - 25 = 0$
d) $x^2 = 10\,000$
e) $x^2 - 3 = 22$
f) $5x^2 - 720 = 0$
g) $x^2 + 1 = \dfrac{5}{4}$
h) $x^2 - 36 = 100$
i) $2x^2 - 72 = 0$
j) $5x^2 - 3 = 42$
k) $9x^2 - 36 = 5x^2$
l) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

a) $7x^2 = 63 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

b) $x^2 - 24 = 120 \rightarrow x^2 = 120 + 24 = 144 \rightarrow x = \pm 12$

c) $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

d) $x^2 = 10\,000 \rightarrow x = \pm 100$

e) $x^2 - 3 = 22 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

f) $5x^2 - 720 = 0 \rightarrow 5x^2 = 720 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = \pm 12$

g) $x^2 + 1 = \frac{5}{4} \rightarrow x^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

h) $x^2 - 36 = 100 \rightarrow x^2 = 100 + 36 = 136 \rightarrow x = \pm\sqrt{136}$

i) $2x^2 - 72 = 0 \rightarrow 2x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$

j) $5x^2 - 3 = 42 \rightarrow 5x^2 = 45 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

k) $9x^2 - 36 = 5x^2 \rightarrow 9x^2 - 5x^2 = 36 \rightarrow 4x^2 = 36$
$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

l) $2x^2 + 7x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} =$
$= \frac{-7 \pm 13}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{20}{4} = -5 \end{cases}$

064 **Resuelve.**

a) $x^2 - 7x = 0$
b) $x^2 + 3x = 0$
c) $x^2 - 25x = 0$
d) $x^2 - 10x = 0$
e) $16x(x - 5) = 0$
f) $3x^2 - 12x = 0$
g) $3x = 4x^2 - 2x$
h) $4x^2 = 5x$
i) $25x^2 - 100x = 0$
j) $6x^2 - 6x = 12x$

a) $x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(x - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 7 = 0 \rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$

b) $x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$

c) $x^2 - 25x = 0 \rightarrow x(x - 25) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 25 = 0 \rightarrow x_2 = 25 \end{cases}$

d) $x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(x - 10) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 10 = 0 \rightarrow x_2 = 10 \end{cases}$

e) $16x(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} 16x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$

f) $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$

g) $3x = 4x^2 - 2x \rightarrow 4x^2 - 2x - 3x = 0 \rightarrow 4x^2 - 5x = 0$
$\rightarrow x(4x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \end{cases}$

h) $4x^2 = 5x \rightarrow 4x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(4x - 5) = 0$
$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \end{cases}$

i) $25x^2 - 100x = 0 \rightarrow 25x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 25x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$

j) $6x^2 - 6x = 12x \rightarrow 6x^2 - 18x = 0 \rightarrow 6x(x - 3) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

065 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LAS ECUACIONES EN LAS QUE UN PRODUCTO ES IGUAL A CERO?

Resuelve la ecuación $(x - 1)(x + 2) = 0$.

Para que un producto de varios factores valga cero, al menos uno de los factores ha de ser cero.

PRIMERO. Se iguala a cero cada uno de los factores.

$$(x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$$

SEGUNDO. Se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$(x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

066 ●● **Calcula sin aplicar la fórmula general.**

a) $(x + 2)(x - 2) = 0$

b) $(x - 3)(x + 3) = 0$

c) $(x + 3)(2x - 5)\left(5 - \dfrac{x}{2}\right) = 0$

d) $(x - 5)^2 = 0$

e) $(x - 2)^2 + x = x$

f) $x\left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{4}{5}\right)^2 = 0$

a) $\begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 = 0 \longrightarrow x_1 = -3 \\ 2x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{5}{2} \\ 5 - \dfrac{x}{2} = 0 \rightarrow x_3 = 10 \end{cases}$

d) $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$ (doble)

e) $(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ (doble)

f) $\begin{cases} x = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \\ \left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{4}{5}\right)^2 = 0 \rightarrow \dfrac{3x}{4} - \dfrac{4}{5} = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{16}{15} \text{ (doble)} \end{cases}$

067 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x+1)(x-3)+3=0$

b) $(x+9)(x-9)=3(x-27)$

c) $x(3x-2)=65$

d) $4x-(x^2-4)=2x-4$

e) $(2x+3)(2x-3)=135$

f) $x^2-\frac{23}{4}x=18$

g) $x^2-7x+\frac{13}{4}=0$

a) $(x+1)(x-3)+3=0 \rightarrow x^2+x-3x-3+3=0$

$$\rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow x_1=0 \\ x-2=0 \rightarrow x_2=2 \end{cases}$$

b) $(x+9)(x-9)=3(x-27) \rightarrow x^2-81=3x-81 \rightarrow x^2-3x=0$

$$\rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow x_1=0 \\ x-3=0 \rightarrow x_2=3 \end{cases}$$

c) $x(3x-2)=65 \rightarrow 3x^2-2x-65=0$

$$\rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+780}}{6}=\frac{2\pm 28}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

d) $4x-(x^2-4)=2x-4 \rightarrow 4x-x^2+4-2x+4=0$

$$\rightarrow -x^2+2x+8=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4\cdot 8}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{-2}=$$

$$=\frac{-2\pm 6}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=4 \end{cases}$$

e) $(2x+3)(2x-3)=135 \rightarrow 4x^2-9=135 \rightarrow 4x^2=144$

$$\rightarrow x^2=36 \rightarrow x=\pm 6$$

f) $x^2-\frac{23}{4}x=18 \rightarrow x^2-\frac{23}{4}x-18=0$

$$\rightarrow x=\frac{-(-23/4)\pm\sqrt{(-23/4)^2+4\cdot 18}}{2}=\frac{23/4\pm\sqrt{(529/16)+72}}{2}=$$

$$=\frac{23/4\pm\sqrt{(529+1\,152)/16}}{2}=\frac{23/4\pm 41/4}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{23/4+41/4}{2}=\dfrac{64/4}{2}=\dfrac{64}{8}=8 \\ x_2=\dfrac{23/4-41/4}{2}=-\dfrac{18/4}{2}=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

g) $x^2-7x+\frac{13}{4}=0 \rightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 13/4}}{2}=$

$$=\frac{7\pm\sqrt{49-13}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{36}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{13}{2} \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

068 Escribe una ecuación de segundo grado, con todos sus coeficientes distintos de cero, que tenga una solución doble.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

069 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES?

Resuelve $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{3-4x}{4} = \frac{5+4x}{4}$.

PRIMERO. Se eliminan los denominadores: se calcula el m.c.m. de los denominadores y se multiplican los dos miembros de la ecuación por él.

$$\text{m.c.m. } (2, 4) = 4$$

$$4\left(\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{3-4x}{4}\right) = 4\left(\frac{5+4x}{4}\right)$$

$$2(x-1)^2 - (3-4x) = (5+4x)$$

SEGUNDO. Se eliminan los paréntesis.

$$2(x^2 - 2x + 1) - 3 + 4x = 5 + 4x$$

$$2x^2 - 4x + 2 - 3 + 4x = 5 + 4x$$

TERCERO. Se agrupan todos los términos en el primer miembro y se opera.

$$2x^2 - 4x + 2 - 3 + 4x - 5 - 4x = 0$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

CUARTO. Se simplifica la ecuación, si se puede, y se resuelve.

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{Se divide entre 2}} x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

QUINTO. Se comprueban las soluciones.

$$\xrightarrow{x=3} \frac{(3-1)^2}{2} - \frac{3-4\cdot 3}{4} = \frac{5+4\cdot 3}{4} \rightarrow 2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4} \rightarrow \frac{17}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\xrightarrow{x=-1} \frac{(-1-1)^2}{2} - \frac{3-4(-1)}{4} = \frac{5+4(-1)}{4} \rightarrow 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

070 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{14x-5}{6}=\frac{11}{6}$

b) $\frac{(x-2)(x+2)}{5}-\frac{14x+35}{6}=\frac{52x+5}{10}$

c) $(2x+1)^2=-1$

d) $(x-2)+(2x-1)(x-3)=x(3x-3)-2x$

e) $(x-1)(x+2)=2+(x+3)(x-4)$

f) $\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{5}x=0$

a) $2(x-2)^2+14x-5=11 \rightarrow 2x^2-8x+8+14x-5=11$
$\rightarrow 2x^2+6x-8=0 \rightarrow x^2+3x-4=0$

$$\rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-3+5}{2}=1\\ x_2=\frac{-3-5}{2}=-4\end{cases}$$

b) $6(x-2)(x+2)-5(14x+35)=3(52x+5)$
$\rightarrow 156x+15 \rightarrow 6x^2-24-70x-175=156x-15$
$\rightarrow 6x^2-226x-214=0 \rightarrow 3x^2-113x-107=0$

$$\rightarrow x=\frac{113\pm\sqrt{113^2+\cdot 4\cdot 3\cdot 107}}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{113+\sqrt{14\,053}}{6}\\ x_2=\frac{113-\sqrt{14\,053}}{6}\end{cases}$$

c) $4x^2+4x+2=0 \rightarrow 2x^2+2x+1=0$

$$\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{4}\rightarrow \text{Sin solución}$$

d) $x-2+2x^2-7x+3=3x^2-3x-2x \rightarrow -x^2-x+1=0$

$$\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{-2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{-2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

e) $x^2+x-2=2+x^2-x-12 \rightarrow 2x=-8 \rightarrow x=-4$

f) $$x\left(\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}\right)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ \frac{3}{4}x+\frac{4}{5}=0\rightarrow x_2=-\frac{16}{15}\end{cases}$$

071 Encuentra dos números consecutivos que sumen 51.

Si los dos números son x y $x+1 \rightarrow x+x+1=51 \rightarrow 2x=50 \rightarrow x=25$
Por tanto, los números son 25 y 26.

072 Calcula un número tal que su doble y su triple sumen 10.

El número es $x \rightarrow 2x+3x=10 \rightarrow 5x=10 \rightarrow x=2$

073 **Encuentra un número tal que, al sumarle 4, resulte el doble del número menos una unidad.**

El número es $x \rightarrow x + 4 = 2(x - 1) \rightarrow -x = -6 \rightarrow x = 6$

074 **Halla dos números consecutivos, sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 567.**

Si los dos números son x y $x + 1$:
$(x + 1)^2 - x^2 = 567 \rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 567 \rightarrow 2x = 566 \rightarrow x = 283$

Los números son 283 y 284.

075 **El precio de un anillo y su estuche es de 10 200 € y el anillo vale 10 000 € más que el estuche. ¿Cuál es el precio de cada artículo?**

Estuche: x. Anillo: $x + 10000 \rightarrow x + x + 10000 = 10200 \rightarrow 2x = 200$
$\rightarrow x = 100$. El estuche cuesta 100 € y el anillo 10 100 €.

076 **Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles, y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40 000 barriles?**

Barriles: x. Exporta en enero: $\frac{x}{2}$ y en los dos meses siguientes: $\frac{1}{3}\left(x - \frac{x}{2}\right)$.

$$x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x}{2}\right) = 40\,000 \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 40\,000 \rightarrow \frac{x}{3} = 40\,000$$
$$\rightarrow x = 120\,000 \text{ barriles}$$

077 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE EDADES MEDIANTE ECUACIONES?

El perro de Álex tiene 12 años menos que él. Dentro de 4 años, Álex tendrá el triple de la edad de su perro. ¿Cuáles son sus edades?

PRIMERO. Se plantea el problema.

	Edad de Álex	Edad del perro
Actualmente	x	$x - 12$
Dentro de 4 años	$x + 4$	$x - 12 + 4 = x - 8$

Dentro de 4 años, la edad de Álex será el triple que la del perro: $x + 4 = 3(x - 8)$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación.

$$x + 4 = 3(x - 8) \rightarrow x + 4 = 3x - 24 \rightarrow 28 = 2x \rightarrow x = 14$$

TERCERO. Se comprueba la solución.

Álex tiene 14 años, y su perro, $14 - 12 = 2$ años.

En 4 años, Álex tendrá 18 años, y su perro, 6 años, $18 = 6 \cdot 3$.

078 ●● **Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

Ignacio: x. Miguel: $x + 4 \rightarrow (x + 3) + (x + 4 + 3) = 20 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$
Ignacio: 5 años y Miguel: 9 años.

079 ●● **¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 6 años?**

Edad actual: $x \rightarrow x + 12 = 3(x - 6) \rightarrow -2x = -30 \rightarrow x = 15$ años

080 ●●● **Lucía tiene tres hijos. El pequeño tiene la mitad de años que el mediano, y este tiene 6 años menos que el mayor. Calcula las edades de los tres, sabiendo que la suma de sus edades actuales es igual a la edad de su prima Ana, que es 12 años mayor que el hermano pequeño.**

Mayor: x Mediano: $x - 6$ Pequeño: $\dfrac{x-6}{2}$ Ana: $\dfrac{x-6}{2} + 12$

$$x + x - 6 + \frac{x-6}{2} = \frac{x-6}{2} + 12 \rightarrow 2x = 18 \rightarrow x = 9$$

Mayor: 9 años. Mediano: 3 años. Pequeño: 1 año y medio.

081 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MEZCLAS MEDIANTE ECUACIONES?

Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia, a 5,20 €/kg, y otro de la India, a 6,20 €/kg, y queremos obtener 100 kg de té a 6 €/kg. ¿Cuántos kilos hemos de mezclar de cada tipo?

PRIMERO. Se plantea el problema.

	Kilos	Precio
Té tailandés	x	$5{,}2x$
Té indio	$100 - x$	$6{,}2(100 - x)$
Mezcla	100	$5{,}2x + 6{,}2(100 - x)$

$$\text{Precio del kilo de mezcla} = \frac{5{,}2x + 6{,}2(100 - x)}{100} = 6$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación.

$$\frac{5{,}2x + 6{,}2(100 - x)}{100} = 6 \rightarrow 5{,}2x + 620 - 6{,}2x = 600 \rightarrow 20 = x$$

TERCERO. Se comprueba la solución.
Necesitamos 20 kg de té de Tailandia y $100 - x = 80$ kg de té de la India.

$$\text{El kilo de mezcla vale: } \frac{5{,}2 \cdot 20 + 6{,}2 \cdot 80}{100} = 6 \text{ €}$$

082 ●● **¿Cuántos litros de leche de 0,75 €/ℓ hay que mezclar con leche de 0,85 €/ℓ para conseguir 100 litros a 0,77 €/ℓ?**

Leche de 0,75 €: x Leche de 0,85 €: $100 - x$

$0{,}75x + 0{,}85(100 - x) = 100 \cdot 0{,}77 \rightarrow 85 - 0{,}1x = 77 \rightarrow x = 80$

Hay que mezclar 80 litros a 0,75 €/ℓ y 20 litros a 0,85 €/ℓ.

083 ●● **En una fábrica de ladrillos se mezcla arcilla de 21 € la tonelada con arcilla de 45 € la tonelada. ¿Cuántas toneladas de cada clase hay que emplear para conseguir 500 toneladas de arcilla a 39 € la tonelada?**

Arcilla a 21 €/t: x. Arcilla a 45 €/t: $500 - x \rightarrow 21x + 45(500 - x) = 500 \cdot 39$
$\rightarrow 22\,500 - 24x = 19\,500 \rightarrow x = 120 \rightarrow$ 120 t a 21 €/t y 380 t a 45 €/t

084 ●● **En una papelería se han vendido 25 cajas de papel del tipo *A* y 14 cajas del tipo *B* por 7 700 €. ¿Cuál es el precio de la caja de cada tipo si el precio de la caja del tipo *B* es $\frac{5}{6}$ de la del tipo *A*?**

Tipo *A*: x Tipo *B*: $\frac{5}{6}x$

$25x + 14 \cdot \frac{5}{6}x = 7\,700 \rightarrow 75x + 35x = 23\,100 \rightarrow 110x = 23\,100$

$\rightarrow x = 210$ €. Caja del tipo *A*: 210 €. Caja del tipo *B*: 175 €.

085 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MOVIMIENTO MEDIANTE ECUACIONES?

Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 80 km/h y, dos horas más tarde, sale un coche de la misma ciudad a 120 km/h. ¿A qué distancia de la ciudad alcanzará el coche al camión?

PRIMERO. Se plantea el problema.

$x \rightarrow$ Tiempo transcurrido desde que sale el coche hasta el encuentro

	Ventaja	Momento del encuentro
Distancia que recorre el camión	$2 \cdot 80$	$2 \cdot 80 + 80x$
Distancia que recorre el coche		$120x$

La distancia recorrida por los dos vehículos al encontrarse es la misma $\rightarrow 2 \cdot 80 + 80x = 120x$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación.

$$2 \cdot 80 + 80x = 120x \rightarrow 160 = 120x - 80x \rightarrow x = 4$$

TERCERO. Se comprueba la solución.

Se encuentran 4 horas después de la salida del coche, es decir, a las 6 horas de la partida del camión.

El camión, en 6 horas, recorre: $6 \cdot 80 = 480$ km
El coche, en 4 horas, recorre: $4 \cdot 120 = 480$ km

086 **Esther viaja de Barcelona a Sevilla en su coche. Sale a las 8 de la mañana y lleva una velocidad constante de 90 km/h. A 110 km de Barcelona, Juan coge, a esa misma hora, un autobús que viaja a 70 km/h, con la misma dirección que Esther. ¿A qué hora se encuentra Esther con el autobús? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno?**

El tiempo que tardan en encontrarse es x.
$90x = 110 + 70x \rightarrow 20x = 110 \rightarrow x = 5{,}5$ horas

Luego se encuentran a las 13 h 30 min. La distancia recorrida por Esther es: $5{,}5 \cdot 90 = 495$ km y la de Juan es: $495 - 110 = 385$ km.

087 **A las 7 de la mañana, Tomás sale de Zamora con dirección a Cádiz, distantes entre sí 660 km, a una velocidad de 75 km/h. A la misma hora, Natalia sale de Cádiz y se dirige hacia Zamora en la misma carretera que Tomás a una velocidad de 60 km/h. ¿A qué hora se cruzarán? ¿Y a qué distancia estarán de Cádiz?**

Siendo x el tiempo que tardan en encontrarse, y considerando que están a una distancia de 660 km: $75x + 60x = 660 \rightarrow 135x = 660$ $\rightarrow x = 4{,}888$ horas $= 4$ h 53 min 20 s. Se cruzarán a las 11 h 53 min 20 s y estarán a $4{,}888 \cdot 60 = 293{,}333$ km de Cádiz.

088 **Un terreno rectangular tiene una superficie de 1 739 m² y mide 10 m más de largo que de ancho. Calcula sus dimensiones.**

Ancho: x. Largo: $x + 10 \rightarrow x(x + 10) = 1\,739 \rightarrow x^2 + 10x - 1\,739 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 6\,956}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{7\,056}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-10 + 84}{2} = 37 \\ x_2 = \dfrac{-10 - 84}{2} = -47 \end{cases}$$

Las dimensiones son 37 m de ancho y 47 m de largo. La otra solución no es válida por ser negativa.

089 **Si un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7 000 m², halla sus dimensiones.**

Ancho: x. Largo: $x + 30 \rightarrow x(x + 30) = 7\,000 \rightarrow x^2 + 30x - 7\,000 = 0$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 28\,000}}{2} = \frac{-30 \pm \sqrt{28\,900}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-30 + 170}{2} = 70 \\ x_2 = \dfrac{-30 - 170}{2} = -100 \end{cases}$$

Las dimensiones son 70 m de ancho y 100 m de largo. La otra solución no es válida por ser negativa.

090 ●●

Encuentra dos números que se diferencien en 7 unidades, sabiendo que su producto es 60.

Menor: x. Mayor: $x + 7 \rightarrow x(x + 7) = 60 \rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7 + 17}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-7 - 17}{2} = -12 \end{cases}$$

Las soluciones son 5 y 12 o -12 y -5.

091 ●●●

En un triángulo rectángulo de 24 m de perímetro, la longitud de un cateto es igual a los tres cuartos de la longitud del otro. Halla sus dimensiones.

Cateto 1: x

Cateto 2: $\frac{3}{4}x$

Hipotenusa: $\sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} = \frac{5}{4}x$

$$x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 24 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8$$

Cateto 1 $= 8$ m. Cateto 2 $= 6$ m. Hipotenusa $= 10$ m.

092 ●●

Para embaldosar un salón de 8 m de largo por 6 m de ancho se han utilizado 300 baldosas cuadradas. ¿Cuánto mide el lado de las baldosas?

Lado de la baldosa: x

$$300x^2 = 8 \cdot 6 \rightarrow x^2 = 0{,}16 \rightarrow x = 0{,}4$$

La baldosa mide 40 cm de lado.

093 ●●

La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si un cateto mide 2 cm menos que el otro.

Mayor: x Menor: $x - 2$ Diagonal: $\sqrt{x^2 + (x - 2)^2}$

$x^2 + (x - 2)^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 100 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + 14}{2} = 8 \\ x_2 = \dfrac{2 - 14}{2} = -6 \end{cases}$$

Las dimensiones son 8 cm y 6 cm.
La otra solución no es válida por ser negativa.

094 ●●● **Un cine tiene igual número de filas que de butacas por fila. El propietario decide remodelarlo quitando una butaca por fila y tres filas. Después de la remodelación, el número de butacas es 323.**

a) ¿Cuántas filas tenía el cine antes de la remodelación?

b) ¿Cuántas butacas hay ahora en cada fila?

a) Llamamos x = n.º de filas = n.º de butacas/fila.
Se eliminan 3 filas: $x - 3$
Se elimina 1 butaca por fila: $x - 1$
$(x - 3)(x - 1) = 323 \rightarrow x^2 - 3x - x + 3 = 323$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 320 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 320}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{2} = \frac{4 \pm 36}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = -16 \end{cases}$$

No tiene sentido el valor negativo, por lo que el cine tenía 20 butacas por fila y 20 filas.

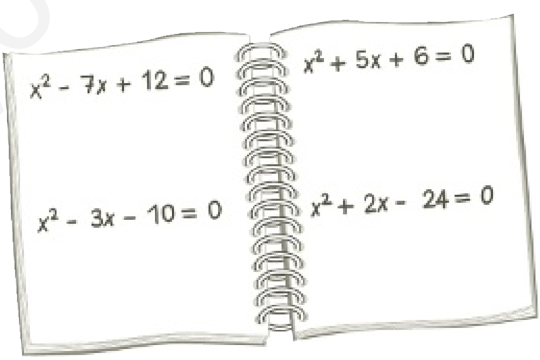
b) Ahora tiene: $20 - 1 = 19$ butacas por fila.

095 ●●● **Vamos a investigar qué ocurre con las ecuaciones de segundo grado cuyo coeficiente de x^2 vale 1, es decir, ecuaciones de la forma:**

$$x^2 + bx + c = 0$$

Para ello:

a) Resuelve las cuatro ecuaciones:



b) ¿Qué relaciones observas entre las soluciones obtenidas y los coeficientes *b* y *c*?

c) Encuentra las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$ y luego calcula su suma y su producto.

d) Aplicando las relaciones halladas, busca dos números cuya suma sea 15 y su producto 56.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+1}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{7-1}{2} = 3 \end{cases}$$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2+10}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{-2-10}{2} = -6 \end{cases}$$

b) $b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 \cdot x_2$

c) $$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -b \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4c}\right)^2}{2} = c \end{cases}$$

d) $x^2 - 15x + 56 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{15+1}{2} = 8 \\ x_2 = \frac{15-1}{2} = 7 \end{cases}$$

096 ●●●

Desarrolla y simplifica la expresión: $A = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2$
Encuentra tres números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 30 002.

$A = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 \rightarrow A = x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1$
$\rightarrow A = 3x^2 + 2$

$30\,002 = 3x^2 + 2 \rightarrow 30\,000 = 3x^2 \rightarrow x^2 = 10\,000 \rightarrow x = \pm 100$

Tiene dos soluciones: 99, 100 y 101 y -99, -100 y -101.

097 **Resuelve la ecuación:**

$$\mathbf{4x^2 - 1 + (2x + 1)(x + 3) = 0}$$

sin utilizar la fórmula general. Para ello factoriza la expresión del primer miembro.

$$4x^2 - 1 + (2x + 1)(x + 3) = 0 \rightarrow (2x + 1)(2x - 1) + (2x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow (2x + 1)[(2x - 1) + (x + 3)] = 0 \rightarrow (2x + 1)(3x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

098 **A Mariam le quedan pocos días para dar a luz. En su trabajo tienen la costumbre de hacer un regalo a los recién nacidos. Sus compañeros Roberto y Pilar se han encargado de recoger el dinero.**

Como Mariam es muy popular en su empresa, la mayoría de sus compañeros han participado en el regalo.

Ayer, Roberto y Pilar estuvieron en unos grandes almacenes y han propuesto comprar un coche de bebé que está de oferta y por el que tendrían que poner 8 € cada uno.

Como todos estaban de acuerdo, fueron a comprarlo, pero resultó que la oferta había terminado y les faltaban 4 €.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Expresa en lenguaje algebraico.
- **El número de personas que participaron en el regalo.**
- **El precio original del regalo.**
- **El precio al ir a comprarlo.**

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿Cuántas personas han participado? ¿Cuánto ha costado el regalo?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Roberto y Pilar me han dicho que de los 14 compañeros hay una persona que no ha puesto dinero para el regalo. ¿Crees que es cierto lo que dicen?

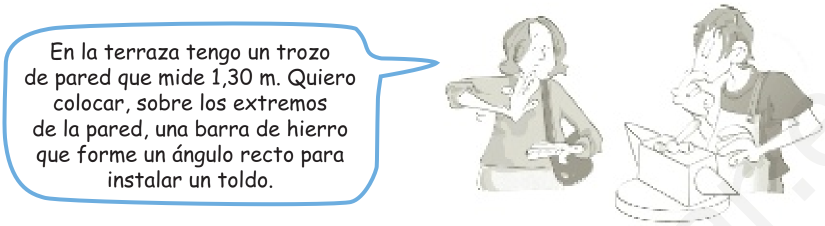
a) Personas que participan en el regalo: x
Precio original: $8x$
Precio nuevo: $8x + 4$ y $9x - 8$

b) $8x + 4 = 9x - 8 \rightarrow x = 12$
Han participado 12 personas.
El regalo ha costado: $12 \cdot 8 + 4 = 100$ €

c) Lo que han dicho Roberto y Pilar no es cierto, ya que han puesto dinero 12 personas y no 13.

099 ●●●

Marcelino es herrero y se ha encontrado con bastantes problemas a lo largo de su trayectoria profesional. Muchas veces la dificultad no está en el trabajo que hay que realizar, sino en interpretar lo que el cliente desea.



Por eso, cuando alguien le plantea un problema como este, Marcelino tiene que traducirlo a las tareas que él debe realizar en su herrería.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Dibuja un croquis de la pieza que tiene que construir y señala las medidas que conozcas.

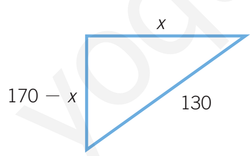
ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿En qué punto tendrá que doblar Marcelino la barra de hierro?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si la pared mide 1,44 m, ¿podrá utilizar medidas exactas para doblar la barra? ¿Cómo lo podría hacer?

a)



b) $x^2 + (170 - x)^2 = 130^2 \rightarrow x^2 - 170x + 6\,000 = 0$

$$x = \frac{170 \pm \sqrt{28\,900 - 24\,000}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 120 \\ x_2 = 50 \end{cases}$$

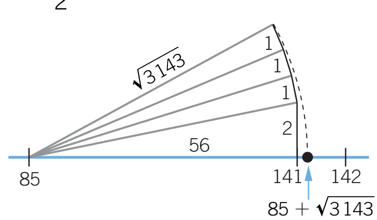
Las dos partes de la barra tienen que medir 120 cm y 50 cm.

c) $x^2 + (170 - x)^2 = 144^2 \rightarrow x^2 - 170x + 4\,082 = 0$

$$x = \frac{170 \pm \sqrt{28\,900 - 16\,328}}{2} = \frac{170 \pm \sqrt{12\,572}}{2} \rightarrow x = 85 + \sqrt{3\,143}$$

La raíz no es exacta, luego no podrá utilizar medidas exactas. Sin embargo, lo podrá hacer de manera gráfica:

$3\,143 = 56^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$



5 Sistemas de ecuaciones

Una clase improvisada

Estar invitado a la «fiesta de la Primavera», que cada año se celebraba en el palacio del maharajá, era un honor reservado tan solo a los personajes más influyentes.

Al subirse al elefante, el sabio Brahmagupta y su joven ayudante, Serhane, coincidieron en reconocer que el maharajá era muy generoso al enviar a su séquito para llevarlos a palacio.

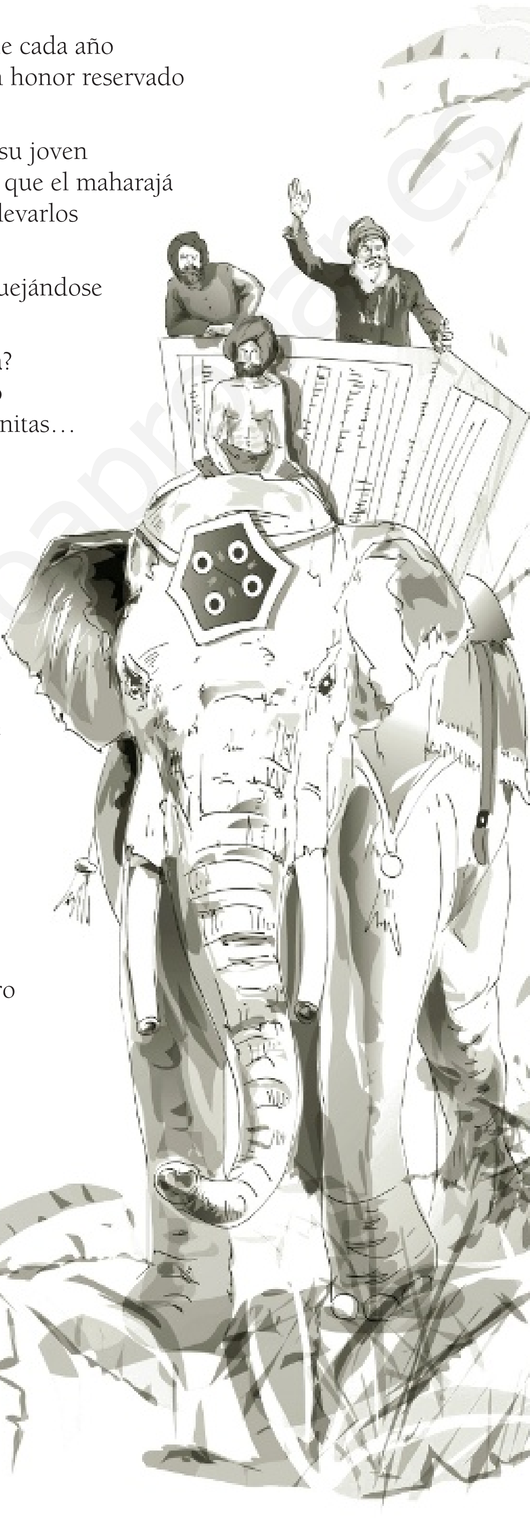
El joven ayudante pasó la mitad del camino quejándose de las disciplinas que tenía que estudiar:

–Maestro, ¿por qué tengo que estudiar álgebra? No tiene ninguna utilidad, pues si tengo cinco monedas son cinco monedas y no cinco incógnitas… Y que la incógnita pueda ser cualquier cosa es antinatural.

Brahmagupta tomó la palabra, y durante la mitad del camino que les quedaba, le explicó a su discípulo la utilidad del álgebra:

–Todo en este mundo tiene su significado: la estrella en la frente del elefante no solo es una estrella, significa que pertenece al maharajá, y la cruz coronada de cuatro círculos no es solo un dibujo, es el símbolo de la ciudad. En matemáticas lo más sencillo es quitarle el significado a las cosas, operar con números y, después, interpretar el resultado.

Tras estas palabras, maestro y discípulo permanecieron en silencio durante el kilómetro que faltaba para llegar al palacio.



DESCUBRE LA HISTORIA…

1 **Brahmagupta es uno de los más importantes matemáticos indios. Investiga sobre su vida y sus aportaciones a las matemáticas.**

En esta página dedicada al mundo de las matemáticas podrás consultar biografías entre las que se encuentra la de Brahmagupta, junto con sus principales aportaciones al estudio de las matemáticas:
http://www.iescarrus.com/edumat/biografias/biografias.htm

2 **¿Qué representa la estrella en la frente del elefante? ¿Y la cruz coronada de cuatro círculos? Busca otros símbolos de la cultura hindú.**

En la siguiente página de la Embajada de la India se pueden conocer los símbolos de ese país, como pueden ser su bandera, su emblema nacional, su himno…
http://www.embassyindia.es/IndianEmbassy/IndianEmbassy/IndexBase/index2.php?lang=eng&key=facts

En cuanto a símbolos propios de la religión hindú, en esta página hallarás las principales divinidades y sus símbolos característicos:
http://www.indiga.org/religions/hin_resum.php

3 **Busca información sobre las aportaciones de Brahmagupta al álgebra.**

En la siguiente página del departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, en México, puedes leer las aportaciones de Brahmagupta al álgebra:
http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Construye una tabla de valores para cada ecuación.**

a) $y = -1 + 2x$ **b)** $x = -y + 2$ **c)** $x + y = 2$

a)

x	-1	0	1
y	-3	-1	1

b)

x	-1	0	1
y	3	2	1

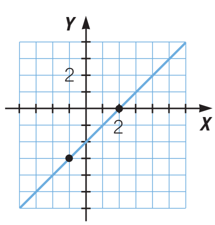
c)

x	-1	0	1
y	3	2	1

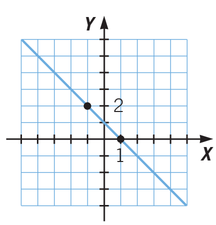
2 **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = x - 2$ **b)** $y = -x + 1$ **c)** $2x - y = 3$

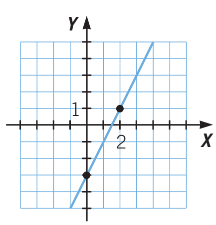
a)



b)



c)



3 **Dos rectas, ¿se pueden cortar en dos puntos? ¿Y en tres?**

Dos rectas solo se pueden cortar en un punto (rectas secantes) o en infinitos puntos (rectas coincidentes).

EJERCICIOS

001 **Expresa las siguientes ecuaciones de la forma $ax + by = c$, e indica el valor de sus coeficientes.**

a) $y = 2x - 3$ b) $y = x + 3$ c) $-3x = 1 - y$ d) $x = 2 - y$

Construye una tabla con sus soluciones.

a) $y = 2x - 3 \rightarrow -2x + y = -3 \rightarrow a = -2;\ b = 1;\ c = -3$

$y = 2x - 3$

x	−2	−1	0	1	2
y	−7	−5	−3	−1	1

b) $y = x + 3 \rightarrow -x + y = 3 \rightarrow a = -1;\ b = 1;\ c = 3$

$y = x + 3$

x	−1	0	1	2	−3
y	2	3	4	5	0

c) $-3x = 1 - y \rightarrow -3x + y = 1 \rightarrow a = -3;\ b = 1;\ c = 1$

$y = 3x + 1$

x	−2	−1	0	1	2
y	−5	−2	1	4	7

d) $x = 2 - y \rightarrow x + y = 2 \rightarrow a = 1;\ b = 1;\ c = 2$

$x = 2 - y \rightarrow y = 2 - x$

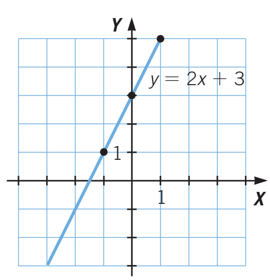
x	−1	0	1	2	−3
y	3	2	1	0	5

002 **Representa gráficamente las ecuaciones.**

a) $2x + 3 = y$ b) $y + 1 = x$

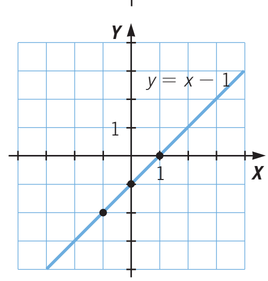
a) $2x + 3 = y$

x	**y**
−1	1
0	3
1	5



b) $y + 1 = x \rightarrow y = x - 1$

x	**y**
−1	−2
0	−1
1	0



003 **Escribe dos ecuaciones lineales que tengan como solución $x = 3$, $y = -2$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $3x + y = 7$; $y = 1 - x$.

004 **Halla la solución de cada sistema a partir de las tablas de valores de las ecuaciones que lo forman.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 13 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

a) Soluciones de $x + y = 5$:

x	0	1	2	3	**4**
y	5	4	3	2	**1**

Soluciones de $x - y = 3$:

x	0	1	2	3	**4**
y	−3	−2	−1	0	**1**

El punto (4, 1) es la solución del sistema a).

b) Soluciones de $2x + y = 13$:

x	0	1	2	3	4	**5**
y	13	11	9	7	5	**3**

Soluciones de $x - y = 2$:

x	0	1	2	3	4	**5**
y	−2	−1	0	1	2	**3**

El punto (5, 3) es la solución del sistema b).

005 **Representa gráficamente estos sistemas, y determina su solución.**

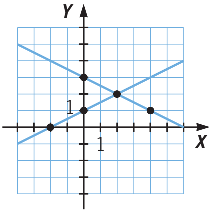
a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = -2 \end{array}\right\}$

a) $x + 2y = 6 \rightarrow y = \dfrac{6 - x}{2}$

x	0	**2**	4	6
y	3	**2**	1	0

$x - 2y = -2 \rightarrow y = \dfrac{x + 2}{2}$

x	−2	0	**2**	4
y	0	1	**2**	3



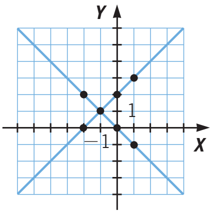
Solución: (2, 2)

b) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$

x	−2	**−1**	0	1
y	2	**1**	0	−1

$x - y = -2 \rightarrow y = 2 + x$

x	−2	**−1**	0	1
y	0	**1**	2	3



Solución: (−1, 1)

006 **¿De cuál de los siguientes sistemas es solución (8, 4)? ¿Y (10, 2)? ¿Y (3, 1)?**

a) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=12} \\ \boldsymbol{x-y=4} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{2x+4y=10} \\ \boldsymbol{3x-\ \ y=8} \end{array}\right\}$

- Veamos si el punto (8, 4) es solución de a) o b):

  a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 8+4=12 \\ 8-4=4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí lo es.

  b) $\left.\begin{array}{l} 2x+4y=10 \\ 3x-\ \ y=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot 8+4\cdot 4=16+16=32\neq 10 \\ 3\cdot 8-4=24-4=20\neq 8 \end{array}\right\} \rightarrow$ No lo es.

- Veamos si (10, 2) es solución de a) o b):

  a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 10+2=12 \\ 10-2=8\neq 4 \end{array}\right\} \rightarrow$ No lo es.

  b) $\left.\begin{array}{l} 2x+4y=10 \\ 3x-\ \ y=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot 10+4\cdot 2=20+8=28\neq 10 \\ 3\cdot 10-2=30-2=28\neq 8 \end{array}\right\} \rightarrow$ No lo es.

- Veamos si (3, 1) es solución de a) o b):

  a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3+1=4\neq 12 \\ 3-1=2\neq 4 \end{array}\right\} \rightarrow$ No lo es.

  b) $\left.\begin{array}{l} 2x+4y=10 \\ 3x-\ \ y=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot 3+4\cdot 1=6+4=10 \\ 3\cdot 3-1=9-1=8 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí lo es.

007 **Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas de forma que una de sus soluciones sea $x = 2$, $y = 3$. Obtén un sistema con esa solución.**

$$3x-2y=0 \xrightarrow{x=2,\ y=3} 3\cdot 2-2\cdot 3=6-6=0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2,\ y=3} \left.\begin{array}{r} 3\cdot 2-2\cdot 3=0 \\ 2-3=-1 \end{array}\right\}$$

008 **Resuelve gráficamente y clasifica según su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{x-y=3} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=7} \\ \boldsymbol{x-y=5} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+2y=3} \\ \boldsymbol{2x+4y=6} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x+y=13} \\ \boldsymbol{x-y=2} \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+\ \ y=6} \\ \boldsymbol{2x-2y=12} \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x-3y=2} \\ \boldsymbol{3x-2y=6} \end{array}\right\}$

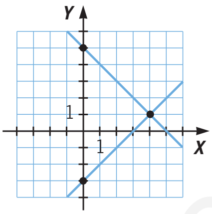
a) $x + y = 5$

x	0	1	2	3	**4**
y	5	4	3	2	**1**

$x - y = 3$

x	0	1	2	3	**4**
y	−3	−2	−1	0	**1**

La solución es (4, 1): sistema compatible determinado.



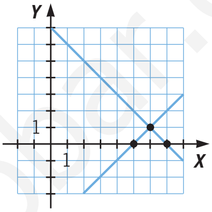
b) $x + y = 7$

x	0	1	2	3	4	5	**6**
y	7	6	5	4	3	2	**1**

$x - y = 5$

x	0	1	2	3	4	5	**6**
y	−5	−4	−3	−2	−1	0	**1**

La solución es (6, 1): sistema compatible determinado.



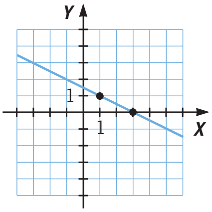
c) $x + 2y = 3$

x	1	3
y	1	0

$2x + 4y = 6$

x	1	3
y	1	0

Las dos ecuaciones son la misma recta: sistema compatible indeterminado.



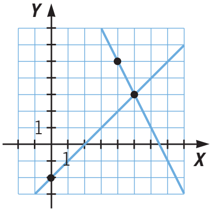
d) $2x + y = 13$

x	0	1	2	3	4	**5**
y	13	11	9	7	5	**3**

$x - y = 2$

x	0	1	2	3	4	**5**
y	−2	−1	0	1	2	**3**

La solución es (5, 3): sistema compatible determinado.



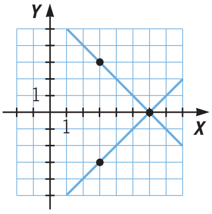
e) $x + y = 6$

x	0	1	2	3	4	5	**6**
y	6	5	4	3	2	1	**0**

$2x - 2y = 12$

x	0	1	2	3	4	5	**6**
y	−6	−5	−4	−3	−2	−1	**0**

La solución es (6, 0): sistema compatible determinado.



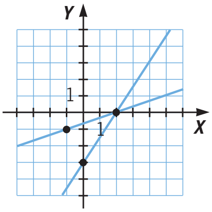
f) $x - 3y = 2$

x	**2**	−1
y	**0**	−1

$3x - 2y = 6$

x	0	**2**
y	−3	**0**

Las dos rectas se cortan en el punto (2, 0): sistema compatible determinado.



009 **Resuelve gráficamente los sistemas y clasifícalos.**

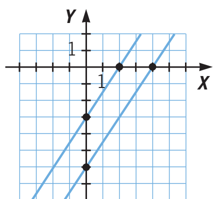
a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2\\ 3x-2y=6\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}x-\ \ y=1\\ 2x-2y=1\end{array}\right\}$

a) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2$

x	0	2	4	6
y	-6	-3	0	3

$3x-2y=6$

x	0	2	4	6
y	-3	0	3	6



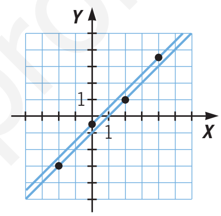
Incompatible

b) $x-y=1$

x	-2	0	2	4
y	-3	-1	1	3

$2x-2y=1$

x	-2	0	2	4
y	$-\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{7}{2}$



Incompatible

010 **Pon un ejemplo de sistema de ecuaciones compatible determinado, indeterminado e incompatible.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Compatible determinado: $\left.\begin{array}{r}x+2y=5\\ -x+3y=5\end{array}\right\}$ Incompatible: $\left.\begin{array}{r}x+2y=5\\ -x-2y=10\end{array}\right\}$

Compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{r}x+2y=5\\ -x-2y=-5\end{array}\right\}$

011 **Resuelve por el método de sustitución.**

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x+y=5}\\ \boldsymbol{x-y=3}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}x+y=5\\ x-y=3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to y=5-x\\ \to x-(5-x)=3\to x-5+x=3\to 2x=3+5\to x=\dfrac{8}{2}=4\end{array}$$

$$y=5-x=5-4=1$$

La solución del sistema es $x=4$, $y=1$.

012 **Resuelve por sustitución, y señala si es compatible o incompatible.**

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x+y=8}\\ \boldsymbol{x-y=8}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}x+y=8\\ x-y=8\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to y=8-x\\ \to x-(8-x)=8\to x-8+x=8\to 2x=16\to x=8\end{array}$$

$$y=8-x=8-8=0$$

La solución del sistema es $x=8$, $y=0$. Es compatible.

013 **Corrige los errores cometidos.**

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{5x - y = 1}\\ \mathbf{2x - 4y = 22}\end{aligned}\right\} \rightarrow \mathbf{y = 1 - 5x}$$

$$\mathbf{2x - 4y = 22 \xrightarrow{y = 1 - 5x} 2x - 4(1 - 5x) = 22 \rightarrow 2x - 4 - 20x = 22}$$

$$\mathbf{\rightarrow -18x = 18 \rightarrow x = \frac{18}{8} = 1}$$

$$\mathbf{5x - y = 1 \xrightarrow{x = 1} 5 \cdot 1 - y = 1 \rightarrow y = -4}$$

$$\left.\begin{aligned}5x - y = 1\\ 2x - 4y = 22\end{aligned}\right\} \rightarrow y = 1 - 5x$$

Se ha eliminado el signo de la y; debería poner: $y = 5x - 1$

$$2x - 4y = 22 \xrightarrow{y = 1 - 5x} 2x - 4(1 - 5x) = 22 \rightarrow 2x - 4 - 20x = 22$$

Se ha puesto mal el signo; debería poner $+20x$.

$$-18x = 18$$

Se pasa el 4 restando y debería ser sumando; sería: $-18x = 26$

$$x = \frac{18}{18} = 1$$

Se ha dividido entre 18 y debería ser entre -18; sería: $x = -\frac{18}{18} = -1$

$$5x - y = 1 \xrightarrow{x = 1} 5 \cdot 1 - y = 1 \rightarrow y = -4$$

Se ha eliminado el signo de la y; debería poner $y = -1$.

La solución correcta es:

$$\left.\begin{aligned}5x - y = 1\\ 2x - 4y = 22\end{aligned}\right\} \rightarrow y = 5x - 1$$

$$2x - 4y = 22 \xrightarrow{y = 5x - 1} 2x - 4(5x - 1) = 22 \rightarrow 2x - 20x + 4 = 22$$

$$\rightarrow -18x = 18 \rightarrow x = -\frac{18}{18} = -1$$

$$y = 5x - 1 \xrightarrow{x = -1} y = -6$$

014 **Resuelve por el método de igualación estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{aligned}\mathbf{x + y = 5}\\ \mathbf{x - y = 3}\end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned}\mathbf{2x + y = 13}\\ \mathbf{x - y = 2}\end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned}x + y = 5\\ x - y = 3\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\rightarrow x = 5 - y\\ \rightarrow x = 3 + y\end{aligned}\Bigg\} \rightarrow 5 - y = 3 + y \rightarrow 5 - 3 = 2y \rightarrow y = 1$

$x = 5 - y = 5 - 1 = 4$

b) $\left.\begin{aligned}2x + y = 13\\ x - y = 2\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\rightarrow y = 13 - 2x\\ \rightarrow y = x - 2\end{aligned}\Bigg\} \begin{aligned}\rightarrow 13 - 2x = x - 2\\ \rightarrow 15 = 3x \rightarrow x = 5\end{aligned}$

$y = 13 - 2x = 13 - 2 \cdot 5 = 3$

015 **Resuelve por el método de igualación, y señala si son compatibles o incompatibles. ¿Cuántas soluciones tienen?**

a) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x + 5y = 10}\\ \mathbf{4x + 10y = 20}\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x + y = 8}\\ \mathbf{2x + y = 12}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l}2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20\end{array}\right\} \begin{array}{l}\to x = 5 - \dfrac{5}{2}y \\ \to x = 5 - \dfrac{5}{2}y\end{array}\Bigg\} \to 5 - \dfrac{5}{2}y = 5 - \dfrac{5}{2}y \to 5 = 5$

Se obtiene una igualdad. El sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{l}2x + y = 8 \\ 2x + y = 12\end{array}\right\}$ Despejamos y de la 1.ª ecuación: $y = 8 - 2x$ y en la 2.ª: $y = 12 - 2x$, e igualamos.

$8 - 2x = 12 - 2x \to 8 \neq 12$. Es un sistema incompatible: no tiene solución.

016 **Corrige los errores cometidos en la resolución del sistema por el método de igualación.**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{x - y = 7}\\ \mathbf{3x - y = 1}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\to \mathbf{x = y - 7}\\ \to \mathbf{x = 1 + \dfrac{y}{3}}\end{array}\Bigg\}$$

$$\mathbf{y - 7 = 1 + \frac{y}{3} \to 3(y - 7) = 1 + y \to 3y - 21 = 1 + y}$$

$$\mathbf{\to 3y - y = 1 + 21 \to 2y = 22 \to y = \frac{22}{-2} = -11}$$

$$\mathbf{x - y = 7 \xrightarrow{y = -11} x - 11 = 7 \to x = 7 + 11 = 18}$$

$$\left.\begin{array}{r}x - y = 7\\ 3x - y = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\to x = y - 7\\ \to x = 1 + \dfrac{y}{3}\end{array}\Bigg\} \begin{array}{l}\to \text{Mal despejado: } x = y + 7\\ \to \text{Mal despejado: } x = \dfrac{y+1}{3}\end{array}\Bigg\}$$

$y - 7 = 1 + \dfrac{y}{3} \to 3(y - 7) = 1 + y \to$ Mal eliminado el denominador:

$3(y - 7) = 3 - y \to 3y - 21 = 1 + y$

$\to 3y - y = 1 + 21 \to 2y = 22$

$\to y = \dfrac{22}{-2} \to$ Mal despejado: $y = \dfrac{22}{2} = 11$

$x - y = 7 \xrightarrow{y = -11} x - 11 = 7 \to$ Mal sustituido: $x + 11 = 7$

$x = 7 + 11 = 18$

La solución correcta sería:

$$\left.\begin{array}{r}x - y = 7\\ 3x - y = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\to x = y + 7\\ \to x = \dfrac{y+1}{3}\end{array}\Bigg\} \to y + 7 = \frac{y+1}{3} \to 3(y + 7) = 1 + y$$

$$\to 3y + 21 = 1 + y \to 3y - y = 1 - 21 \to 2y = -20$$

$$\to y = \frac{-20}{2} = -10$$

$$x = y + 7 \xrightarrow{y = -10} x = -10 + 7 \to x = -3$$

017 **Resuelve por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 5y = 6 \\ 4x - 3y = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$ Sumamos las dos ecuaciones:

$2x \quad = 8 \rightarrow x = 4$

Y sustituyendo en una de ellas:

$$x + y = 5 \xrightarrow{x = 4} 4 + y = 5 \rightarrow y = 5 - 4 = 1$$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 5y = 6 \\ 4x - 3y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 4} \\ \xrightarrow{\cdot (-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 4x - 20y = 24 \\ -4x + 3y = -1 \end{array}\right\}$

Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 4x - 20y = 24 \\ -4x + 3y = -1 \\ \hline -17y = 23 \end{array} \rightarrow y = -\frac{23}{17}$$

Y sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$$x - 5y = 6 \xrightarrow{y = -\frac{23}{17}} x - 5\left(-\frac{23}{17}\right) = 6$$

$$\rightarrow x = 6 - \frac{115}{17} = \frac{102 - 115}{17} = -\frac{13}{17}$$

018 **Resuelve por el método de reducción estos sistemas de ecuaciones, y señala si son compatibles o incompatibles.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{restamos}]{\text{1.ª ecuación} \cdot 2} \left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 6 \\ \hline 0 \neq 6 \end{array}\right.$

Sistema incompatible: no tiene solución.

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{restamos}]{\text{1.ª ecuación} \cdot 2} \left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 10 \\ 2x - 2y = 10 \\ \hline 0 = 0 \end{array}\right.$

Sistema compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.

019 **Corrige los errores cometidos en la resolución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x + y = 0}\\ \mathbf{3x - 2y = -4}\end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r}\mathbf{4x + 2y = 2}\\ \mathbf{3x - 2y = -4}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}\mathbf{4x + \cancel{2y} = 2}\\ \mathbf{-\ 3x - \cancel{2y} = -4}\\ \hline \mathbf{x = -2}\end{array}$$

$$\mathbf{2x + y = 0 \xrightarrow{x=-2} 2 \cdot (-2) + y = 0 \rightarrow -4 + y = 0 \rightarrow y = -4}$$

$\left.\begin{array}{r}2x + y = 0\\ 3x - 2y = -4\end{array}\right\} \begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 2} 4x + 2y = 2\\ \longrightarrow 3x - 2y = -4\end{array}\Big\}$ El producto del término independiente: $0 \cdot 2$ es 0.

$\begin{array}{r}4x + 2y = 2\\ -\ 3x - 2y = -4\\ \hline x = -2\end{array}$ No hay que restar, sino sumar; además, está mal restado.

$2x + y = 0 \xrightarrow{x=-2} 2(-2) + y = 0 \rightarrow -4 + y = 0 \rightarrow y = -4$

Mal despejado; debería ser $y = 4$. La solución correcta sería:

$$\left.\begin{array}{r}2x + y = 0\\ 3x - 2y = -4\end{array}\right\} \begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 2} 4x + 2y = 0\\ \longrightarrow 3x - 2y = -4\end{array}\Big\} \quad \begin{array}{r}4x + 2y = 0\\ +\ 3x - 2y = -4\\ \hline 7x = -4\end{array} \rightarrow x = \frac{-4}{7}$$

$$2x + y = 0 \xrightarrow{x=\frac{-4}{7}} 2\left(\frac{-4}{7}\right) + y = 0 \rightarrow \frac{-8}{7} + y = 0 \rightarrow y = \frac{8}{7}$$

020 **Resuelve por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x + 3y = 5 + x + 2y}\\ \mathbf{x - 2y - 3 = 3 - 42y}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{3y + 3 = x - 2(x + y)}\\ \mathbf{\dfrac{2x + 3y}{2} = 18}\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x + y = 2}\\ \mathbf{(x + 4) + 2(y - 2) = 18 - x - y}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x + 3y = 5 + x + 2y\\ x - 2y - 3 = 3 - 42y\end{array}\right\} \begin{array}{r}\rightarrow x + y = 5\\ \rightarrow x + 40y = 6\\ \hline -39y = -1\end{array} \rightarrow y = \frac{1}{39}$ Restamos las ecuaciones:

Sustituimos en la 1.ª ecuación: $x + \frac{1}{39} = 5 \rightarrow x = \frac{194}{39}$

b) $\left.\begin{array}{r}3y + 3 = x - 2(x + y)\\ 2x + 3y = 36\end{array}\right\} \rightarrow x + 5y = -3 \rightarrow x = -3 - 5y$

$2x + 3y = 36 \xrightarrow{x=-3-5y} 2(-3 - 5y) + 3y = 36 \rightarrow y = -6$

$x = -3 - 5 \cdot (-6) \xrightarrow{y=-6} x = 27$

c) $\left.\begin{array}{r}x + y = 2\\ x + 4 + 2y - 4 = 18 - x - y\end{array}\right\} \begin{array}{r}\rightarrow x + y = 2\\ \rightarrow 2x + 3y = 18\end{array}\Big\}$

$\xrightarrow[\text{restamos}]{1.^{a} \cdot 3} \begin{array}{r}3x + 3y = 6\\ 2x + 3y = 18\\ \hline x = -12\end{array}\Big\}$ Sustituimos en la 1.ª ecuación: $-12 + y = 2 \rightarrow y = 14$

021 **Resuelve por el método más adecuado.**

$$\left.\begin{aligned}\frac{2x-y}{3}+2x-y&=4\\ 2x-y&=4\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2x-y}{3}+2x-y&=4\\ 2x-y&=4\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{4(2x-y)}{3}=4\rightarrow\left.\begin{aligned}2x-y&=3\\ 2x-y&=4\end{aligned}\right\}$$

Y restando las ecuaciones: $0 \neq -1$. No tiene solución, es incompatible.

022 **Escribe un sistema de ecuaciones que sea apropiado para resolverlo mediante sustitución, y otro, mediante reducción.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Mediante sustitución:

$$\left.\begin{aligned}3x-\ \ y&=8\\ 2x+3y&=31\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\rightarrow y=3x-8\\ &\rightarrow 2x+3(3x-8)=31\rightarrow 11x=55\rightarrow x=5\end{aligned}$$

Y sustituyendo: $y = 3 \cdot 5 - 8 = 7$

Mediante reducción:

$$\left.\begin{aligned}2x-3y&=-4\\ 3x+3y&=\ \ 9\end{aligned}\right\}\text{ Sumamos las ecuaciones:}$$

$$5x \quad = \quad 5 \rightarrow x = 1$$

Y sustituyendo: $2 - 1 - 3y = -4 \rightarrow -3y = -6 \rightarrow y = 2$

023 **La suma de las edades de Fernando y su padre es 40 años. La edad del padre es 7 veces la edad del hijo. ¿Qué edades tienen ambos?**

Fernando: x. Padre: y. $\left.\begin{aligned}x+y&=40\\ y&=7x\end{aligned}\right\}$ Despejando y en la 2.ª ecuación y sustituyendo en la 1.ª:

$x + 7x = 40 \rightarrow x = 5$. Y sustituyendo: $y = 35$. Fernando: 5 años. Padre: 35 años.

024 **He comprado manzanas y peras. Las manzanas me han costado 2,20 €/kg, y las peras, 2,35 €/kg. En total he comprado 6 kg y me han costado 13,50 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada fruta llevo?**

Manzanas: x. Peras: y. $\left.\begin{aligned}2{,}20x+2{,}35y&=13{,}50\\ x+y&=6\end{aligned}\right\}$

Despejando x en la 2.ª ecuación: $x = 6 - y$

y sustituyendo en la 1.ª: $2{,}20\,(6 - y) + 2{,}35y = 13{,}50 \rightarrow 0{,}15y = 0{,}30$

$\rightarrow y = 2 \rightarrow x + 2 = 6 \rightarrow x = 4$. Llevo 4 kg de manzanas y 2 kg de peras.

025 **Un hotel tiene, entre habitaciones dobles e individuales, 120 habitaciones. Si el número de camas es 195, ¿cuántas habitaciones dobles tiene? ¿Y habitaciones individuales?**

Dobles: x. Individuales: y. $\left.\begin{aligned}x+y&=120\\ 2x+y&=195\end{aligned}\right\}$ Despejando x de la 1.ª: $x = 120 - y$

y sustituyendo en la 2.ª: $240 - 2y + y = 195 \rightarrow y = 45$

Y sustituyendo: $x = 75$. Dobles: 75. Individuales: 45.

026 **En una reunión, si cada persona come 5 pasteles, sobran 3; pero si comen 6, falta 1. ¿Cuántas personas y pasteles hay?**

Llamamos x = n.º de personas e y = n.º de pasteles.

$$\left.\begin{array}{l} 5x = y - 3 \\ 6x = y + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} 5x + 3 = y \\ 6x - 1 = y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 5x + 3 = 6x - 1 \\ \rightarrow -x = -4 \rightarrow x = 4 \end{array}$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $y = 6 \cdot 4 - 1 = 23$

Hay 4 personas y 23 pasteles.

ACTIVIDADES

027 **¿Es $x = 1$ e $y = 2$ solución de estas ecuaciones?**

a) $3x + 2y = 7$ **b) $x + 3 = y$** **c) $2x - y = 0$** **d) $x + 1 = 7$**

a) $3 + 4 = 7$. Sí lo es.
c) $2 - 2 = 0$. Sí lo es.
b) $1 + 3 \neq 2$. No lo es.
d) $1 + 1 \neq 7$. No lo es.

028 **Esta es la tabla de valores de la ecuación $2x + 3y = 15$.**

x	6	3	0	−3	−6
y	1	3	5	7	9

Da varias soluciones de la ecuación, e indica un procedimiento para encontrar alguna solución más.

Cada pareja de valores relacionados es solución:
$x = 6, y = 1; x = 3, y = 3; x = 0, y = 5...$

Para encontrar más soluciones basta con despejar una de las incógnitas y darle valores a la otra:

$$y = \frac{15 - 2x}{3}: x = 9 \rightarrow y = \frac{15 - 18}{3} = -1$$

029 **Construye una tabla de soluciones para estas ecuaciones. Toma como valores de la variable x: $-2, -1, 0, 1$ y 2.**

a) $y = x + 5$ **b) $x + y = 4$** **c) $y = 3 - x$** **d) $x = 5 + y$**

a) $y = x + 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	3	4	5	6	7

b) $x + y = 4 \rightarrow y = 4 - x$

x	−2	−1	0	1	2
y	6	5	4	3	2

c) $y = 3 - x$

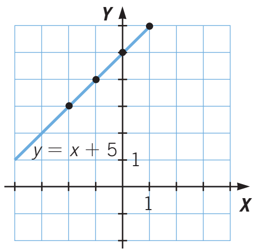
x	−2	−1	0	1	2
y	5	4	3	2	1

d) $x = 5 + y \rightarrow y = x - 5$

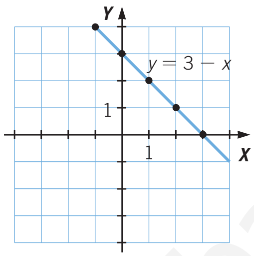
x	−2	−1	0	1	2
y	−7	−6	−5	−4	−3

030 **Representa en el plano, para cada ecuación de la actividad anterior, los pares de números que hayas obtenido y comprueba que su representación es una recta.**

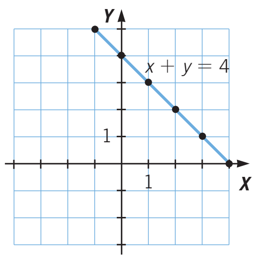
a)



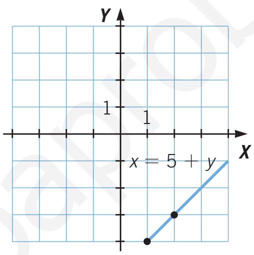
c)



b)



d)



031 **Forma una tabla de valores para cada ecuación, e indica algunas soluciones.**

a) $3x + 2y = 18$
b) $x - 3y = 20$
c) $x - 7 = y$
d) $2x - 5y = 12$
e) $3x + y = 24$
f) $y = 2x - 1$

a)

x	0	2	4	6
y	9	6	3	0

Soluciones: (0, 9), (2, 6)…

b)

x	−1	2	5	8
y	−7	−6	−5	−4

Soluciones: (−1, −7), (2, −6)...

c)

x	0	2	4	6
y	−7	−5	−3	−1

Soluciones: (0, −7), (2, −5)...

d)

x	−4	1	6	11
y	−4	−2	0	2

Soluciones: (−4, −4), (1, −2)...

e)

x	0	2	4	6
y	24	18	12	6

Soluciones: (0, 24), (2, 18)...

f)

x	0	2	4	6
y	−1	3	7	11

Soluciones: (0, −1), (2, 3)...

032 **Forma una tabla de valores para cada ecuación del sistema.**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

¿Crees que hay algún par de valores de *x* e *y* que aparezca en las dos tablas?

$x + y = 5$

x	0	2	**4**	6
y	5	3	**1**	-1

$x - 2y = 2$

x	0	2	**4**	6
y	-1	0	**1**	2

El par (4, 1) aparece en las dos tablas.

033 **Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas, de forma que una de sus soluciones sea el par de valores:**

a) $x = 3, y = 0$
b) $x = 0, y = -1$
c) $x = 2, y = 3$
d) $x = -1, y = -5$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x - y = 3$
b) $5x + y = -1$
c) $2x - y = 1$
d) $5x - y = 0$

034 **Escribe dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución sea $x = 3$, $y = 2$. Después, representa ambas ecuaciones. ¿Qué observas?**

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \\ &\rightarrow \end{aligned} \left.\begin{aligned} x - 1 &= y \\ 2x - 4 &= y \end{aligned}\right\} \rightarrow x - 1 = 2x - 4 \rightarrow x = 3$$

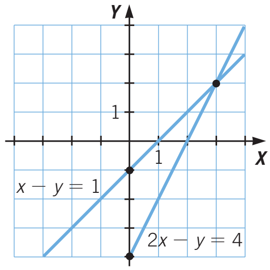
Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $3 - y = 1 \rightarrow 3 - 1 = y \rightarrow y = 2$

$x - y = 1$

x	**y**
0	-1
1	0

$2x - y = 4$

x	**y**
2	0
0	-4



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), que es la solución del sistema.

035 **Indica los coeficientes y términos independientes de los sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x + 2y = 6} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 3y = 5} \\ \boldsymbol{x - y = 1} \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y = 1} \\ \boldsymbol{2x + y = 7} \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{5x - 3y = 1} \\ \boldsymbol{4x + y = 11} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{lll} a = 1 & b = 1 & c = 5 \\ a' = 1 & b' = 2 & c' = 6 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{lll} a = 1 & b = 3 & c = 5 \\ a' = 1 & b' = -1 & c' = 1 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{lll} a = 1 & b = -2 & c = 1 \\ a' = 2 & b' = 1 & c' = 7 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{lll} a = 5 & b = -3 & c = 1 \\ a' = 4 & b' = 1 & c' = 11 \end{array}$

036 **¿Cuál de los siguientes pares de valores es solución del sistema?**

$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x + 3y = 13} \\ \boldsymbol{3x - 4y = 11} \end{array}\right\}$

a) (1, 5) **c) (2, 3)**
b) (5, 1) **d) (0, 0)**

La solución es la opción b): (5, 1).

037 **Dado el sistema:**

$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{3x - y = 2} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 5} \end{array}\right\}$ **averigua si alguno de estos pares de valores es solución.**

a) $\boldsymbol{x = 2,\ y = 4}$ **c)** $\boldsymbol{x = 1,\ y = 1}$

b) $\boldsymbol{x = 4,\ y = -1}$ **d)** $\boldsymbol{x = 0,\ y = -\frac{1}{2}}$

a) $6 - 4 = 2$ y $4 + 12 \neq 5$ No es solución de la 2.ª ecuación.
b) $12 + 1 \neq 2$ y $8 - 3 = 5$ No es solución de la 1.ª ecuación.
c) $3 - 1 = 2$ y $2 + 3 = 5$ Sí es solución del sistema.
d) $0{,}5 \neq 2$ y $-1{,}5 \neq 5$ No es solución del sistema.

038 **Un sistema tiene por solución** $\boldsymbol{x = 2,\ y = -1}$ **y una de sus ecuaciones es** $\boldsymbol{2x - y = 5}$**. ¿Cuál es la otra?**

a) $\boldsymbol{4x - 2y = 6}$ **b)** $\boldsymbol{4x - 2y = 5}$ **c)** $\boldsymbol{-x + 2y = 5}$ **d)** $\boldsymbol{-x + 2y = -4}$

La otra ecuación es la de la opción d): $-x + 2y = -4$.

039 **Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas, de forma que una de sus soluciones sea** $\boldsymbol{x = 1,\ y = -2}$**. Utiliza la ecuación para determinar un sistema de ecuaciones con esa solución.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$ Sumamos las ecuaciones:

$4x = 4 \rightarrow x = 1$ $1 - y = 3 \rightarrow y = -2$

040 ●●

Halla la solución de cada sistema mediante las tablas de valores de las ecuaciones que lo forman.

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 13 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 2 \\ 3x - 4y = -2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

a) Soluciones de $x - y = 1$:

x	0	1	2	**3**
y	−1	0	1	**2**

Soluciones de $2x - y = 4$:

x	0	1	2	**3**
y	−4	−2	0	**2**

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 2$.

b) Soluciones de $x + y = 2$:

x	0	1	2	**3**
y	2	1	0	**−1**

Soluciones de $2x - 3y = 9$:

x	0	1	2	**3**
y	−3	−7/3	−5/3	**−1**

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -1$.

c) Soluciones de $x - 2y = 1$:

x	0	1	2	**3**
y	−1/2	0	1/2	**1**

Soluciones de $2x + y = 7$:

x	0	1	2	**3**
y	7	5	3	**1**

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.

d) Soluciones de $2x + y = 7$:

x	0	1	2	**3**
y	7	5	3	**1**

Soluciones de $x - 3y = 0$:

x	0	1	2	**3**
y	0	1/3	2/3	**1**

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.

e) Soluciones de $2x + y = 13$:

x	0	1	2	3	4	**5**
y	13	11	9	7	5	**3**

Soluciones de $x - y = 2$:

x	0	1	2	3	4	**5**
y	−2	−1	0	1	2	**3**

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

f) Soluciones de $-x + 2y = 2$:

x	0	1	**2**
y	1	3/2	**2**

Soluciones de $3x - 4y = -2$:

x	0	1	**2**
y	1/2	5/4	**2**

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 2$.

g) Soluciones de $5x - 3y = 1$:

x	0	1	**2**
y	−1/3	4/3	**3**

Soluciones de $4x + y = 11$:

x	0	1	**2**
y	11	7	**3**

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 3$.

h) Soluciones de $5x + 3y = 16$:

x	0	1	**2**
y	16/3	11/3	**2**

Soluciones de $3x - 3y = 0$:

x	0	1	**2**
y	0	1	**2**

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 2$.

041 **Resuelve gráficamente los sistemas de ecuaciones, e indica de qué tipo son.**

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ 6x + 3y &= 6 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 3x - 4y &= 2 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 5 \end{aligned}\right\}$

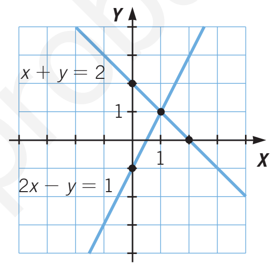
a) $x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

$2x - y = 1$

x	y
0	-1
1	1

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 1$.
El sistema es compatible determinado.



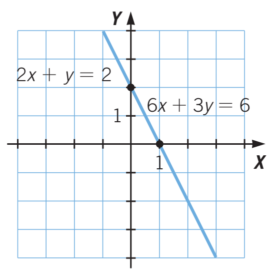
b) $2x + y = 2$

x	y
0	2
1	0

$6x + 3y = 6$

x	y
0	2
1	0

Las dos rectas coinciden.
El sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.



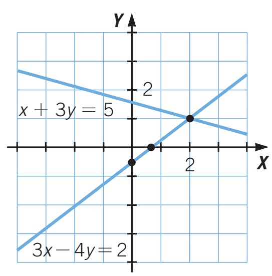
c) $x + 3y = 5$

x	y
2	1
5	0

$3x - 4y = 2$

x	y
0	$-1/2$
2/3	0

Las dos rectas se cortan en el punto (2, 1).
El sistema es compatible determinado.



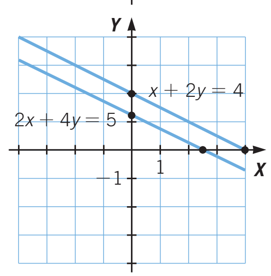
d) $x + 2y = 4$

x	y
0	2
4	0

$2x + 4y = 5$

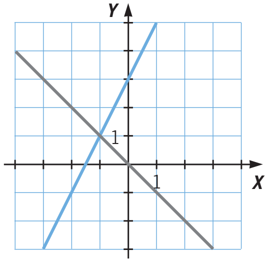
x	y
0	5/4
5/2	0

Las dos rectas son paralelas, no se cortan.
El sistema es incompatible.

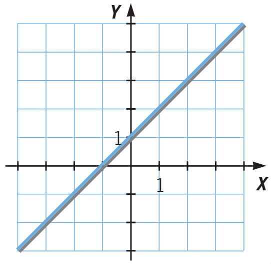


042 **Indica qué tipo de sistema de ecuaciones se ha representado.**

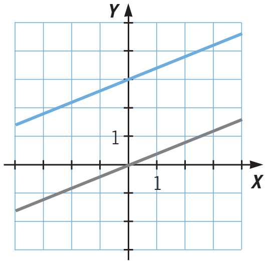
a)



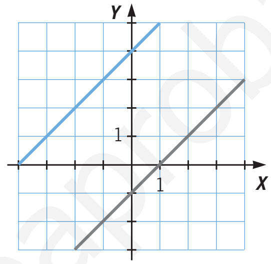
c)



b)



d)



a) Sistema compatible determinado: una solución.
b) Sistema incompatible: sin solución.
c) Sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
d) Sistema incompatible: sin solución.

043 **Resuelve gráficamente estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$

¿Qué puedes afirmar?

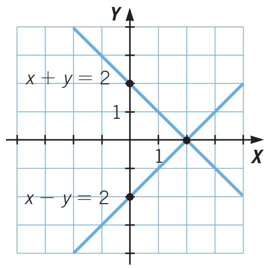
a) $x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

$x - y = 2$

x	y
0	-2
2	0

Solución: (2, 0)



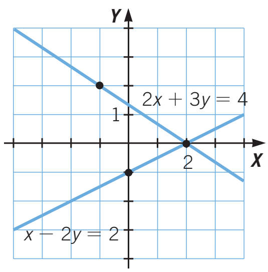
b) $2x + 3y = 4$

x	y
-1	2
2	0

$x - 2y = 2$

x	y
0	-1
2	0

Solución: (2, 0)



Se podría afirmar que tienen la misma solución: $x = 2$, $y = 0$
Son sistemas equivalentes.

044 Resuelve gráficamente estos sistemas, y clasifícalos por su número de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -4 \\ -x + 3y = -3 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 8 \\ 4x - 2y = 10 \end{array}\right\}$

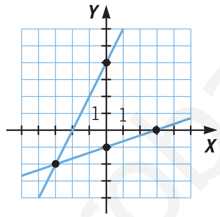
b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 6 \\ 2x + 6y = 12 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\}$

a) $2x - y = -4$

x	−6	**−3**	0	3
y	−8	**−2**	4	10

$-x + 3y = -3$

x	−6	**−3**	0	3
y	−3	**−2**	−1	0



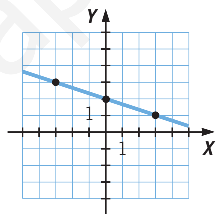
La solución es (−3, −2): sistema compatible determinado.

b) $x + 3y = 6$

x	−3	0	3	6
y	3	2	1	0

$2x + 6y = 12$

x	−3	0	3	6
y	3	2	1	0



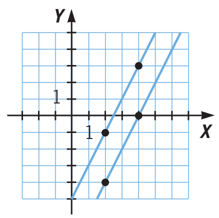
La solución es toda la recta, tiene infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.

c) $2x - y = 8$

x	−2	0	2	4
y	−12	−8	−4	0

$4x - 2y = 10$

x	−2	0	2	4
y	−9	−5	−1	3



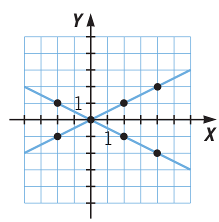
No tiene solución: sistema incompatible.

d) $x - 2y = 0$

x	−2	**0**	2	4
y	−1	**0**	1	2

$x + 2y = 0$

x	−2	**0**	2	4
y	1	**0**	−1	−2



La solución es (0, 0): sistema compatible determinado.

045 ¿Cuántas soluciones tienen estos sistemas?

a) $\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 8x - 6y &= 10 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 2x + 3y &= 35 \end{aligned}\right\}$

a) $4x - 3y = 5$

x	1/2	2	5
y	−1	1	5

$8x - 6y = 10$

x	1/2	2	5
y	−1	1	5

La solución es toda la recta, tiene infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.

b) $2x + 3y = 5$

x	1	4	7
y	1	−1	−3

$2x + 3y = 35$

x	1	4	7
y	11	9	7

No tiene solución: sistema incompatible.

046 Averigua si los sistemas son incompatibles o compatibles, y en su caso, si tienen solución única.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ 6x - 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 10 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}\right\} \rightarrow$ Las dos ecuaciones coinciden y el sistema es compatible indeterminado. Soluciones infinitas.

b) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ 6x - 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{aligned} 6x - 2y &= 10 \\ 6x - 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$

$0 = 2 \rightarrow$ La igualdad es falsa, luego el sistema es incompatible.

047 ¿Tienen las mismas soluciones estos sistemas?

a) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 2x - 3y &= 14 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 6x + 4y &= 16 \\ -6x + 9y &= -42 \end{aligned}\right\}$

Sí tienen las mismas soluciones, porque simplificando las ecuaciones en el segundo sistema obtenemos el primer sistema.

$$\left.\begin{aligned} 6x + 4y &= 16 \\ -6x + 9y &= -42 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{:2} \\ &\xrightarrow{:(-3)} \end{aligned} \left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 2x - 3y &= 14 \end{aligned}\right\}$$

048 ●● **Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas que forme un sistema con la ecuación $3x - 2y = 4$, y tenga:**

a) Única solución. **b) Infinitas soluciones.** **c) Ninguna solución.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 9x - 6y &= 12 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 9x - 6y &= 4 \end{aligned}\right\}$

049 ●● **Escribe un sistema de ecuaciones cuya solución sea:**

a) $x = 2$, $y = 1$ **b) $x = 4$, $y = -3$**

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 10 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

050 ●● **Sin resolver estos sistemas, y a partir de sus ecuaciones, indica su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} 2x + 10y &= 4 \\ x + 5y &= 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 8 \\ 6x + 8y &= 10 \end{aligned}\right\}$ **d)** $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x - 8y &= 5 \end{aligned}\right\}$

a) Compatible determinado c) Incompatible

b) Incompatible d) Compatible determinado

051 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE IGUALAN LOS COEFICIENTES DE UNA INCÓGNITA?

Transforma este sistema para que la incógnita x tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 24x + 13y &= 80 \\ 18x - 7y &= 90 \end{aligned}\right\}$$

PRIMERO. Se halla el m.c.m. de los coeficientes de la incógnita en la que se quieren igualar.

$$\text{m.c.m.}\ (24, 18) = 72$$

SEGUNDO. Se divide el m.c.m. entre cada coeficiente, y se multiplica la ecuación por el resultado.

Primera ecuación:

$$\frac{\text{m.c.m.}}{\text{Coeficiente}} = \frac{72}{24} = 3 \rightarrow 3 \cdot (24x + 13y = 80) \rightarrow 72x + 39y = 240$$

Segunda ecuación:

$$\frac{\text{m.c.m.}}{\text{Coeficiente}} = \frac{72}{18} = 4 \rightarrow 4 \cdot (18x - 7y = 90) \rightarrow 72x - 28y = 360$$

El sistema equivalente es:

$$\left.\begin{aligned} 72x + 39y &= 240 \\ 72x - 28y &= 360 \end{aligned}\right\}$$

052 Dado el sistema: $\left.\begin{array}{r} 7x - 2y = 4 \\ x + 3y = 17 \end{array}\right\}$

escribe sistemas equivalentes a él cuyos:

a) Coeficientes de *x* sean iguales.

b) Coeficientes de *y* sean iguales.

c) Términos independientes sean los mismos.

a) Multiplicando la 2.ª ecuación por 7: $\left.\begin{array}{r} 7x - 2y = 4 \\ 7x + 21y = 119 \end{array}\right\}$

b) Multiplicando la 1.ª ecuación por 3 y la 2.ª por -2: $\left.\begin{array}{r} 21x - 6y = 12 \\ -2x - 6y = -34 \end{array}\right\}$

c) Multiplicando la 1.ª ecuación por 17 y la 2.ª por 4: $\left.\begin{array}{r} 119x - 34y = 68 \\ 4x + 12y = 68 \end{array}\right\}$

053 **Escribe otro sistema equivalente cuyas ecuaciones no tengan denominadores.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 5 \\[2ex] \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{2} = -1 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la 1.ª ecuación por el m.c.m. (2, 5) = 10
y la 2.ª por el m.c.m. (2, 3) = 6:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 50 \\ 4x - 3y = -6 \end{array}\right\}$$

054 **Completa los sistemas para que el primero tenga solución $x = 2$, $y = -3$, y el segundo, $x = -3$, $y = 2$.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = \square \\ \square x + 4y = 2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} -2x + \square y = 8 \\ \square x - 2y = -7 \end{array}\right\}$

Sustituyendo las variables por la solución, se deben verificar las ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 21 \\ 7x + 4y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -2x + y = 8 \\ x - 2y = -7 \end{array}\right\}$

055 **Completa los sistemas para que el primero sea compatible, y el segundo, incompatible.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = \square \\ \square x + 2y = 6 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \square x + 2y = 3 \\ 2x + \square y = \square \end{array}\right\}$

a) Como coeficiente de *x* vale cualquier valor distinto de -3 y como término independiente cualquiera. Si el coeficiente de *x* es -3, el término independiente de la 1.ª ecuación tiene que ser -6. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 8 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = -7 \end{array}\right\}$ o $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{array}\right\}$ El término independiente de la 2.ª ecuación puede ser cualquier número distinto de 6 en el primer sistema y distinto de 3 en el segundo.

056 **Completa estos sistemas para que el primero sea compatible determinado, y el segundo, compatible indeterminado.**

a) $\left.\begin{array}{r}\square x - 5y = \square\\ 2x + \square y = 6\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}2x + \square y = 10\\ \square x - \square y = 12\end{array}\right\}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r}-2x - 5y = 1\\ 2x + 2y = 6\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}2x + 5y = 10\\ 2{,}4x - (-6)y = 12\end{array}\right\}$

057 **Escribe tres sistemas que tengan como solución $x = 1$, $y = 2$, de forma que:**

a) En el primero, los coeficientes sean 1 o -1.

b) En el segundo, los coeficientes de x sean el doble o la mitad que los de y.

c) En el tercero, los coeficientes de x e y sean fracciones.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r}x + y = 3\\ x - y = -1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 1\\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{2y}{5} = 1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x + 2y = 5\\ 2x + y = 4\end{array}\right\}$

058 **Resuelve por el método de sustitución.**

a) $\left.\begin{array}{r}3x + 5y = 1\\ x + y = 1\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r}5x - 3y = 1\\ 4x + y = 11\end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{r}3x + y = 10\\ 2x - y = 10\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}7x + 8y = 23\\ 3x + 2y = 7\end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r}4x - y = -3\\ x + 3y = -4\end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r}3x + 5y = 20\\ 7x + 4y = 39\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2x - 3y = 5\\ 5x + y = 4\end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r}2x + y = 12\\ -x - y = -7\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}3x + 5y = 1\\ x + y = 1\end{array}\right\} \rightarrow y = 1 - x$

Sustituimos en la 1.ª ecuación:

$3x + 5(1 - x) = 1 \rightarrow 3x + 5 - 5x = 1 \rightarrow -2x = -4 \rightarrow x = 2$

Calculamos $y \rightarrow y = 1 - x = 1 - 2 = -1$

b) $\left.\begin{array}{r}7x + 8y = 23\\ 3x + 2y = 7\end{array}\right\} \rightarrow 2y = 7 - 3x \rightarrow y = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}x$

Sustituimos en la 1.ª ecuación:

$7x + 8\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}x\right) = 23 \rightarrow 7x + 28 - 12x = 23 \rightarrow -5x = -5 \rightarrow x = 1$

Calculamos $y \rightarrow y = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}x = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} \cdot 1 = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 5x + \quad y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = 4 - 5x$

Sustituimos en la 1.ª ecuación:

$$2x - 3(4 - 5x) = 5 \rightarrow 2x - 12 + 15x = 5 \rightarrow 17x = 17 \rightarrow x = 1$$

Calculamos y:

$$y = 4 - 5x = 4 - 5 \cdot 1 = -1$$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 4x + \quad y = 11 \end{array}\right\} \rightarrow y = 11 - 4x$

Sustituimos en la 1.ª ecuación:

$$5x - 3(11 - 4x) = 1 \rightarrow 5x - 33 + 12x = 1 \rightarrow 17x = 34 \rightarrow x = 2$$

Calculamos y:

$$y = 11 - 4x = 11 - 4 \cdot 2 = 3$$

e) $\left.\begin{array}{l} 4x - y = -3 \\ x + 3y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow -y = -3 - 4x \rightarrow y = 3 + 4x$

Sustituimos en la 2.ª ecuación:

$$x + 3(3 + 4x) = -4 \rightarrow x + 9 + 12x = -4 \rightarrow 13x = -13 \rightarrow x = -1$$

Calculamos y:

$$y = 3 + 4x = 3 + 4 \cdot (-1) = -1$$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ -x - y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow -y = -7 + x \rightarrow y = 7 - x$

Sustituimos en la 1.ª ecuación:

$$2x + (7 - x) = 12 \rightarrow 2x + 7 - x = 12 \rightarrow 2x - x = 12 - 7 \rightarrow x = 5$$

Calculamos y:

$$y = 7 - x = 7 - 5 = 2$$

g) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow y = 10 - 3x$

Sustituimos en la 2.ª ecuación:

$$2x - (10 - 3x) = 10 \rightarrow 2x - 10 + 3x = 10 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

Calculamos y:

$$y = 10 - 3x = 10 - 3 \cdot 4 = -2$$

h) $\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 20 \\ 7x + 4y = 39 \end{array}\right\} \rightarrow 5y = 20 - 3x \rightarrow y = 4 - \frac{3}{5}x$

Sustituimos en la 2.ª ecuación:

$$7x + 4\left(4 - \frac{3}{5}x\right) = 39 \rightarrow 7x + 16 - \frac{12}{5}x = 39$$

$$\rightarrow \frac{23}{5}x = 39 - 16 \rightarrow x = \frac{5 \cdot 23}{23} = 5$$

Calculamos $y \rightarrow y = 4 - \frac{3}{5} \cdot 5 = 4 - 3 = 1$

059 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

a) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 7x + 8y &= 23 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 5x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 4x - y &= -3 \\ x + 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ 2x - y &= 10 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 5x - 3y &= 1 \\ 4x + y &= 11 \end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 16 \\ 3x - 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 20 \\ 7x + 4y &= 39 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow 5y = 1 - 3x \rightarrow y = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}x \\ &\rightarrow y = 1 - x \end{aligned}$

Igualando: $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}x = 1 - x \rightarrow x - \frac{3}{5}x = 1 - \frac{1}{5} \rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{4}{5} \rightarrow x = 2$

Calculamos $y \rightarrow y = 1 - x = 1 - 2 = -1$

b) $\left.\begin{aligned} 7x + 8y &= 23 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow 7x = 23 - 8y \rightarrow x = \frac{23}{7} - \frac{8}{7}y \\ &\rightarrow 3x = 7 - 2y \rightarrow x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}y \end{aligned}$

Igualando: $\frac{23}{7} - \frac{8}{7}y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}y \rightarrow \frac{23}{7} - \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}y + \frac{8}{7}y$

$\rightarrow 21 \cdot \frac{23}{7} - 21 \cdot \frac{7}{3} = -21 \cdot \frac{2}{3}y + 21 \cdot \frac{8}{7}y$

$\rightarrow 69 - 49 = -14y + 24y \rightarrow 20 = 10y \rightarrow y = 2$

Calculamos $x \rightarrow x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{7-4}{3} = 1$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 5x + y &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow -3y = 5 - 2x \rightarrow y = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x \\ &\rightarrow y = 4 - 5x \end{aligned}$

Igualando: $-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x = 4 - 5x \rightarrow \frac{2}{3}x + 5x = 4 + \frac{5}{3}$

$\rightarrow \frac{17}{3}x = \frac{17}{3} \rightarrow x = 1$

Calculamos $y \rightarrow y = 4 - 5x = 4 - 5 \cdot 1 = -1$

d) $\left.\begin{aligned} 4x - y &= -3 \\ x + 3y &= -4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow 4x + 3 = y \\ &\rightarrow 3y = -x - 4 \rightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{4}{3} \end{aligned}$

Igualando: $4x + 3 = -\frac{x}{3} - \frac{4}{3} \rightarrow 4x + \frac{x}{3} = -\frac{4}{3} - 3$

$\rightarrow \frac{13x}{3} = -\frac{13}{3} \rightarrow x = -1$

Calculamos $y \rightarrow y = 4x + 3 = 4 \cdot (-1) + 3 = -1$

e) $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ 2x - y &= 10 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow y = 10 - 3x \\ &\rightarrow 2x - 10 = y \end{aligned}$

Igualando: $10 - 3x = 2x - 10 \rightarrow 20 = 5x \rightarrow x = 4$

Calculamos $y \rightarrow y = 10 - 3x = 10 - 3 \cdot 4 = -2$

f) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 5x - 1 = 3y \to y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3} \\ \to y = 11 - 4x \end{array}$

Igualando: $\dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3} = 11 - 4x \to \dfrac{5}{3}x + 4x = 11 + \dfrac{1}{3}$

$\to \dfrac{17}{3}x = \dfrac{34}{3} \to 17x = 34 \to x = 2$

Calculamos $y \to y = 11 - 4x = 11 - 4 \cdot 2 = 3$

g) $\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 3y = 16 - 5x \to y = \dfrac{16}{3} - \dfrac{5}{3}x \\ \to 3x = 3y \to y = x \end{array}$

Igualando: $\dfrac{16}{3} - \dfrac{5}{3}x = x \to \dfrac{16}{3} = \dfrac{5}{3}x + x \to \dfrac{16}{3} = \dfrac{8}{3}x$

$\to 16 = 8x \to x = 2$

Calculamos $y \to y = x = 2$

h) $\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 20 \\ 7x + 4y = 39 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 5y = 20 - 3x \to y = 4 - \dfrac{3}{5}x \\ \to 4y = 39 - 7x \to y = \dfrac{39}{4} - \dfrac{7}{4}x \end{array}$

Igualando: $4 - \dfrac{3}{5}x = \dfrac{39}{4} - \dfrac{7}{4}x \to \dfrac{7}{4}x - \dfrac{3}{5}x = \dfrac{39}{4} - 4$

$\to 20 \cdot \dfrac{7}{4}x - 20 \cdot \dfrac{3}{5}x = 20 \cdot \dfrac{39}{4} - 20 \cdot 4$

$\to 35x - 12x = 195 - 80 \to 23x = 115 \to x = 5$

Calculamos $y \to y = 4 - \dfrac{3}{5}x = 4 - \dfrac{3}{5} \cdot 5 = 4 - 3 = 1$

060 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE ELIMINAN LOS PARÉNTESIS Y LOS DENOMINADORES EN UN SISTEMA?

Elimina los paréntesis y los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3(2x-2)}{2} - \dfrac{3(y+1)}{9} = -10 \end{array}\right\}$$

PRIMERO. Se eliminan los denominadores.

Se calcula el m.c.m. de los denominadores en cada ecuación, y se multiplican los dos miembros de la ecuación por él.

Primera ecuación: m.c.m. (2, 4, 2) = 4

$$4\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \to 2x + 3y = 2$$

Segunda ecuación: m.c.m. (2, 9) = 18

$$18\left(\frac{3(2x-2)}{2} - \frac{3(y+1)}{9}\right) = 18 \cdot (-10) \to 9 \cdot 3(2x-2) - 2 \cdot 3(y+1) = -180$$

SEGUNDO. Se eliminan los paréntesis.

$$9 \cdot 3(2x - 2) - 2 \cdot 3(y + 1) = -180 \rightarrow 54x - 54 - 6y - 6 = -180$$

TERCERO. Se pasan las incógnitas a un miembro, y los términos sin incógnita, al otro.

$$54x - 54 - 6y - 6 = -180 \rightarrow 54x - 6y = -180 + 54 + 6 = -120$$

Sin paréntesis ni denominadores, el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ 54x - 6y &= -120 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Simplificando}} \left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ 9x - y &= -20 \end{aligned}\right\}$$

061 Resuelve por el método que consideres más adecuado.

a) $\left.\begin{aligned} -2(x - 2) &= y - 4 \\ 3y - 2x &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -5(y - 2) &= x - 2 \\ x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 3(x + y) - x + 2y &= 15 \\ 2x - (y + 8) &= -11 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3(x + 2) - 7(x + y) &= 5 \\ 5(x + 1) - y &= 14 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} -2(x - 2) &= y - 4 \\ 3y - 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -2x + 4 &= y - 4 \\ 3y - 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -2x - y &= -8 \\ -2x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Restamos la 1.ª ecuación de la 2.ª: $-4y = -8 \rightarrow y = 2$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3 \cdot 2 - 2x = 0 \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = 3$

b) $\left.\begin{aligned} -5(y - 2) &= x - 2 \\ x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -5y + 10 &= x - 2 \\ x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -x - 5y &= -12 \\ x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$

Sumamos las dos ecuaciones: $-8y = -16 \rightarrow y = 2$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $x - 3 \cdot 2 = -4 \rightarrow x = -4 + 6 = 2$

c) $\left.\begin{aligned} 3(x + y) - x + 2y &= 15 \\ 2x - (y + 8) &= -11 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 3y - x + 2y &= 15 \\ 2x - y - 8 &= -11 \end{aligned}\right\}$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 15 \\ 2x - y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$$6y = 18 \rightarrow y = 3$$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$2x - 3 = -3 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

d) $\left.\begin{aligned} 3(x + 2) - 7(x + y) &= 5 \\ 5(x + 1) - y &= 14 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 6 - 7x - 7y &= 5 \\ 5x + 5 - y &= 14 \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} -4x - 7y &= -1 \\ 5x - y &= 9 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{sumamos}]{2.^{a} \cdot (-7)} \begin{aligned} \left.\begin{aligned} -4x - 7y &= -1 \\ -35x + 7y &= -63 \end{aligned}\right\} \\ \hline -39x \qquad = -64 \end{aligned} \rightarrow x = \frac{64}{39}$$

Y despejando en la 2.ª ecuación:

$$5 \cdot \frac{64}{39} - y = 9 \rightarrow \frac{320}{39} - 9 = y \rightarrow y = \frac{320 - 351}{39} = -\frac{31}{39}$$

062 Resuelve por el método que consideres más adecuado.

a) $$\left.\begin{aligned} \frac{3x}{3} - \frac{2x}{4} &= 2 \\ 3y + 5x &= -1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} &= -1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} &= 7 \end{aligned}\right\}$$

a) Despejamos x en la 1.ª ecuación y sustituimos en la 2.ª para calcular el valor de y:

$$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x = 2 \rightarrow x = 4$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$3y + 20 = -1 \rightarrow 3y = -21 \rightarrow y = -7$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} &= -1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} &= 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot \frac{y}{2} &= -6 \\ 12 \cdot \frac{2x}{3} - 12 \cdot \frac{y}{4} &= 84 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -6 \\ 8x - 3y &= 84 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{restamos}} -6x = -90 \rightarrow x = 15$$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$$\frac{15}{3} - \frac{y}{2} = -1 \rightarrow -\frac{y}{2} = -1 - 5 = -6 \rightarrow y = 12$$

063 Elimina los paréntesis y los denominadores en los siguientes sistemas.

a) $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} &= 0 \\ \frac{5(x+1)}{7} - \frac{2(y+2)}{3} &= -2 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{3(1-x)}{3} - \frac{(y-1)}{5} - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{5(x+1) + 7(2y-1)}{6} &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª por 21:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 15(x+1) - 14(y+2) &= -42 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 15x + 15 - 14y - 28 &= -42 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + \quad y &= 0 \\ 15x - 14y &= -29 \end{aligned}\right\}$$

b) Multiplicando la 1.ª ecuación por 10 y la 2.ª por 6:

$$\left.\begin{aligned} 10(1-x) - 2(y-1) - 5 &= 15 \\ 5(x+1) + 7(2y-1) &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 10 - 10x - 2y + 2 - 5 &= 15 \\ 5x + 5 + 14y - 7 &= 12 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} -10x - \quad 2y &= 8 \\ 5x + 14y &= 14 \end{aligned}\right\}$$

064 Resuelve por el método de igualación estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=6\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2(x-1)}{3}-\dfrac{y+2}{6}=-1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{5}+y=2\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

a) Quitando denominadores: $\left.\begin{array}{r}3x+2y=36\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$

Despejamos y en la 1.ª ecuación: $y=\dfrac{36-3x}{2}$, y en la 2.ª: $y=\dfrac{x+4}{2}$,

e igualamos: $\dfrac{36-3x}{2}=\dfrac{x+4}{2}\rightarrow x=8$. Y sustituyendo: $y=6$

b) Quitando denominadores: $\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ 4x-y=0\end{array}\right\}$ Despejamos y en la 1.ª ecuación:

$y=x+3$, y en la 2.ª: $y=4x$, e igualamos: $x+3=4x\rightarrow x=-1, y=-4$

c) Quitando denominadores: $\left.\begin{array}{r}x+5y=10\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

Despejamos x en la 1.ª ecuación: $x=10-5y$, y en la 2.ª: $x=\dfrac{7+3y}{2}$,

e igualamos: $10-5y=\dfrac{7+3y}{2}\rightarrow y=1$. Y sustituyendo: $x=5$

065 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=6\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{5}+y=2\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2(x-1)}{3}-\dfrac{y+2}{6}=-1\end{array}\right\}$

a) Quitamos denominadores: $\left.\begin{array}{r}3x+2y=36\\ x-2y=-4\end{array}\right\}$ Las sumamos: $4x=32$

$\rightarrow x=8$, y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $8-2y=-4\rightarrow y=6$

b) Quitamos denominadores: $\left.\begin{array}{r}x-y-2=1\\ 4x-4-y-2=-6\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ 4x-y=0\end{array}\right\}$

Las restamos: $-3x=3\rightarrow x=-1$, y sustituyendo en la 1.ª ecuación:
$-1-y=3\rightarrow y=-4$

c) Quitamos denominadores: $\left.\begin{array}{r}x+5y=10\\ 2x-3y=7\end{array}\right\}$

Multiplicamos la 1.ª ecuación por -2: $\left.\begin{array}{r}-2x-10y=-20\\ 2x-\ \ 3y=7\end{array}\right\}$

Las sumamos: $-13y=-13\rightarrow y=1$, y sustituyendo en la 1.ª ecuación:
$x+5=10\rightarrow x=5$

066 **Resuelve por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} &= 0 \\ 3x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \frac{2x+1}{5} - \frac{3y-4}{10} &= \frac{2}{5} \\ \frac{5(x+1)}{7} - y + \frac{1}{2} &= -\frac{8}{2} \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} \frac{3(x+1)-x}{6} - y - \frac{y+1}{5} &= \frac{3}{2} \\ x - \frac{3(y-1)}{10} + \frac{1}{5} &= \frac{x+3}{3} \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ Las sumamos: $3x = 0 \rightarrow x = 0$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = 0$

b) Quitamos denominadores: $\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$ Las sumamos: $4x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{4}$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = \frac{-3}{4}$

c) Quitamos denominadores: $\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= -2 \\ 10x - 14y &= -73 \end{aligned}\right\}$

Despejamos x de la 1.ª ecuación: $x = \frac{3y-2}{4}$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$10\left(\frac{3y-2}{4}\right) - 14y = -73 \rightarrow 15y - 10 - 28y = -146$$
$$\rightarrow -13y = -136 \rightarrow y = \frac{136}{13}$$

Sustituyendo: $x = \frac{191}{26}$

d) Quitamos denominadores: $\left.\begin{aligned} 10x - 36y &= 36 \\ 20x - 9y &= 15 \end{aligned}\right\}$

Multiplicando la 1.ª ecuación por -2: $\left.\begin{aligned} -20x + 72y &= -72 \\ 20x - 9y &= 15 \end{aligned}\right\}$

Las sumamos: $63y = -57 \rightarrow y = \frac{-19}{21}$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $20x + \frac{57}{7} = 15 \rightarrow x = \frac{12}{35}$

067 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE EXPRESAN CIERTOS ENUNCIADOS MEDIANTE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS?

Expresa, como ecuaciones con dos incógnitas.

a) La suma de dos números es 50.

b) La diferencia de edad de dos hermanos es 5 años.

c) Un padre tiene el doble de edad que su hijo.

d) Un número supera a otro en 10 unidades.

PRIMERO. Se asigna una incógnita a cada dato desconocido.

Datos desconocidos	Incógnitas
Dos números	x, un número y, el otro número
Edades de dos hermanos	x, edad del primero y, edad del segundo
Edades del padre y el hijo	x, edad del padre y, edad del hijo
Dos números	x, un número y, el otro número

SEGUNDO. Se relacionan los datos conocidos y desconocidos mediante una ecuación.

a) La suma es 50.

$$x + y = 50$$

b) La diferencia es 5 años.

$$x - y = 5$$

c) El padre dobla en edad al hijo.

$$x = 2y$$

d) Uno supera al otro en 10.

$$x = y + 10$$

068 **Expresa mediante ecuaciones con dos incógnitas.**

a) Un bocadillo y un refresco valen 5 €.

b) Dos bocadillos y tres refrescos cuestan 15 €.

c) Un bocadillo vale 1 € más que un refresco.

d) He pagado un bocadillo y dos refrescos con 10 € y me han devuelto 3 €.

Precio del bocadillo: x

Precio del refresco: y

a) $x + y = 5$

b) $2x + 3y = 15$

c) $x = y + 1$

d) $x + 2y + 3 = 10$

069 **Elige la respuesta adecuada.**

a) Hace tres años, la edad de un tío era el triple de la edad de su sobrino, pero dentro de 5 años será solo el doble. Las edades del tío y del sobrino son:

1. Tío: 15, sobrino: 5.
2. Tío: 35, sobrino: 15.
3. Tío: 27, sobrino: 11.

b) En un teatro se han vendido 250 entradas entre butacas de patio y de palco. Las primeras cuestan 15 € cada una, y las segundas, 30 €. Si la recaudación total fue de 4 500 €, las entradas vendidas de cada tipo fueron:

1. Patio: 50, palco: 250.
2. Patio: 100, palco: 10.
3. Patio: 200, palco: 50.
4. Patio: 125, palco: 125.

a) Tío: x Sobrino: y

$$\left.\begin{aligned} x &= 3y \\ x+5 &= 2(y+5) \end{aligned}\right\}$$ Sustituimos x en la 2.ª ecuación: $3y + 5 = 2y + 10 \rightarrow y = 5,\ x = 15$

La solución es la opción 1. Tío: 15 años. Sobrino: 5 años.

b) Butacas de patio: x Butacas de palco: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 250 \\ 15x + 30y &= 4\,500 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 250 - y$$

Sustituimos x en la 2.ª ecuación: $15(250 - y) + 30y = 4\,500 \rightarrow 3\,750 + 15y = 4\,500 \rightarrow y = 50,\ x = 200$

La solución es la opción 3. Butacas de patio: 200. Butacas de palco: 50.

070 **Calcula dos números cuya suma es 10 y su diferencia es 6.**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$$ Sumando las ecuaciones: $2x = 16 \rightarrow x = 8,\ y = 2$

071 **Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su perímetro mide 60 cm y que la base es el doble de la altura.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 60 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\}$$ Sustituyendo la 2.ª en la 1.ª: $4y + 2y = 60 \rightarrow y = 10,\ x = 20$

Base: 20 cm. Altura: 10 cm.

072 **Dos kilos de albaricoques y tres kilos de brevas cuestan 13 €. Tres kilos de albaricoques y dos kilos de brevas cuestan 12 €. ¿Cuál es el precio del kilo de albaricoques?**

Albaricoques: x Brevas: y

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$$ Multiplicando la 1.ª ecuación por 3 y la 2.ª por -2:

$$\left.\begin{aligned} 6x + 9y &= 39 \\ -6x - 4y &= -24 \end{aligned}\right\}$$

Sumando las ecuaciones: $5y = 15 \rightarrow y = 3,\ x = 2$
Albaricoques: 2 €/kg. Brevas: 3 €/kg.

073 **En una compra se han utilizado monedas de 2 € y billetes de 5 €. En total, entre monedas y billetes son 13 y se ha pagado 32 €. ¿Cuántas monedas de 2 € se utilizan? ¿Y billetes de 5 €?**

Monedas: x Billetes: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 13 \\ 2x + 5y &= 32 \end{aligned}\right\}$$ Despejando x de la 1.ª ecuación: $x = 13 - y$

Y sustituyendo en la 2.ª: $26 - 2y + 5y = 32 \rightarrow y = 2, x = 11$

074 **En una droguería se venden 3 jabones y 2 frascos de colonia por 12 €, y también 4 jabones y 3 frascos de colonia por 17 €. Calcula el precio de cada producto.**

Precio del jabón: x Precio del frasco de colonia: y

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ 4x + 3y &= 17 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\substack{2.^a \cdot (-2) \\ \text{sumamos}}]{1.^a \cdot 3} \left.\begin{aligned} 9x + 6y &= 36 \\ -8x - 6y &= -34 \end{aligned}\right\}$$
$$x = 2$$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $3 \cdot 2 + 2y = 12 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3$

El jabón cuesta 2 € y el frasco de colonia 3 €.

075 **Hemos adquirido sellos de 0,26 € y de 0,84 €. En total hemos pagado 5,18 € por 11 sellos. ¿Cuántos sellos son de 0,26 €? ¿Y de 0,84 €?**

Sellos de 0,26 €: x Sellos de 0,84 €: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 11 \\ 0{,}26x + 0{,}84y &= 5{,}18 \end{aligned}\right\}$$ Despejando x de la 1.ª ecuación: $x = 11 - y$

Y sustituyendo en la 2.ª: $2{,}86 - 0{,}26y + 0{,}84y = 5{,}18 \rightarrow y = 4, x = 7$

Se han comprado 4 sellos de 0,84 € y 7 sellos de 0,26 €.

076 **Para una merienda se han comprado bocadillos de jamón a 2,80 € la unidad y de queso a 2,50 €. En total se pagan 48 € por 18 bocadillos. ¿Cuántos bocadillos de jamón se compran?**

Bocadillos de jamón: x Bocadillos de queso: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 18 \\ 2{,}80x + 2{,}50y &= 48 \end{aligned}\right\}$$ Despejando x de la 1.ª ecuación: $x = 18 - y$

Y sustituyendo en la 2.ª: $50{,}4 - 2{,}8y + 2{,}5y = 48 \rightarrow y = 8, x = 10$

Jamón: 10 bocadillos. Queso: 8 bocadillos.

077 **En un taller hay 50 vehículos entre motos y coches. Si el número total de ruedas es 140, ¿cuántos vehículos hay de cada tipo?**

Coches: x Motos: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 50 \\ 4x + 2y &= 140 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 50 - y$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $200 - 4y + 2y = 140 \rightarrow y = 30, x = 20$

Coches: 20. Motos: 30.

078 ●●
El perímetro de una parcela rectangular es 350 m y el triple de su largo es igual al cuádruple de su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Largo: x Ancho: y

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 350 \\ 3x = 4y \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{3x}{4}.$$ Sustituyendo y en la 1.ª ecuación:

$$2x + \frac{3x}{2} = 350 \rightarrow 7x = 700 \rightarrow x = 100,\ \ y = 75$$

Largo: 100 m. Ancho: 75 m.

079 ●●
José le dice a Inés: «Si te doy 10 discos tendrías la misma cantidad que yo». Inés le responde: «Tienes razón. Solo te faltan 10 discos para doblarme en número». ¿Cuántos discos tiene cada uno?

Discos de José: x Discos de Inés: y

$$\left.\begin{array}{r} x - 10 = y + 10 \\ x + 10 = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - \ \ y = 20 \\ x - 2y = -10 \end{array}\right\}$$ Restamos las ecuaciones: $-y - (-2y) = 20 - (-10) \rightarrow y = 30$

Sustituimos en la 1.ª ecuación: $x - 10 = 30 + 10 \rightarrow x = 50$

José tiene 50 discos e Inés tiene 30 discos.

080 ●●●
Una empresa de alquiler de coches ofrece dos modelos, uno de cuatro plazas y otro de cinco. Durante un día, la empresa alquila 10 coches en los que viajan 42 personas, quedando dos plazas sin ocupar. ¿Cuántos coches alquilaron de cada tipo?

Coches de cuatro plazas: x
Coches de cinco plazas: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 4x + 5y - 2 = 42 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 10 \\ 4x + 5y = 44 \end{array}\right\} \rightarrow y = 10 - x$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$4x + 5(10 - x) = 44 \rightarrow 4x + 50 - 5x = 44 \rightarrow -x = -6 \rightarrow x = 6$$

Y despejando: $y = 10 - x = 10 - 6 = 4$

Alquilaron 6 coches de cuatro plazas y 4 coches de cinco plazas.

081 ●●●
Juan ha comprado una camisa y un pantalón. Los precios de estas prendas sumaban 60 €, pero le han hecho un 10 % de descuento en la camisa y un 20 % en el pantalón, y paga por ambos 50,15 €. ¿Cuál era el precio sin rebajar de cada prenda?

Precio de la camisa: c Precio del pantalón: p

$$\left.\begin{array}{r} c + p = 60 \\ c(100\,\% - 10\,\%) + p(100\,\% - 20\,\%) = 50{,}15 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} c + \ \ \ \ \ p = 60 \\ 0{,}9c + 0{,}8p = 50{,}15 \end{array}\right\}$$

Despejando en la 1.ª ecuación: $p = 60 - c$, y sustituyendo en la 2.ª:

$$0{,}9c + 0{,}8(60 - c) = 50{,}15 \rightarrow 0{,}9c + 48 - 0{,}8c = 50{,}15$$
$$\rightarrow 0{,}1c = 2{,}15 \rightarrow c = 21{,}50\ €$$

Y despejando: $p = 60 - c = 60 - 21{,}50 = 38{,}50\ €$

082 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MEZCLAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES?

Se quiere mezclar dos tipos de aceite: uno de 5,20 €/ℓ y otro de 6,20 €/ℓ, y se quieren obtener 100 ℓ de aceite cuyo precio sea 6 €/ℓ. ¿Cuántos litros de cada tipo se necesitan?

PRIMERO. Se plantea el problema.

	Litros	Precio
Aceite *A*	x	$5{,}2x$
Aceite *B*	y	$6{,}2y$
Mezcla	100	$5{,}2x + 6{,}2y$
Ecuaciones	$x + y = 100$	$\dfrac{5{,}2x + 6{,}2y}{100} = 6$

SEGUNDO. Se resuelve el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 100 \\ \dfrac{5{,}2x + 6{,}2y}{100} = 6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 100 - y \\ 5{,}2x + 6{,}2y = 600 \end{array}\right\}$$

Se sustituye el valor en la otra ecuación:

$$\xrightarrow{x = 100 - y} 5{,}2(100 - y) + 6{,}2y = 600 \to y = 80$$

$$x = 100 - y \xrightarrow{y = 80} x = 20$$

TERCERO. Se comprueba la solución.

La mezcla contendrá 20 ℓ del aceite *A* y 80 ℓ del aceite *B*. La cantidad de mezcla será: 20 + 80 = 100 ℓ.

Y el precio de la mezcla es:

$$\frac{5{,}2 \cdot 20 + 6{,}2 \cdot 80}{100} = \frac{104 + 496}{100} = 6\ €$$

083 ●●● **Se mezcla pintura de 12 €/ℓ con pintura de 15 €/ℓ, de modo que resultan 50 ℓ de pintura de 13 €/ℓ. ¿Cuántos litros de cada pintura se han mezclado?**

Pintura de 12 €/ℓ: x

Pintura de 15 €/ℓ: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 12x + 15y = 50 \cdot 13 \end{array}\right\}$$ Despejando x de la 1.ª ecuación: $x = 50 - y$

Y sustituyendo en la 2.ª:

$$600 - 12y + 15y = 650 \to y = \frac{50}{3},\quad x = \frac{100}{3}$$

Pintura de 12 €/ℓ: $\dfrac{100}{3}$ litros. Pintura de 15 €/ℓ: $\dfrac{50}{3}$ litros.

084 **En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades, una de 50 céntimos el litro y otra de 80 céntimos el litro. ¿Cuántos litros de zumo han de mezclarse de cada tipo para obtener 120 litros con un coste total de 85,50 €?**

Zumo de 0,50 €/ℓ: x Zumo de 0,80 €/ℓ: y

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 120 \\ 0{,}50x + 0{,}80y = 85{,}50 \end{array}\right\} \rightarrow y = 120 - x$$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$0{,}50x + 0{,}80(120 - x) = 85{,}50 \rightarrow 0{,}50x + 96 - 0{,}80x = 85{,}50$$
$$\rightarrow -0{,}30x = -10{,}50 \rightarrow x = 35$$

Y despejando: $y = 120 - x = 120 - 35 = 85$

Se deben mezclar 35 litros de zumo de 0,50 €/ℓ
y 85 litros de zumo de 0,80 €/ℓ.

085 **Se han mezclado 40 kg de café a 10 €/kg con otra cantidad de café a 14 €/kg. ¿Cuántos kilos se han usado de cada clase si se vende la mezcla a 12,80 €/kg?**

Café de 14 €: x
Total de café: y

$$\left.\begin{array}{r} 40 + \quad x = y \\ 40 \cdot 10 + 14x = 12{,}80y \end{array}\right\} \text{Despejando } y \text{ de la 1.ª ecuación: } y = 40 + x$$

Y sustituyendo en la 2.ª ecuación:

$$400 + 14x = 512 + 12{,}8x \rightarrow x = \frac{112}{1{,}2} = \frac{280}{3},\ y = \frac{400}{3}$$

Café de 14 €/kg: $\frac{280}{3}$ kg. Total de café: $\frac{400}{3}$ kg.

086 **Si en un sistema de ecuaciones con solución única se multiplican todos los términos de una ecuación por 3:**

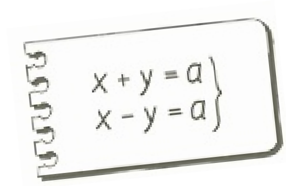
a) La nueva solución es el triple de la original.
b) La solución es la misma.
c) El nuevo sistema no puede tener solución.
d) Ninguna de las tres opciones anteriores es cierta.

b) La solución es la misma, ya que si multiplicamos todos los términos de una ecuación por una misma cantidad, la ecuación resultante es equivalente, es decir, tiene las mismas soluciones.

087 **Si despejando la misma incógnita en dos ecuaciones, y una vez igualadas, no se puede resolver la ecuación con una incógnita que resulta, ¿cómo es el sistema, compatible o incompatible? Razónalo.**

Es incompatible, ya que si no tiene solución para esa incógnita el sistema no puede tener ninguna solución, pues entonces esta aportaría solución a la ecuación que no la tenía.

088 ●●● **La suma de las dos cifras de un número es *a* y su diferencia es también *a*. ¿De qué tipo son los números que cumplen esta condición?**



Siendo las cifras x e y: $\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= a \end{aligned}\right\}$

Sumando las ecuaciones: $2x = 2a \rightarrow x = a$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = 0$

Los números que cumplen esta condición son las decenas y las unidades.

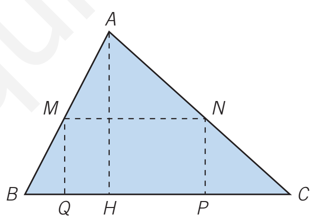
089 ●●● **La suma de las dos cifras de un número es 2*a* y su diferencia es *a*. ¿Qué números cumplen esta condición?**

Siendo las cifras x e y: $\left.\begin{aligned} x + y &= 2a \\ x - y &= a \end{aligned}\right\}$ Sumando las ecuaciones:

$2x = 3a \rightarrow x = \dfrac{3a}{2}$. Y sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = \dfrac{a}{2}$

Como a debe ser par y menor que 7 ($a = 2, 4, 6$), los números son 93, 39, 62, 26, 31 y 13.

090 ●●● **En el triángulo $\widehat{ABC}$, el lado *BC* mide 8 cm y su altura *AH* mide 4 cm. Se quiere inscribir en ese triángulo un rectángulo *MNPQ* en el que los vértices *P* y *Q* estén en el lado *BC*, *M* en *AB* y *N* en *AC*. Calcula las longitudes de *MN* y *MQ* para que el perímetro del rectángulo *MNPQ* sea de12 cm.**



Base del rectángulo: x. Altura del rectángulo: y.

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMN}$ son semejantes, por ser MN paralelo a BC.

La base de $\widehat{AMN}$ mide x, y su altura mide $4 - y$.

$$\frac{\text{Base de } \widehat{AMN}}{\text{Base de } \widehat{ABC}} = \frac{\text{Altura de } \widehat{AMN}}{\text{Altura de } \widehat{ABC}} \rightarrow \frac{x}{8} = \frac{4 - y}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 12 \\ \frac{x}{8} &= \frac{4 - y}{4} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{eliminamos denominadores}} \left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 12 \\ x &= 8 - 2y \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{restamos}} \begin{array}{r} 2x + 2y = 12 \\ x + 2y = 8 \\ \hline x \qquad = 4 \end{array} \rightarrow 8 + 2y = 12 \rightarrow y = 2$$

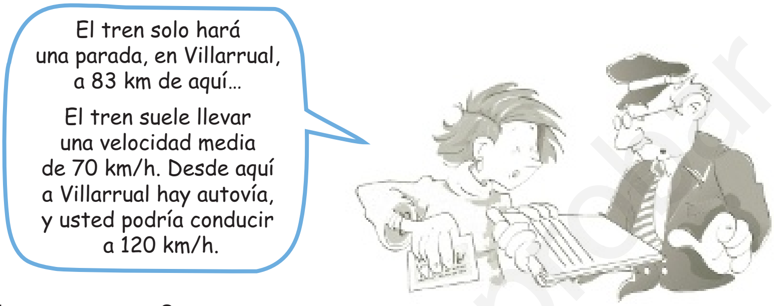
Base del rectángulo: $MN = 4$ cm. Altura del rectángulo: $MQ = 2$ cm.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

091 ●●● **Xaquín va a Sevilla en un tren que ha salido a las 17:00 h.**

Aunque su madre ha insistido en que no olvidara nada, Xaquín se ha dejado en casa algo muy importante: su carné de identidad.

Su madre lo ha encontrado y se ha ido a la estación de tren rápidamente, pero el tren ya ha partido.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Como podría la madre de Xaquín entregar el carné a su hijo?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿Cuánto tardará el tren en llegar a Villarrual si mantiene su velocidad media?

c) ¿Cuánto tardará, como mínimo, la madre de Xaquín si va en coche?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Si han pasado ya 20 minutos desde que el tren partió, ¿crees que la madre de Xaquín puede llegar a tiempo a la estación?

a) Podría ir en coche hasta Villarrual.

b) El tren tarda en llegar a Villarrual: $\frac{83}{70} = 1$ h 11 min 9 s

c) La madre tarda en llegar: $\frac{83}{120} = 41$ min 30 s

d) Sí, porque 41 min 30 s $+$ 20 min $=$ 1 h 1 min 20 s $<$ 1 h 11 min 9 s.

092 ●●● **Alicia y Marien han conseguido una beca para estudiar durante dos años en París. Al llegar al aeropuerto han tenido un problema.**

Los aviones de pasajeros permiten un determinado peso en los equipajes; en caso de sobrepasar ese peso, el pasajero tiene que abonar una cantidad por cada kilo adicional que lleve.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Explica por qué les sale más barata la propuesta de la azafata.

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿Cuál es el peso permitido a cada pasajero? ¿Cuánto hay que pagar por cada kilo de sobrepeso?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si además de ellas, se une otra amiga que lleva un equipaje de 22 kg, ¿les conviene unirse las tres y pagar el sobrepeso entre las dos amigas que se exceden en el peso permitido?

a) El exceso de peso del equipaje de la segunda chica se le añade a lo que le falta al de la primera chica. Si facturan conjuntamente, el exceso de equipaje es menor.

b) Peso permitido: x Precio por kilo: y

$$\left.\begin{array}{r}(27-x)y=42\\ [27-(x-18)-x]y=30\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}27y-xy=42\\ 45y-2xy=30\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}27y-xy=42\\ 45y-2xy=30\end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{r}-54y+2xy=-84\\ 45y-2xy=30\end{array}\right\}$$
$$-9y=-54 \rightarrow y=6$$

$$(27-x)y=42 \xrightarrow{y=6} (27-x)6=42 \rightarrow 27-x=7 \rightarrow x=20$$

Peso permitido: 20 kg. Precio por kilo: 6 €.

c) $18+27+22=67 \rightarrow 7\cdot 6=42$ € pagarían si se unen las tres.

$27+22=49 \rightarrow 9\cdot 6=54$ € pagarían si se unen las dos con sobrepeso.

Si factura cada una individualmente pagarían:

$$7\cdot 6+2\cdot 6=42+12=54\ €$$

La opción más económica es facturar el equipaje conjunto de las tres, de esta manera, las dos amigas con sobrepeso en sus equipajes pagarían 42 € entre ambas.

6 Proporcionalidad numérica

Un pedazo de la Historia

Por fin, Alí había conseguido sacar a Schoene del hotel, donde llevaba recluido cuatro días sin apartar la vista de aquel libro, que a intervalos hacía exclamar a Schoene:

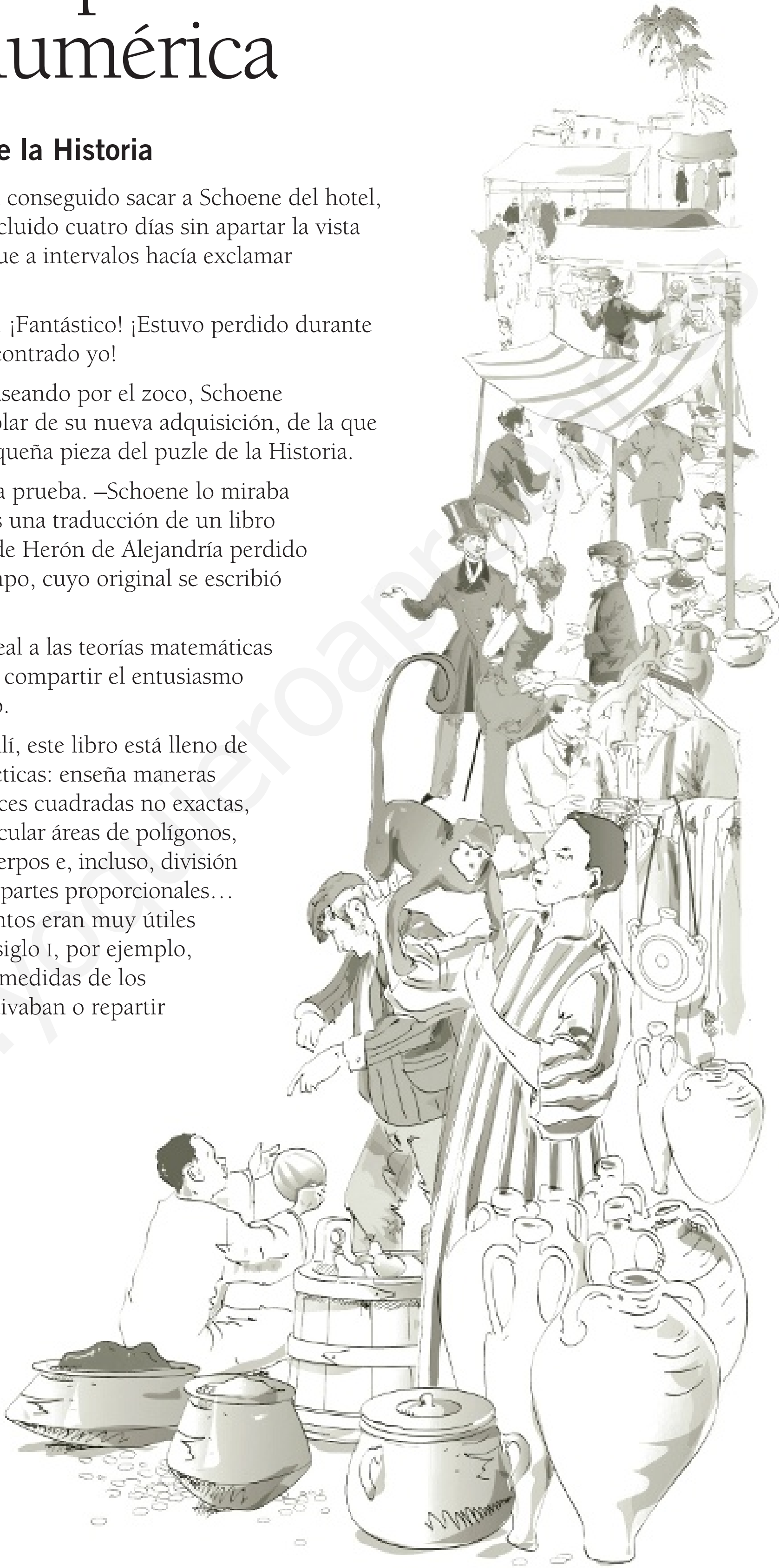
–¡Es maravilloso! ¡Fantástico! ¡Estuvo perdido durante siglos y lo he encontrado yo!

Aquella tarde, paseando por el zoco, Schoene no dejaba de hablar de su nueva adquisición, de la que decía ser una pequeña pieza del puzle de la Historia.

–Alí, el libro es la prueba. –Schoene lo miraba emocionado–. Es una traducción de un libro de matemáticas de Herón de Alejandría perdido hace mucho tiempo, cuyo original se escribió en el siglo I.

–Yo prefiero lo real a las teorías matemáticas –contestó Alí sin compartir el entusiasmo de su compañero.

–Te equivocas, Alí, este libro está lleno de aplicaciones prácticas: enseña maneras de aproximar raíces cuadradas no exactas, métodos para calcular áreas de polígonos, volúmenes de cuerpos e, incluso, división de superficies en partes proporcionales… Estos conocimientos eran muy útiles en el Egipto del siglo I, por ejemplo, para calcular las medidas de los terrenos que cultivaban o repartir herencias.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **El texto hace referencia a dos personajes, Schoene y Herón de Alejandría. ¿Cuál de ellos es un ilustre matemático? ¿Cuáles fueron sus descubrimientos más importantes?**

En esta página de la Universidad de Costa Rica podrás conocer la relación entre Schoene y Herón de Alejandría, así como un repaso de la obra de este último:
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/HistoriaMatematica/index.htm

2 **De los libros que se atribuyen a Herón de Alejandría, ¿a cuál de ellos se refiere el texto?**

En la página del profesor titular Enrique Aznar García, del Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, podrás encontrar biografías de varios matemáticos y matemáticas, y entre ellos aparece Herón de Alejandría y sus obras.
http://www.ugr.es/~eaznar/matematicos.htm

3 **Busca información sobre las aportaciones de Herón a la proporcionalidad numérica.**

En la misma página anterior se muestran algunas aplicaciones de la proporcionalidad estudiadas por Herón de Alejandría.
http://www.ugr.es/~eaznar/matematicos.htm

EVALUACIÓN INICIAL

1 **¿Es una magnitud el color de un automóvil? ¿Y la altura de un edificio?**

El color de un automóvil no es una magnitud porque no se puede medir.
La altura de un edificio sí es una magnitud.

2 **Identifica las razones que forman una proporción.**

a) $\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{5}$ **b)** $\frac{10}{2}, \frac{50}{10}, \frac{30}{8}, \frac{20}{5}$

a) $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$ b) $\frac{10}{2} = \frac{50}{10}$

3 **Busca el término que falta en las siguientes proporciones.**

a) $\frac{12}{8} = \frac{9}{x}$ **b)** $\frac{3}{9} = \frac{x}{21}$ **c)** $\frac{4}{x} = \frac{x}{25}$

a) $x = \frac{72}{12} = 6$ b) $x = \frac{63}{9} = 7$ c) $x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} = \pm 10$

4 **Calcula estos porcentajes.**

a) El 23 % de 101 es: $\frac{23 \cdot 101}{100} = 23,23$ **c) El 6 % de 221** es: $\frac{6 \cdot 221}{100} = 13,26$

b) El 145 % de 600 es: $\frac{145 \cdot 600}{100} = 870$ **d) El 78,5 % de 89** es: $\frac{78,5 \cdot 89}{100} = 69,865$

EJERCICIOS

001 **Completa estas tablas para que sean de proporcionalidad directa.**

2	**4**	5	**8**	**40**
6	12	**15**	24	120

1	**0,25**	**3**	2,4	**8**
5	**1,25**	15	**12**	40

002 **Si el precio de 9 menús es de 166,50 €, ¿cuánto costarán 5 menús?**

$$\frac{166{,}50}{9} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 166{,}50}{9} = 92{,}50 \text{ €}$$

003 **En un mapa, 14 cm representan 238 km en la realidad. ¿Por qué longitud vienen representados 306 km? Una longitud de 10 cm en el mapa, ¿qué longitud real representa?**

$$\frac{238}{14} = \frac{306}{x} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 306}{238} = 18 \text{ cm}$$

$$\frac{238}{14} = \frac{x}{10} \longrightarrow x = \frac{238 \cdot 10}{14} = 170 \text{ km}$$

004 **Insertar anuncios en un periódico cuesta 10 € por 3 líneas de texto, y cobran 3 € más por cada nueva línea que escribamos. Construye la tabla que relaciona las magnitudes. ¿Es de proporcionalidad?**

Líneas	3	4	5	6
Precio	10	13	16	19

La tabla no es de proporcionalidad, ya que $\frac{3}{10} \neq \frac{4}{13}$.

005 **Completa las tablas para que sean de proporcionalidad inversa.**

1	**2**	3	**4**	**6**
24	12	**8**	6	4

10	**15**	25	**12**	6
15	10	**6**	12,5	**25**

006 **Un barco lleva comida para 8 tripulantes y una travesía de 15 días. Si solo viajan 6 tripulantes, ¿para cuántos días tendrán?**

El número de tripulantes y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales, de manera que:

$$8 \cdot 15 = 6 \cdot x \rightarrow x = \frac{8 \cdot 15}{6} = 20$$

Tendrán comida para 20 días.

007 Clasifica en proporcionalidad directa o inversa.

a) El lado de un cuadrado y su perímetro.

b) Obreros y tiempo en acabar un trabajo.

a) Directa, con constante de proporcionalidad 4.

b) Inversa.

008 En la cocina de un instituto han pagado 42 € por 70 barras de pan. ¿Cuánto tendrían que pagar si hubieran comprado 45 barras?

Aplicamos una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{l} 70 \text{ barras} \longrightarrow 42\ € \\ 45 \text{ barras} \longrightarrow x\ € \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 42}{70} = 27\ €$$

009 Un coche gasta en gasolina 0,46 € cada 4 km. ¿Cuánto costará el combustible en un viaje de 270 km si mantiene el mismo consumo?

Aplicamos una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ km} \longrightarrow 0{,}46\ € \\ 270 \text{ km} \longrightarrow x\ € \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{270 \cdot 0{,}46}{4} = 31{,}05\ €$$

010 El precio de 15 menús en un restaurante ha sido de 120 €. ¿Cuánto vale el menú? Si van a comer 7 personas, ¿cuánto pagarán?

Aplicamos una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{l} 15 \text{ menús} \longrightarrow 120\ € \\ 7 \text{ menús} \longrightarrow x\ € \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 120}{15} = 56\ € \text{ pagarán en total.}$$

El menú vale: $\frac{120}{15} = \frac{56}{7} = 8\ €$

011 Un árbol de 2,25 m de altura da una sombra de 2 m. ¿Qué altura tendrá una torre que, a la misma hora, da una sombra de 188,8 m?

Aplicamos una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}25 \text{ m de altura} \longrightarrow 2 \text{ m de sombra} \\ x \text{ m de altura} \longrightarrow 188{,}8 \text{ m de sombra} \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{2{,}25 \cdot 188{,}8}{2} = 212{,}4 \text{ m de altura}$$

012 Si el tiempo empleado por 7 trabajadores en limpiar una calle es de 7 horas, ¿cuánto tardarán 5 trabajadores?

El número de trabajadores y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales, de manera que:

$$7 \cdot 7 = 5 \cdot x \rightarrow x = \frac{7 \cdot 7}{5} = 9{,}8 \text{ h} = 9 \text{ h } 48 \text{ min}$$

013 **Marta emplea 5 minutos en ir de su casa al colegio en monopatín a una velocidad media de 6 km/h. ¿Cuánto tardará cuando va andando si su velocidad es de 4 km/h?**

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. Es conveniente convertir los minutos en horas, para manejar unidades coherentes y evitar errores conceptuales en Física:

$$5 \text{ min} = \frac{5}{60} \text{ h} \rightarrow 6 \cdot \frac{5}{60} = 4 \cdot x \rightarrow x = \frac{6 \cdot \frac{5}{60}}{4} = 0{,}125 \text{ h}$$

$$\rightarrow x = 0{,}125 \cdot 60 = 7{,}5 \text{ min}$$

014 **Un grifo vierte 6 litros por minuto y tarda 5 horas en llenar un depósito. Si vertiese 1 litro por minuto, ¿cuánto tiempo tardaría?**

El caudal, en litros/minuto, y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. Para manejar unidades coherentes, hemos de convertir las horas en minutos:

5 horas = 5 · 60 minutos = 300 minutos

$$6 \ \ell/\text{min} \cdot 300 \text{ min} = 1 \ \ell/\text{min} \cdot x \text{ min} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 300}{1} = 1\,800 \text{ min}$$

$$\rightarrow x = \frac{1\,800}{60} = 30 \text{ horas}$$

015 **Para construir una piscina, 10 obreros trabajan durante 16 días. ¿Cuántos obreros trabajaron si tardaron 40 días?**

El número de obreros y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

$$10 \text{ obreros} \cdot 16 \text{ días} = x \text{ obreros} \cdot 40 \text{ días} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 16}{40} = 4 \text{ obreros}$$

016 **Reparte 102 € en partes directamente proporcionales a 3, 2 y 1, respectivamente.**

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{102}{6}$$

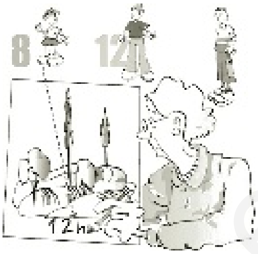
$$x = \frac{3 \cdot 102}{6} = 51 \text{ €}; \ y = \frac{2 \cdot 102}{6} = 34 \text{ €}; \ z = \frac{1 \cdot 102}{6} = 17 \text{ €}$$

017 **Un padre reparte 99 € entre sus tres hijos en partes directamente proporcionales a 3, $\frac{2}{3}$ y $\frac{11}{6}$. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?**

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2/3} = \frac{z}{11/6} = \frac{99}{5{,}5}$$

$$x = \frac{3 \cdot 99}{5{,}5} = 54 \text{ €}; \ y = \frac{2/3 \cdot 99}{5{,}5} = 12 \text{ €}; \ z = \frac{11/6 \cdot 99}{5{,}5} = 33 \text{ €}$$

018 **Doña Alfonsa reparte sus tierras entre sus nietos en partes directamente proporcionales a sus edades: 8, 12 y 15 años. Si al menor le tocan 12 hectáreas, averigua el total de hectáreas repartidas.**



$$\frac{12}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{\text{Total}}{8+12+15}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{\text{Total}}{35} \rightarrow \text{Total} = \frac{12 \cdot 35}{8} = 52{,}5 \text{ ha}$$

019 **Reparte 70 en partes inversamente proporcionales a los números 3 y 4.**

$$k = \frac{70}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{840}{7} = 120 \rightarrow \text{A 3 le corresponden: } 120 : 3 = 40$$

Y a 4 le corresponden: $120 : 4 = 30$

020 **Reparte 1 100 en partes inversamente proporcionales a los números 5 y 6.**

$$k = \frac{1\,100}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{33\,000}{11} = 3\,000 \rightarrow$$

A 5 le corresponden:
$3\,000 : 5 = 600$
Y a 6 le corresponden:
$3\,000 : 6 = 500$

021 **Quiero repartir 620 € entre mis sobrinos, en partes inversamente proporcionales a sus edades, que son 1, 3 y 7 años. ¿Cuánto le tengo que dar a cada uno?**

La constante de proporcionalidad es:

$$k = \frac{620}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}} = \frac{620}{\frac{21+7+3}{21}} = \frac{620 \cdot 21}{31} = 420$$

$$x = \frac{420}{1} = 420 \text{ €} \qquad y = \frac{420}{3} = 140 \text{ €} \qquad z = \frac{420}{7} = 60 \text{ €}$$

022 **Se han repartido 300 € en partes inversamente proporcionales a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{7}$. ¿Cuál es la parte correspondiente a $\frac{1}{5}$?**

$$k = \frac{300}{\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{5}}+\frac{1}{\frac{1}{7}}} = \frac{300}{3+5+7} = \frac{300}{15} = 20$$

La cantidad que le corresponde a $\frac{1}{5}$ es: $\frac{k}{\frac{1}{5}} = 20 \cdot 5 = 100$ €

023 **Si reparto 1 200 proporcionalmente a 5 y 6, y le doy 500 a 6 y 700 a 5, ¿ha sido un reparto inversamente proporcional?**

No, ya que $500 \cdot 6 = 3\,000$ y $700 \cdot 5 = 3\,500$. Estas cantidades deberían ser iguales y coincidir con la constante de proporcionalidad.

024 **En 7 días, 8 máquinas han cavado una zanja de 1 400 m de largo. ¿Cuántas máquinas serán necesarias para cavar 300 m de zanja en 6 días?**

Si en 7 días ⟶ 8 máquinas ⟶ 1 400 m de zanja
en 6 días ⟶ x máquinas ⟶ 300 m de zanja

Inversa   Directa

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{1\,400}{300} = \frac{8}{x} \rightarrow \frac{8\,400}{2\,100} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{2\,100 \cdot 8}{8\,400} = 2 \text{ máquinas}$$

025 **Veinte obreros han tendido 400 m de cable durante 6 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 24 obreros durante 14 días para tender 700 m de cable?**

Inversa

Obreros	Días	Metros	Horas al día
20	6	400	8
24	14	700	x

Directa

Inversa

$$\underset{\text{I}}{\frac{24}{20}} \cdot \underset{\text{I}}{\frac{14}{6}} \cdot \underset{\text{D}}{\frac{400}{700}} = \frac{8}{x} \rightarrow \frac{134\,400}{84\,000} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{84\,000 \cdot 8}{134\,400} = 5 \text{ horas}$$

Los 24 obreros trabajarán 5 horas diarias durante 14 días para tender 700 m de cable.

026 **La dueña de una pensión ha presupuestado 250 € para alimentar a sus 18 huéspedes durante 12 días. Si el número de huéspedes aumenta en 6 personas, ¿para cuántos días le llegará el presupuesto?**

Si para 18 huéspedes ⟶ 12 días ⟶ 250 €
para 24 huéspedes ⟶ x días ⟶ 250 €

Inversa

En este caso, como el presupuesto no varía, se trata de una regla de tres simple inversa:

$$\frac{18}{24} = \frac{x}{12} \rightarrow x = \frac{18 \cdot 12}{24} = 9 \text{ días}$$

027 **Un embalse con capacidad de 200 hm³ se encuentra al 45 % de su capacidad. ¿Qué cantidad de agua contiene?**

$$\frac{45}{100} = \frac{x}{200} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 200}{100} = 90 \text{ hm}^3$$

028 **En un periódico se dice que 80 de cada 1 500 personas practican deportes de riesgo. Expresa este dato en porcentaje.**

$$\frac{80}{1\,500} = \frac{x}{100} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 100}{1\,500} = 5{,}33\,\%$$

029 **Una raqueta de tenis cuesta 180 € más un 16 % de IVA. ¿Cuál es su precio final?**

$$180 + \frac{16}{100} \cdot 180 = 180 \cdot (1 + 0{,}16) = 180 \cdot 1{,}16 = 208{,}80\ €$$

030 **María compra un libro por 15 €. En ese precio está incluido un 4 % de IVA. ¿Cuánto vale el libro sin IVA?**

Al precio neto del libro (x) hay que sumarle un 4 %: $0{,}04 \cdot x$ €, y resulta:

$$x + 0{,}04 \cdot x = 15 \rightarrow 1{,}04 \cdot x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{1{,}04} = 14{,}42\ € \text{ sin IVA}$$

031 **Un disco compacto vale 12 €. El dependiente me rebaja un 15 % por ser un cliente habitual y al pagar me cobran un 16 % de IVA. ¿Cuánto pago por el disco? ¿Qué porcentaje supone el precio final sobre el inicial?**

Si me rebajan un 15 % $\rightarrow 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

Y si me cobran el 16 % de IVA $\rightarrow 1 + 0{,}16 = 1{,}16$

Encadenando los porcentajes, tenemos que:

$$0{,}85 \cdot 1{,}16 \cdot 12 = 0{,}986 \cdot 12 = 11{,}83\ €$$

El precio final supone el 98,6 % del precio inicial.

032 **El valor de una acción es de 15 €. El lunes sube un 3 %, el martes baja un 7 % y el miércoles sube un 10 %. ¿Con qué valor comienza el jueves? ¿En qué momentos es su valor mayor que el valor inicial?**

Aplicamos los sucesivos porcentajes de subida o bajada:

Si sube un 3 % $\longrightarrow 1 + 0{,}03 = 1{,}03 \rightarrow 15 \cdot 1{,}03 = 15{,}45$ €

Si baja un 7 % $\longrightarrow 1 - 0{,}07 = 0{,}93 \rightarrow 15{,}45 \cdot 0{,}93 = 14{,}37$ €

Si sube un 10 % $\rightarrow 1 + 0{,}10 = 1{,}10 \rightarrow 14{,}37 \cdot 1{,}10 = 15{,}81$ €

El jueves, la acción valdrá:

$$1{,}03 \cdot 0{,}93 \cdot 1{,}10 \cdot 15 = 1{,}05 \cdot 15 = 15{,}81\ €$$

Su valor es mayor que el valor inicial al comenzar el martes y el jueves.

033 **El precio de los tomates ha sufrido distintas variaciones. A principios de junio, el precio medio de un kilo de tomates era de 2,10 €, subiendo el precio durante este mes un 10 %. En el mes de julio también se incrementó el precio del kilo de tomates en un 17 %, y en el mes de agosto bajó un 8 % sobre el precio del mes de julio. ¿Cuál era el precio de un kilo de tomates al finalizar el mes de agosto?**

¿Cuál ha sido el porcentaje de subida que ha tenido el precio de los tomates entre junio y agosto?

El kilo de tomates en agosto costaba:

$$2{,}10 \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{117}{100} \cdot \frac{92}{100} = 2{,}49 \text{ €}$$

El porcentaje de subida es: $\dfrac{0{,}39}{2{,}10} = 19\,\%$ de junio a agosto

034 **Calcula el interés que producen 1 800 € en 9 meses al 4 % anual.**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1\,200} = \frac{1\,800 \cdot 4 \cdot 9}{1\,200} = 54 \text{ €}$$

Producen un interés de 54 €.

035 **Marta le prestó a Juan 2 460 € al 3 % durante 4 años. ¿Cuánto dinero en total le devolvió Juan tras ese tiempo?**

$$2\,460 + I = 2\,460 + \frac{2\,460 \cdot 3 \cdot 4}{100} = 2\,460 + 295{,}2 = 2\,755{,}20 \text{ €}$$

Le devolvió 2 755,20 €.

036 **¿Qué interés recibiremos por una inversión de 4 500 € al 4 % anual si se retira 2 meses y 9 días después del comienzo de la inversión?**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000} = \frac{4\,500 \cdot 4 \cdot 69}{36\,000} = 34{,}50 \text{ €}$$

Recibiremos un interés de 34,50 €.

037 **Averigua el capital que he invertido en un banco al 4,5 % durante 2 años si en total me han devuelto 1 463 €.**

Sustituyendo en la expresión:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 1\,463 - C = \frac{C \cdot 4{,}5 \cdot 2}{100}$$

$$\rightarrow (1\,463 - C) \cdot 100 = 9C \rightarrow 146\,300 - 100C = 9C$$

$$\rightarrow 146\,300 = 109C \rightarrow C = \frac{146\,300}{109} = 1\,342{,}20 \text{ €}$$

El capital que he invertido es de 1 342,20 €.

ACTIVIDADES

038 **Indica cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales.**

a) La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.

b) La longitud del lado de un cuadrado y su área.

c) El número de hijos de una familia y el número de días de vacaciones.

Es directamente proporcional el par de magnitudes del apartado a).

039 **En un mercado hay dos puestos donde se venden manzanas con estas tablas de precios.**

Puesto *A*		
1 kg	2 kg	3 kg
0,53 €	1,06 €	1,59 €

Puesto *B*		
1 kg	2 kg	3 kg
0,60 €	1 €	1,50 €

¿En cuál de estos puestos las magnitudes peso y precio son directamente proporcionales?

Veamos si se cumplen o no las proporciones:

$$\frac{0,53}{1} \overset{?}{=} \frac{1,06}{2} \overset{?}{=} \frac{1,59}{3} \rightarrow 0,53 = 0,53 = 0,53$$

$$\frac{0,60}{1} \overset{?}{=} \frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{1,50}{3} \rightarrow 0,60 \neq 0,50$$

Luego las magnitudes peso y precio son directamente proporcionales en el puesto *A*.

040 **Completa la tabla, sabiendo que es una tabla de proporcionalidad directa.**

100	**500**	**1 000**	5 000	**25 000**
4	20	40	**200**	1 000

041 **Observa la tabla de proporcionalidad de las magnitudes siguientes.**

Magnitud *M*	4	6	7	9	10
Magnitud *M′*	12	18	21	*y*	*y′*

Comprueba que las magnitudes *M* y *M′* son directamente proporcionales, y calcula *y* e *y′*.

Se deberá cumplir que: $\frac{4}{12} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} \rightarrow 0,\widehat{3} = 0,\widehat{3} = 0,\widehat{3}$

$$\frac{4}{12} = \frac{9}{y} \longrightarrow 4 \cdot y = 12 \cdot 9 \longrightarrow y = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27$$

$$\frac{4}{12} = \frac{10}{y'} \rightarrow 4 \cdot y' = 12 \cdot 10 \rightarrow y' = \frac{12 \cdot 10}{4} = 30$$

042 **Señala cuáles de los siguientes pares de magnitudes son inversamente proporcionales.**

a) El número de máquinas y el tiempo que tardan en hacer un trabajo.

b) La edad de una persona y su velocidad al caminar.

c) La base y la altura de un rectángulo de área 20 cm^2.

d) La base y la altura de un rectángulo de 40 cm de perímetro.

Son inversamente proporcionales los pares de magnitudes de los apartados a) y c).

043 **Estudia si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales.**

a) El radio de una circunferencia y su longitud.

b) La velocidad que lleva un coche y el tiempo que emplea en hacer un determinado recorrido.

c) El número de entradas de un cine y su precio.

d) La superficie de una pared y el tiempo que se tarda en pintarla.

e) La gasolina que gasta un coche y la distancia que recorre.

a) Directamente proporcional

b) Inversamente proporcional

c) Directamente proporcional

d) Directamente proporcional

e) Directamente proporcional

044 **Completa las siguientes tablas para que sean de proporcionalidad inversa.**

a)

2	**3**	**4**	**5**
0,90	0,60	0,45	0,36

b)

4	**12**	**30**	**60**
420	140	56	**28**

045 **Comprueba que las magnitudes *M* y *M'* son inversamente proporcionales, y calcula el valor de *y* e *y'*.**

Magnitud *M*	4	6	8	10	16
Magnitud *M'*	12	8	6	y	y'

Se deberá cumplir que: $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 \rightarrow 48 = 48 = 48$

$$4 \cdot 12 = 10 \cdot y \longrightarrow y = \frac{4 \cdot 12}{10} = 4{,}8$$

$$4 \cdot 12 = 16 \cdot y' \rightarrow y' = \frac{4 \cdot 12}{16} = 3$$

046 **En cada una de estas tablas de proporcionalidad inversa hay un error. Corrígelo y calcula la constante de proporcionalidad.**

a)

9	**6**	**5,4**	**4,5**	**4**
6	**9**	**10**	**12**	13,5

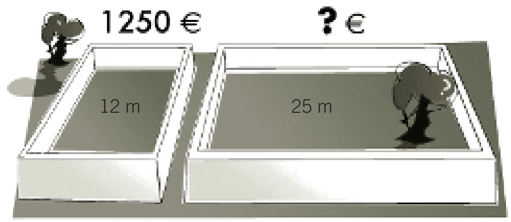
$k = 54$

b)

1,2	**2,4**	**4,8**	**6**	**7,2**
50	**25**	12,5	**10**	**8,$\widehat{3}$**

$k = 60$

047 ● **Por construir una valla de 12 metros se han pagado 1 250 €. ¿Cuánto habrá que pagar por otra valla de 25 metros?**



$$\left.\begin{array}{l} 12 \rightarrow 1\,250 \\ 25 \rightarrow \quad x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{25 \cdot 1\,250}{12} = 2\,604{,}17 \text{ €}$$

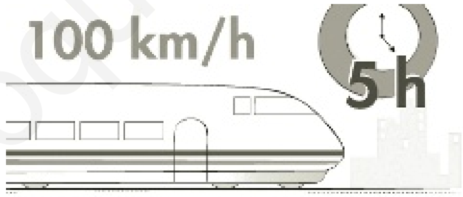
048 ● **Amanda se ha comprado una pieza de tela de 2 metros que le ha costado 32 €. ¿Cuánto le hubiese costado un trozo de 3,2 metros?**

$$\left.\begin{array}{l} 2 \longrightarrow 32 \\ 3{,}2 \rightarrow \quad x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{3{,}2 \cdot 32}{2} = 51{,}20 \text{ €}$$

049 ● **Un coche, viajando a una determinada velocidad, consume 25 litros de combustible en un viaje de 300 km. ¿Cuánto consumirá en un viaje de 550 km, si va a la misma velocidad?**

$$\left.\begin{array}{l} 300 \rightarrow 25 \\ 550 \rightarrow \quad x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{550 \cdot 25}{300} = 45{,}83 \text{ litros}$$

050 ●● **Un tren que circula a 100 km/h tarda 5 horas en llegar a una ciudad. ¿A qué velocidad circula otro tren que tarda 6 horas y cuarto en hacer el mismo recorrido?**



La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

$$100 \cdot 5 = x \cdot 6{,}25 \rightarrow x = \frac{100 \cdot 5}{6{,}25} = 80 \text{ km/h}$$

051 ●● **Si un pintor ha pintado 75 m² de pared con 125 kilos de pintura:**

a) ¿Cuánta pintura habría necesitado para pintar 300 m² de pared?

b) Con 50 kg, ¿cuántos metros cuadrados puede pintar?

Los kilos de pintura y la superficie de pared (m²) son magnitudes directamente proporcionales.

a) $$\left.\begin{array}{l} \text{Si con } 125 \text{ kg} \longrightarrow 75 \text{ m}^2 \\ \text{con } \; x \; \text{ kg} \longrightarrow 300 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{125 \cdot 300}{75} = 500 \text{ kg}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \text{Si con } 125 \text{ kg} \longrightarrow 75 \text{ m}^2 \\ \text{con } \; 50 \; \text{ kg} \longrightarrow x \text{ m}^2 \end{array}\right\} \longrightarrow x = \frac{50 \cdot 75}{125} = 30 \text{ m}^2$$

052 ●● **Quince personas realizan el montaje de unas placas solares en tres semanas.**

a) ¿Cuánto tardarían 35 personas en hacer ese montaje?

b) Si queremos realizarlo en 15 días solamente, ¿cuántas personas necesitaríamos?

El número de personas y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. Expresamos el tiempo en días:

a) 15 personas · 21 días = 35 personas · x días $\rightarrow x = \dfrac{15 \cdot 21}{35} = 9$ días

b) 15 personas · 21 días = x personas · 15 días $\rightarrow x = \dfrac{15 \cdot 21}{15} = 21$ personas

053 ●● **Tres cajas de polvorones pesan 2,7 kg.**

a) ¿Cuánto pesan 15 cajas?

b) Si nuestra furgoneta puede transportar 500 kg, ¿podemos llevar en ella 230 cajas de polvorones?

El número de cajas y el peso son magnitudes directamente proporcionales.

a) $\dfrac{3 \text{ cajas}}{2{,}7 \text{ kg}} = \dfrac{15 \text{ cajas}}{x \text{ kg}} \rightarrow x = \dfrac{2{,}7 \cdot 15}{3} = 13{,}5$ kg

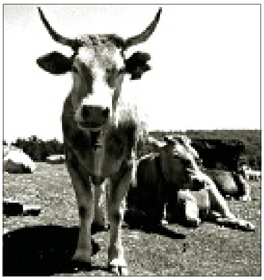
b) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } 3 \text{ cajas} \longrightarrow 2{,}7 \text{ kg} \\ 230 \text{ cajas} \longrightarrow x \text{ kg} \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{230 \cdot 2{,}7}{3} = 207$ kg

Como 207 kg < 500 kg (peso máximo admisible), sí que podemos llevar las 230 cajas.

054 ●● **Una explotación agraria tiene hierba para alimentar a 48 vacas durante 18 semanas.**

a) ¿Para cuántas semanas tendría si fuesen 24 vacas más?

b) Si pasadas 7 semanas se compran 18 vacas, ¿hasta cuándo habrá hierba?



El número de vacas y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

a) 48 vacas · 18 semanas = $(48 + 24) \cdot x \rightarrow x = \dfrac{48 \cdot 18}{72} = 12$ semanas

b) Pasadas 7 semanas quedaría hierba para 11 semanas más en el caso de las 48 vacas iniciales. Si se compran 18 vacas más:

48 vacas · 11 semanas = $(48 + 18) \cdot x \rightarrow x = \dfrac{48 \cdot 11}{66} = 8$ semanas

055 ●● **En una casa en la que viven 6 personas se consume, para aseo personal, una media de 900 litros de agua diarios. ¿Cuánto se gastará en la casa si viven 5 personas más?**

$$\left.\begin{array}{l} 6 \rightarrow 900 \\ 11 \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{11 \cdot 900}{6} = 1\,650 \text{ litros}$$

056 ●●● **El consumo de agua en un gimnasio al que asisten 150 personas, es de 6 000 litros diarios.**

a) ¿Cuál será el consumo si se inscriben 30 personas más?

b) Si a partir de 7 000 litros el consumo tiene un recargo, ¿cuál es el número máximo de nuevos clientes que pueden inscribirse sin pagar ese recargo?

El número de personas y el consumo de agua son magnitudes directamente proporcionales.

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } 150 \text{ personas} \longrightarrow 6\,000 \text{ litros}\\ \phantom{\text{Si }}180 \text{ personas} \longrightarrow x \text{ litros}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{180 \cdot 6\,000}{150} = 7\,200 \text{ litros}$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } 150 \text{ personas} \longrightarrow 6\,000 \text{ litros}\\ \phantom{\text{Si }}x \text{ personas} \longrightarrow 7\,000 \text{ litros}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{150 \cdot 7\,000}{6\,000} = 175 \text{ personas}$

Se podrán inscribir 25 clientes más.

057 ●●● **Para hacer una minipizza de 10 centímetros de diámetro necesitamos 100 gramos de queso. Si queremos hacer una pizza de 20 centímetros de diámetro, ¿qué cantidad de queso usaremos?**

El área de la pizza (no el diámetro) y los gramos de queso son magnitudes directamente proporcionales.

$\left.\begin{array}{l}\text{Si para } \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 \longrightarrow 100 \text{ g}\\ \phantom{\text{Si }}\text{para } \pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \longrightarrow x \text{ g}\end{array}\right\} \rightarrow x = \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 100}{\pi \cdot 5^2} = 400 \text{ g}$

058 ● **Un constructor quiere repartir 1 000 € entre tres de sus obreros de forma directamente proporcional a su antigüedad en la empresa. Andrés lleva 9 años en la empresa, mientras que Bernardo y Carlos solo tienen 3 años de antigüedad. ¿Qué parte les corresponde?**

$\dfrac{1\,000}{9+3+3} = \dfrac{\text{Andrés}}{9} \rightarrow \text{Andrés} = \dfrac{1\,000 \cdot 9}{9+3+3} = 600 \text{ €}$

$\dfrac{1\,000}{9+3+3} = \dfrac{\text{Carlos}}{3} \longrightarrow \text{Carlos} = \dfrac{1\,000 \cdot 3}{9+3+3} = 200 \text{ €}$

A Bernardo también le corresponden 200 €.

059 ●
Un abuelo decide repartir 120 caramelos entre sus cuatro nietos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 4, 6, 6 y 8 años, respectivamente. ¿Cuántos caramelos le corresponden a cada nieto?

El nieto que tiene 4 años: $\dfrac{120}{4+6+6+8} = \dfrac{a}{4} \rightarrow a = 20$ caramelos

Los nietos que tienen 6 años: $\dfrac{120}{4+6+6+8} = \dfrac{b}{6} \rightarrow b = 30$ caramelos

El nieto que tiene 8 años: $\dfrac{120}{4+6+6+8} = \dfrac{c}{8} \rightarrow c = 40$ caramelos

060 ●●
Dos amigos montan un negocio. Uno de ellos se retira al cabo de 8 meses. El otro socio continúa hasta final de año, siendo el resultado unas pérdidas de 1 500 €. ¿Cuánto tiene que pagar cada amigo?

El amigo que ha estado 8 meses: $\dfrac{1\,500}{8+12} = \dfrac{a}{8} \longrightarrow a = 600$ €

El amigo que ha estado 1 año: $\dfrac{1\,500}{8+12} = \dfrac{b}{12} \rightarrow b = 900$ €

061 ●●
Vicente y Paloma abren una cartilla de ahorros en el banco. Vicente pone 400 € y Paloma 800 €. Al cabo de unos años les devuelven 1 380 €. ¿Cómo los tienen que repartir? ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Tendrán que repartirlo de forma directamente proporcional.

$$\frac{x}{400} = \frac{y}{800} = \frac{1\,380}{400+800} \rightarrow x = \frac{400 \cdot 1\,380}{1\,200} = 460 \text{ € para Vicente}$$

$$y = \frac{800 \cdot 1\,380}{1\,200} = 920 \text{ € para Paloma}$$

062 ●●
Se decide construir un puente cuyo coste, de un millón de euros, han de pagar entre tres localidades en partes inversamente proporcionales a la distancia de cada localidad al puente. Alameda está a 6 km, Buenasaguas está a 8 km y Cabestreros a 10 km. Calcula cuánto ha de pagar cada localidad.

$$k = \frac{1\,000\,000}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}} = \frac{240\,000\,000}{94} = 2\,553\,191{,}49$$

A Alameda le corresponden $\longrightarrow$ 2 553 191,49 : 6 = 425 531,91 €
A Buenasaguas le corresponden $\rightarrow$ 2 553 191,49 : 8 = 319 148,94 €
A Cabestreros le corresponden $\longrightarrow$ 2 553 191,49 : 10 = 255 319,15 €

063 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA CANTIDAD REPARTIDA CONOCIENDO UNA PARTE DIRECTAMENTE PROPORCIONAL?

Se ha repartido una cantidad de forma directamente proporcional a las edades de tres hermanos, que son 8, 4 y 3 años. Si al hermano mayor le han correspondido 800 €, ¿qué cantidad se ha repartido?

PRIMERO. Se halla la constante de proporcionalidad.

$$k = \frac{800}{8} = 100$$

SEGUNDO. Se calcula el total: $(8 + 4 + 3) \cdot 100 = 1\,500$

Se han repartido 1 500 €.

064 ●● **Luis, Damián y Carlos compraron un décimo de lotería de Navidad. Carlos puso 10 €, Damián 6 € y Luis 4 €. El décimo fue premiado y, en el reparto, a Carlos le tocaron 5 000 €. ¿Cuánto le correspondió a los otros dos?**

$$k = \frac{5\,000}{10} = 500$$

A Damián le correspondieron: $6 \cdot 500 = 3\,000$ €

A Luis le correspondieron: $4 \cdot 500 = 2\,000$ €

065 ●●● **Un abuelo reparte 10 350 € entre sus tres nietos de forma directamente proporcional a sus edades. Si los dos menores tienen 22 años y 23 años, calcula:**

a) La edad del hermano mayor, sabiendo que le correspondieron 3 600 €.

b) Las cantidades de los otros hermanos.

a) $\dfrac{10\,350}{x + 22 + 23} = \dfrac{3\,600}{x} \rightarrow 10\,350x = 3\,600x + 162\,000 \rightarrow x = 24$ años

b) $k = \dfrac{3\,600}{24} = 150$. Al nieto que tiene 22 años le correspondieron:

$150 \cdot 22 = 3\,300$ €, y al nieto de 23 años: $150 \cdot 23 = 3\,450$ €

066 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA CANTIDAD REPARTIDA CONOCIENDO UNA PARTE INVERSAMENTE PROPORCIONAL?

Se ha repartido una herencia de forma inversamente proporcional a las edades de tres primos, que son 25, 20 y 16 años. Al primo de 25 años le han correspondido 800 €. ¿Qué cantidad se ha repartido?

PRIMERO. Se calcula la constante de proporcionalidad.

$$800 = \frac{k}{25} \rightarrow k = 800 \cdot 25 = 20\,000$$

SEGUNDO. Se halla el total.

$$\frac{k}{25} + \frac{k}{20} + \frac{k}{16} = \text{Herencia}$$

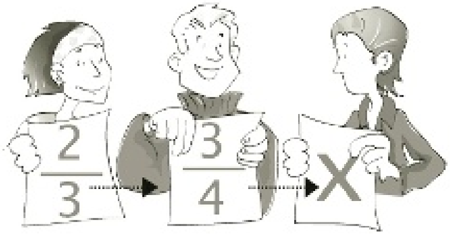
$$\frac{20\,000}{25} + \frac{20\,000}{20} + \frac{20\,000}{16} = 3\,050 \text{ €}$$

Se han repartido 3 050 €.

067 ●● **Si repartes una cantidad en partes inversamente proporcionales a 10, 7 y 3, la cantidad que le corresponde a 3 es 50. ¿Qué cantidad les corresponde a 10 y 7?**

$k = 3 \cdot 50 = 150$. A 10 le corresponden: $150 : 10 = 15$,
y a 7 le corresponden: $150 : 7 = 21{,}43$

068 ●●● **De acuerdo con un testamento, se reparten 359 568 € entre tres personas en partes inversamente proporcionales a su sueldo mensual. Calcula lo que le corresponderá a cada una si el sueldo menor es $\frac{2}{3}$ del sueldo intermedio, y este es $\frac{3}{4}$ del mayor.**



Mayor: x Intermedio: $\frac{3x}{4}$ Menor: $\frac{x}{2}$

$$k = \frac{359\,568}{\frac{1}{x} + \frac{4}{3x} + \frac{2}{x}} = \frac{1\,078\,704x}{13} = 82\,977{,}23x$$

Mayor: $82\,977{,}23x : x = 82\,977{,}23$ €

Intermedio: $82\,977{,}23x : \frac{3x}{4} = 110\,636{,}31$ €

Menor: $82\,977{,}23x : \frac{x}{2} = 165\,954{,}46$ €

069 ●●

Un grupo de 8 amigos pagó 940 € por su estancia de 3 días en un hotel. ¿Cuánto costaba la estancia diaria de cada amigo?

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ personas} \longrightarrow 3 \text{ días} \longrightarrow 940\ € \\ 1 \text{ persona} \longrightarrow 1 \text{ día} \longrightarrow x\ € \end{array}\right\}$$

Directa

Directa

$$\frac{8}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{940}{x} \rightarrow \frac{24}{1} = \frac{940}{x} \rightarrow x = \frac{940}{24} = 39{,}17\ €$$

070 ●●

Dos máquinas, funcionando 6 horas diarias, consumen 1 500 kWh en un día. ¿Cuánto consumirán 3 máquinas funcionando 8 horas diarias?

Máquinas	Horas	Consumo
2	6	1 500
3	8	x

Tres máquinas consumirán: $\dfrac{1\,500}{2 \cdot 6} = \dfrac{x}{3 \cdot 8} \rightarrow x = \dfrac{1\,500 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 6} = 3\,000$ kWh

071 ●●●

Una barra de metal de 10 m de largo y 2 cm² de sección pesa 8,45 kg. ¿Cuánto pesará una barra del mismo material de 5 m de largo y 7 cm² de sección?

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ m de largo} \longrightarrow 2 \text{ cm}^2 \text{ de sección} \longrightarrow 8{,}45 \text{ kg} \\ 5 \text{ m de largo} \longrightarrow 7 \text{ cm}^2 \text{ de sección} \longrightarrow x \text{ kg} \end{array}\right\}$$

Directa

Directa

$$\frac{10}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8{,}45}{x} \rightarrow \frac{20}{35} = \frac{8{,}45}{x} \rightarrow x = \frac{35 \cdot 8{,}45}{20} = 14{,}79 \text{ kg}$$

072 ●●

En las fiestas de un barrio se colocan 1 200 farolillos que se encienden 8 horas al día, ocasionando un gasto total de 1 440 €. ¿Cuál sería el gasto si se colocasen 600 farolillos más y se encendiesen 2 horas menos?

$$\left.\begin{array}{l} 1\,200 \text{ farolillos} \longrightarrow 8 \text{ horas/día} \longrightarrow 1\,440\ € \\ 1\,800 \text{ farolillos} \longrightarrow 6 \text{ horas/día} \longrightarrow x\ € \end{array}\right\}$$

Directa

Directa

$$\frac{1\,200}{1\,800} \cdot \frac{8}{6} = \frac{1\,440}{x} \rightarrow \frac{9\,600}{10\,800} = \frac{1\,440}{x} \rightarrow x = 1\,620\ €$$

073 ●●

Se cree que, para construir la pirámide de Keops, trabajaron 20 000 personas durante 10 horas diarias, y tardaron 20 años en acabarla.

a) ¿Cuánto habrían tardado si fuesen 10 000 personas más?

b) ¿Y si hubiesen trabajado 8 horas diarias?

a) $$\left.\begin{array}{l} 20\,000 \rightarrow 20 \\ 30\,000 \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{20\,000 \cdot 20}{30\,000} = 13{,}33 = 13 \text{ años y 4 meses}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 10 \rightarrow 20 \\ 8 \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 20}{8} = 25 \text{ años}$$

074 ●●

Cien trabajadores, trabajando 8 horas diarias, tardan 300 días en construir un barco.

a) Si aumentase la plantilla en 20 personas, ¿cuántos días se adelantaría la construcción?

b) Si se redujese la plantilla en 20 personas, ¿cuántos días se retrasaría la construcción?

c) ¿Y si la plantilla se redujese en 20 personas pero se aumentasen los turnos a 9 horas diarias?

a) $$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ personas} \longrightarrow 300 \text{ días} \\ 120 \text{ personas} \longrightarrow x \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{100}{120} = \frac{x}{300} \rightarrow x = 250 \text{ días}$$

Inversa

Se adelantaría 50 días.

b) $$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ personas} \longrightarrow 300 \text{ días} \\ 80 \text{ personas} \longrightarrow x \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{100}{80} = \frac{x}{300} \rightarrow x = 375 \text{ días}$$

Inversa

Se retrasaría 75 días.

c) $$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ personas} \longrightarrow 8 \text{ horas/día} \longrightarrow 300 \text{ días} \\ 80 \text{ personas} \longrightarrow 9 \text{ horas/día} \longrightarrow x \text{ días} \end{array}\right\}$$

Inversa

Inversa

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{9}{8} = \frac{300}{x} \rightarrow \frac{720}{800} = \frac{300}{x} \rightarrow x = 333{,}33 \text{ días}$$

Se retrasaría casi 34 días.

075 ●

Tres de cada cinco alumnos han tenido la gripe en el mes de enero. Expresa este dato en forma de porcentaje.

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{100} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{5} = 60\,\%$$

076 ●

Por un CD que cuesta 21 € me hacen un 15 % de descuento. ¿Cuánto dinero me ahorro?

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{21} \rightarrow x = \frac{21 \cdot 15}{100} = 3{,}15 \text{ €}$$

077 ●●

En un instituto, 63 alumnos, que son el 15 % del total, han viajado al extranjero. ¿Cuántos alumnos tiene el instituto?

$$\frac{15}{100} = \frac{63}{x} \rightarrow x = \frac{63 \cdot 100}{15} = 420 \text{ alumnos}$$

078 ●●

Un vendedor de coches recibe como comisión el 0,8 % de las ventas que realiza.

a) Si en un mes recibió 300 € de comisión, ¿qué ventas realizó?

b) Si el mes siguiente vendió por valor de 45 000 €, ¿qué comisión obtuvo?

a) $\dfrac{300 \cdot 100}{0{,}8} = 37\,500 \text{ €}$ b) $\dfrac{45\,000 \cdot 0{,}8}{100} = 360 \text{ €}$

079 ●●

Un comerciante decide subir el precio de una mercancía, que era de 72 €, un 3 %, y a la semana siguiente, otro 3 % sobre el último precio. ¿Cuál es el precio final de venta?

1.er aumento del 3 % $\rightarrow$ 1,03

2.º aumento del 3 % $\longrightarrow$ 1,03

Encadenando los porcentajes de aumento:

$1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 72 = 76{,}38$ €

080 ●●

En dos semanas consecutivas se han aplicado al precio de un artículo aumentos del 2 % y 5 %. ¿En qué porcentaje se ha incrementado el artículo sobre su precio original?

$$100 \cdot \frac{102}{100} \cdot \frac{105}{100} = 107{,}10 \text{ €}$$

Se incrementó un 7,1 %.

081 ●●

En una tienda suben el precio de un producto de 200 € un 10 %. A la semana siguiente deciden rebajarlo un 10 % del precio que tiene en ese momento. ¿Qué ha ocurrido con el precio?

El precio final es: $200 \cdot \dfrac{110}{100} \cdot \dfrac{90}{100} = 198$ €, es decir, se ha rebajado 2 €, un 1 %.

082 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE COMPARA MEDIANTE PORCENTAJES?

En una cafetería han aumentado los precios de los refrescos: la naranjada de 1 € a 1,05 €, y los refrescos de cola, de 1,10 € a 1,15 €.
¿Ha sido proporcional el aumento?

PRIMERO. Se calcula la subida lineal.

$$1{,}05 - 1 = 0{,}05 \qquad 1{,}15 - 1{,}10 = 0{,}05$$

Los dos refrescos suben la misma cantidad.

SEGUNDO. Se halla el porcentaje que representa la subida.

$$\frac{0{,}05}{1} = 0{,}05 \rightarrow 5\,\% \qquad \frac{0{,}05}{1{,}10} = 0{,}0454 \rightarrow 4{,}54\,\%$$

El aumento no es proporcional.

083 ●●

La carne de cordero, durante la Navidad, aumentó su precio de 8,85 €/kg a 11,55 €/kg. Otro producto que se ha encarecido ha sido las uvas, de 2,10 €/kg a 3,95 €/kg. ¿Qué producto se ha incrementado más en proporción?

Carne: $\dfrac{11{,}55 - 8{,}85}{8{,}85} = 0{,}305 = 30{,}5\,\%$

Uvas: $\dfrac{3{,}95 - 2{,}10}{2{,}10} = 0{,}881 = 88{,}1\%$

Se ha incrementado más el precio de las uvas.

084 ●●

Al calentar una barra de metal de 1 m a 200 °C, se ha dilatado hasta medir 1,04 m. Una barra de 60 cm de otro metal, al calentarla a la misma temperatura, se ha dilatado hasta medir 61,9 cm. ¿Qué metal se dilata menos?

Barra de 1 m: $\dfrac{1{,}04 - 1}{1} = 0{,}04 = 4\,\%$

Barra de 60 cm: $\dfrac{61{,}9 - 60}{60} = 0{,}03\widehat{16} = 3{,}17\,\%$

Se dilata menos el metal de la barra de 60 cm.

085 ●●●

En un envase de galletas anuncian que contiene un 25 % más de galletas por el mismo precio. Los envases antiguos pesaban 1 kg y el envase actual con la oferta pesa 1,2 kg. ¿Es cierta la publicidad?

El 25 % de 1 kg es: $\dfrac{25}{100} = \dfrac{x}{1} \rightarrow x = 0{,}25$ kg

Luego el peso actual del paquete debería ser 1,25 kg.

Como 1,2 < 1,25, la publicidad no es cierta.

086 ¿Qué interés producen 3 000 € al 4,3 % durante 5 años? ¿Y durante 15 meses? ¿Y durante 150 días?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{3\,000 \cdot 4{,}3 \cdot 5}{100} = 645 \text{ €}$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1\,200} = \frac{3\,000 \cdot 4{,}3 \cdot 15}{1\,200} = 161{,}25 \text{ €}$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000} = \frac{3\,000 \cdot 4{,}3 \cdot 150}{36\,000} = 53{,}75 \text{ €}$$

087 ¿Cuál es el capital que impuesto al 7,5 % produce 3 760 € al cabo de un año?

$$3\,760 = \frac{C \cdot 7{,}5 \cdot 1}{100} \rightarrow C = \frac{3\,760 \cdot 100}{7{,}5} = 50\,133{,}33 \text{ €}$$

088 **Emilio ha decidido invertir sus ahorros, que son 9 600 €, en un depósito financiero que ofrece un interés del 3,85 % durante 4 años.**

a) ¿Cuánto cobrará de intereses durante los 6 primeros meses?

b) ¿Y por 3 meses y 20 días?

c) Si decidiera sacar el dinero antes de que concluya el período de inversión, 4 años, se le penalizaría con un pago del 5 % del capital invertido. Después de un año y dos meses y medio, ¿perderá o ganará dinero?

d) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que, al cancelar el depósito, no pierda dinero?

a) El interés de un año es: $I = \frac{9\,600 \cdot 3{,}85 \cdot 1}{100} = 369{,}60$ €,

y por 6 meses es: $\frac{9\,600 \cdot 3{,}85 \cdot 6}{1\,200} = 184{,}80$ €

b) 3 meses y 20 días son 110 días.

El interés es: $\frac{9\,600 \cdot 3{,}85 \cdot 110}{36\,000} = 112{,}93$ €

c) El interés por 1 año y 2,5 meses es: $\frac{9\,600 \cdot 3{,}85 \cdot 14{,}5}{1\,200} = 446{,}60$ €

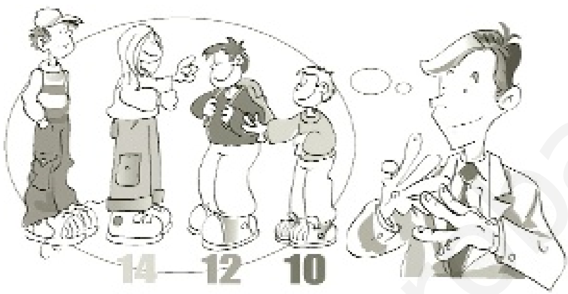
La penalización es: $\frac{9\,600 \cdot 5}{100} = 480$ €

En total perderá: $480 - 446{,}60 = 33{,}40$ €

d) $480 = \frac{9\,600 \cdot 3{,}85 \cdot t}{100} \rightarrow t = \frac{480 \cdot 100}{9\,600 \cdot 3{,}85} = 1{,}3$ años $=$

$=$ 1 año, 3 meses y 18 días

089 **Urbano ha recibido como herencia 40 000 €. Invierte este dinero en un depósito con un interés del 5 % anual durante 5 años y medio. Cuando concluya este tiempo, los intereses que reciba los repartirá entre sus 4 hijos, de manera inversamente proporcional a sus edades, que serán 15, 14, 12 y 10 años.**



a) ¿Qué cantidad recibirá de intereses cuando concluya su inversión, es decir, dentro de 5 años y medio?

b) ¿Cuánto dinero le corresponderá a cada hijo?

a) $I = \dfrac{40\,000 \cdot 5 \cdot 5{,}5}{100} = 11\,000$ €

b) $k = \dfrac{11\,000}{\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{10}} = \dfrac{4\,620\,000}{28 + 30 + 35 + 42} = 34\,222{,}22$

Al hijo de 15 años le corresponden → $34\,222{,}22 : 15 = 2\,281{,}48$ €

Al hijo de 14 años le corresponden → $34\,222{,}22 : 14 = 2\,444{,}44$ €

Al hijo de 12 años le corresponden → $34\,222{,}22 : 12 = 2\,851{,}85$ €

Al hijo de 10 años le corresponden → $34\,222{,}22 : 10 = 3\,422{,}22$ €

090 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MEZCLAS?

Se mezclan dos tipos de harina, *A* y *B*, de precios 0,75 €/kg y 0,50 €/kg en la proporción de 5 kg de tipo *A* y 3 kg de tipo *B*. ¿A qué precio sale el kilo de la mezcla?

PRIMERO. Se calcula el precio y la cantidad total.

Total de harina = 5 kg + 3 kg = 8 kg

Precio total = $5 \cdot 0{,}75 + 3 \cdot 0{,}50 = 5{,}25$ €

SEGUNDO. Se reduce a la unidad.

Precio de la mezcla $= \dfrac{5{,}25}{8} = 0{,}66$ €/kg

091 ●●

Mezclamos 8 kg de café de 2,25 €/kg, con 5 kg de café de 1,66 €/kg. ¿A cuánto tendremos que vender el kilo si queremos ganar un 10 % de su precio por kilo?

Total de café $= 8 + 5 = 13$ kg

Precio total $= 8 \cdot 2{,}25 + 5 \cdot 1{,}66 = 26{,}30$ €

Si le sumamos el 10 % sería: $26{,}30 \cdot 1{,}1 = 28{,}93$ €

El precio por kilo es: $\dfrac{28{,}93}{13} = 2{,}23$ €/kg

Para ganar un 10 % tendremos que vender el kilo de mezcla a 2,23 €/kg.

092 ●●

Un lingote de plata de 200 g de ley del 90 % (90 % de pureza) se funde con otro de 300 g de 80 % de ley. ¿Cuál es la ley del nuevo lingote?

El metal total es:

$$200 + 300 = 500 \text{ g}$$

El total de plata pura es:

$$\frac{200 \cdot 90}{100} + \frac{300 \cdot 80}{100} = 420 \text{ g}$$

La ley de la mezcla es:

$$\frac{420}{500} = 84\ \%$$

La ley del nuevo lingote es del 84 %.

093 ●●

Se tiene alcohol de 96 %. Si mezclamos 1 litro de alcohol con medio litro de agua, ¿cuál será la graduación del alcohol resultante?

El total de líquido es 1,5 litros y el total de alcohol es 0,96 litros.

La graduación de la mezcla será: $\dfrac{0{,}96}{1{,}5} = 0{,}64 = 64\ \%$

094 ●●●

¿En qué proporción se han de mezclar dos tipos de café *A* y *B*, con precios 5 €/kg y 8 €/kg, para que resulte un café cuyo precio sea 7,25 €/kg?

Suponemos que mezclamos 1 kg del café *A* y *x* kg del café *B*.

El precio total es:

$$\frac{1 \cdot 5 + x \cdot 8}{1 + x} = 7{,}25 \text{ €/kg}$$

$5 + 8x = 7{,}25 + 7{,}25x \rightarrow 0{,}75x = 2{,}25 \rightarrow x = 3$ kg

Por tanto, la proporción es 1 kg de café *A* y 3 kg de café *B* (25 % de *A* y 75 % de *B*).

095 ●●●

Un lingote de oro y cobre cuya ley es del 90 % tiene un peso de 100 g. ¿Con qué cantidad de cobre lo tendremos que fundir para que la ley baje al 75 %?

Siendo x la cantidad de cobre, la cantidad de la aleación será de $(100 + x)$ g.

La cantidad de oro puro es: $100 \cdot 90\,\% = 90$ g

La aleación tendrá una ley de: $\dfrac{90}{100 + x} = 0{,}75 \rightarrow 90 = 75 + 0{,}75x$

$$\rightarrow x = \frac{15}{0{,}75} = 20 \text{ g de cobre}$$

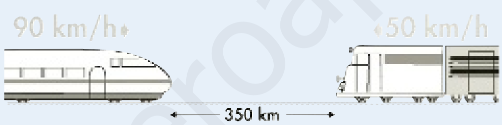
096

HAZLO ASÍ

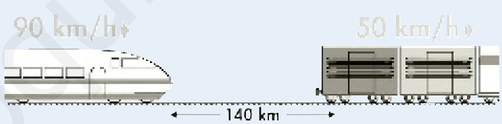
¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MÓVILES?

Un tren de pasajeros lleva una velocidad de 90 km/h. Otro tren de mercancías, que circula por una vía paralela, va a 50 km/h.

a) Si parten de puntos opuestos, distantes 350 km entre sí, a la misma hora, y uno va al encuentro del otro, ¿cuánto tardarán en encontrarse?



b) Si los dos parten del mismo punto y el tren de mercancías, que ha salido antes, lleva una ventaja de 140 km, ¿cuánto tardará el tren de pasajeros en alcanzarlo?



PRIMERO. Se suman o se restan las velocidades según vayan en distinta o en la misma dirección.

a) VELOCIDAD DE APROXIMACIÓN $= 90 + 50 = 140$ km/h
   Se aproximan a una velocidad de 140 km/h.

b) VELOCIDAD DE APROXIMACIÓN $= 90 - 50 = 40$ km/h
   El tren de pasajeros se aproxima al de mercancías con una velocidad de 40 km/h.

SEGUNDO. El cociente entre la distancia que los separa y la velocidad a la que se aproximan es el tiempo.

a) $\text{Tiempo} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \dfrac{350}{140} = 2{,}5$

   Tardarán 2,5 h en encontrarse.

b) $\text{Tiempo} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \dfrac{140}{40} = 3{,}5$

   Tardará 3,5 h en alcanzarlo.

097 **A las 9:45 h parte de Sevilla un AVE con dirección a Madrid que circula a una velocidad media de 220 km/h. A la misma hora sale de Madrid un tren de mercancías, que circula por una vía paralela a la del AVE, y que lleva una velocidad de 40 km/h. ¿A qué hora se encontrarán si la distancia entre Madrid y Sevilla es de 520 km?**

La velocidad de aproximación es:

$$220 + 40 = 260 \text{ km/h}$$

Por tanto, el tiempo de alcance es:

$$\frac{520}{260} = 2 \text{ horas}$$

Se encuentran a las 11:45 h.

098 **Un ciclista, que circula a una velocidad de 15 km/h, le lleva una hora de ventaja a un coche que viaja a una velocidad de 60 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar al ciclista?**

Como el ciclista lleva 1 hora de ventaja, va 15 km por delante del coche.

La velocidad de aproximación es:

$$60 - 15 = 45 \text{ km/h}$$

$$\text{Tiempo} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \text{ hora} = 20 \text{ minutos}$$

099 **Si una magnitud *A* es directamente proporcional a otra magnitud *B*, y esta es inversamente proporcional a *C*, ¿cómo son *A* y *C*?**

A y B son directamente proporcionales $\rightarrow \frac{A}{B} = k_1$

B y C son inversamente proporcionales $\rightarrow B \cdot C = k_2$

Si multiplicamos los dos términos de la igualdad por k_1:

$$B \cdot C = k_2 \rightarrow B \cdot C \cdot k_1 = k_2 \cdot k_1 \rightarrow B \cdot C \cdot \frac{A}{B} = k_2 \cdot k_1 \rightarrow A \cdot C = k_2 \cdot k_1$$

Luego A y C son inversamente proporcionales.

100 **Reparte un número *k* en dos partes directamente proporcionales a dos números cualesquiera, *m* y *n*, y después, haz el reparto inversamente proporcional a los mismos valores, *m* y *n*.**

a) ¿Qué relación hay entre las partes obtenidas en cada reparto?

b) ¿Ocurre siempre lo mismo?

El reparto proporcional correspondiente a m es:

$$\left.\begin{array}{l} m+n \rightarrow k \\ m \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{m \cdot k}{m+n}$$

y el de n es:

$$\left.\begin{array}{l} m+n \rightarrow k \\ n \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{n \cdot k}{m+n}$$

El reparto es inversamente proporcional y la constante es:

$$c=\frac{k}{\dfrac{1}{\dfrac{m \cdot k}{m+n}}+\dfrac{1}{\dfrac{n \cdot k}{m+n}}}=\frac{k}{\dfrac{m+n}{m \cdot k}+\dfrac{m+n}{n \cdot k}}=\frac{m \cdot n \cdot k^2}{(m+n)^2}$$

Por tanto, el reparto es:

$$m \rightarrow \frac{m \cdot k}{m+n} \rightarrow \frac{n \cdot m \cdot k^2}{(m+n)^2}:\frac{m \cdot k}{m+n}=\frac{n \cdot k}{m+n}$$

$$n \rightarrow \frac{n \cdot k}{m+n} \rightarrow \frac{n \cdot m \cdot k^2}{(m+n)^2}:\frac{n \cdot k}{m+n}=\frac{m \cdot k}{m+n}$$

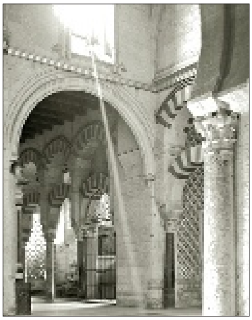
a) El reparto, en cada caso, es el contrario; lo que le corresponde a m en el reparto directamente proporcional es lo que le corresponde a n en el reparto inversamente proporcional, y viceversa.

b) Sí, la demostración es la que se ha hecho anteriormente.

101 **Si a una cierta cantidad la disminuimos en un 10 %, ¿en qué porcentaje debemos incrementarla para obtener la misma cantidad?**

$$\left.\begin{array}{l} 10 \rightarrow 90 \\ x \rightarrow 100 \end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{1000}{90}=\frac{100}{9}=11{,}11\ \%\ \text{de la cantidad disminuida}$$

102 **Una lámina de cristal absorbe el 20 % de la luz roja que le llega, es decir, deja pasar el 80 %. ¿Cuántas láminas hacen falta como mínimo, una encima de otra, para que pase como máximo la mitad de la luz roja que le llegue?**



$0{,}80^x < 0{,}5$

$0{,}80 \cdot 0{,}80 = 0{,}64$

$0{,}64 \cdot 0{,}80 = 0{,}512$

$0{,}512 \cdot 0{,}80 = 0{,}4096$

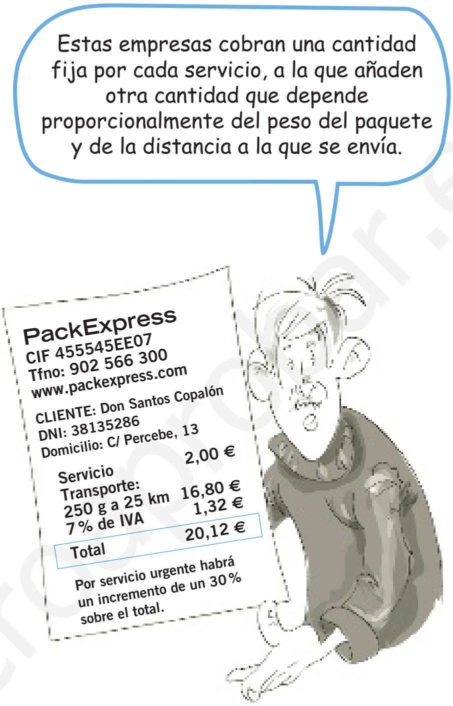
Hacen falta como mínimo 4 láminas.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

103 ●●●

Norberto ha pasado las vacaciones de Semana Santa en casa de sus tíos. Se llevó los apuntes de clase porque tenía que hacer algunas tareas. A la vuelta se le han olvidado, así que sus tíos se los van a enviar por mensajero.

Norberto ha encontrado en casa una factura de una empresa de mensajería que su padre había contratado hace tiempo.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuánto cobran por el transporte de 240 g a una distancia de 125 km?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) El paquete con los apuntes pesa 260 g, y la distancia que hay hasta su ciudad es de 186 km. ¿Cuánto pagarán por enviar el paquete? ¿Y si lo hacen mediante el servicio urgente?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Norberto ha encontrado otra solución. El viaje hasta la casa de sus tíos vale 24,60 €, de ida y vuelta. El problema es que para viajar tiene que emplear un día. ¿Qué harías tú?

a) $\left.\begin{array}{l} 250 \text{ g} \rightarrow 25 \text{ km} \rightarrow 16{,}80 \text{ €} \\ 240 \text{ g} \rightarrow 125 \text{ km} \rightarrow x \text{ €} \end{array}\right\}$

$$\rightarrow \frac{250 \cdot 25}{240 \cdot 125} = \frac{16{,}80}{x} \rightarrow x = \frac{240 \cdot 125 \cdot 16{,}80}{250 \cdot 25} = 80{,}64 \text{ €}$$

$(2 + 80{,}64) \cdot 1{,}07 = 88{,}42$ € cobran por el transporte.

b) $\dfrac{250 \cdot 25}{260 \cdot 186} = \dfrac{16{,}80}{x} \rightarrow x = \dfrac{260 \cdot 186 \cdot 16{,}80}{250 \cdot 25} = 129{,}99 \text{ €}$

$(2 + 129{,}99) \cdot 1{,}07 = 141{,}23$ € pagarán por enviar el paquete.

$141{,}23 \cdot 1{,}3 = 183{,}60$ € pagarán por el servicio urgente.

c) Si dispone de tiempo, lo mejor sería volver a casa de sus tíos y recoger él mismo los apuntes, ya que la diferencia de dinero es muy grande: $141{,}23 - 24{,}60 = 116{,}63$ €

104 ●●● **Villaplana y Villacuesta son dos pueblos vecinos. Como acaba de construirse una autovía cerca de los dos municipios, sus alcaldes han decidido variar la carretera existente para hacer una incorporación a esa autovía.**

El acuerdo ha sido el siguiente.

BANDO MUNICIPAL

Se va a construir una variante de la carretera entre Villaplana y Villacuesta que conectará con la nueva autovía.

Los gastos de esta obra se dividirán de forma directamente proporcional al número de vecinos censados en cada pueblo, e inversamente proporcional a los gastos que cada municipio tiene en el mantenimiento de las carreteras vecinales.

	Habitantes	Gastos
Villaplana	6 748	16 860 €
Villacuesta	1 230	2 400 €

Eres capaz de… Comprender

a) ¿Qué porcentaje pagaría cada pueblo si solo se tiene en cuenta el número de habitantes?

b) ¿Y si solo se considera el gasto en el mantenimiento de las carreteras?

Eres capaz de… Resolver

c) Según el acuerdo, ¿qué porcentaje del total del coste de la obra pagará cada municipio?

Eres capaz de… Decidir

d) A la vista de los porcentajes que deben pagar, ¿crees que es justo el reparto?

a) $\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow 6\,748 \text{ habitantes} \\ 100 - x \longrightarrow 1\,230 \text{ habitantes} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Directa}} \dfrac{x}{100 - x} = \dfrac{6\,748}{1\,230}$

$\rightarrow 1\,230x = 674\,800 - 6\,748x$

$\rightarrow 7\,978x = 674\,800 \rightarrow x = 84{,}58\ \%$

Los habitantes de Villaplana pagarán el 84,58 % del total, y los de Villacuesta tendrían que pagar: $100 - 84{,}58 = 15{,}42\ \%$ de los gastos.

b) $\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow 16\,860 \\ 100 - x \longrightarrow 2\,400 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Inversa}} \dfrac{x}{100 - x} = \dfrac{2\,400}{16\,860}$

$\rightarrow 16\,860x = 240\,000 - 2\,400x$

$\rightarrow 19\,260x = 240\,000 \rightarrow x = 12{,}46\ \%$

Los habitantes de Villaplana pagarán el 12,46 % del total, y los de Villacuesta tendrían que pagar: $100 - 12{,}46 = 87{,}54\ \%$ de los gastos.

c) $\left.\begin{array}{l} 16\,860 \xleftarrow{\text{Inversa}} x \xrightarrow{\text{Directa}} 6\,748 \\ 2\,400 \xleftarrow{\text{Inversa}} 100 - x \xrightarrow{\text{Directa}} 1\,230 \end{array}\right\}$

$$\frac{x}{100 - x} = \frac{6\,748}{1\,230} \cdot \frac{2\,400}{16\,860} = \frac{16\,195\,200}{20\,737\,800}$$

$16\,195\,200 \cdot x = (100 - x) \cdot 20\,737\,800$

$36\,933\,000x = 2\,073\,780\,000 \rightarrow x = 56{,}15\ \%$

Villaplana aportará el 56,15 %, y Villacuesta, el 43,85 %.

d) Los dos pueblos tienen que pagar prácticamente lo mismo, en torno al 50 %; sin embargo, Villaplana tiene 5 veces más población que Villacuesta.

7 Progresiones

La mascota de la princesa

El rey de Sicilia, Federico II, había encargado al filósofo de la Corte, Juan de Palermo, que examinara a Leonardo de Pisa con problemas matemáticos de difícil solución.

Leonardo, más conocido como Fibonacci, les presentó las soluciones y esperó a que las evaluaran. A medida que estudiaban el trabajo, sus caras reflejaban la sorpresa que les producía.

Mientras tanto, Fibonacci se había alejado un poco y charlaba con una niña que, sentada en la escalera, acariciaba a un conejito que mantenía en su regazo.

–Yo tuve una pareja de conejos –decía Fibonacci.

–¿De qué color eran? –se interesó la niña.

–Eran blancos y los tuve en casa, a ellos y sus crías, durante 12 meses, luego me trasladé con mi padre y no me los pude llevar. ¡En un año tenía 144 parejas!

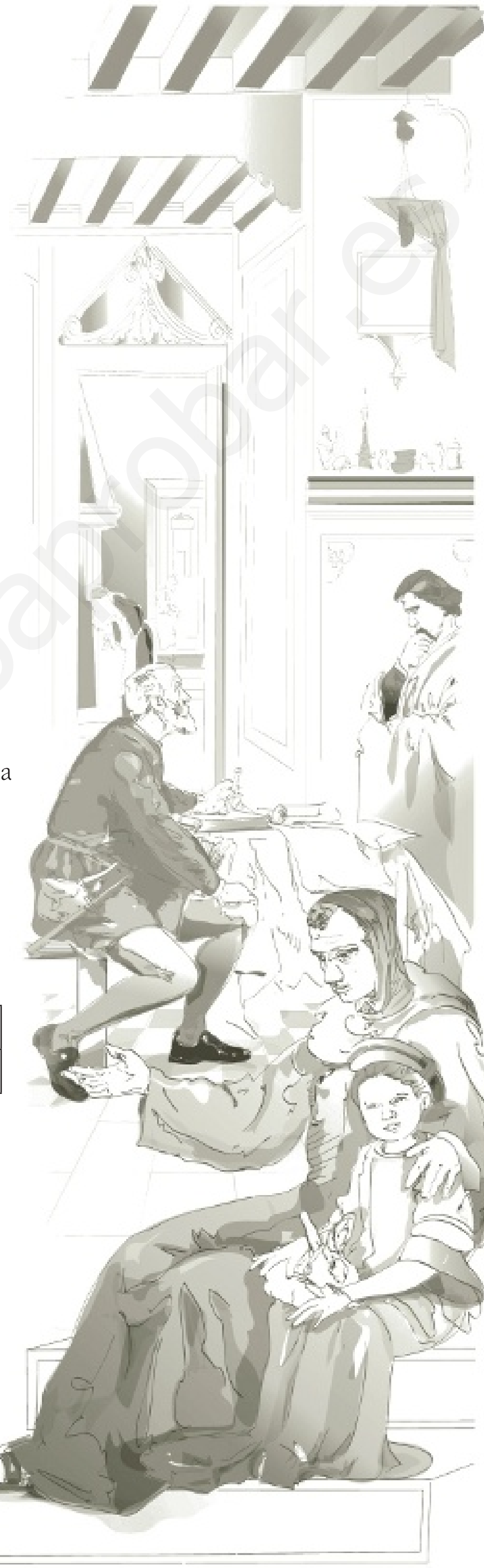
–Eso es imposible –dijo la niña mientras imaginaba todo lleno de conejos.

–La primera pareja comenzó a criar al segundo mes, y de cada camada me quedaba con otra pareja, que comenzaba a procrear a su vez a los dos meses de vida –repasaba mentalmente el sabio.

Mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Parejas	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

La niña iba apuntando y, de repente, lo vio claro.

–El número de parejas es, cada mes, la suma de los dos meses anteriores.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Leonardo de Pisa fue un matemático de la Edad Media. Busca información sobre su vida.**

En esta página, dedicada a la divulgación de las matemáticas, que depende de la Real Sociedad Matemática Española, puedes leer una extensa biografía de Fibonacci desarrollada por Ricardo Moreno, de la Universidad Complutense de Madrid.

http://www.divulgamat.net/

2 **El problema que aparece en el texto está incluido en su obra *Liber Abaci*. Investiga sobre este libro.**

En la citada biografía aparece descrita la obra de Fibonacci, *Liber Abaci*, que es lo que se pregunta en esta actividad.

3 **Averigua qué otros trabajos relacionados con las matemáticas realizó Fibonacci.**

También se pueden leer otras aportaciones de Fibonacci al estudio de las matemáticas en la misma página.

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Expresa algebraicamente estas relaciones entre números.**

a) La tercera parte de un número par.

b) El doble del número siguiente a uno dado.

c) La mitad de un número impar.

a) $\frac{2x}{3}$ b) $2(x+1)$ c) $\frac{2x+1}{2}$

2 **Resuelve.**

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **b)** $\frac{7^3}{7}$ **c)** $(-4)^4$

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ b) $7^2 = 49$ c) 256

3 **Saca factor común en las siguientes expresiones.**

a) $(2n+2)\cdot 3n + (2n+2)\cdot 6$ **b)** $4\cdot(7n-7) - (7n-7)\cdot(4n-1)$

a) $(2n+2)(3n+6)$

b) $(7n-7)[4-(4n-1)] = 7(n-1)(4-4n+1) = 7(n-1)(5-4n)$

EJERCICIOS

001 **Di cuáles son los términos a_1, a_3 y a_6 de las siguientes sucesiones.**

a) 6, 7, 8, 9, 10, ...
b) 0, −2, −4, −6, −8, ...
c) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...
d) −1, −1, −1, −1, −1, ...
e) −2, −4, −8, −16, −32, ...
f) 1, 2, 3, 5, 8, ...

Determina su regla de formación.

a) $a_1 = 6$, $a_3 = 8$, $a_6 = 11$. Cada número es el anterior más 1.
b) $a_1 = 0$, $a_3 = -4$, $a_6 = -10$. Cada número es el anterior menos 2.
c) $a_1 = 1$; $a_3 = 0{,}01$; $a_6 = 0{,}00001$
Cada número es el anterior dividido entre 10.
d) $a_1 = -1$, $a_3 = -1$, $a_6 = -1$. Todos los números son -1.
e) $a_1 = -2$, $a_3 = -8$, $a_6 = -64$. Cada número es el doble del anterior.
f) $a_1 = 1$, $a_3 = 3$, $a_6 = 13$. Cada número es la suma de los dos anteriores.

002 **Construye una sucesión que cumpla que:**

a) El primer término es 5 y cada uno de los siguientes es la suma del anterior más 3.
b) El primer término es 12 y cada uno de los siguientes es el anterior multiplicado por 3.

a) 5, 8, 11, 14, 17, ...
b) 12, 36, 108, 324, 972, ...

003 **Haz una sucesión con términos $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$, siendo los siguientes términos la suma de los tres anteriores.**

2, 3, 4, 9, 16, 29, ...

004 **Escribe los cuatro primeros términos de la sucesión con término general:**

a) $a_n = n^2 - 3n + 2$ **b) $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$**

a) $a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ $a_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$
$a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ $a_4 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 6$

b) $a_1 = \dfrac{1+4}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{5}{3}$ $a_3 = \dfrac{3+4}{2 \cdot 3 + 1} = \dfrac{7}{7} = 1$

$a_2 = \dfrac{2+4}{2 \cdot 2 + 1} = \dfrac{6}{5}$ $a_4 = \dfrac{4+4}{2 \cdot 4 + 1} = \dfrac{8}{9}$

005 **Obtén los cuatro primeros términos de cada sucesión.**

a) $a_1 = -1,\ a_n = n + a_{n-1}$ **b)** $a_1 = 2,\ a_n = 2a^2_{n-1} - 3n$

a) $a_n = n + a_{n-1} \rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 2 + (-1) = 1,\ a_3 = 3 + 1 = 4$
$a_4 = 4 + 4 = 8$

b) $a_n = 2 \cdot a^2_{n-1} - 3n \rightarrow a_1 = 2$
$a_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$
$a_3 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$
$a_4 = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 4 = 2 - 12 = -10$

006 **Inventa el término general de una sucesión, y calcula el valor de los términos 13, 25 y 64.**

$a_n = 2n^2 + 1$ $a_{13} = 339$ $a_{25} = 1\,251$ $a_{64} = 8\,193$

007 **Escribe el término general de estas sucesiones.**

a) 2, 3, 4, 5, 6, … **c) 5, 10, 15, 20, 25, …**
b) 3, 6, 9, 12, 15, … **d) 8, 11, 14, 17, 20, …**

a) $a_n = n + 1$ b) $a_n = 3n$ c) $a_n = 5n$ d) $a_n = 5 + 3n$

008 **Determina si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.**

a) 1, 0, −1, −2, … **c) 2, 4, 7, 11, 16, …** **e) 11, 10, −1, −2, …**
b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, … **d) 1, 4, 9, 16, 25, …**

a) $a_2 - a_1 = 0 - 1 = -1$ $a_3 - a_2 = -1 - 0 = -1$
$a_4 - a_3 = -2 - (-1) = -1 \rightarrow d = -1 \rightarrow$ Sí lo es.

b) $a_2 - a_1 = 5 - 4 = 1$ $a_3 - a_2 = 6 - 5 = 1$ $a_4 - a_3 = 7 - 6 = 1$
$a_5 - a_4 = 8 - 7 = 1 \rightarrow d = 1 \rightarrow$ Sí lo es.

c) $a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$ $a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3 \rightarrow$ No lo es.

d) $a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$ $a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow$ No lo es.

e) $a_2 - a_1 = 10 - 11 = -1$ $a_3 - a_2 = -1 - 10 = -11 \rightarrow$ No lo es.

009 **En una progresión aritmética, $a_1 = 4{,}8$ y $a_2 = 5{,}6$. Calcula.**

a) La diferencia, d. **b) El término a_8.**

a) $d = 5{,}6 - 4{,}8 = 0{,}8$ b) $a_8 = 4{,}8 + 7 \cdot 0{,}8 = 10{,}4$

010 **En una progresión aritmética, el término $a_4 = 12$ y la diferencia $d = -3$. Calcula a_1 y a_8.**

$12 = a_1 + 3 \cdot (-3) \rightarrow a_1 = 12 + 9 = 21 \rightarrow a_n = 21 + (n - 1) \cdot (-3)$
$a_8 = 21 + (8 - 1) \cdot (-3) = 21 - 21 = 0$

011 **Halla el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$ **b)** **25, 22, 19, 16, …**

a) $d = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$

b) $d = 22 - 25 = -3 \rightarrow a_n = 25 - (n-1) \cdot 3 = 28 - 3n$

012 **En una progresión aritmética, el primer término es 5 y la diferencia es −2. Determina a_n.**

$a_1 = 5,\ d = -2 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 - (n-1) \cdot 2 = 7 - 2n$

013 **En una progresión aritmética, el tercer término es 9 y la diferencia es 7. Halla el primer término y el término general.**

$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d \rightarrow 9 = a_1 + 2 \cdot 7 \rightarrow a_1 = -5$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -5 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 12$

014 **En una progresión aritmética, $a_6 = 17$ y $a_9 = 23$. Calcula a_1 y el término general.**

$23 = 17 + (9-6) \cdot d \rightarrow d = 6 : 3 = 2 \rightarrow 17 = a_1 + 5 \cdot 2$
$\rightarrow a_1 = 17 - 10 = 7,\ a_n = 7 + (n-1) \cdot 2$

015 **Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, …**

$d = 7 - 3 = 4 \rightarrow a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$

$$S_{10} = \frac{3 + 39}{2} \cdot 10 = 210$$

016 **Dada la progresión aritmética con $a_n = 10 - 5n$, halla la suma de los 25 primeros términos.**

$a_{25} = 10 - 5 \cdot 25 = 10 - 125 = -115$

$a_1 = 10 - 5 \cdot 1 = 5$

$$S_{25} = \frac{5 - 115}{2} \cdot 25 = -1\,375$$

017 **Quiero colocar 7 filas de macetas de manera que en la primera fila pondré 3 macetas, y cada una de las siguientes filas tendrá 3 macetas más que la anterior. ¿Cuántas macetas colocaré en total?**

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n$

$a_1 = 3,\ a_7 = 3 + 6 \cdot 3 = 21$

$$S_7 = \frac{3 + 21}{2} \cdot 7 = 84 \text{ macetas}$$

018 **Determina si son progresiones geométricas.**

a) 1, 5, 25, 125, 625, …

b) −1, −2, −4, −8, −16, …

c) 3, 9, 24, 33, …

d) 4, 4, 4, 4, 4, …

a) $\frac{5}{1} = \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = 5 = r \rightarrow$ Sí lo es.

b) $\frac{-2}{-1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-8}{-4} = \frac{-16}{-8} = 2 = r \rightarrow$ Sí lo es.

c) $\frac{9}{3} \neq \frac{24}{9} \rightarrow$ No lo es.

d) $\frac{4}{4} = \frac{4}{4} = \frac{4}{4} = \frac{4}{4} = 1 = r \rightarrow$ Sí lo es.

019 **Halla el término general y el término a_6.**

a) 5, 15, 45, …

b) 3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, …

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{15}{5} = 3 \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{45}{15} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r = 3$

$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_6 = 5 \cdot 3^{6-1} = 1\,215$

b) $a_n = 3 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_2 = 3 \cdot r = 3\sqrt{3} \rightarrow r = \sqrt{3}$

$\rightarrow a_n = 3 \cdot (\sqrt{3})^{n-1} \rightarrow a_6 = 3 \cdot (\sqrt{3})^5 = 27\sqrt{3}$

020 **En una progresión geométrica, $a_2 = 2$ y $a_4 = \frac{1}{2}$. Calcula a_n y a_5.**

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r = 2 \\ a_4 = a_1 \cdot r^3 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{2.^a : 1.^a} r^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

Sustituimos $r = \frac{1}{2}$ en la 1.ª ecuación: $2 = a_1 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 4$

y comprobamos que se cumple la 2.ª ecuación: $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Si $r = -\frac{1}{2}$ en la 1.ª ecuación: $2 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow a_1 = -4$

y comprobamos que se cumple la 2.ª ecuación:

$$(-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3=(-4)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$$

Luego hay dos soluciones: $a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_n=(-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_5=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\ \text{ y }\ a_5=(-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1}=(-4)\cdot\frac{1}{16}=-\frac{1}{4}$$

021 **Dada la sucesión: 2; 3; 4,5; 6,75; 10,125; ...**

a) Comprueba que es una progresión geométrica. Halla su razón.
b) Calcula su término general.
c) Halla la suma de sus 10 primeros términos.

a) $\frac{3}{2}=\frac{4{,}5}{3}=\frac{6{,}75}{4{,}5}=\frac{10{,}125}{6{,}75}=1{,}5\rightarrow$ Sí lo es.

b) $a_n=2\cdot 1{,}5^{n-1}$

c) $S_{10}=\frac{2\cdot(1{,}5^{10}-1)}{1{,}5-1}=\frac{113{,}33}{0{,}5}=226{,}66$

022 **Halla la suma de los 7 primeros términos de la progresión: 3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, ...**

$a_2=a_1\cdot r\rightarrow 3\sqrt{3}=3\cdot r\rightarrow r=\sqrt{3}\rightarrow a_n=3\cdot(\sqrt{3})^{n-1}$

$a_7=3\cdot(\sqrt{3})^6=3\cdot 3^3=81$

$$S_7=\frac{3\cdot(\sqrt{3}^7-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\cdot(3^3\cdot\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=187{,}55$$

023 **Una ameba se reproduce por bipartición cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá al cabo de 10 horas?**

En 10 horas $=10\cdot 60=600$ minutos se habrán producido: $600/5=120$ biparticiones. Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1=1$ y $r=2$. Por tanto, resulta: $a_{120}=1\cdot 2^{120-1}=6{,}646\cdot 10^{35}$

024 **Calcula el término general y la suma de todos los términos de las siguientes progresiones geométricas.**

a) $a_1=5$ **y** $r=\frac{1}{2}$ **b)** $a_1=2$ **y** $r=\frac{1}{10}$

a) $a_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\rightarrow S=\frac{5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{\frac{1}{2}}=10$

b) $a_n=2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\rightarrow S=\frac{2}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{\frac{9}{10}}=\frac{20}{9}$

025 **Halla, si es posible, la suma de los infinitos términos de estas progresiones.**

a) 5, 15, 45, ... **b) 3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, ...**

a) $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 15 = 5 \cdot r \rightarrow r = 3$

La razón es mayor que la unidad; no podemos calcular su suma (es infinita).

b) $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 3\sqrt{3} = 3 \cdot r \rightarrow r = \sqrt{3}$

La razón es mayor que la unidad; no podemos calcular su suma (es infinita).

026 **En una progresión geométrica, $S = 20$ y $a_1 = 5$. ¿Cuánto vale la razón?**

$$S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow 20 = \frac{5}{1-r} \rightarrow 1 - r = \frac{5}{20} \rightarrow 1 - r = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \frac{1}{4} = r \rightarrow r = \frac{3}{4}$$

027 **Halla el producto de los 4 primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = 5$.**

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_4 = 3 \cdot 5^3 = 375$$
$$\rightarrow P_4 = \sqrt{(3 \cdot 375)^4} = 1\,125^2 = 1\,265\,625$$

028 **En una progresión geométrica, $a_4 = 12$ y $r = 3$. Obtén el producto de los 10 primeros términos.**

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 12 = a_1 \cdot 3^3 \rightarrow a_1 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 \rightarrow a_{10} = \frac{4}{9} \cdot 3^9 = 4 \cdot 3^7 = 8\,748$$

$$P_{10} = \sqrt{\left(\frac{4}{9} \cdot 8\,748\right)^{10}} = 3\,888^5 = 8{,}884 \cdot 10^{17}$$

029 **Dada una progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$, calcula P_6.**

$$a_6 = 4 \cdot 2^5 = 128 \rightarrow P_6 = \sqrt{(4 \cdot 128)^6} = 134\,217\,728$$

030 **Halla la razón de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $P_5 = 1\,024$.**

$$P_5 = 1\,024 = \sqrt{(1 \cdot a_5)^5} \xrightarrow{a_5 = r^4} 1\,024 = \sqrt{r^{20}} \rightarrow r^{10} = 1\,024 \rightarrow r = 2$$

031 **Calcula el capital obtenido invirtiendo 200 € al 2 % anual durante 10 años.**

$$C_{10} = 200 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{10} = 200 \cdot 1{,}22 = 243{,}80 \text{ €}$$

032 **Halla el capital que se obtendría al invertir 50 céntimos de euro al 5 % anual durante un siglo. ¿Y si el rédito fuera del 1 %?**

$$C_{100} = 0{,}50 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{100} = 65{,}75\ €$$

$$\text{Si } r = 1\ \% \rightarrow C_{100} = 0{,}50 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 1{,}35\ €$$

033 **Obtén el capital que, con un interés compuesto del 1 % mensual, produce 3 000 € en 3 años.**

$$3\,000 = C \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{36} \rightarrow 3\,000 = C \cdot 1{,}43 \rightarrow C = 2\,097{,}90\ €$$

034 **Halla el capital que, con un interés compuesto del 10 % anual, produce 133,10 € en 3 años.**

$$133{,}10 = C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{3} \rightarrow 133{,}10 = C \cdot 1{,}331 \rightarrow C = 100\ €$$

ACTIVIDADES

035 ● **Escribe los siguientes términos de estas sucesiones.**

a) 5, 6, 7, 8, 9, …

b) 30, 20, 10, 0, −10, …

c) 7, 14, 21, 28, 35, …

d) 1, 5, 25, 125, …

¿Qué criterio de formación sigue cada una de ellas?

a) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, … → Aumenta de 1 en 1.
b) 30, 20, 10, 0, −10, −20, −30, −40, … → Disminuye de 10 en 10.
c) 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, … → Aumenta de 7 en 7.
d) 1, 5, 25, 125, 625, 3 125, 15 625, … → Aumenta multiplicando por 5.

036 ●● **Dada la sucesión: 1, 8, 27, 64, …**

a) ¿Cuál es su sexto término?

b) ¿Y su criterio de formación?

a) $6^3 = 216$

b) $a_n = n^3$

037 ●● **La sucesión 1, 4, 9, 16, 25, … tiene por término general $a_n = n^2$. Obtén el término general de las sucesiones.**

a) 2, 8, 18, 32, 50, …

b) 3, 6, 11, 18, 27, …

c) 4, 9, 16, 25, …

d) 16, 25, 36, 49, …

a) $a_n = 2n^2$
b) $a_n = n^2 + 2$
c) $a_n = (n + 1)^2$
d) $a_n = (n + 3)^2$

038 **La sucesión 2, 4, 6, 8, 10, … tiene por término general $a_n = 2n$. Determina el término general de las sucesiones.**

a) $-1, 1, 3, 5, 7, \dots$

b) $6, 8, 10, 12, \dots$

c) $-2, -4, -6, -8, \dots$

d) $6, 12, 18, 24, 30, \dots$

a) $a_n = 2n - 3$

b) $a_n = 2n + 4$

c) $a_n = -2n$

d) $a_n = 6n$

039 **Halla los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es:**

a) $a_n = 2^n$

b) $a_n = (-3)^{n+2}$

c) $a_n = 5 - 3n$

d) $a_n = 2 + 4(n + 1)$

e) $a_n = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

f) $a_n = n^2 + 3n - 2$

g) $a_n = \dfrac{n+3}{n^2}$

a) $a_n = 2^n \rightarrow 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

b) $a_n = (-3)^{n+2} \rightarrow (-3)^3, (-3)^4, (-3)^5, (-3)^6, (-3)^7, \dots =$
$= -27, 81, -243, 729, -2\,187, \dots$

c) $a_n = 5 - 3n \rightarrow 2, -1, -4, -7, -10, \dots$

d) $a_n = 2 + 4(n + 1) \rightarrow 10, 14, 18, 22, 26, \dots$

e) $a_n = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \dfrac{2}{81}, \dots$

f) $a_n = n^2 + 3n - 2 \rightarrow 2, 8, 16, 26, 38, \dots$

g) $a_n = \dfrac{n+3}{n^2} \rightarrow 4, \dfrac{5}{4}, \dfrac{6}{9}, \dfrac{7}{16}, \dfrac{8}{25}, \dots$

040 **Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.**

a) El primer término es 5 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

b) El primer término es 2 y cada uno de los siguientes se obtiene multiplicando el anterior por $\dfrac{1}{2}$.

c) El primer término es 3, el segundo 4 y los siguientes son la suma de los dos anteriores.

d) El primer término es 8 y los siguientes son cada uno la mitad del anterior.

a) 5, 7, 9, 11, 13

b) $2, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}$

c) 3, 4, 7, 11, 18

d) $8, 4, 2, 1, \dfrac{1}{2}$

041 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA EL TÉRMINO GENERAL DE ALGUNAS SUCESIONES DE FRACCIONES?

Halla el término general de la siguiente sucesión:

$$\frac{4}{1}, \frac{9}{3}, \frac{16}{5}, \frac{25}{7}, \ldots$$

PRIMERO. Se busca el criterio de formación de los numeradores, y se determina su término general.

4, 9, 16, 25, … $\longrightarrow$ El primer término es el cuadrado de 2.
El segundo es el cuadrado de 3.
El tercero, el cuadrado de 4…

Término general $\longrightarrow (n+1)^2$

SEGUNDO. Se busca el criterio de formación de los denominadores, y se determina su término general.

1, 3, 5, 7, … $\longrightarrow$ Sucesión de números impares.

Término general $\longrightarrow 2n - 1$

TERCERO. El término general de la sucesión será el cociente entre los dos términos generales.

Término general $\longrightarrow a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2n-1}$

042 ●● **La sucesión 1, 2, 3, 4, 5, … tiene por término general $a_n = n$. La sucesión 2, 4, 8, 16, … tiene por término general $a_n = 2^n$.**
Halla el término general de estas sucesiones.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

b) $4, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{n+3}{n}$ c) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ d) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

043 ● **Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes.**

a) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

c) $c_1 = -1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1,\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3}$

d) $d_1 = 2,\ d_n = d_{n-1} + n$

a) $1, 3, -2, 5, -7$

b) $2, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

c) $-1, 0, 1, 0, 1$

d) $2, 4, 7, 11, 16$

044 ●●

Halla la regla de formación de estas sucesiones recurrentes.

a) 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

b) 1, 3, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1, …

c) 1, 2, 3, 6, 11, 20, …

d) −5, 1, 6, 5, −1, −6, …

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

d) $a_1 = -5$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

045 ●

Halla la diferencia y el término general de estas progresiones aritméticas.

a) 10, 7, 4, 1, …

b) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, …

c) 7, 2, −3, −8, …

d) 16, 8, 0, −8, …

a) $d = 7 - 10 = -3 \rightarrow a_n = 10 - 3 \cdot (n - 1) = 13 - 3n$

b) $d = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \rightarrow a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (n - 1) = \sqrt{2}\, n$

c) $d = 2 - 7 = -5 \rightarrow a_n = 7 - 5 \cdot (n - 1) = 12 - 5n$

d) $d = 8 - 16 = -8 \rightarrow a_n = 16 - 8 \cdot (n - 1) = 24 - 8n$

046 ●

Con los datos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 13$ y $a_2 = 5$, calcula d, a_8 y a_n.

b) $b_1 = 4{,}5$ y $b_2 = 6$, calcula d, b_{10} y b_n.

c) $c_2 = 13$ y $d = -5$, calcula c_1, c_8 y c_n.

d) $h_1 = 8$ y $h_3 = 3$, calcula d, h_{10} y h_n.

a) $5 = 13 + (2 - 1) \cdot d \rightarrow d = -8 \rightarrow a_8 = 13 + (8 - 1) \cdot (-8) = -43$
$a_n = 13 + (n - 1) \cdot (-8)$

b) $6 = 4{,}5 + (2 - 1) \cdot d \rightarrow d = 1{,}5 \rightarrow b_{10} = 4{,}5 + (10 - 1) \cdot 1{,}5 = 18$
$b_n = 4{,}5 + (n - 1) \cdot 1{,}5$

c) $13 = c_1 + (2 - 1) \cdot (-5) \rightarrow c_1 = 18 \rightarrow c_8 = 18 + (8 - 1) \cdot (-5) = -17$
$c_n = 18 + (n - 1) \cdot (-5)$

d) $3 = 8 + (3 - 1) \cdot d \rightarrow d = -2{,}5$
$h_{10} = 8 + (10 - 1) \cdot (-2{,}5) = -14{,}5 \rightarrow h_n = 8 + (n - 1) \cdot (-2{,}5)$

047 ●

Considera la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, …

a) ¿Es una progresión aritmética?

b) Halla su término general.

c) Calcula el término 30.

a) Sí, es una progresión aritmética:
$d = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 2$

b) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$

c) $a_{30} = 2 \cdot 30 = 60$

048 Dada la sucesión $\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0, \ldots$:

a) Comprueba que es una progresión aritmética.

b) Halla su término general.

a) $\frac{4}{3} - \frac{5}{3} = 1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = d$

b) $a_n = \frac{5}{3} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5-(n-1)}{3} = \frac{6-n}{3}$

049 **Sabiendo que los términos de una progresión aritmética se pueden obtener con la calculadora, mediante el sumando constante:**

$$d \; \boxed{+} \; \boxed{+} \; a_1 \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \ldots$$

obtén los 10 primeros términos de las progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 8$ **y** $d = 5$

b) $b_1 = 3$ **y** $d = -5$

c) $c_1 = -10$ **y** $d = 3$

d) $h_1 = -12$ **y** $d = -8$

a) 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53

b) 3, −2, −7, −12, −17, −22, −27, −32, −37, −42

c) −10, −7, −4, −1, 2, 5, 8, 11, 14, 17

d) −12, −20, −28, −36, −44, −52, −60, −68, −76, −84

050 **En una progresión aritmética,** $a_{10} = 32$ **y** $d = 5$**. Averigua el valor del término** a_{25}**.**

$a_{25} = a_{10} + (25 - 10) \cdot d \rightarrow a_{25} = 32 + 15 \cdot 5 = 32 + 75 = 107$

051 **En una progresión aritmética,** $a_3 = \frac{1}{2}$ **y** $a_4 = \frac{5}{6}$**.**

a) Obtén a_1 **y** d**.**

b) Determina el término general.

a) $d = a_4 - a_3 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow a_1 = a_3 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$

b) $a_n = -\frac{1}{6} + (n-1) \cdot \frac{1}{3}$

052 **En una progresión aritmética,** $a_8 = 12$ **y** $a_{12} = 32$**. Calcula la diferencia y el término general.**

$a_{12} = a_8 + 4d \rightarrow d = \frac{a_{12} - a_8}{4} = \frac{32 - 12}{4} = 5$

$a_1 = a_8 - 7 \cdot d = 12 - 35 = -23$

$a_n = -23 + 5 \cdot (n-1) = -28 + 5n$

053 **En una progresión aritmética, $a_1 = 7$ y $d = 6$. Averigua el lugar que ocupa un término que vale 79.**

$$a_1 = 7,\ d = 6 \rightarrow a_n = 7 + (n-1)\cdot 6 \rightarrow 79 = 7 + 6\cdot(n-1)$$
$$\rightarrow 72 = 6\cdot(n-1) \rightarrow 12 = n-1 \rightarrow n = 13$$

054 **Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) $1{,}73;\ 1{,}77;\ 1{,}81;\ 1{,}85;\ \dots$

b) $5,\ 2,\ -1,\ -4,\ -7,\ \dots$

c) $\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \dots$

d) $\frac{1}{a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a},\ \frac{7}{a},\ \dots$

a) $a_1 = 1{,}73;\ d = 0{,}04 \rightarrow a_n = 1{,}73 + (n-1)\cdot 0{,}04 = 1{,}69 + 0{,}04n$

b) $a_1 = 5,\ d = -3 \rightarrow a_n = 5 - 3\cdot(n-1) = 8 - 3n$

c) $a_1 = \frac{1}{2},\ d = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-1) = \frac{1}{2}n$

d) $a_1 = \frac{1}{a},\ d = \frac{2}{a} \rightarrow a_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\cdot(n-1) = -\frac{1}{a} + \frac{2n}{a}$

055 **Halla el término general de una progresión aritmética en la que $a_4 = 13$ y $a_2 + a_{11} = 41$.**

$a_4 = a_2 + 2d = 13 \rightarrow a_2 = 13 - 2d$

Sustituimos para hallar d:

$$a_2 + a_{11} = 41 \rightarrow a_2 + a_2 + (11-2)\cdot d = 41 \rightarrow 2a_2 + 9d = 41$$
$$\rightarrow 2\cdot(13-2d) + 9d = 41 \rightarrow 26 - 4d + 9d = 41$$
$$\rightarrow 5d = 41 - 26 = 15 \rightarrow d = 3$$

Y sustituyendo tenemos que:

$$a_2 = 13 - 2d \rightarrow a_2 = 13 - 2\cdot 3 = 13 - 6 = 7$$

Como $a_2 = a_1 + d \rightarrow 7 = a_1 + 3 \rightarrow a_1 = 4$

El término general es: $a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 = 1 + 3n$

056 **En una progresión aritmética de 8 términos, el primero y el último suman 21. El tercer término es 6. Escribe la progresión.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_8 = 21 \\ a_3 = a_1 + 2d = 6 \end{array}\right\} \rightarrow a_1 = 6 - 2d$$

$$a_1 + a_8 = 21 \rightarrow a_1 + a_1 + (8-1)\cdot d = 21$$
$$\rightarrow 2a_1 + 7d = 21 \rightarrow 2\cdot(6-2d) + 7d = 21$$
$$\rightarrow 12 - 4d + 7d = 21 \rightarrow 3d = 21 - 12$$
$$\rightarrow 3d = 9 \rightarrow d = 3$$

Y despejando: $a_1 = 6 - 2d = 6 - 2\cdot 3 = 0$

Luego $a_n = (n-1)\cdot 3 = 3n - 3 \rightarrow 0, 3, 6, 9, \dots$

057 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE INTERPOLAN TÉRMINOS QUE FORMEN UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA?

Interpola tres términos entre 1 y 9 para que formen una progresión aritmética.

PRIMERO. Se calcula a_1 y d.

La progresión que se quiere construir será de la forma: 1, a_2, a_3, a_4, 9.

Por tanto, resulta que: $a_1 = 1$ y $a_5 = 9$.

Como tiene que ser una progresión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{n=5} 9 = 1 + (5-1)d$$

$$9 = 1 + 4d \rightarrow d = \frac{8}{4} = 2$$

SEGUNDO. Se hallan los términos intermedios.

$$a_2 = 1 + (2-1) \cdot 2 = 3$$
$$a_3 = 1 + (3-1) \cdot 2 = 5$$
$$a_4 = 1 + (4-1) \cdot 2 = 7$$

Los tres términos que hay que interpolar serán 3, 5 y 7.

058 **Interpola 6 términos entre 1 y 3 para que formen una progresión aritmética.**

$$a_1 = 1,\ a_8 = 3,\ d = (3-1) : (8-1) = \frac{2}{7}$$

Los 6 términos son: $\frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}, \frac{19}{7}$

059 **Interpola 5 términos entre los números $-\frac{7}{2}$ y $\frac{7}{2}$ para que formen una progresión aritmética.**

$$a_1 = -\frac{7}{2},\ a_7 = \frac{7}{2},\ d = \frac{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}}{7-1} = \frac{7}{6}$$

Los 5 términos son: $-\frac{7}{3}, -\frac{7}{6}, 0, \frac{7}{6}, \frac{7}{3}$

060 **Sabiendo que estas sucesiones son progresiones aritméticas, completa los términos que faltan.**

a) $\square, \frac{1}{2}, \square, \frac{5}{6}, \square, \square$

b) $\square$; 1,5; $\square$; 2,5; $\square$

c) $\square, \frac{1}{4}, \square, \square, \frac{1}{2}, \square$

d) $\square, \square, \square, \frac{5}{3}, \square, \frac{8}{3}$

a) $d = \dfrac{\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2}}{4 - 2} = \dfrac{1}{6} \rightarrow \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{6}, 1, \dfrac{7}{6}$

b) $d = (2{,}5 - 1{,}5) : (4 - 2) = 0{,}5 \rightarrow 1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3$

c) $d = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}}{5 - 2} = \dfrac{1}{12} \rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{12}$

d) $d = \dfrac{\dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3}}{6 - 4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{8}{3}$

061 **Sea $a_n = 4n + 1$ el término general de una progresión aritmética. Calcula a_{25} y la suma de los 20 primeros términos.**

$a_{25} = 4 \cdot 25 + 1 = 101 \rightarrow a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \dfrac{5 + 81}{2} \cdot 20 = 860$

062 **En una progresión aritmética, $a_8 = 40$ y $d = 7$. Halla el primer término y la suma de los 10 primeros términos.**

$a_8 = a_1 + 7 \cdot d \rightarrow 40 = a_1 + 7 \cdot 7 \rightarrow a_1 = -9$

$a_{10} = a_1 + 9d \rightarrow a_{10} = -9 + 9 \cdot 7 = 54$

$S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \rightarrow S_{10} = \dfrac{-9 + 54}{2} \cdot 10 = 225$

063 **Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética si el tercer término es 24 y el décimo es 66.**

$a_3 = 24, a_{10} = a_3 + 7d \rightarrow 66 = 24 + 7d \rightarrow 42 = 7d \rightarrow d = 6$

$a_3 = a_1 + 2d \rightarrow 24 = a_1 + 2 \cdot 6 \rightarrow a_1 = 12$

$S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot n = \dfrac{12 + 66}{2} \cdot 10 = 390$

064 **Halla la suma de los 100 primeros números pares.**

$a_1 = 2 \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 2 + 2 \cdot (n - 1) = 2n$
$\rightarrow a_{100} = 2 + 2 \cdot 99 = 200$

$S_{100} = \dfrac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot n = \dfrac{2 + 200}{2} \cdot 100 = 10\,100$

065 Calcula la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 200 y 301.

$$a_1 = 201,\ a_n = 300 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow 300 = 201 + (n-1)\cdot 3$$

$$\rightarrow \frac{300-201}{3} = n-1 \rightarrow n-1 = 33 \rightarrow n = 34$$

$$S_{34} = \frac{a_1 + a_{34}}{2}\cdot n = \frac{201+300}{2}\cdot 34 = 8\,517$$

066 Halla la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $a_4 = 40$.

$$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 40 = 7 + 3d \rightarrow d = 11$$

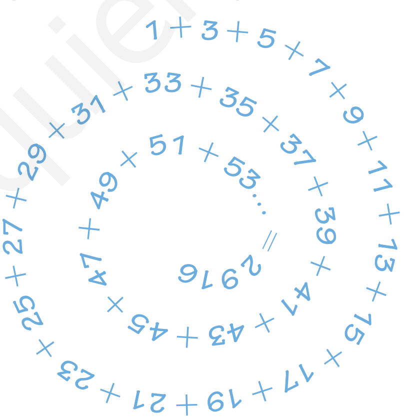
$$a_{15} = a_1 + 14d \rightarrow a_{15} = 7 + 14\cdot 11 = 161$$

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2}\cdot n \rightarrow S_{15} = \frac{7+161}{2}\cdot 15 = 1\,260$$

067 Halla la suma de los n primeros números naturales.

$$a_n = n \rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n^2+n}{2}$$

068 ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 2 916?



Los números impares forman una sucesión cuyo término general es $a_n = 2n - 1$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \rightarrow 2\,916 = \frac{1+2n-1}{2}\cdot n \rightarrow 2\,916 = n^2 \rightarrow n = 54$$

Luego se trata de los 54 primeros números impares.

069 Calcula la suma y el último término de una progresión aritmética de diferencia 4, sabiendo que tiene 12 términos y el primero vale 7.

$$a_{12} = 7 + (12-1)\cdot 4 = 51,\ S_{12} = \frac{(7+51)\cdot 12}{2} = 348$$

070 Halla la suma de los términos de una progresión aritmética limitada cuyo primer término es 4, el último es 40 y la diferencia es 3.

$$40 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow n = 13,\ S_{13} = \frac{(4 + 40) \cdot 13}{2} = 286$$

071 La suma de los 5 primeros términos de una progresión aritmética es 2,5. La suma de los 8 primeros términos es 5,2. Escribe la progresión.

$$\left.\begin{array}{l} S_5 = \dfrac{a_1 + a_5}{2} \cdot n = 2{,}5 \rightarrow (a_1 + a_5) \cdot 5 = 5 \\[2ex] S_8 = \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot n = 5{,}2 \rightarrow (a_1 + a_8) \cdot 8 = 10{,}4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_5 = 1 \\ a_1 + a_8 = 1{,}3 \end{array}\right\} \rightarrow a_8 - a_5 = 3d = 0{,}3 \rightarrow d = 0{,}1$$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$a_1 + a_5 = 1 \rightarrow 2a_1 + 4d = 1 \rightarrow 2a_1 + 0{,}4 = 1 \rightarrow 2a_1 = 0{,}6 \rightarrow a_1 = 0{,}3$

La progresión es 0,3; 0,4; 0,5; 0,6, …

072 Calcula la diferencia o la razón de las siguientes progresiones, y halla su término general.

a) 3, 6, 12, 24, …
b) 10, 7, 4, 1, …
c) 1, 1, 1, 1, …
d) 16, 8, 4, 2, 1, …
e) 16, 8, 0, −8, …
f) 3, 9, 15, 21, …

a) $r = 6 : 3 = 2;\ a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $d = 7 - 10 = -3;\ a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3)$

c) $r = 1;\ a_n = 1$

d) $r = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5;\ a_n = 16 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$

e) $d = 8 - 16 = -8;\ a_n = 16 + (n - 1) \cdot (-8) = (n - 3) \cdot (-8)$

f) $d = 9 - 3 = 6;\ a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$

073 En una progresión geométrica, $a_1 = 4$ y $a_2 = 3$. Obtén el término general y a_{20}.

$$3 = 4r \rightarrow r = \frac{3}{4} \rightarrow a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \qquad a_{20} = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$$

074 En una progresión geométrica, $a_1 = 6$ y $a_3 = 30$. Halla a_4 y el término general.

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 30 = 6r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{5}$

Hay dos soluciones: $a_n = 6 \cdot (\pm\sqrt{5})^{n-1} \rightarrow a_4 = 6 \cdot (\pm\sqrt{5})^3 = \pm 30\sqrt{5}$

075 Calcula.

a) El término general de una progresión geométrica en la que $a_1 = 3$ y $r = 5$.

b) El término que ocupa el lugar 7.

a) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

b) $a_7 = 3 \cdot 5^6 = 46\,875$

076 Dada la sucesión $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots$:

a) Comprueba que es una progresión geométrica.

b) Calcula el término 10.

a) $\frac{2}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{27} : \frac{2}{9} = \frac{2}{81} : \frac{2}{27} = \frac{1}{3} = r$

b) $a_{10} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{2}{3^{10}} = \frac{2}{59\,049}$

077 Halla los términos que faltan en las siguientes progresiones geométricas.

a) 1; 0,1; □; 0,001; □

b) $\square, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \square, \frac{1}{54}, \square$

c) $\square, \frac{1}{3}, \square, \frac{1}{12}, \square$

d) $\square, \frac{3}{2}, \square, \square, \frac{81}{4}$

a) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001

b) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, \frac{27}{2 \cdot \sqrt[3]{4}}, \frac{81}{4}$

078 El término general de la progresión 3, 6, 12, 24, ... es:

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3$

b) $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

d) No se puede calcular.

El término general es c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

079 ●
En una progresión geométrica de términos positivos, $a_2 = 60$ y $a_4 = 2\,400$. Obtén:

a) Los 5 primeros términos.
b) El término general.
c) Los 10 primeros términos.

$2\,400 = 60 \cdot r^2 \rightarrow r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

a) $3\sqrt{10}$, 60, $120\sqrt{10}$, 2 400, $2\,800\sqrt{10}$

b) $a_n = 3\sqrt{10} \cdot (2\sqrt{10})^{n-1}$

c) $3\sqrt{10}$, 60, $120\sqrt{10}$, 2 400, $2\,800\sqrt{10}$, 96 000, $192\,000\sqrt{10}$, 3 840 000, $7\,680\,000\sqrt{10}$, 153 600 000

080 ●
En una progresión geométrica, $a_2 = 10$ y $a_5 = 10\,000$. Calcula r y los 10 primeros términos de la progresión. ¿Cuál es el término general?

$10\,000 = 10 \cdot r^3 \rightarrow r = 10,\ a_n = 10^{n-1}$

Los 10 primeros términos son: 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000, 1 000 000 000

081 ●●
Un término de una progresión geométrica vale 3 720 087. Si el primer término es 7 y la razón es 3, ¿de qué término estamos hablando?

$3\,720\,087 = 7 \cdot 3^{n-1} \rightarrow 3^{n-1} = 531\,441 \rightarrow n - 1 = 12 \rightarrow n = 13$

082 ●●●
Dos términos consecutivos de una progresión geométrica valen 3 y 4. Averigua qué lugar ocupan si $a_1 = \dfrac{27}{16}$.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{27}{16} \cdot r^{n-1} = 3 \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{27}{16} \cdot r^{n} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Dividiendo obtenemos: } \frac{4}{3} = r$$

Y sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$$3 = \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{48}{27} \underset{(:\,3)}{=} \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\rightarrow n - 1 = 2 \rightarrow n = 3$$

Se trata de los términos tercero y cuarto.

083 ●
En una progresión geométrica, el primer término es 5 y la razón es 3. Calcula la suma de los 8 primeros términos.

$a_1 = 5,\ r = 3$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_8 = \frac{5 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 16\,400$$

084 **En una progresión geométrica, el segundo término es 2 y el cuarto es $\frac{1}{2}$. Halla la suma de los 6 primeros términos.**

$$a_2 = 2,\ a_4 = \frac{1}{2} \rightarrow a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow \frac{1}{2} = 2 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 2 = a_1 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right) \rightarrow a_1 = \pm 4$$

$$S_6 = \frac{4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{63}{8} \quad \text{o} \quad S_6 = \frac{(-4) \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)} = -\frac{21}{8}$$

085 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA SUMA DE LOS INFINITOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA?

Calcula la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3$ **y** $r = 2$

b) $c_1 = -2$ **y** $r = \frac{1}{3}$

c) $d_1 = \frac{1}{2}$ **y** $r = -2$

PRIMERO. Se calcula la razón de la progresión geométrica.

a) $r = 2$ b) $r = \frac{1}{3}$ c) $r = -2$

SEGUNDO. Se analizan los distintos casos.

- Si $r > 1$, la suma es infinito.
- Si $-1 < r < 1$, se aplica la fórmula $S = \frac{a_1}{1 - r}$.
- Si $r < -1$, no se puede hallar.

a) $r = 2 > 1$. La sucesión es:

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

La suma de todos los términos es infinito.

b) $-1 < r = \frac{1}{3} < 1$. Se aplica la fórmula:

$$S = \frac{c_1}{1 - r} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-2}{\frac{2}{3}} = -3$$

c) $r = -2 < -1$. La sucesión es:

$$\frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, -16, 32, \ldots$$

No se puede calcular la suma de todos los términos de la progresión.

086 Dada una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 0{,}1$, obtén.

a) La suma de los 6 primeros términos.

b) La suma de todos los términos.

a) $S_6 = \dfrac{2 \cdot (0{,}1^6 - 1)}{0{,}1 - 1} = \dfrac{-1{,}999998}{-0{,}9} = 2{,}22222$

b) $S = \dfrac{2}{1 - 0{,}1} = \dfrac{2}{0{,}9} = 2{,}\widehat{2}$

087 En una progresión geométrica, $a_1 = -1$ y $r = 7$. Calcula.

a) La suma de los 10 primeros términos.

b) La suma de todos los términos.

a) $S_{10} = \dfrac{-1 \cdot (7^{10} - 1)}{7 - 1} = -\dfrac{282\,475\,248}{6} = -47\,079\,208$

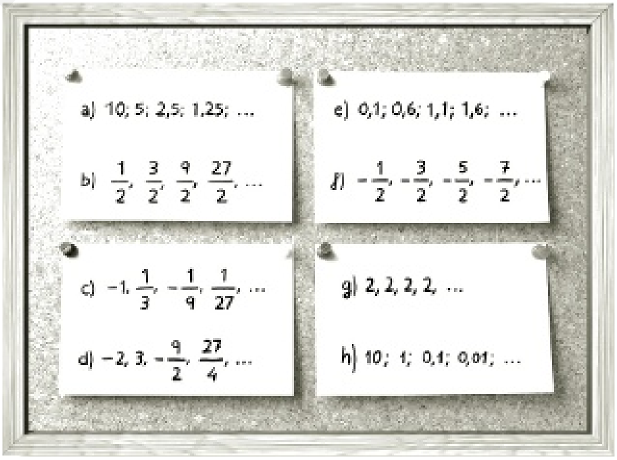
b) La suma de todos los términos de una progresión geométrica de razón mayor que 1 es infinito, en este caso menos infinito.

088 Halla la suma de los infinitos términos de la progresión 16, 12, 9, $\dfrac{27}{4}$, …

$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 12 = 16 \cdot r \rightarrow r = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

$S = \dfrac{a_1}{1 - r} \rightarrow S = \dfrac{16}{1 - 3/4} = 64$

089 Dadas las siguientes sucesiones, calcula, en los casos en que sea posible, la suma de sus infinitos términos.



a) $r = \frac{1}{2} \rightarrow S = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = 20$

b) $r = \frac{3/2}{1/2} = 3 \rightarrow$ No es posible, pues $3 > 1$.

c) $r = -\frac{1}{3} \rightarrow S = \frac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{3}{4}$

d) $r = \frac{-3}{2} < -1 \rightarrow$ No es posible.

e) No es posible, es una sucesión aritmética y no geométrica.

f) No es posible, es una sucesión aritmética y no geométrica.

g) $r = 1$, por lo que no es posible.

h) $r = \frac{1}{10} \rightarrow S = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$

090 ●●● **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es $\frac{15}{4}$ y la razón es $\frac{1}{5}$. Halla los 4 primeros términos de la sucesión.**

$$S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow \frac{15}{4} = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{5}} \rightarrow \frac{15}{4} = \frac{5a_1}{4} \rightarrow 15 = 5a_1 \rightarrow a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5},\ a_3 = \frac{3}{25},\ a_4 = \frac{3}{125}$$

091 ●● **El sexto término de una progresión geométrica vale 18 y el cuarto es 6.**

a) Obtén el término general.

b) Halla el producto de los 10 primeros términos.

a) $a_6 = a_4 \cdot r^2 \rightarrow 18 = 6 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

Para $r = +\sqrt{3} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 6 = a_1 \cdot (\sqrt{3})^3 \rightarrow a_1 = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$a_n = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{3})^n$$

Para $r = -\sqrt{3} \rightarrow 6 = a_1 \cdot (-\sqrt{3})^3 \rightarrow a_1 = \frac{6}{-3\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

$$a_n = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sqrt{3})^{n-1}$$

b) $a_{10} = \frac{2}{3} \cdot (\pm\sqrt{3})^{10} = \frac{2}{3} \cdot 3^5 = 2 \cdot 3^4 = 162$

$$P_{10} = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 162\right)^5 = (\pm 187{,}06)^5 = \pm 2{,}29 \cdot 10^{11}$$

092 El octavo término de una progresión geométrica es 1 458 y la razón es 3.

a) Obtén el término general.

b) Calcula el producto de los 8 primeros términos de la progresión.

a) $a_8 = a_1 \cdot r^7 \rightarrow 1\,458 = a_1 \cdot 3^7 \rightarrow a_1 = \dfrac{1\,458}{2\,187} \underset{(:\,729)}{=} \dfrac{2}{3} \rightarrow a_n = \dfrac{2}{3} \cdot 3^{n-1}$

b) $P_8 = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} \rightarrow P_8 = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3} \cdot 1\,458\right)^8} = 972^4 = 8{,}926 \cdot 10^{11}$

093 El quinto término de una progresión geométrica es 160 y el segundo es 20.

a) Halla el séptimo término.

b) Obtén el producto de los 7 primeros términos de esta progresión.

a) $a_5 = a_2 \cdot r^3 \rightarrow 160 = 20 \cdot r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$

$a_2 = a_1 \cdot r \longrightarrow 20 = a_1 \cdot 2 \rightarrow a_1 = 10$

$a_7 = a_1 \cdot r^6 \rightarrow a_7 = 10 \cdot 2^6 = 640$

b) $P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{(10 \cdot 640)^7} = 80^7 = 2{,}097 \cdot 10^{13}$

094 El número de usuarios de un polideportivo los fines de semana comenzó siendo de 150 personas y aumentó en 30 personas cada fin de semana a partir de entonces.

a) ¿Cuántos usuarios hubo en la semana 12?

b) ¿Y en las 10 primeras semanas?

Es una progresión aritmética, con $d = 30$.

a) $a_{12} = 150 + 11 \cdot 30 = 480$ usuarios

b) $S_{10} = \dfrac{(150 + 420) \cdot 10}{2} = 2\,850$ usuarios

095 Teresa ha comprado un caballo y quiere herrarlo. Para ello tienen que ponerle 20 clavos, el primero de los cuales cuesta 1 céntimo de euro y cada uno de los restantes vale 1 céntimo más que el anterior. ¿Cuánto paga en total por herrarlo?

Se trata de una progresión aritmética, con $a_1 = 1$ y $d = 1$.

$a_{20} = 1 + 19 \cdot 1 = 20$ céntimos

$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \dfrac{1 + 20}{2} \cdot 20 =$

$= 210$ céntimos $= 2{,}10$ €

096 ●● **¿Cuánto pagaría Teresa si el precio del primer clavo fuese el mismo, pero cada uno de los siguientes costara el doble que el anterior?**

Se trata de una progresión geométrica, de razón $r = 2$ y $a_1 = 1$.

$$S_{20} = \frac{a_1 \cdot (r^{20} - 1)}{r - 1} \rightarrow S_{20} = \frac{1 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 1\,048\,575 \text{ céntimos} = 10\,485{,}75 \text{ €}$$

097 ●● **En un aparcamiento cobran 0,25 € por la primera hora de estacionamiento y, por cada hora siguiente, el doble de lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto pagaremos por estar aparcados durante 8 horas?**

Es la suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica con $r = 2$ y $a_1 = 0{,}25 \rightarrow S_8 = \dfrac{0{,}25 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 63{,}75$ €

098 ●● **Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1,2 cada año. Si al comenzar el año medía 0,75 cm, ¿qué altura tendrá dentro de 10 años? ¿Cuánto crecerá en esos 10 años?**

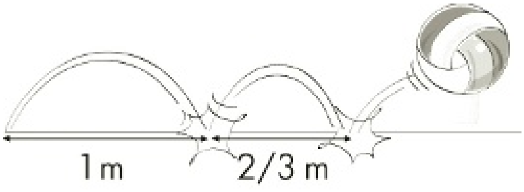
Es una progresión geométrica, con $r = 1{,}2$ y $a_1 = 0{,}75$.

$a_{10} = 0{,}75 \cdot 1{,}2^9 = 3{,}87$ m medirá a los 10 años, por lo que habrá crecido: $3{,}87 - 0{,}75 = 3{,}12$ m

099 ●● **Dejamos caer una pelota desde una altura de 1 metro, y en cada uno de los botes que da sube a una altura igual que la mitad del bote anterior. ¿A qué altura llegará en el quinto bote?**

Es una progresión geométrica, con $r = 0{,}5$ y $a_1 = 1$. El quinto bote es el término sexto de la progresión: $a_6 = 1 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}03125$ m

100 ●● **Lanzamos un balón que da botes a lo largo de un pasillo, como se ve en la figura.**



Si al séptimo bote choca con la pared y se para, ¿qué distancia habrá recorrido?

Es una progresión geométrica, con $r = \dfrac{2}{3}$ y $a_1 = 1$.

La suma de los 7 primeros términos es: $S_7 = \dfrac{1 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = 2{,}82$ m

101 **Halla la profundidad de un pozo si por la excavación del primer metro se han pagado 20 €, y por la de cada uno de los restantes se pagan 5 € más que en el anterior, siendo el coste total de 1 350 €.**

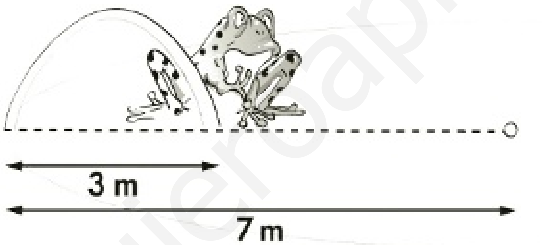
Es una progresión aritmética, con $d = 5$ y $a_1 = 20$.

$$1\,350 = S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d]\cdot n}{2} = \frac{[20 + 20 + (n-1)\cdot 5]\cdot n}{2} =$$

$$= \frac{5n^2 + 35n}{2} \rightarrow 5n^2 + 35n - 2\,700 = 0 \rightarrow n = 20 \text{ m}$$

La solución negativa de n no la contemplamos, por no ser posible una medida de longitud negativa.

102 **Una rana está en el borde de una charca circular de 7 metros de radio y quiere llegar al centro saltando. Da un primer salto de 3 metros y, después, avanza en cada uno la mitad que en el salto anterior. ¿Logrará llegar al centro?**



Es una progresión geométrica, con $r = 0,5$ y $a_1 = 3$. La distancia máxima que recorrerá será la suma de todos los términos.

$S = \dfrac{3}{1 - 0,5} = 6$ m, por lo que no llegará al centro de la charca.

103 **Durante los cuatro primeros meses de vida, un bebé ha ido ganando cada mes un 20 % de peso. Si al nacer pesaba 2 900 gramos, ¿cuál ha sido su peso al final del cuarto mes?**

Es una progresión geométrica, de razón $r = 1,2$ y $a_1 = 2\,900$.

$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_4 = 2\,900 \cdot 1,2^3 = 5\,011,2$ gramos

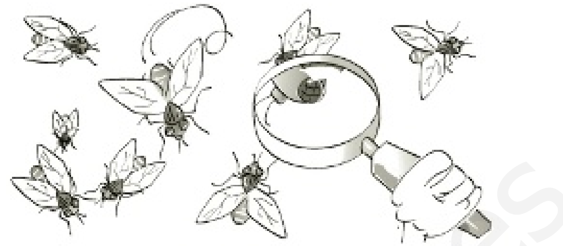
104 **Una escalera tiene todos los peldaños iguales menos el primero, que mide 20 cm. Al subir 100 escalones, la altura ascendida es de 1 505 cm. ¿Qué altura tiene cada peldaño?**

h = altura de uno de los 99 peldaños iguales

$$1\,505 - 20 = 99 \cdot h \rightarrow h = \frac{1\,485}{99} = 15 \text{ cm}$$

Se podría considerar que los 99 escalones forman una progresión aritmética de diferencia $d = 0$.

105 ●●● **Una bióloga está estudiando la evolución de una población de moscas.**



a) Si el número inicial de moscas es de 50 y, cada 10 días, la población de moscas se cuadruplica, halla el término general de la progresión formada por el número de moscas cada 10 días.

b) ¿Cuántas moscas habrá a los 50 días?

c) Si el precio del alimento para las moscas en el primer día es de 1 €, y cada día aumenta 2 céntimos más, halla el término general de la progresión.

d) Determina el valor del alimento en el día 20.

e) Calcula el valor del alimento en los 40 primeros días.

a) Es una progresión geométrica, con $r = 4$ y $a_1 = 50$, por lo que $a_n = 50 \cdot 4^{n-1}$.

b) $a_5 = 50 \cdot 4^4 = 12\,800$ moscas

c) Es una progresión aritmética, con $d = 0{,}02$ y $a_1 = 1$, siendo $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 0{,}02$.

d) $a_{20} = 1 + (20 - 1) \cdot 0{,}02 = 1{,}38$ €

e) $S_{40} = \dfrac{(1 + 1{,}78) \cdot 40}{2} = 55{,}60$ €

106 ●● **Se depositan 5 000 € al 4 % anual el 31 de diciembre en una empresa financiera. Si no retiramos el dinero durante 6 años, ¿qué capital tendremos al finalizar cada año?**

Primer año: $C_1 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 5\,200$ €

Segundo año: $C_2 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^2 = 5\,408$ €

Tercer año: $C_3 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^3 = 5\,624{,}32$ €

Cuarto año: $C_4 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^4 = 5\,849{,}29$ €

Quinto año: $C_5 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^5 = 6\,083{,}26$ €

Sexto año: $C_6 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^6 = 6\,326{,}60$ €

107 **Calcula el capital que, invertido a un interés compuesto del 5 %, produce en 4 años un capital final de 1 500 €.**

$$1\,500 = C \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^4 \rightarrow C = \frac{1\,500}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^4} = 1\,234{,}05\text{ €}$$

108 **Si un capital de 5 000 € se convierte en 6 000 € en una situación de interés compuesto al cabo de 2 años, ¿cuál es el interés al que ha estado invertido el capital inicial?**

$$6\,000 = 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} = 1 + \frac{r}{100} \rightarrow \frac{r}{100} = \sqrt{\frac{6}{5}} - 1$$

$$\rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}095 \rightarrow \text{El interés será del } 9{,}5\,\%.$$

109 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVE UN PROBLEMA DE INTERÉS COMPUESTO CON AUMENTOS DE CAPITAL?

Una familia hace un plan de ahorros durante 4 años ingresando, al principio de cada año, 3 000 € a un 5 % anual de interés compuesto. ¿Cuánto dinero obtendrá al finalizar el plan?

PRIMERO. Se calcula el interés de cada aportación.

– El primer año ingresa 3 000 €, que permanecerán 4 años en el banco, obteniendo:

$$3\,000 \cdot 1{,}05^4$$

– El segundo año ingresa 3 000 €, que permanecerán 3 años en el banco, obteniendo:

$$3\,000 \cdot 1{,}05^3$$

– El tercer año ingresa 3 000 €, que permanecerán 2 años en el banco, obteniendo:

$$3\,000 \cdot 1{,}05^2$$

– El cuarto año ingresa 3 000 €, que permanecerán 1 año en el banco, obteniendo:

$$3\,000 \cdot 1{,}05$$

SEGUNDO. Se suman las cantidades obtenidas.

$$3\,000 \cdot 1{,}05 + 3\,000 \cdot 1{,}05^2 + 3\,000 \cdot 1{,}05^3 + 3\,000 \cdot 1{,}05^4$$

Así, se obtiene la suma de los términos de una progresión geométrica, en la que:

$$a_1 = 3\,000 \cdot 1{,}05 \qquad a_4 = 3\,000 \cdot 1{,}05^4 \qquad r = 1{,}05$$

$$S = \frac{a_4 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3\,000 \cdot 1{,}05^5 - 3\,000 \cdot 1{,}05}{1{,}05 - 1} = 13\,576{,}90\text{ €}$$

110 **Rosa recibe una gratificación al principio de cada trimestre de 1 000 €. Si el dinero lo deposita en una entidad bancaria al 4 % de interés compuesto, ¿cuánto tendrá al acabar un año?**

Suponiendo que la gratificación la recibe al comienzo del trimestre, lo correspondiente al primer trimestre se convierte en $1\,000 \cdot 1{,}04$, el segundo $1\,000 \cdot 1{,}04^{\frac{3}{4}}$, el tercero $1\,000 \cdot 1{,}04^{\frac{2}{4}}$ y el cuarto $1\,000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}}$.

Se calcula la suma de los términos de una progresión geométrica, con $a_1 = 1\,000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}}$ y $r = 1{,}04^{\frac{1}{4}}$.

$$S_4 = \frac{1\,000 \cdot 1{,}04^{\frac{5}{4}} - 1\,000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}}}{1{,}04^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{1\,050{,}25 - 1\,009{,}85}{0{,}0099} = 4\,080{,}21 \text{ €}$$

111 **En un examen las preguntas estaban ordenadas según su dificultad. La primera valía 2 puntos y cada una de las restantes valía 3 puntos más que la anterior. Si en total cuentan 40 puntos, ¿cuántas preguntas tenía el examen?**

Es una progresión aritmética, con $d = 3$ y $a_1 = 2$.

$$40 = S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d] \cdot n}{2} = \frac{[2 + 2 + (n-1) \cdot 3] \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{3n^2 + n}{2} \rightarrow 3n^2 + n - 80 = 0 \rightarrow n = 5 \text{ preguntas}$$

La solución negativa de n no la contemplamos, por no ser posible un número negativo de preguntas.

112 **¿Puede ser el número 0 el primer término de una progresión geométrica? ¿Y de una progresión aritmética?**

Si el primer término de una progresión geométrica es 0, todos los términos serán 0, ya que los demás términos se calculan multiplicando el primero por la razón elevada a una cierta potencia. Por otra parte, no hay ningún inconveniente para que el primer término de una progresión aritmética sea 0.

113 **Consideramos una progresión geométrica con $a_1 \neq 0$ y $r \neq 0$, y una progresión aritmética con $a_1 = 0$. Sumando, término a término, estas dos progresiones obtenemos la sucesión: 1, 1, 2, ... ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos?**

La progresión geométrica es a_n y la aritmética es b_n (con $b_1 = 0$).

Y la suma es $a_n + b_n$.

$a_1 + b_1 = 1$, y como $b_1 = 0$, entonces $a_1 = 1$.

Por tanto, tenemos que: $a_n = r^{n-1}$ y $b_n = (n-1) \cdot d$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} a_1 + b_1 = r + d = 1 \\ a_2 + b_2 = r^2 + 2d = 2 \end{array}\right\} \end{array}\right. \begin{array}{l} \to d = 1 - r \\ \to r^2 + 2 \cdot (1 - r) = 2 \\ \to r^2 - 2r = 0 \to r = 0 \text{ y } r = 2 \end{array}$$

Como r no puede ser 0, $r = 2$ y $d = -1$.

La suma de los 10 primeros términos es la suma de los 10 términos de cada una de las sucesiones.

$$\left.\begin{array}{l} S'_{10} = \dfrac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 511 \\ S''_{10} = \dfrac{[0 + (-1) \cdot 10]}{2} = 5 \end{array}\right\} \to S_{10} = S'_{10} + S''_{10} = 516$$

114 **La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética ($n > 1$) es 153 y la diferencia de la progresión es 2. Si a_1 es un número entero, ¿qué valores puede tomar n?**

La diferencia es $d = 2$.

Y la suma es: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \dfrac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d] \cdot n}{2} =$

$$= \frac{[2a_1 + 2 \cdot (n-1)] \cdot n}{2} = (a_1 + n - 1) \cdot n = 153$$

El valor de n debe ser entero y, por tanto, será divisor de 153.

$$\text{Div}(153) = \{1, 3, 9, 17, 51, 153\}$$

Hallamos qué valores sirven como solución.

- $n = 3 \to a_1 + 3 - 1 = 51 \to a_1 = 49,\ a_2 = 51,\ a_3 = 53$
  y la suma hasta a_3 es 153.
- $n = 9 \to a_1 + 9 - 1 = 17 \to a_1 = 9,\ a_2 = 11,\ a_3 = 13\ldots$
  y la suma hasta a_9 es 153.
- $n = 17 \to a_1 + 17 - 1 = 9 \to a_1 = -7,\ a_2 = -5,\ a_3 = -3\ldots$
  y la suma hasta a_{17} es 153.
- $n = 51 \to a_1 + 51 - 1 = 3 \to a_1 = -47,\ a_2 = -45,\ a_3 = -43\ldots$
  y la suma hasta a_{51} es 153.
- $n = 153 \to a_1 + 153 - 1 = 1 \to a_1 = -151,\ a_2 = -149,\ a_3 = -147\ldots$
  y la suma hasta a_{153} es 153.

115 **Expresa de forma fraccionaria el número periódico $0,\widehat{5}$; para ello, escríbelo de la forma: $0,5 + 0,05 + 0,005 + \ldots$ y halla la suma de la progresión.**

Es una progresión geométrica, de término general:

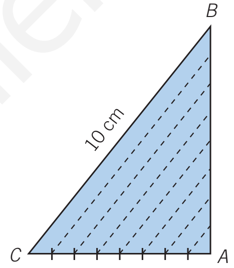
$$a_n = 0,5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \rightarrow 0,\widehat{5} = S = \frac{0,5}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

116 **Obtén la fracción generatriz de $2,\widehat{8}$ utilizando la suma de una progresión.**

$$\text{Como } 2,\widehat{8} = 2,8888\ldots = 2 + \underbrace{0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008\ldots}_{\substack{\text{Suma de una progresión geométrica}\\ \text{cuyo primer término es } a_1 = 0,8 \text{ y } r = 0,1}}$$

$$2,\widehat{8} = 2 + \frac{0,8}{1 - 0,1} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

117 **Dividimos el lado AC de un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ en 8 partes iguales, levantando desde los puntos de división paralelas al lado BC. Si BC mide 10 cm, calcula la suma de las longitudes de los otros 7 segmentos.**



La distancia de A a cada división n de AC es $\frac{n}{8}\overline{AC}$ y, por semejanza de triángulos, el lado paralelo a BC que pasa por esa división será:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{n}{8}\overline{AC} \rightarrow \overline{AC} \\ x \rightarrow 10 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{10n}{8} = \frac{5n}{4}$$

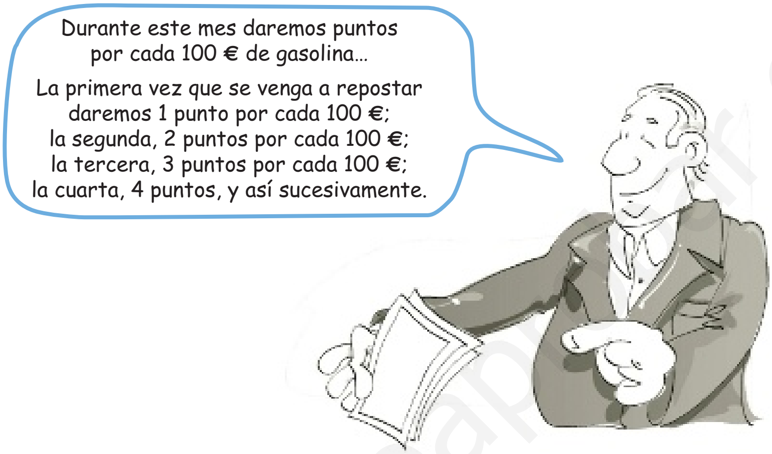
por lo que forman una progresión aritmética de diferencia: $d = \frac{5}{4}$

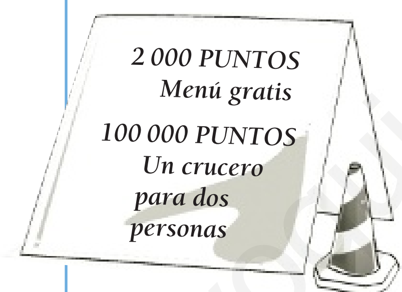
Y el primer término: $a_1 = \frac{5}{4}$

$$\text{Luego la suma es: } S_{10} = \frac{\left(\frac{5}{4} + 10\right) \cdot 10}{2} = \left(\frac{5}{4} + 10\right) \cdot 5 = \frac{225}{4}$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

118 ●●● **A Julián Gasol, dueño de la gasolinera de Villapueblo, se le ha ocurrido una idea para premiar la fidelidad de los camioneros que habitualmente repostan en su gasolinera.**





Estos puntos se podrán canjear por menús en una cafetería o por un magnífico crucero.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si una persona reposta por primera vez en la gasolinera y se ha gastado 150 €, ¿cuántos puntos recibirá para conseguir premios? ¿Y si reposta por segunda vez?

b) Si la tercera vez que reposta le han dado 12 puntos, ¿cuánto dinero se ha gastado?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Mariano tiene un camión y el repostaje semanal le cuesta 350 €. Si continúa con el mismo gasto, ¿cuándo podrá conseguir un menú gratis?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Si la promoción acaba en un año, ¿crees que alguien puede conseguir el crucero?

a) Como es la primera vez que reposta y gasta 150 €, recibirá 1 punto. Como es la segunda vez recibirá 2 puntos.

b) Suponiendo un repostaje semanal, en la tercera semana coincide el tercer repostaje:

$$12 = 3 \cdot n \rightarrow n = 4 \rightarrow \text{Ha gastado } 4 \cdot 100 = 400\ €$$

c) Suponiendo que no se dan fracciones de puntos, los puntos obtenidos forman una progresión aritmética de término general $a_n = 3n$.

La suma de los puntos de n repostajes es: $S_n = \dfrac{(3 + 3n)\,n}{2} = \dfrac{3n^2 + 3n}{2}$

Para conseguir los 2 000 puntos del menú gratis:

$$S_n = 2\,000 = \frac{3n^2 + 3n}{2} \rightarrow 3n^2 + 3n - 4\,000 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4\,000)}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} n_1 = 36{,}02 \\ n_2 = -37{,}02 \end{cases}$$

Tendría que repostar 37 veces, y como cada mes reposta 4 veces, tardaría 9 meses y 1 semana en conseguir un menú gratis.

d) Haciendo cada repostaje de lo mínimo posible para obtener puntos, los puntos en cada repostaje son una progresión aritmética de término general $a_n = n$.

La suma de los n primeros términos de esta progresión es:

$$S_n = \frac{(1 + n)\,n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 100\,000$$

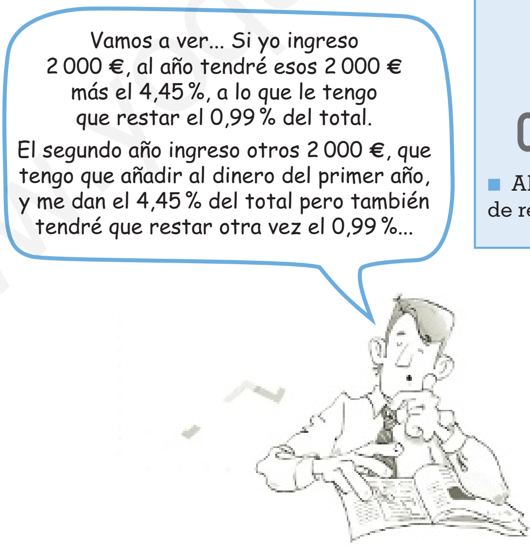
$$n^2 + n - 200\,000 = 0 \rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 800\,000}}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 446{,}7 \\ n_2 = -447{,}7 \end{cases}$$

Hacen falta 447 repostajes de 100 € para conseguir el crucero, es decir, más de uno diario durante un año. Es muy difícil que nadie consiga el crucero.

119 ●●●

Un informe económico afirma que el mejor plan de pensiones es el de BANCOVERDE.

En un plan de pensiones se hacen ingresos periódicos de dinero: mensualmente, trimestralmente, anualmente…



PLAN DE PENSIONES BANCOVERDE

- Comisiones mínimas

0 %	Comisión de suscripción
0 %	Comisión de reembolso
0 %	Comisión de depósito
0,99 %	Comisión de gestión

- Alto potencial de rentabilidad

4,45 % Anual asegurado

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si una persona ingresa 2 000 €, ¿cuánto dinero tendrá al finalizar el primer año? ¿Y el segundo?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si una persona que ingresa 2 000 € al año tiene ahora 40 años, ¿cuánto dinero recibirá al llegar a su jubilación?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Calcula la comisión de gestión total que tiene que pagar la persona del apartado anterior al recibir el dinero. ¿Consideras que los gastos de dicha comisión son elevados?

a) Por un año le corresponde:

$$2\,000 + 2\,000 \cdot \frac{4,45}{100} - \left(2\,000 + 2\,000 \cdot \frac{4,45}{100}\right) \cdot \frac{0,99}{100} =$$

$$= 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)$$

Por dos años le corresponde:

$$2\,000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)^2 + 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)$$

b) En esta progresión geométrica, por *t* años le corresponde:

$$2\,000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right)^t \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)^t$$

Suponiendo que me quedan 25 años para jubilarme, obtendré:

$$S_{25} = \frac{2\,000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{4,45}{100}\right)^{25} \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)^{25} - 1\right]}{\left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right) - 1} =$$

$$= \frac{2\,478,47455989}{0,03415945} = 79\,665,97\ €$$

c) Calculamos el dinero que tenía a los 24 años del primer ingreso:

$$S_{24} = 75\,034,52\ €$$

Ese año ingresamos 2 000 €, por tanto el capital inicial del año 25 es 77 034,52 €. Las comisiones del año 25 serán:

$$\text{Comisión}_{25} = \left(77\,034,52 + 77\,034,52 \cdot \frac{4,45}{100}\right) \cdot \frac{0,99}{100} = 796,58\ €$$

Es decir, el último año, antes de recibir el dinero, paga 796,58 €.

Si consideramos que las comisiones son alrededor del 1 % del capital que tenemos en el banco:

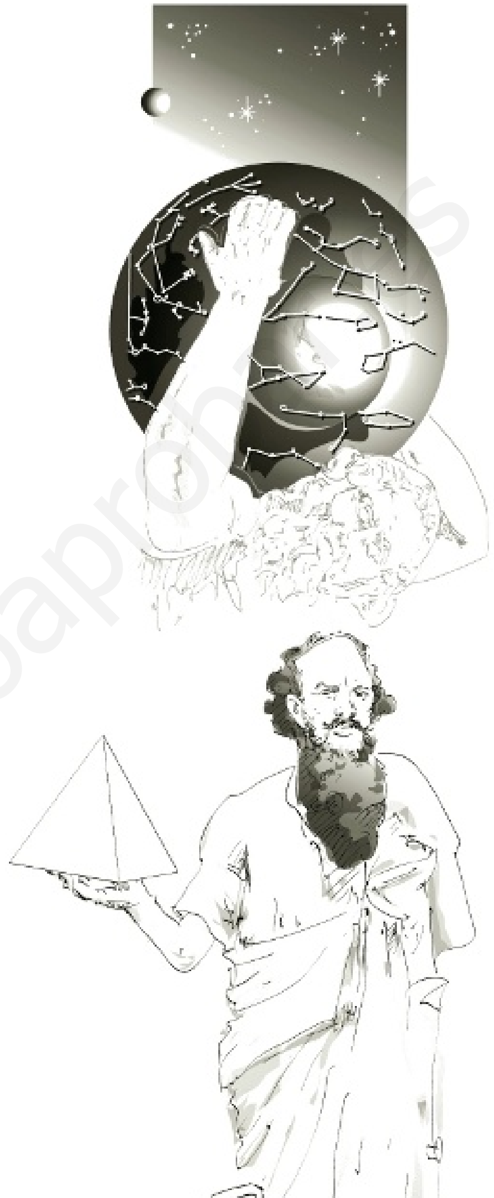
1.º año	2 000 €	Comisión = 20 €
2.º año	4 000 €	Comisión = 40 €
3.º año	6 000 €	Comisión = 60 €

Podemos considerar las comisiones como una progresión aritmética de término general $20n$. Si sumamos los 25 primeros términos de esta sucesión:

$$S_{25} = \frac{(20 + 20 \cdot 25) \cdot 25}{2} = 6\,500\ €$$

Es decir, las comisiones que tendremos que pagar a lo largo de todos los años son más de 6 500 €, más de tres veces la aportación anual que hacemos.

8 Lugares geométricos. Figuras planas



La riqueza de los sabios

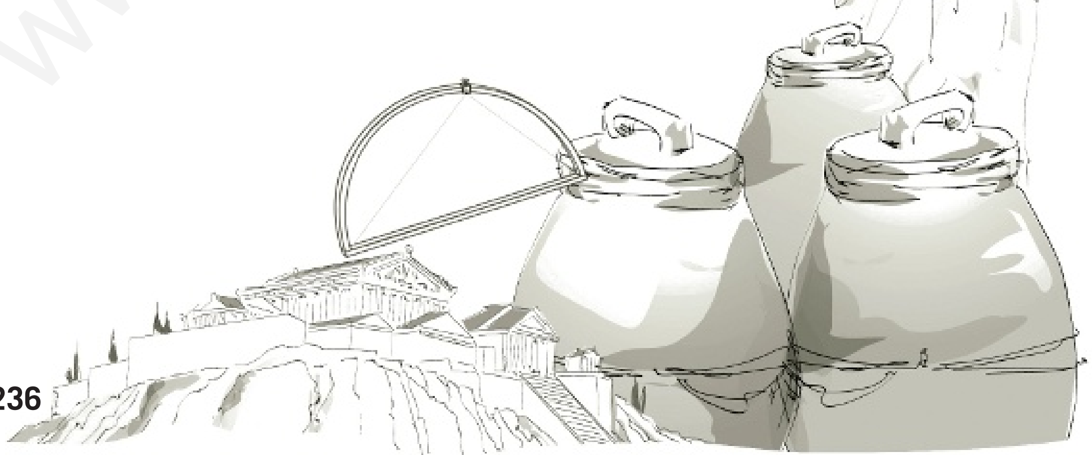
Aquella fue la gota que colmó el vaso: su propia madre le reprochaba que siendo tan sabio no fuera igualmente rico. La chanza no era nueva pero a Tales de Mileto le dolió como nunca. Se encerró en casa y comenzó a fraguar su plan.

Sus estudios de los astros le permitieron predecir un perfecto año para el cultivo. Así que reuniendo todo el dinero del que disponía y aun el que, en secreto, pudo pedir prestado, se hizo con el control de todas las prensas de aceite de Mileto y su vecina Quíos.

Su predicción sobre el clima fue acertada, y sus vecinos se frotaban las manos pensando en los beneficios de la cosecha de aceituna. Pero cuando fueron a moler las aceitunas sus sonrisas se tornaron en muecas, pues hubieron de pagar lo estipulado por Tales.

Cumplida su pequeña venganza, y además convertido en rico, vendió las prensas y las tierras y se dedicó a sus estudios de filosofía y matemáticas, no sin antes decirle a sus vecinos: «Tomad para vosotros los consejos que dais a otros».

Uno de los postulados de Tales es que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es siempre un ángulo recto.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre Tales de Mileto.**

En la siguiente página, donde se recogen biografías de personajes famosos, puedes encontrar la biografía de Tales de Mileto, y se recoge la historia que narramos en el texto:
http://www.biografias.es/famosos/tales-de-mileto.html

2 **A Tales de Mileto se le atribuye la medición de la Gran Pirámide. Explica cómo lo hizo.**

En esta página, dedicada a la divulgación de las matemáticas, que depende de la Real Sociedad Matemática Española, puedes encontrar una extensa biografía de Tales de Mileto desarrollada por Javier Peralta, de la Universidad Autónoma de Madrid, donde se puede ver cómo midió la altura de la Gran Pirámide:
http://www.divulgamat.net/

3 **Además del postulado que se enuncia en el texto, investiga qué otras aportaciones geométricas realizó Tales de Mileto.**

En la siguiente página puedes leer una biografía de Tales de Mileto en la que aparecen sus otros teoremas geométricos:
http://www.astromia.com/biografias/

EVALUACIÓN INICIAL

1 **¿Existe algún triángulo con dos ángulos obtusos? ¿Y un triángulo rectángulo con un ángulo obtuso? ¿Y un triángulo isósceles y obtusángulo?**

No puede existir un triángulo con dos ángulos obtusos, porque la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°, y los dos ángulos obtusos ya suman más de 180°.

Los ángulos de un triángulo rectángulo son uno recto y los otros dos agudos.

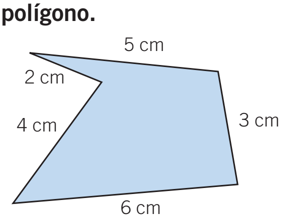
Sí, puede haber un triángulo isósceles y obtusángulo.

2 **Di cuál de estos polígonos es regular.**

a) Un triángulo equilátero. **b) Un rectángulo.** **c) Un rombo.**

a) Un triángulo equilátero.

3 **Halla el perímetro de este polígono.**



$P = 2\text{ cm} + 4\text{ cm} + 6\text{ cm} + 3\text{ cm} + 5\text{ cm} = 20\text{ cm}$

Lugares geométricos. Figuras planas

EJERCICIOS

001 **Dibuja en tu cuaderno el lugar geométrico de los puntos que cumplen estas condiciones.**

a) Equidistan de los extremos de un segmento de 6 cm de longitud.

b) Equidistan de los lados de un ángulo de 90°.

c) Están a 2 cm del punto *P*.

a) El lugar geométrico es la mediatriz de un segmento de longitud 6 cm.

b) El lugar geométrico es la bisectriz de un ángulo de 90°.

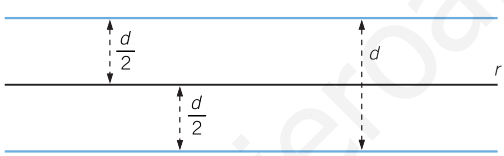
c) El lugar geométrico es una circunferencia de radio 2 cm y centro *P*.

002 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta.**

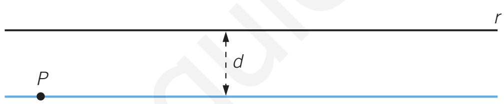
Los puntos que equidistan de una recta son dos rectas paralelas que están a la misma distancia de la recta inicial.

003 **Define las rectas rojas como lugar geométrico.**

a)



b)

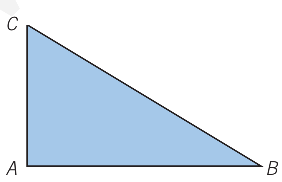


a) Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan $\frac{d}{2}$ de la recta *r*.

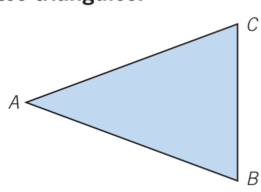
b) Es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia *d* de *r* y que están alineados con el punto *P*, formando una recta con él.

004 **Dibuja la circunferencia circunscrita a estos triángulos.**

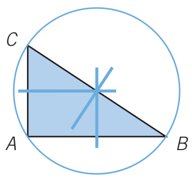
a)



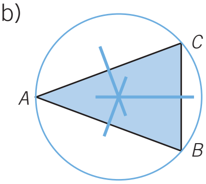
b)



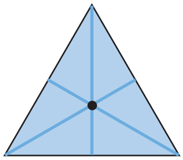
a)



b)



005 **Dibuja un triángulo equilátero y determina su baricentro y su circuncentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?**



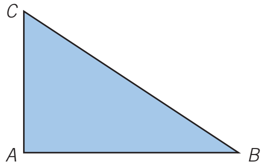
El baricentro y el circuncentro coinciden en cualquier triángulo equilátero, ya que las mediatrices coinciden con las medianas.

006 **Define el baricentro como lugar geométrico.**

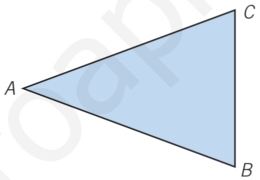
El baricentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que están a doble distancia de los vértices que de sus lados opuestos, simultáneamente para los tres vértices.

007 **Dibuja la circunferencia inscrita de estos triángulos.**

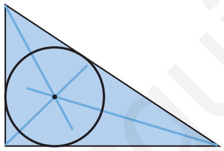
a)



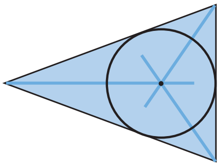
b)



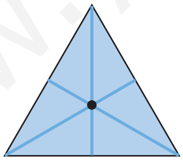
a)



b)



008 **Dibuja un triángulo equilátero y determina su ortocentro y su incentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?**



El ortocentro y el incentro coinciden en cualquier triángulo equilátero, ya que las bisectrices coinciden con las alturas.

009 **Define la circunferencia inscrita como lugar geométrico.**

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al incentro es igual que la distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo.

010 **Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 24 cm.**

$$a = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1\,600} = 40 \text{ cm}$$

011 **Evalúa si las siguientes medidas determinan los lados de un triángulo rectángulo.**

a) 8 cm, 5 cm y 4 cm **b) 10 cm, 8 cm y 6 cm**

a) No es rectángulo, ya que $8^2 \neq 5^2 + 4^2$.

b) Sí es rectángulo, porque $10^2 = 8^2 + 6^2$.

012 **Calcula el tercer lado de un triángulo rectángulo del que conocemos los otros dos: 28 cm y 21 cm.**

Si suponemos que los lados conocidos son los catetos:

$$a = \sqrt{28^2 + 21^2} = \sqrt{1\,225} = 35 \text{ cm}$$

Y si suponemos que los lados conocidos son la hipotenusa y un cateto:

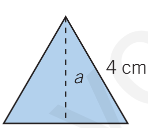
$$a = \sqrt{28^2 - 21^2} = \sqrt{343} = 18{,}52 \text{ cm}$$

013 **Sin operar, razona por qué el triángulo de lados 35 cm, 77 cm y 85 cm no puede ser rectángulo.**

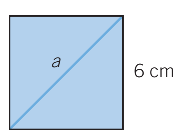
No puede ser rectángulo porque al ser 35 y 77 múltiplos de 7, la suma de sus cuadrados será múltiplo de 7, y como 85 no es múltiplo de 7, su cuadrado tampoco lo será, por lo que no se cumple el teorema de Pitágoras.

014 **Calcula el valor de *a* en el triángulo equilátero y el cuadrado.**

a)



b)



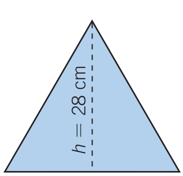
a) $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{,}46 \text{ cm}$

b) $a = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 8{,}49 \text{ cm}$

015 **Determina el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 8 cm.**

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow 64 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

016 **Halla el lado de un triángulo equilátero de altura 28 cm.**



$$l^2 = 28^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 = 784 + \frac{l^2}{4}$$

$$\rightarrow 4l^2 = 3\,136 + l^2 \rightarrow 3l^2 = 3\,136 \rightarrow l^2 = \sqrt{\frac{3\,136}{3}}$$

$$\rightarrow l = 32{,}23 \text{ cm}$$

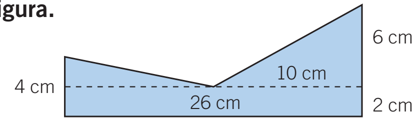
017 **Calcula el área de los siguientes polígonos.**

a) Un trapecio de bases 12 cm y 8 cm y altura 5 cm.

b) Un rombo de diagonales 12 cm y 9 cm.

a) $A = \dfrac{(12 + 8) \cdot 5}{2} = 50 \text{ cm}^2$ b) $A = \dfrac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ cm}^2$

018 **Halla el área de la figura.**



Área total = Área rectángulo + Área triángulo 1 + Área triángulo 2

Área rectángulo $= 26 \cdot 2 = 52 \text{ cm}^2$

Área triángulo 1 $= \dfrac{16 \cdot 2}{2} = 16 \text{ cm}^2$

Área triángulo 2 $= \dfrac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$

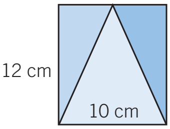
Área total $= 52 + 16 + 30 = 98 \text{ cm}^2$

019 **Calcula el área de un rectángulo de 3 cm de altura y 5 cm de diagonal.**

Base $= \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$

Área $= 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$

020 **Halla el área de cada uno de los tres triángulos.**



Los triángulos laterales son iguales:

$A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$

El triángulo central tiene de área: $A = \dfrac{12 \cdot 10}{2} = 60 \text{ cm}^2$

021 **Halla la apotema de un heptágono regular de lado 6 cm y área 130,8 cm².**

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow a = \dfrac{2 \cdot A}{P} = \dfrac{2 \cdot 130{,}8}{6 \cdot 7} = 6{,}23 \text{ cm}$

022 **Calcula el área de un cuadrado de lado 7 cm, aplicando la fórmula del área de un polígono regular.**

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow A = \dfrac{4l \cdot \dfrac{l}{2}}{2} \rightarrow A = \dfrac{28 \cdot \dfrac{7}{2}}{2} = 49 \text{ cm}^2$

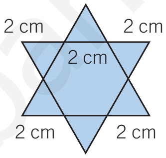
023 **Determina el área de un hexágono regular de lado 6 cm.**

La apotema es la altura de un triángulo equilátero de lado 6 cm, que podemos dividir en dos triángulos rectángulos.

$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

024 **Halla el área de la siguiente figura. Observa que el interior es un hexágono regular.**



El área es el doble del área del hexágono de lado 2 cm.
La apotema es la altura de un triángulo equilátero de lado 2 cm.

$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ cm}$$

$$A = \frac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$$

El área de la figura es: $2 \cdot 10{,}38 = 20{,}76 \text{ cm}^2$

025 **Determina la altura y el perímetro de un triángulo equilátero de área 2 dm².**

La altura con respecto del lado es: $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = 0{,}87l$

$$A = 2 = \frac{l \cdot 0{,}87l}{2} \to l = \sqrt{\frac{4}{0{,}87}} = 2{,}14 \text{ dm}$$

$$h = 0{,}87 \cdot 2{,}14 = 1{,}86 \text{ dm}$$

$$P = 3 \cdot 2{,}14 = 6{,}42 \text{ dm}$$

026 **Halla el área de un círculo cuyo diámetro mide 6 cm.**

$$r = \frac{d}{2} \to r = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$L = 2\pi r \to L = 2\pi \cdot 3 = 18{,}84 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 \to A = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$$

027 **Dos circunferencias concéntricas tienen radios de 5 y 3 cm, respectivamente. Calcula el área de la corona que originan. Halla también el área de los círculos que generan.**

Área corona $= \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (5^2 - 3^2) = \pi \cdot 16 = 50{,}24 \text{ cm}^2$
Área círculo mayor $= \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}5 \text{ cm}^2$
Área círculo menor $= \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 26{,}26 \text{ cm}^2$

028 **Determina el radio de un sector circular con un ángulo de 120° y área de 31,4 cm².**

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 120}{360} = 31{,}4 \text{ cm}^2$$

$$r^2 = \frac{31{,}4 \cdot 360}{\pi \cdot 120} = 30$$

$$r = \sqrt{30} = 5{,}48 \text{ cm}$$

029 **¿Qué relación hay entre los radios de dos circunferencias si la corona circular que generan es la mitad del área del círculo mayor?**

El área de la circunferencia mayor es el doble de la menor, por lo que el radio de la circunferencia mayor será el radio de la menor multiplicado por $\sqrt{2}$.

ACTIVIDADES

030 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos *A* y *B*.**

Los puntos del plano que equidistan de los puntos *A* y *B* son los puntos que están en la mediatriz del segmento *AB*.

031 **Obtén el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo de 180°.**

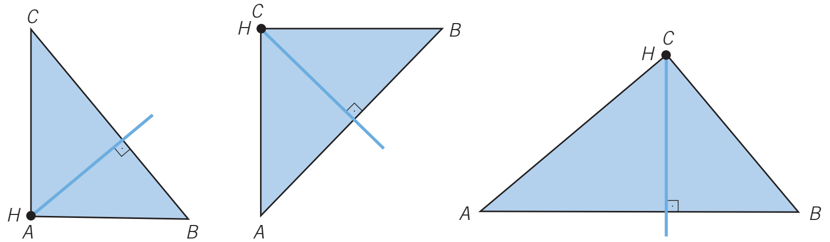
Los puntos del plano que equidistan de los lados de cualquier ángulo son los puntos de la bisectriz.

032 **Determina el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio *r* que pasan por un punto *P*.**

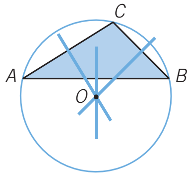
El lugar geométrico es la circunferencia de centro el punto *P* y radio *r*.

033 **Dibuja varios triángulos rectángulos y señala su ortocentro. ¿Dónde se encuentra situado?**

Se encuentra situado en el vértice del ángulo recto.



034 **Dibuja tres puntos que no estén alineados y traza la circunferencia que pasa por ellos.**



Trazamos los segmentos que los unen y sus mediatrices. El punto de corte es el centro de la circunferencia.

035 **En un triángulo rectángulo e isósceles, la hipotenusa mide 10 cm. Si se traza una circunferencia circunscrita, ¿cuál es el radio?**

Como el incentro está en el punto medio de la hipotenusa, esta será el diámetro, luego el radio mide 5 cm.

036 **En un triángulo equilátero de perímetro 36 cm se traza la circunferencia circunscrita. Sabiendo que la mediana mide 10,39 cm, ¿cuál es el radio de la circunferencia?**

Como en un triángulo equilátero coinciden las rectas y los puntos notables, el radio es la distancia del baricentro al centro:
$r = 10{,}39 \cdot 2 : 3 = 6{,}93$ cm

037 **En un triángulo rectángulo, el baricentro, el ortocentro, el circuncentro y el incentro son puntos situados:**

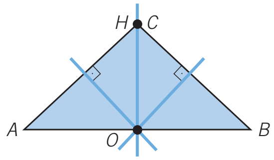
a) En el exterior del triángulo.
b) En el interior del triángulo.
c) Sobre un lado.

El incentro y el baricentro son puntos interiores, mientras que el ortocentro está en el vértice del ángulo recto y el circuncentro está en el punto medio de la hipotenusa.

038 **En un triángulo rectángulo e isósceles, señala el circuncentro y el ortocentro. El segmento que une estos dos puntos del triángulo es:**

a) Mediana **c) Altura**
b) Mediatriz **d) Bisectriz**

¿Se verifica esto también en un triángulo rectángulo y escaleno?



El segmento es coincidente con una mediana, una mediatriz, una altura y una bisectriz. Si el triángulo es rectángulo y escaleno, no se verifica.

039 ●●

En un triángulo rectángulo e isósceles:

a) La altura correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor que un cateto?

b) La mediana correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor o menor que un cateto?

a) No, ya que la altura forma dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el cateto del triángulo inicial. La hipotenusa es el lado mayor.

b) La mediana coincide con la altura y es menor, por lo indicado en el apartado a).

040 ●

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los catetos 6 cm. Obtén la longitud del otro cateto.

$$b = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10{,}39 \text{ cm}$$

041 ●

Calcula la longitud del lado que falta en cada triángulo rectángulo (*a* es la hipotenusa).

a) $a = 34$ cm, $b = 30$ cm **b) $b = 28$ cm, $c = 21$ cm**

a) $c = \sqrt{1156 - 900} = \sqrt{256} = 16$ cm

b) $a = \sqrt{784 + 441} = \sqrt{1\,225} = 35$ cm

042 ●●

Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos se diferencian en 2 cm y que el menor mide 6 cm.

Los catetos son 6 cm y $6 + 2 = 8$ cm, y la hipotenusa mide:

$$a = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

043 ●

Determina si los siguientes triángulos son rectángulos. En caso afirmativo, indica la medida de la hipotenusa y los catetos.

a) Triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.

b) Triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm.

c) Triángulo de lados 5 cm, 6 cm y $\sqrt{61}$ cm.

d) Triángulo de lados 7 cm, 24 cm y 25 cm.

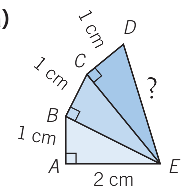
a) $13 = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} \longrightarrow$ Rectángulo, de hipotenusa 13 cm y catetos de 12 cm y 5 cm.

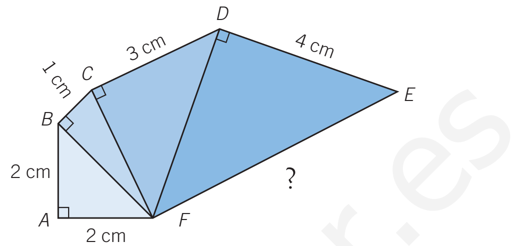
b) $12 \neq \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \rightarrow$ No es rectángulo.

c) $\sqrt{61} = \sqrt{5^2 + 6^2} \longrightarrow$ Rectángulo, de hipotenusa $\sqrt{61}$ cm y catetos de 6 cm y 5 cm.

d) $25 = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} \longrightarrow$ Rectángulo, de hipotenusa 25 cm y catetos de 24 cm y 7 cm.

044 Halla la longitud de los segmentos indicados.

a) 

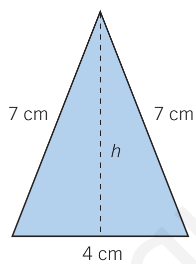
b) 

a) $\overline{EB} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \rightarrow \overline{EC} = \sqrt{1+5} = \sqrt{6} \rightarrow \overline{ED} = \sqrt{1+6} = \sqrt{7}$ cm

b) $\overline{FB} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \rightarrow \overline{FC} = \sqrt{1+8} = 3$

$\rightarrow \overline{FD} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \rightarrow \overline{FE} = \sqrt{18+16} = \sqrt{34}$ cm

045 En un triángulo isósceles sabemos que los lados iguales miden 7 cm y el otro lado es de 4 cm. Calcula su altura.



$7^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = 7^2 - 2^2$

$h^2 = 49 - 4$

$h = \sqrt{45} = 6{,}71$ cm

046 Halla la altura de un triángulo equilátero de perímetro 30 cm.

El lado es: $30 : 3 = 10$ cm, y la altura aplicando el teorema de Pitágoras es:

$$h = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

047 Obtén la longitud de la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 17 cm y su altura 8 cm.

La mitad de la base forma un triángulo rectángulo con la altura y uno de los lados. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm} \rightarrow b = 30 \text{ cm}$$

048 ●● **Halla la longitud de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 42 cm y su altura 20 cm.**

La mitad de la base forma un triángulo rectángulo con la altura y uno de los lados. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$l = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29 \text{ cm}$$

049 ●● **Determina la longitud del lado de un triángulo equilátero cuya altura es de 6 cm.**

La mitad de la base forma un triángulo equilátero con la altura y uno de los lados. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

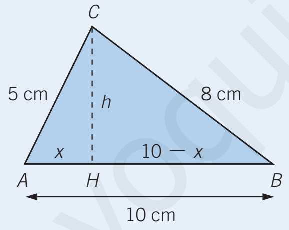
$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}l^2 \rightarrow 36 = \frac{3}{4}l^2 \rightarrow l = \sqrt{48} = 6{,}93 \text{ cm}$$

050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNA ALTURA DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA CONOCIENDO SUS LADOS?

Calcula la altura de un triángulo de lados 5 cm, 8 cm y 10 cm.

PRIMERO. Se dibuja el triángulo y se nombra cada uno de sus elementos.



La altura divide a la base en dos partes:

- *AH*, cuya longitud se llama *x*.
- *HB*, cuya longitud será $10 - x$.

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos resultantes.

En $\widehat{AHC}$: $5^2 = x^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 5^2 - x^2$

En $\widehat{HBC}$: $8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$

TERCERO. Se igualan ambas expresiones y se resuelve la ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$25 - x^2 = 64 - (100 + x^2 - 20x)$$
$$25 - x^2 = 64 - 100 - x^2 + 20x$$
$$20x = 61 \rightarrow x = 3{,}05 \text{ cm}$$

CUARTO. Se calcula *h*.

$$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3{,}05^2} = 3{,}96 \text{ cm}$$

051 ●●

Calcula la altura de un triángulo cuyos lados miden:

a) $\overline{AB} = 4$ **cm** $\quad \overline{BC} = 7$ **cm** $\quad \overline{CA} = 9$ **cm**

b) $\overline{AB} = 6$ **cm** $\quad \overline{BC} = 10$ **cm** $\quad \overline{CA} = 14$ **cm**

c) $\overline{AB} = 5$ **cm** $\quad \overline{BC} = 11$ **cm** $\quad \overline{CA} = 15$ **cm**

a) $\left.\begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 - x^2 = 7^2 - (9 - x)^2$

$16 - x^2 = 49 - 81 + 18x - x^2$

$18x = 48 \rightarrow x = 2{,}67$ cm

$h^2 = 4^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{16 - 7{,}11} = 2{,}98$ cm

b) $\left.\begin{array}{l} h^2 = 6^2 - x^2 \\ h^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 6^2 - x^2 = 10^2 - (14 - x)^2$

$36 - x^2 = 100 - 196 + 28x - x^2$

$28x = 132 \rightarrow x = 4{,}71$ cm

$h^2 = 6^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{36 - 22{,}22} = 3{,}71$ cm

c) $\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 11^2 - (15 - x)^2$

$25 - x^2 = 121 - 225 + 30x - x^2$

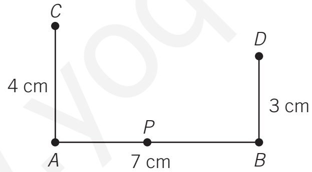
$30x = 129 \rightarrow x = 4{,}3$ cm

$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{25 - 18{,}49} = 2{,}55$ cm

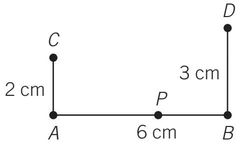
052 ●●●

Observando los dibujos, halla la distancia del punto *P* al punto *A*, para que se verifique que la longitud del segmento *CP* es igual que la del segmento *DP*.

a)



b)



a) Si $\overline{CP} = \overline{PD} = d$

$\left.\begin{array}{l} d^2 = 4^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (7 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 + x^2 = 3^2 + (7 - x)^2$

$16 + x^2 = 9 + 49 - 14x + x^2$

$14x = 42 \rightarrow x = 3$ cm

$d^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{16 + 9} = 5$ cm

b) Si $\overline{CP} = \overline{PD} = d$

$\left.\begin{array}{l} d^2 = 2^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (6 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2^2 + x^2 = 3^2 + (6 - x)^2$

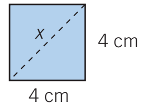
$4 + x^2 = 9 + 36 - 12x + x^2$

$12x = 41 \rightarrow x = 3{,}42$ cm

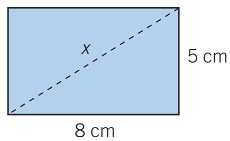
$d^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{4 + 11{,}69} = 3{,}96$ cm

053 Calcula la longitud de *x* en las figuras.

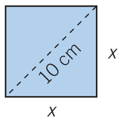
a)



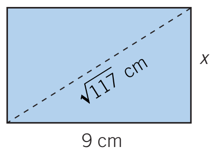
c)



b)



d)



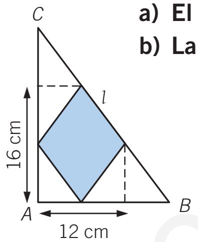
a) $x = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5{,}66$ cm

b) $10^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x^2 = \dfrac{100}{2} \rightarrow x = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm

c) $x = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9{,}43$ cm

d) $x = \sqrt{\left(\sqrt{117}\right)^2 - 9^2} = \sqrt{117 - 81} = \sqrt{36} = 6$ cm

054 Observa la figura y calcula.



a) El lado del rombo.

b) La longitud del cateto *AB*, del cateto *AC* y de la hipotenusa *BC*.

a) $l = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ cm

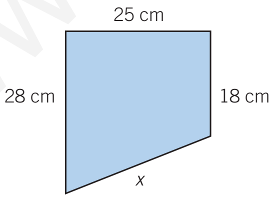
b) $AC = \dfrac{D}{2} + D = \dfrac{16}{2} + 16 = 24$ cm

$AB = \dfrac{d}{2} + d = \dfrac{12}{2} + 12 = 18$ cm

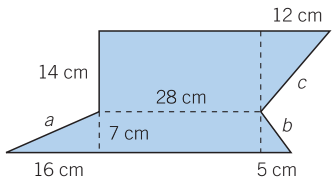
$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \rightarrow AC = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ cm

055 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a)



b)



a) $x = \sqrt{25^2 + 10^2} = \sqrt{725} = 26{,}93$ cm

$P = 28 + 25 + 18 + 26{,}93 = 97{,}93$ cm

b) $a = \sqrt{16^2 + 7^2} = \sqrt{305} = 17{,}46$ cm

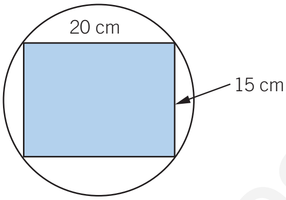
$b = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} = 8{,}6$ cm

$c = \sqrt{14^2 + 12^2} = \sqrt{340} = 18{,}44$ cm

$P = 17{,}46 + 14 + 28 + 12 + 18{,}44 + 8{,}6 + 5 + 28 + 16 = 147{,}5$ cm

056 **Observa la siguiente figura.**

Si los lados del rectángulo son 15 cm y 20 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?

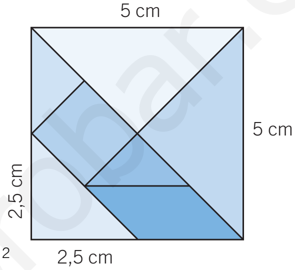


El radio es la mitad de la diagonal:

$$r = \frac{\sqrt{400 + 225}}{2} = \frac{\sqrt{625}}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

057 **Considera las siete piezas del *tangram* chino.**

Calcula el área de cada una de las piezas de este *tangram*.



Hallamos primero la diagonal del cuadrado:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2} \rightarrow d = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Triángulo mayor}} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{8} = \frac{25 \cdot 2}{8} = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo mediano}} = \frac{2{,}5 \cdot 2{,}5}{2} = 3{,}125 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo menor}} = \frac{\frac{d}{4} \cdot \frac{d}{4}}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{25}{16} = 1{,}5625 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cuadrado}} = \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{50}{16} = 3{,}125 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Romboide}} = b \cdot h = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \rightarrow A_{\text{Romboide}} = 2{,}5 \cdot 1{,}25 = 3{,}125 \text{ cm}^2$$

Comprobamos que la suma de las áreas de todas las piezas es igual al área total del cuadrado, $5^2 = 25$ cm^2:

$$2 \cdot 6{,}25 + 3{,}125 + 2 \cdot 1{,}5625 + 3{,}125 + 3{,}125 = 25$$

058 **Elige la respuesta correcta en cada caso.**

a) El área de un rombo de diagonales 2 cm y 4 cm, es:

I) 4 cm^2 **III) 6 cm^2**
II) 2 cm^2 **IV) 12 cm^2**

b) El área de un trapecio de bases 10 cm y 8 cm y altura 6 cm, es:

I) 240 cm^2 **III) 108 cm^2**
II) 54 cm^2 **IV) 60 cm^2**

c) El área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm, es:

I) 86,6 cm^2 **III) 43,3 cm^2**
II) 50 cm^2 **IV) 100 cm^2**

a) → I) 4 cm^2 b) → II) 54 cm^2 c) → III) 43,3 cm^2

059 **El área de un triángulo isósceles es 24 m² y el lado desigual mide 6 m. Halla la longitud de los otros lados.**

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow 24 = \frac{6 \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{24 \cdot 2}{6} = 8 \text{ m}$$

$$l^2 = 3^2 + 8^2 \rightarrow l^2 = 9 + 64 \rightarrow l = \sqrt{73} = 8{,}54 \text{ m}$$

060 **El área de un triángulo rectángulo es 12 cm² y uno de los catetos mide 6 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.**

El otro cateto mide: $12 \cdot 2 : 6 = 4$ cm

y la hipotenusa es: $\sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7{,}21$ cm

061 **Obtén el área de un triángulo equilátero de perímetro 90 cm.**

El lado es: $90 : 3 = 30$ cm

y la altura mide: $\sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98$ cm

$$\text{Área} = \frac{25{,}98 \cdot 30}{2} = 389{,}7 \text{ cm}^2$$

062 **Si el área de un triángulo equilátero es 30 cm², halla la longitud de su lado.**

Si el lado es x, la altura será: $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ cm

$$\text{Área} = 30 = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow x = 8{,}32 \text{ cm}$$

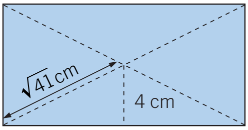
063 **Obtén el área de un triángulo rectángulo de hipotenusa 13 cm, siendo uno de los catetos 5 cm.**

El otro cateto es: $\sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm
y el área es: $(5 \cdot 12) : 2 = 30$ cm²

064 **Calcula el área de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 7,07 cm.**

Si consideramos el cuadrado como un rombo,
el área mide: $(7{,}07 \cdot 7{,}07) : 2 = 25$ cm²

065 **Halla el área de este rectángulo.**



La mitad de la base es: $\sqrt{41 - 16} = 5$ cm,
por lo que el área mide: $10 \cdot 8 = 80$ cm²

066 **Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 10 cm y la diagonal $\sqrt{116}$ cm**

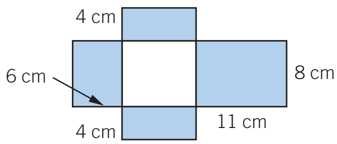
La altura es: $\sqrt{116 - 100} = 4$ cm y el área mide: $10 \cdot 4 = 40$ cm²

067 Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.

$7 + 7 + 2h = 24 \rightarrow 2h = 10 \rightarrow h = 5$ cm

Área $= 5 \cdot 7 = 35$ cm^2

068 Calcula el área de la zona sombreada.

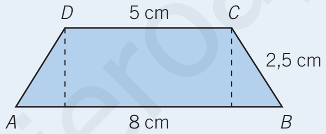


$A = 6 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 11 \cdot 8 + 9 \cdot 4 = 48 + 36 + 88 + 36 = 208$ cm^2

069 HAZLO ASÍ

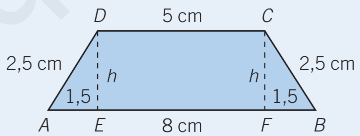
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES SI SE DESCONOCE LA ALTURA?

Calcula el área de este trapecio isósceles.



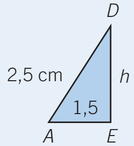
PRIMERO. Se calcula la base del triángulo rectángulo que determina la altura.

Por ser el trapecio isósceles, las alturas determinan dos triángulos rectángulos iguales cuyas bases son la mitad de la diferencia de las bases del trapecio.



$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8 - 5}{2} = 1{,}5 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que determina la altura.



$1{,}5^2 + h^2 = 2{,}5^2$

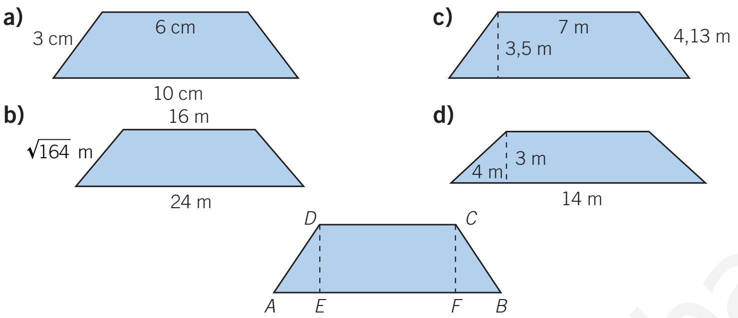
$h^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2 = 4$

$h = \sqrt{4} = 2$ cm

TERCERO. Se halla el área del trapecio.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 5) \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

070 Halla el área de estos trapecios isósceles.



a) $h = \overline{DE} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{10-6}{2}\right)^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$ cm

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(10+6)\cdot 2{,}24}{2} = 17{,}92 \text{ cm}^2$$

b) $h = \overline{DE} = \sqrt{(\sqrt{164})^2 - \left(\dfrac{24-16}{2}\right)^2} = \sqrt{148} = 12{,}17$ m

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(24+16)\cdot 12{,}17}{2} = 243{,}4 \text{ m}^2$$

c) $\overline{AE} = \sqrt{4{,}13^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{4{,}81} = 2{,}19$ m

$\overline{FB} = \overline{AB} = 7 + 2\cdot 2{,}19 = 11{,}38$ m

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(11{,}38+7)\cdot 3{,}5}{2} = 32{,}16 \text{ m}^2$$

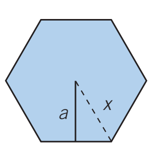
d) $b = 14 - 2\cdot 4 = 6$ m

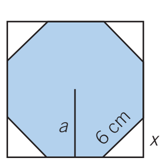
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(14+6)\cdot 3}{2} = 30 \text{ m}^2$$

071 Calcula el área de:

a) Un hexágono regular de lado 2 cm.

b) Un octógono regular de perímetro 48 cm.





a) La apotema es:

$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ cm}$$

$$A = \frac{P\cdot a}{2} = \frac{12\cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$$

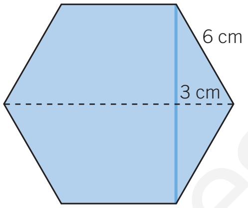
b) El lado mide 6 cm.

$$6^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{18} = 4{,}24 \text{ cm}$$

$$a = 4{,}24 + \frac{6}{2} = 7{,}24 \text{ cm}$$

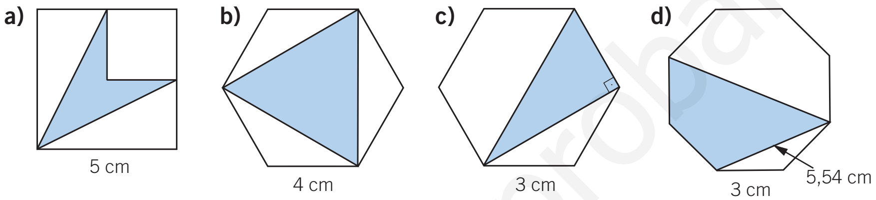
$$A = \frac{P\cdot a}{2} = \frac{48\cdot 7{,}24}{2} = 173{,}76 \text{ cm}^2$$

072 ●●● **Halla la longitud del segmento rojo de esta figura.**



Si trazamos la mediatriz del segmento, la distancia al vértice es la mitad del radio, 3 cm, y forma un triángulo rectángulo con un lado del hexágono y la mitad del segmento. Por tanto, la mitad del segmento es: $\sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm, y el segmento mide 10,4 cm.

073 ●● **Determina el área de las superficies coloreadas.**



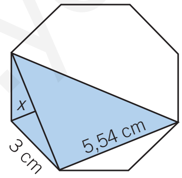
a) Cuadrado mayor − Cuadrado menor − 2 · Triángulos

$$A = 5^2 - 2{,}5^2 - 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 2{,}5}{2}\right) = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

b) Si trazamos los triángulos equiláteros que forman el hexágono, la zona coloreada es la mitad de cada triángulo, por lo que será la mitad del área del hexágono. Como el hexágono tiene una apotema de 3,46 cm, su área es de 41,57 cm^2 y el área coloreada mide 20,78 cm^2.

c) Si trazamos los triángulos equiláteros que forman el hexágono, la zona coloreada es un triángulo entero y la mitad de otros dos, luego equivale a dos triángulos, es decir, la tercera parte del hexágono. Como el hexágono tiene una apotema de 2,6 cm, su área es de 23,4 cm^2 y el área coloreada mide 7,8 cm^2.

d)



El área total es el área de los triángulos:

$x = \sqrt{9 - 7{,}67} = \sqrt{1{,}33} = 1{,}15$ cm

$A =$ Triángulo mayor + Triángulo menor =

$= 5{,}54 \cdot 5{,}54 : 2 + 5{,}54 \cdot 1{,}15 : 2 = 18{,}53 \text{ cm}^2$

074 ●● **Calcula el área de un círculo circunscrito a un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm.**

La hipotenusa es 10 cm y coincide con el diámetro, el radio es 5 cm y el área mide $25\pi = 78{,}5$ cm^2.

075 ●● **Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un cuadrado de lado 8 cm.**

El radio de la circunferencia interior es la mitad del lado: 4 cm, y el radio de la exterior es la mitad de la diagonal ($\sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 11{,}31$ cm): 5,66 cm. Área $= \pi \cdot (32 - 16) = 50{,}24$ cm^2

076 ●●

Calcula el área de un sector circular de amplitud 60°, y radio, el de una circunferencia de longitud 12π cm.

Si la circunferencia es de 12π cm, el radio mide 6 cm. Como el sector es una sexta parte del círculo, su área mide: $\dfrac{36\pi}{6} = 18{,}84\ \text{cm}^2$

077 ●●

Obtén el área de un círculo cuyo diámetro es igual que el perímetro de un cuadrado de lado 7 cm.

El diámetro es 28 cm, el radio es 14 cm y el área mide: $196\pi = 615{,}44\ \text{cm}^2$

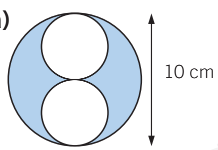
078 ●●

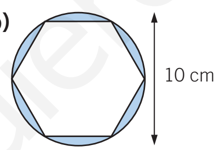
En una circunferencia de radio 5 cm se inscribe un triángulo rectángulo e isósceles. Calcula el área comprendida entre el círculo y el triángulo.

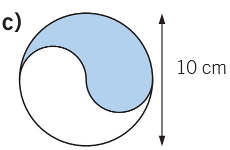
La hipotenusa del triángulo coincide con el diámetro y la altura con el radio, por lo que su área es: $10 \cdot 5 : 2 = 25\ \text{cm}^2$. El área comprendida es: $25\pi - 25 = 53{,}5\ \text{cm}^2$

079 ●●

Halla el área de la zona coloreada, sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 10 cm.

a)


b)


c)


a) $A = 25\pi - 2 \cdot 6{,}25\pi = 39{,}25\ \text{cm}^2$

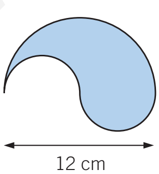
b) El área del hexágono de lado 5 cm es: $\dfrac{30 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95\ \text{cm}^2$

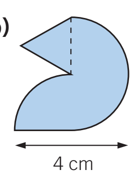
y el área comprendida mide: $25\pi - 64{,}95 = 13{,}55\ \text{cm}^2$

c) Es la mitad del círculo: $25\pi/2 = 39{,}25\ \text{cm}^2$

080 ●●●

Calcula el área de las siguientes figuras.

a)


b)


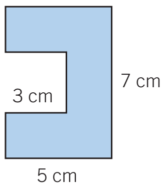
a) Es un semicírculo al que le restamos y le sumamos la misma superficie, luego será equivalente al área del semicírculo: $A = 36\pi = 113{,}04\ \text{cm}^2$

b) Es un semicírculo más un cuarto de círculo, es decir, tres cuartos de círculo más un triángulo equilátero.

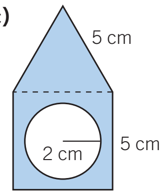
$$A = 0{,}75 \cdot 4\pi + 2 \cdot 1{,}73 : 2 = 11{,}15\ \text{cm}^2$$

081 Determina el área de las figuras.

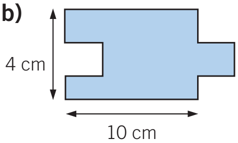
a)



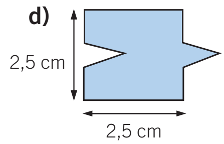
c)



b)



d)



a) La figura es un rectángulo menos un cuadrado: $A = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 26$ cm^2

b) A la figura base se le suma y se le resta la misma superficie, por lo que el área es la de la superficie base: $A = 10 \cdot 4 = 40$ cm^2

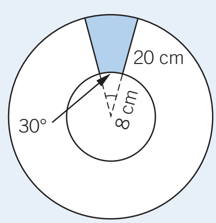
c) La figura es un cuadrado más un triángulo equilátero menos un círculo:
$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \rightarrow A = 5 \cdot 5 + (5 \cdot 4{,}33)/2 - 4\pi = 23{,}27$ cm^2

d) A la figura base se le suma y se le resta la misma superficie, por lo que el área es la de la superficie base: $A = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$ cm^2

082 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR?

Calcula el área de esta parte de corona circular limitada por dos radios (trapecio circular).



PRIMERO. Se halla el área de los sectores circulares.

En este caso tienen una amplitud de 30°, y sus radios miden 20 y 8 cm, respectivamente.

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 30}{360} = 104{,}67 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 30}{360} = 16{,}75 \text{ cm}^2$$

SEGUNDO. Se restan las áreas de los dos sectores.

$$A_1 - A_2 = 104{,}67 - 16{,}75 = 87{,}92 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio circular es de 87,92 cm^2, aproximadamente.

083 Calcula el área del trapecio circular generado por la corona circular de la actividad anterior y de amplitud 120°.

Aplicando una regla de tres, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 30° \rightarrow 87{,}92 \\ 120° \rightarrow A \end{array}\right\} \rightarrow A = 87{,}92 \cdot 4 = 351{,}68 \text{ cm}^2$$

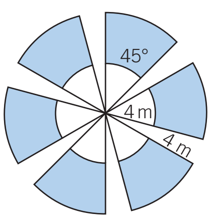
084 Halla el área de un trapecio circular de radios 12 cm y 6 cm y de amplitud 270°.

$$A_{\text{Sector mayor}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 270}{360} = 339{,}12 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Sector menor}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 270}{360} = 84{,}78 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Trapecio}} = 339{,}12 - 84{,}78 = 254{,}34 \text{ cm}^2$$

085 Observa la margarita y calcula el área de cada pétalo de la parte amarilla, de la parte blanca y su área total.



El área de la parte blanca de cada pétalo es:

$$A = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 45}{360} = 6{,}28 \text{ m}^2$$

El área de la parte amarilla de cada pétalo es:

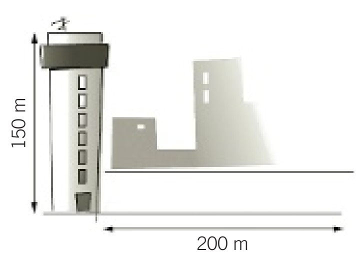
$$A' = \frac{\pi \cdot (8^2 - 4^2) \cdot 45}{360} = \frac{3{,}14 \cdot (64 - 16) \cdot 45}{360} = 18{,}84 \text{ m}^2$$

El área total es:

$$A_T = 6 \cdot (A + A') = 6 \cdot (6{,}28 + 18{,}84) = 6 \cdot 25{,}12 = 150{,}72 \text{ m}^2$$

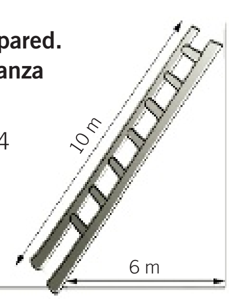
086 Observa esta torre y su sombra.

¿Qué distancia hay desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra?

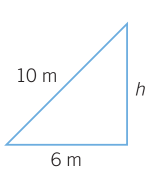


$$d^2 = 150^2 + 200^2 \rightarrow d^2 = 62\,500$$
$$\rightarrow d = 250 \text{ m}$$

087 Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?



$$10^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h^2 = 100 - 36 = 64$$
$$\rightarrow h = 8 \text{ m}$$



088 ●● **En los lados de un campo cuadrangular se han plantado 32 árboles, separados 5 m entre sí. ¿Cuál es su área? ¿Cuánto mide el lado?**

Al haber 32 árboles y completarse el perímetro del cuadrado, habrá 32 separaciones de 5 m, es decir:

$$P = 32 \cdot 5 = 160 \text{ m} \rightarrow 4l = 160 \rightarrow l = 40 \text{ m}$$

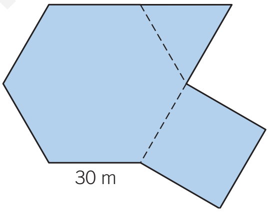
El área es: $A = l^2 \rightarrow A = 40^2 = 1\,600 \text{ m}^2$

089 ●● **Esta señal de tráfico indica la obligatoriedad de parar. Halla su área si su altura es 90 cm y su lado mide 37 cm.**

Su apotema es la mitad de la altura: 45 cm
y su perímetro es: $37 \cdot 8 = 296$ cm

$$A = \frac{296 \cdot 45}{2} = 6\,660 \text{ cm}^2$$

090 ●●● **Cada uno de los 50 pisos de un edificio tiene la planta de esta figura, siendo el lado del hexágono de 30 m. Si el suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m², calcula el precio total pagado por la moqueta del edificio.**



La apotema es: $a = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 26$ m

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A = \frac{6 \cdot 30 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Cuadrado}} = 30^2 = 900 \text{ m}^2$$

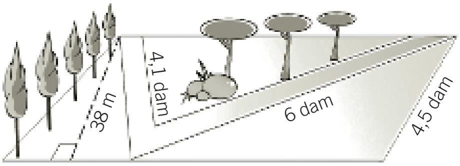
$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 390 \text{ m}^2$$

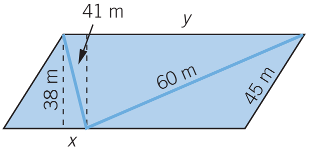
El área de un piso mide: $2\,340 + 900 + 390 = 3\,630 \text{ m}^2$

La moqueta de un piso cuesta: $3\,630 \cdot 20 = 72\,600$ €

Y la moqueta de todo el edificio costará: $50 \cdot 72\,600 = 3\,630\,000$ €

091 ●●● **Mario tiene un jardín en forma de romboide. Uno de sus lados mide 45 m y hay un camino, del que también conocemos sus medidas. Calcula el perímetro del jardín y su área.**





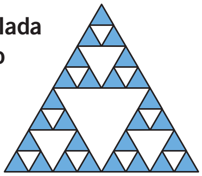
$x = \sqrt{41^2 - 38^2} = 15{,}4$ m

$y = \sqrt{60^2 - 38^2} = 46{,}4$ m

Perímetro: $P = 2 \cdot (x + y) + 2 \cdot 45 =$
$= 2 \cdot (15{,}4 + 46{,}4) + 2 \cdot 45 = 213{,}6$ m

Área: $A = b \cdot a = (x + y) \cdot 38 =$
$= (15{,}4 + 46{,}4) \cdot 38 = 2\,348{,}4 \text{ m}^2$

092 **Hemos colocado una vidriera triangular. Calcula el área acristalada en color rojo, sabiendo que la ventana es un triángulo equilátero de lado 1 m.**



Cada triángulo rojo tiene 1/8 m de lado y es equilátero; por tanto, su altura es:

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{1}{256}} = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0{,}11 \text{ m}$$

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1/8 \cdot 0{,}11}{2} = 0{,}007 \text{ m}^2$$

Como hay 27 triángulos rojos, su área total es:

$$A = 27 \cdot 0{,}007 = 0{,}189 \text{ m}^2$$

093 **En una pista circular se echan 15 kg de arena por metro cuadrado. ¿Qué radio tiene la pista si se han echado 4 710 kg de arena en total?**

Hallamos, en primer lugar, el número de metros cuadrados que tiene la pista:

$$4\,710 : 15 = 314 \text{ m}^2$$

$$A = \pi r^2 \rightarrow 314 = \pi r^2 \rightarrow r^2 = 100 \rightarrow r = 10 \text{ m}$$

094 **En otra pista circular de 30 m de diámetro se quieren echar 30 kg de arena por metro cuadrado.**

a) ¿Cuántas toneladas de arena se necesitan?

b) Si una carretilla mecánica carga 157 sacos de 5 kg cada uno, ¿cuántos desplazamientos tendrá que realizar?

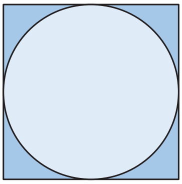
$D = 30 \text{ m} \rightarrow r = 15 \text{ m} \rightarrow A = \pi \cdot 15^2 = 706{,}5 \text{ m}^2$

a) $30 \text{ kg/m}^2 \cdot 706{,}5 \text{ m}^2 = 21\,195 \text{ kg} \backsimeq 21{,}2$ t de arena se necesitan.

b) En cada viaje transporta: $5 \cdot 157 = 785$ kg

Luego tendrá que hacer: $\dfrac{21\,195}{785} = 27$ viajes

095 **Se desea hacer un círculo con losas en un jardín cuadrado, como indica la figura.**



a) ¿Cuánto mide el área enlosada?

b) ¿Qué área ha quedado con césped?

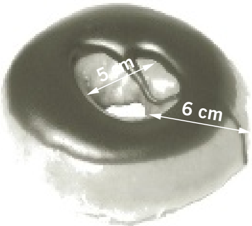
a) $A_{\text{Círculo}} = \pi r^2 \rightarrow A = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ m}^2$

b) $A_{\text{Cuadrado}} = 10^2 = 100 \text{ m}^2$

$A_{\text{Césped}} = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 100 - 78{,}5 = 21{,}5 \text{ m}^2$

096 ●●●

Un repostero ha cubierto de azúcar la parte superior de 200 rosquillas como la de la figura. Si ha utilizado 5 kg de azúcar, ¿cuántos gramos de azúcar se necesitan para cubrir cada centímetro cuadrado de rosquilla?



Hallamos el área de la parte superior (plana) de cada rosquilla:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \rightarrow A = \pi \cdot (8{,}5^2 - 2{,}5^2) = 66\pi = 207{,}24 \text{ cm}^2$$

Como son 200 rosquillas, el área total que hay que cubrir es:

$$200 \cdot 207{,}24 = 41\,448 \text{ cm}^2$$

Si se han gastado 5 kg de azúcar, por cada centímetro cuadrado se necesitan:

$$5\,000 \text{ g} : 41\,448 \text{ cm}^2 = 0{,}12 \text{ g}$$

097 ●●

Construimos la montura de un monóculo con 10 cm de alambre. ¿Cuál es el área de la lente que encaja en la montura?

$L = 2\pi r \rightarrow 10 = 2\pi r \rightarrow r = 1{,}6$ cm

$A = \pi r^2 \rightarrow A = \pi \cdot 1{,}6^2 = 8$ cm^2

098 ●●

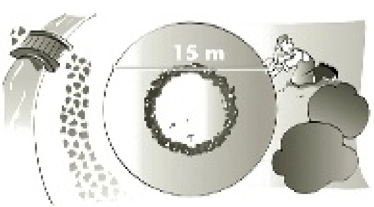
Calcula el área que puede grabarse (en color azul en la fotografía) de un disco compacto. ¿Qué porcentaje del área total del disco se aprovecha para grabar?

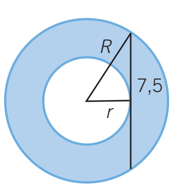
$$A = \pi \cdot (6^2 - 2^2) = \pi \cdot 32 = 100{,}5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área aprovechada} = \frac{100{,}5}{113} \cdot 100 = 88{,}9\,\%$$

099 ●●●

Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m. ¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?





El área que se pide es la de la corona circular:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Como el segmento mide 15 cm, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 - r^2 = 7{,}5^2$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot 7{,}5^2 = 176{,}63 \text{ m}^2$$

100 ●●

Esta es la bandera de Brasil.
Mide y calcula qué porcentaje del área total supone el área de cada color.

$$A_{\text{Círculo}} = \pi \cdot 6^2 = 113 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{Rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{27 \cdot 18}{2} = 243 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{Rectángulo}} = 37 \cdot 24 = 888 \text{ mm}^2$$

$$\text{Azul} = \frac{113}{888} \cdot 100 = 12{,}7\,\% \qquad \text{Amarillo} = \frac{243 - 113}{888} \cdot 100 = 14{,}7\,\%$$

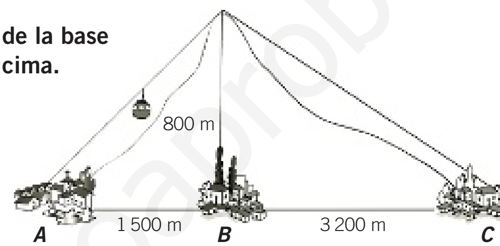
$$\text{Verde} = \frac{888 - 243}{888} \cdot 100 = 72{,}6\,\%$$

101 ●●

El teleférico de la ciudad *A* sale de la base de una montaña y llega hasta la cima. Desde ese punto se dirige a la ciudad *B* o a la ciudad *C*.

a) ¿Qué distancia recorre el teleférico desde la ciudad *A* hasta *C*?

b) ¿Y desde *A* hasta *B*?



a) Distancia (A-Cima) $= \sqrt{2\,250\,000 + 640\,000} = \sqrt{2\,890\,000} = 1\,700$ m

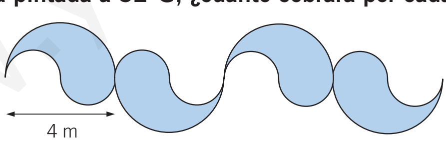
Distancia (Cima-C) $= \sqrt{10\,240\,000 + 640\,000} = \sqrt{10\,880\,000} =$
$= 3\,298{,}48$ m

Distancia (A-C) $= 1\,700 + 3\,298{,}48 = 4\,998{,}48$ m

b) Distancia (A-B) $=$ Distancia (A-Cima) $+$ Distancia (Cima-B) $=$
$= 1\,700 + 800 = 2\,500$ m

102 ●●●

Un pintor decora una valla con una de estas figuras. Si cobra el metro cuadrado de valla pintada a 32 €, ¿cuánto cobrará por cada una?



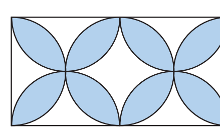


Figura 1: La figura que forma la valla se repite cuatro veces, y su área coincide con la del semicírculo de radio 2 m, que es: $A = \pi \cdot 4 : 2 = 6{,}28$ m^2

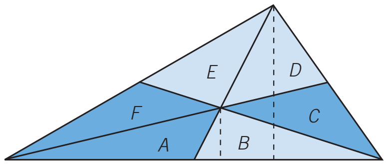
Como son 4 figuras, el área mide 25,12 m^2 y el precio será:

$$25{,}12 \cdot 32 = 803{,}84 \text{ €}$$

Figura 2: Son 8 pétalos que podemos inscribir en un cuadrado de lado 5 m, siendo simétricos por la diagonal del cuadrado. El área de cada mitad es la de un sector circular de 90° y radio 5 m, a la que se resta el área de un triángulo de base y altura 5 m: $\frac{25\pi}{4} - \frac{5 \cdot 5}{2} = 7{,}125$ m^2

El área del pétalo es 14,25 m^2 y la unión de los 8 pétalos mide 114 m^2, con un coste de $114 \cdot 32 = 3\,648$ €.

103 **En un triángulo cualquiera se trazan sus medianas, formándose 6 triángulos que tienen como vértice común el baricentro. Justifica que todos tienen la misma área. A partir de este resultado, demuestra que el baricentro dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.**



Las bases de los triángulos A y B miden lo mismo (por la definición de mediana), y como su altura es igual, sus áreas coinciden.
Es decir, $S_A = S_B$, $S_C = S_D$, $S_E = S_F$.

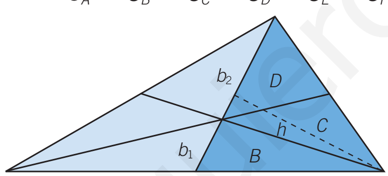
Considerando el triángulo total y, por el mismo razonamiento:

$$S_A + S_B + S_C = S_D + S_E + S_F$$

Como $S_C = S_D \rightarrow S_A + S_B = S_E + S_F \xrightarrow{S_A = S_B;\ S_E = S_F} 2S_A = 2S_E \rightarrow S_A = S_E$

Por tanto, $S_A = S_B = S_E = S_F$, y repitiendo el razonamiento con cualquier mediana, obtenemos que son iguales a S_C y S_D:

$$S_A = S_B = S_C = S_D = S_E = S_F$$

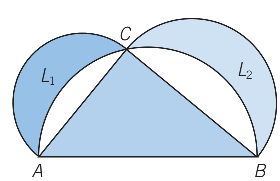


Como $S_B = \dfrac{b_1 \cdot h}{2}$ y $S_C + S_D = \dfrac{b_2 \cdot h}{2}$ y, además, $S_B = S_C = S_D$, deducimos

que: $2\left(\dfrac{b_1 \cdot h}{2}\right) = \dfrac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow \cancel{2}\left(\dfrac{b_1 \cdot h}{\cancel{2}}\right) = \dfrac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow b_1 = \dfrac{b_2 \cdot \cancel{h}}{2 \cdot \cancel{h}} = \dfrac{b_2}{2}$

104 **¿Qué es mayor, el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ o la suma de las áreas de L_1 y L_2?**

(Las circunferencias que ves tienen como diámetro cada uno de los lados del triángulo.)



Si A_1 y A_2 fuesen las áreas de los semicírculos completos correspondientes a L_1 y L_2, las áreas de los tres semicírculos serían:

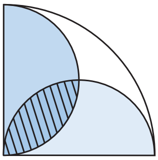
$$A_1 = \frac{\pi r_1^2}{2} \qquad A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} \qquad A_3 = \frac{\pi r_3^2}{2}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi(r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{\pi r_3^2}{2} = A_3$$

Como el área que le falta al triángulo para ser igual que el semicírculo mayor es la que le falta a L_1 y L_2, las áreas de L_1 y L_2 serán iguales que la del triángulo.

105 Compara las áreas de la zona rayada y de la zona blanca.

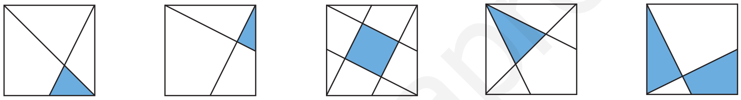


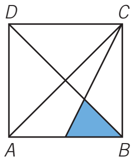
Si r es el radio del cuarto de círculo mayor, $r/2$ es el radio de los dos semicírculos menores, y sus áreas son:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \quad A_2 = A_3 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8} \rightarrow A_2 + A_3 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = A_1$$

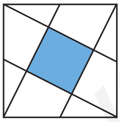
Como el área del cuarto de círculo es la misma que la suma de las áreas de los semicírculos, su intersección, que es la zona rayada, es igual que la zona blanca, que es exterior a los semicírculos.

106 Los segmentos trazados en estos cuadrados son diagonales o unen vértices del cuadrado con puntos medios de lados opuestos. ¿Qué fracción del área del cuadrado está sombreada?





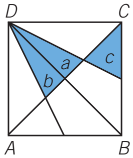
Tomando el triángulo $\widehat{ABC}$, el área coloreada es uno de los 6 triángulos que se forman al cortar sus medianas. Como ya se vio en la actividad 103, son iguales, siendo una sexta parte de la mitad del cuadrado, y su fracción es $\frac{1}{12}$.



Se forman 4 triángulos iguales, 4 trapecios iguales y 1 cuadrado. Por semejanza de triángulos, el cateto mayor de los triángulos coincide con el lado del cuadrado, y el cateto menor de los triángulos coincide con la base mayor de los trapecios. Por tanto, si unimos un trapecio con un triángulo formamos un cuadrado idéntico al coloreado, por lo que el cuadrado total equivale a 5 cuadrados como el coloreado, y la fracción es $\frac{1}{5}$.

Por lo expuesto en el párrafo anterior, el triángulo es la tercera parte del trapecio y la cuarta del cuadrado, por lo que su fracción es $\frac{1}{20}$.

Como en la segunda solución, tenemos el equivalente a 2 cuadrados centrales y la fracción es $\frac{2}{5}$.



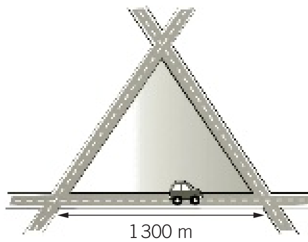
Como en la primera solución, el área c y el área a son triángulos formados por la unión de las medianas, por lo que su área es $\frac{1}{12}$ del total, y la superficie azul es el doble que el área a, siendo su fracción $\frac{1}{6}$.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

107 ●●●

Una parcela, en la que se construirá un edificio de oficinas, tiene forma de triángulo equilátero de 1 300 m de lado y está bordeada por tres carreteras.

El contratista de la obra y el arquitecto han coincidido en la ubicación del edificio.

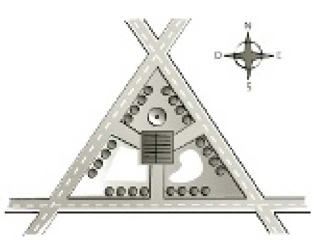


ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) **¿Qué ventajas y qué inconvenientes presenta el lugar elegido para la ubicación del edificio?**

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

b) **Si las vías de salida parten desde el punto en el que se construirá el edificio, y el metro lineal de construcción cuesta 1 150 €, ¿cuál será el coste de las tres vías que se tienen que construir?**

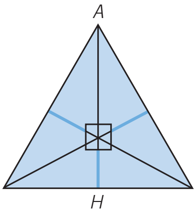


ERES CAPAZ DE... DECIDIR

c) **Si lo que prima en la obra es el coste, ¿se te ocurre algún otro punto del terreno donde construir el edificio fuese más barato?**

a) La ventaja es que el edificio está situado a igual distancia de cada tramo de carretera, y el inconveniente es que hay que construir tres tramos nuevos de carretera hasta el edificio.

b) Calculamos la longitud de cada vía:



$$\overline{AH} = \sqrt{1\,300^2 - 650^2} = 1\,125{,}83 \text{ m}$$

El tramo de carretera que hay que construir mide:

$$\frac{1}{3} \text{ de } 1\,125{,}83 = 375{,}27 \text{ m}$$

El coste de las tres vías es:

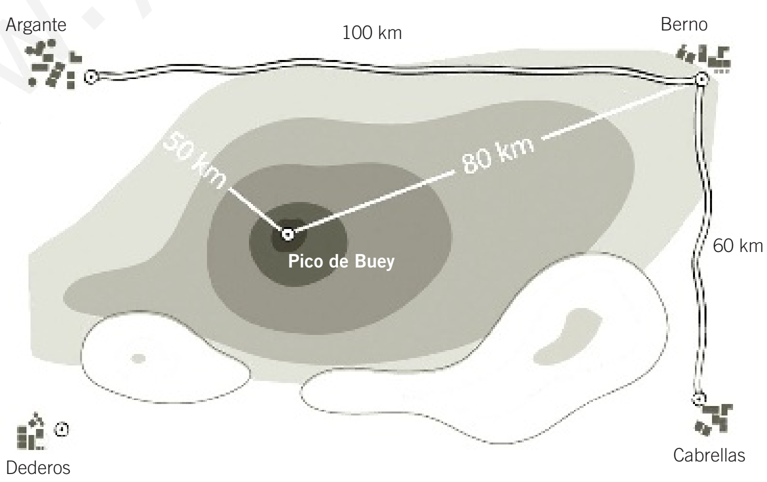
$$3 \cdot 375{,}27 \cdot 1\,150 = 1\,294\,681{,}50 \text{ €}$$

c) Si el edificio debe estar en un punto interior, el punto elegido es el que minimiza el coste. Si, por el contrario, puede situarse en cualquier punto, el edificio se podría construir en un lado de la parcela y, de esta forma, no se construye ningún tramo de carretera.

108 ●●●

Se quiere colocar un repetidor en la cima de una montaña para asegurar las comunicaciones de cuatro localidades que hay en la zona.

Las cuatro localidades están situadas en los vértices de un rectángulo, y se conocen algunas de las distancias que hay entre ellas y la cima de la montaña.



Sin embargo, las distancias de Pico de Buey a los otros dos pueblos no se pueden medir fácilmente porque existe un lago en la mitad.

Se sabe, por las mediciones que se han hecho de otros repetidores similares, que la señal es aceptable hasta una distancia que no sea superior a 90 km del repetidor.

Eres capaz de... Comprender

a) ¿Cuál es la distancia de Pico de Buey a cada una de las localidades? ¿Son todas las distancias conocidas?

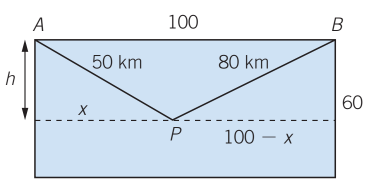
Eres capaz de... Resolver

b) Calcula la distancia desde Pico de Buey a la carretera de Argante a Berno.

Eres capaz de... Decidir

c) ¿Crees que será aceptable la señal en las localidades de Cabrellas y Dederos?

a)



$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 50^2 - x^2 \\ h^2 = 80^2 - (100 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 50^2 - x^2 = 80^2 - (100 - x)^2$$

$$2500 - x^2 = 6400 - 10000 + 200x - x^2$$

$$200x = 6100 \rightarrow x = 30{,}5 \text{ km}$$

$h^2 = 50^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{2\,500 - 930{,}25} = 39{,}62$ km

$\overline{PC} = \sqrt{(60 - 39{,}62)^2 + (100 - 30{,}5)^2} = 72{,}42$ km

$\overline{PD} = \sqrt{(60 - 39{,}62)^2 + 30{,}5^2} = 36{,}68$ km

b) La distancia de Pico de Buey a la carretera de Argante a Berno es $h = 39{,}62$ km.

c) Como las distancias son menores de 90 km, la señal será aceptable en todas las localidades.

9 Cuerpos geométricos

El legado de Arquímedes

En Sicilia, preocupado porque el ideal de su hijo Marco fuera el espíritu guerrero y las conquistas de Julio César, Cicerón razonaba con él de esta manera:

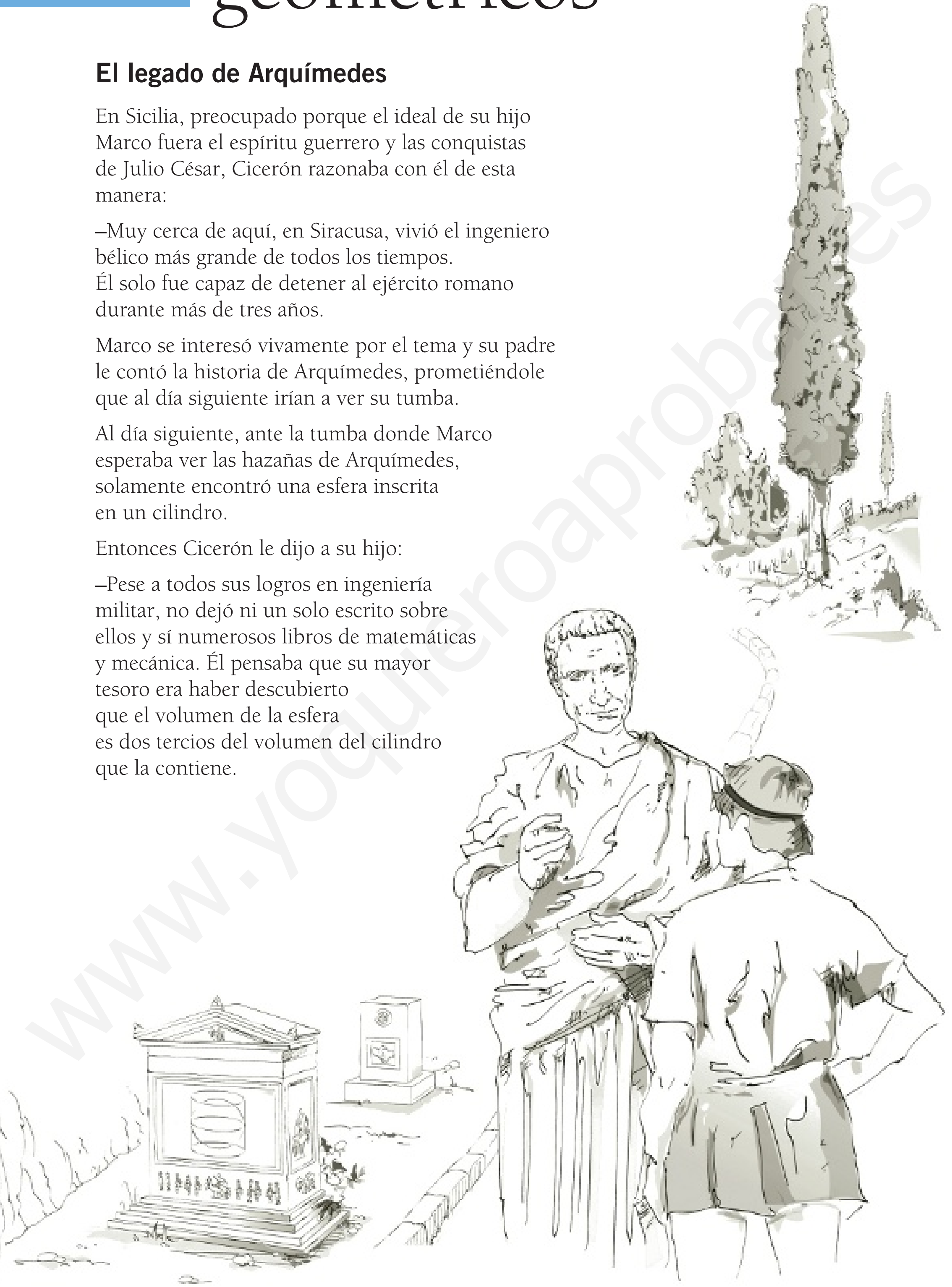
–Muy cerca de aquí, en Siracusa, vivió el ingeniero bélico más grande de todos los tiempos. Él solo fue capaz de detener al ejército romano durante más de tres años.

Marco se interesó vivamente por el tema y su padre le contó la historia de Arquímedes, prometiéndole que al día siguiente irían a ver su tumba.

Al día siguiente, ante la tumba donde Marco esperaba ver las hazañas de Arquímedes, solamente encontró una esfera inscrita en un cilindro.

Entonces Cicerón le dijo a su hijo:

–Pese a todos sus logros en ingeniería militar, no dejó ni un solo escrito sobre ellos y sí numerosos libros de matemáticas y mecánica. Él pensaba que su mayor tesoro era haber descubierto que el volumen de la esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la contiene.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **¿Cuáles fueron las aportaciones de Arquímedes a las matemáticas y a la mecánica?**

En esta página puedes encontrar la biografía de Arquímedes, donde se recogen sus descubrimientos:
http://www.astromia.com/biografias/arquimedes.htm

2 **¿Cuándo encontró Cicerón la tumba de Arquímedes? ¿A qué se refiere Cicerón cuando dice que: «Él solo fue capaz de detener al ejército romano durante más de tres años»?**

En la siguiente página se narra el desenlace del sitio de Siracusa:
http://www.satrapa1.com/articulos/antiguedad/siracusa/siracusaasedio2.htm

3 **¿Cuál es el descubrimiento más importante en geometría que se atribuye a Arquímedes?**

En esta página hallarás una extensa biografía de Arquímedes de Siracusa:
http://www.divulgamat.net/

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Observando tu habitación, indica elementos que sugieren:**

a) Planos paralelos.
b) Planos secantes.
c) Rectas paralelas.
d) Rectas secantes.
e) Rectas perpendiculares a un plano.
f) Rectas paralelas a un plano.
g) Rectas secantes a un plano.
h) Rectas contenidas en un plano.

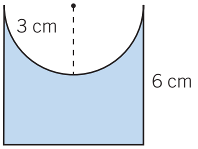
Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) El plano del techo y el del suelo.
b) El plano del suelo con el de una pared.
c) Los bordes opuestos de una ventana.
d) Una esquina.
e) La recta de la pared que determina una esquina del suelo es perpendicular al plano del suelo.
f) Las rectas opuestas del borde del suelo y el plano del techo.
g) Cualquier recta que une el techo y el suelo es secante al plano del suelo.
h) Las rectas que unen dos esquinas opuestas del plano del suelo están contenidas en el plano del suelo.

2 **Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 5 cm.**

$$d = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ cm}$$

3 **Halla el área de esta figura.**



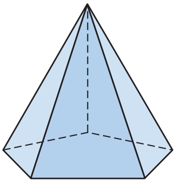
El área de la figura es igual al área del cuadrado de lado 6 cm menos el área del semicírculo de radio 3 cm:

$$6^2 - \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 36 - 14{,}13 = 21{,}87 \text{ cm}^2$$

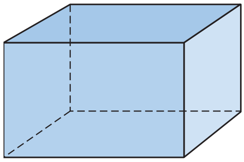
EJERCICIOS

001 **Determina los planos de simetría de estos poliedros.**

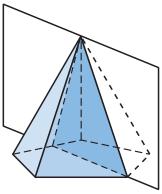
a)



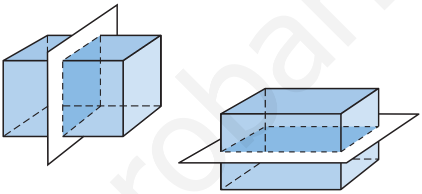
b)



a)

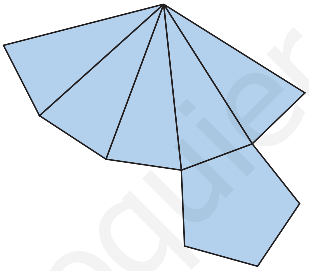


b)

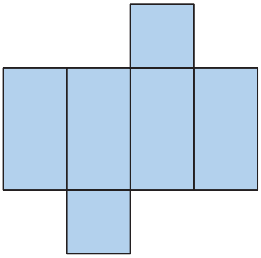


002 **Realiza el desarrollo plano de los poliedros del ejercicio anterior, indicando los pasos que sigues al hacerlo.**

a)

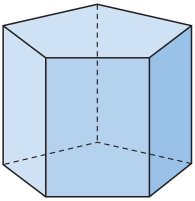


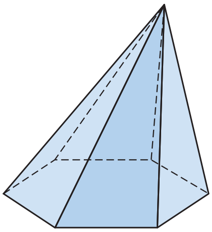
b)



003 **Dibuja dos heptaedros que tengan distinto número de aristas y de vértices.**

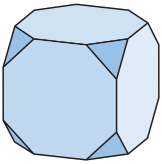
Respuesta abierta.
Por ejemplo:





004 **Este poliedro es un cubo truncado (cada vértice del cubo ha sido cortado formando un triángulo equilátero).**

¿Es el poliedro cóncavo o convexo? Comprueba que se cumple la relación de Euler.



Es convexo. Caras = 14, aristas = 36, vértices = 24.
Sí cumple la relación de Euler → 14 + 24 = 36 + 2

005 **Indica el poliedro regular que se puede formar con:**

a) Triángulos equiláteros. **b) Cuadrados.**

¿Cuántas caras coinciden en cada vértice?

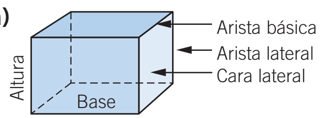
a) Tetraedro (3), octaedro (4) e icosaedro (5). b) Cubo (3).

006 **¿Podrías formar un poliedro regular utilizando solo hexágonos regulares? ¿Y utilizando polígonos regulares de más de seis lados?**

No es posible formar poliedros regulares con polígonos de 6 lados o más, ya que la medida de los ángulos poliedros sería mayor de 360°.

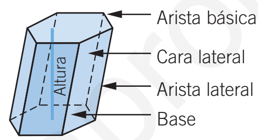
007 **Clasifica estos prismas y nombra sus principales elementos.**

a)



Ortoedro

b)

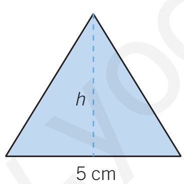


Prisma hexagonal oblicuo

008 **Obtén el área de un cubo de arista 9 cm.**

Su área es la suma del área de sus 6 caras: $A = 6 \cdot 9^2 = 486 \text{ cm}^2$

009 **Halla el área de un prisma triangular, es decir, la base es un triángulo equilátero regular, de arista básica 5 cm y 16,5 cm de altura.**



Hallamos, en primer lugar, el área de la base:

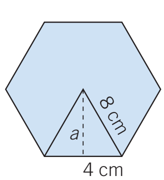
$$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}3 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}3 = 10{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow A_L = 3 \cdot 5 \cdot 16{,}5 = 247{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 247{,}5 + 2 \cdot 10{,}8 = 269{,}1 \text{ cm}^2$$

010 **Calcula el área de un prisma hexagonal regular, de arista básica 8 cm y altura 10 cm.**



Calculamos, en primer lugar, el área de la base:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = 6{,}9 \text{ cm}$$

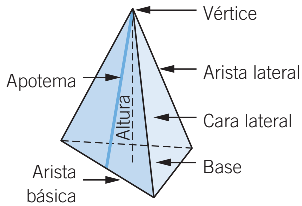
$$A_{\text{Base}} = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A_{\text{Base}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}9}{2} = 165{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{Cara}} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 480 + 2 \cdot 165{,}6 = 811{,}2 \text{ cm}^2$$

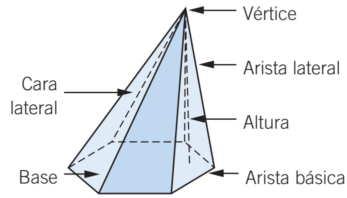
011 **Clasifica estas pirámides y nombra sus principales elementos.**

a)



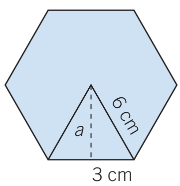
Pirámide triangular recta

b)



Pirámide hexagonal oblicua

012 **Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular, con arista básica 6 cm y apotema de sus caras laterales 12 cm.**



Hallamos el área de la base hexagonal:

$$6^2 = a^2 + 3^2 \rightarrow a = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A_B = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow A_L = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 216 + 93{,}6 = 309{,}6 \text{ cm}^2$$

013 **Con cualquier triángulo como base se puede construir una pirámide recta. ¿Es posible hacerlo con cualquier cuadrilátero?**

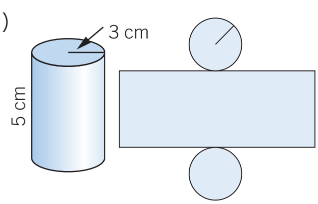
Con un triángulo sí es posible, ya que el vértice estará en la recta perpendicular al triángulo que pasa por la intersección de las mediatrices (circuncentro). Con un cuadrilátero no es posible, pues las mediatrices no tienen que cortarse necesariamente en un punto.

014 **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área de los siguientes cuerpos de revolución.**

a) Un cilindro de 3 cm de radio de la base y 5 cm de altura.

b) Un cono de 4 cm de radio y 6 cm de generatriz.

a)

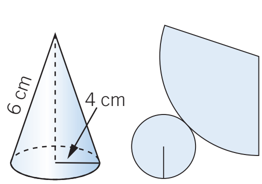


$$A_L = 2\pi rh \rightarrow A_L = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$
$$= 94{,}2 + 2 \cdot 28{,}26 = 150{,}72 \text{ cm}^2$$

b)



$$A_L = \pi rg \rightarrow A_L = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 75{,}36 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B$$
$$= 75{,}36 + 50{,}24 = 125{,}6 \text{ cm}^2$$

015 **¿Qué altura tiene un cilindro de área lateral 75,36 cm² y radio de la base 4 cm?**

$$A_L = 2\pi rh \rightarrow 75{,}36 = 2\pi \cdot 4 \cdot h \rightarrow h = \frac{75{,}36}{25{,}12} = 3 \text{ cm}$$

016 **Un cono tiene la misma base que un cilindro y su área es la mitad. ¿Cuál tendrá mayor altura?**

Por tener el mismo radio y la mitad de área:

$$\pi r(h + r) = \pi r(g + r) \rightarrow h = g$$

La altura del cilindro debe ser igual que la generatriz del cono, y como la altura del cono es siempre menor que su generatriz, la altura del cilindro es mayor que la del cono.

017 **En una esfera de 20 cm de radio, calcula el área de un huso esférico de 40° y un casquete esférico de altura 10 cm.**

$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 20^2 \cdot 40}{360} = 558{,}2 \text{ cm}^2$$

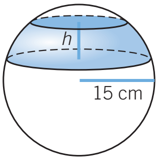
$$A_{\text{Casquete}} = 2\pi rh \longrightarrow A_{\text{Casquete}} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 1\,256 \text{ cm}^2$$

018 **En una naranja de 15 cm de diámetro, ¿qué área de cáscara le corresponde a cada uno de sus 12 gajos?**

Cada gajo es un huso esférico de $\frac{360}{12} = 30°$ de amplitud.

$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 30}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = 58{,}9 \text{ cm}^2$$

019 **Halla la altura de una zona esférica para que su área sea la misma que la de un huso esférico de 10° de amplitud, siendo el radio de la esfera asociada de 15 cm. ¿Y si el radio fuera de 30 cm? ¿Depende el resultado del radio de la esfera?**



$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 15^2 \cdot 10}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = 78{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Zona}} = 2\pi r^2 h \rightarrow A_{\text{Zona}} = 2\pi \cdot 15^2 \cdot h = 1413 \cdot h$$

Por tanto, resulta: $78{,}5 = 1413 \cdot h \rightarrow h = 0{,}06$ cm

Si el radio es $r = 30$ cm, tenemos que:

$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi \cdot 30^2 \cdot 10}{360} = 314 \text{ cm}^2$$

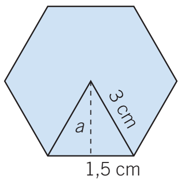
$$314 = 2\pi \cdot 30^2 \cdot h \rightarrow h = \frac{314}{5\,652} = 0{,}06 \text{ cm}$$

que es la misma altura de la zona, lo que podíamos haber deducido planteando la igualdad y simplificando:

$$\frac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360} = 2\pi r^2 h \rightarrow h = \frac{2 \cdot \alpha}{360}$$

expresión en la que no interviene el radio, r.

020 **Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular cuya arista de la base mide 3 cm y la altura 4 cm.**



Hallamos el área de la base:

$3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \rightarrow a = \sqrt{9 - 2{,}25} = 2{,}6$ cm

$A_B = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow A_B = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4$ cm^2

$V = A_B \cdot h \rightarrow V = 23{,}4 \cdot 4 = 93{,}6$ cm^3

021 **Halla el volumen del cilindro circunscrito en el prisma del ejercicio anterior.**

El radio del cilindro coincide con el lado del hexágono (3 cm).

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04 \text{ cm}^3$$

022 **Determina la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es igual al de un ortoedro de aristas 3, 4 y 5 cm, respectivamente.**

$V_{\text{Ortoedro}} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ cm^3 $\qquad V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow 60 = l^3 \rightarrow l = 3{,}91$ cm

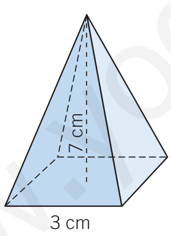
023 **Si los volúmenes de dos cilindros son iguales y sus radios son uno el doble del otro, ¿qué relación hay entre sus alturas?**

$$\pi r^2 h = \pi r'^2 h' \xrightarrow{r' = 2r} \pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot r^2 h' \rightarrow h = 4h'$$

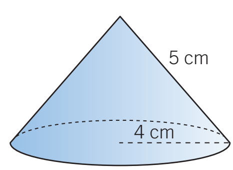
El cilindro con menor radio tiene cuádruple altura que el otro cilindro.

024 **Calcula el volumen de las siguientes figuras.**

a)



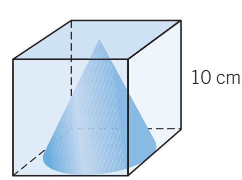
b)



a) $V = \dfrac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 7 = 21$ cm^3

b) $V = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 50{,}24$ cm^3

025 **Halla el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura.**



$V_{\text{Cubo}} = 10^3 = 1\,000$ cm^3

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261{,}7$ cm^3

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cono}} = 1\,000 - 261{,}7 = 738{,}3$ cm^3

026 **Dado un cono de radio *r* y altura *h*, ¿cómo aumenta más su volumen: aumentando 1 cm el radio o al incrementar 1 cm la altura?**

Si aumentamos el radio en 1 cm:

$$V = \frac{1}{3}[\pi(r+1)^2 \cdot h] = \frac{1}{3}[\pi(r^2+2r+1)\cdot h] = \frac{1}{3}(\pi r^2 \cdot h) + \frac{1}{3}[\pi(2r+1)\cdot h]$$

El volumen aumenta en: $\frac{1}{3}[\pi(2r+1)\cdot h]$

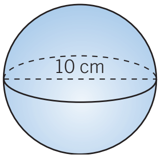
Si aumentamos la altura en 1 cm: $V = \frac{1}{3}[\pi r^2 \cdot (h+1)] = \frac{1}{3}(\pi r^2 \cdot h) + \frac{1}{3}(\pi r^2)$

El volumen aumenta en $\frac{1}{3}(\pi r^2)$.

$$\frac{1}{3}[\pi(2r+1)\cdot h] > \frac{1}{3}(\pi r^2) \rightarrow (2r+1)\cdot h > r^2 \rightarrow h > \frac{r^2}{2r+1}$$

Es mayor el aumento en el caso del radio cuando $h > \frac{r^2}{2r+1}$.

027 **Calcula el volumen de una esfera cuyo diámetro es 10 cm.**

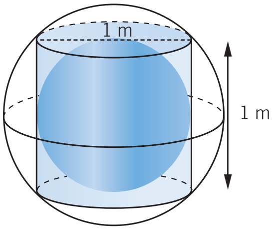


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}33 \text{ cm}^3$$

028 **Si el volumen de una esfera es 22 dm³, ¿cuál es su radio?**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 22 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{22}{\frac{4}{3}\pi}} = 1{,}74 \text{ dm}$$

029 **Determina el volumen de las esferas circunscrita e inscrita en un cilindro de altura y diámetro 1 m. ¿Cuál es la diferencia entre los radios de ambas esferas?**



La esfera inscrita tiene de radio la mitad del diámetro del cilindro: 0,5 m.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \text{ m}^3$$

El radio de la esfera circunscrita es la mitad de la diagonal del cilindro, que calculamos con el teorema de Pitágoras.

Esta diagonal mide: $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ m

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1{,}41}{2}\right)^3 = 1{,}47 \text{ m}^3$$

La diferencia entre los radios es: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1{,}41-1}{2} = 0{,}205$ m

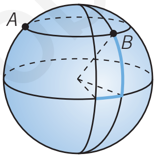
030 **Busca en un atlas una ciudad con latitud Norte y longitud Oeste, y otra con latitud Sur y longitud Este.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:
Latitud Norte y longitud Oeste: Nueva York.
Latitud Sur y longitud Este: Sidney.

031 **Las coordenadas de la ciudad *A* son 20° E 30° N, y las de la ciudad *B* son 50° O 25° S. ¿Qué longitud y latitud separan a *A* y *B*?**

La diferencia en longitud es: $20° + 50° = 70°$
La diferencia en latitud es: $25° + 30° = 55°$

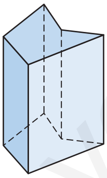
032 **¿Qué diferencia horaria hay entre dos lugares *A* y *B* si la diferencia de sus longitudes es 45°?**

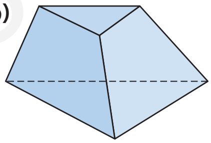


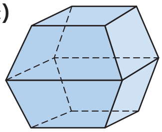
$45 : 15 = 3$. Hay una diferencia de 3 horas.

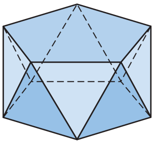
ACTIVIDADES

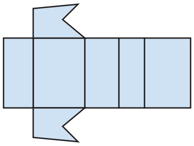
033 ●● **Dibuja el desarrollo de estos poliedros.**

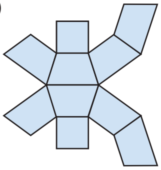
a)


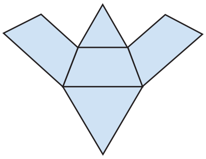
b)


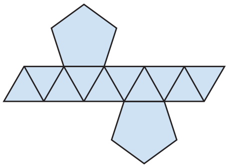
c)


d)


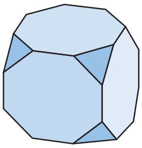
a)


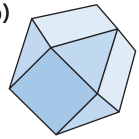
c)


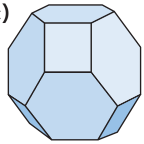
b)


d)


034 ●●
Los siguientes poliedros, ¿son regulares? Razona tu respuesta.

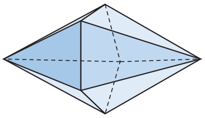
a) 

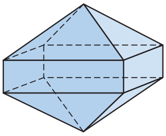
b) 

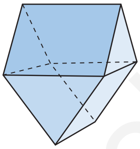
c) 

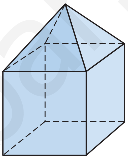
No son regulares, al no ser sus caras iguales en forma ni en tamaño.

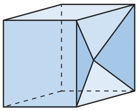
035 ●●
Comprueba si estos poliedros cumplen la relación de Euler.

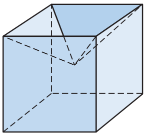
a) 

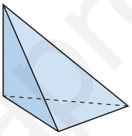
c) 

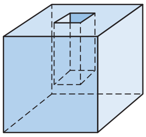
e) 

g) 

b) 

d) 

f) 

h) 

Clasifícalos en cóncavos o convexos.

a) Caras $=$ 10 Vértices $=$ 7 Aristas $=$ 15 $\rightarrow$ $10 + 7 = 15 + 2$
Convexo

b) Caras $=$ 9 Vértices $=$ 9 Aristas $=$ 16 $\rightarrow$ $9 + 9 = 16 + 2$
Cóncavo

c) Caras $=$ 12 Vértices $=$ 10 Aristas $=$ 20 $\rightarrow$ $12 + 10 = 20 + 2$
Convexo

d) Caras $=$ 9 Vértices $=$ 9 Aristas $=$ 16 $\rightarrow$ $9 + 9 = 16 + 2$
Cóncavo

e) Caras $=$ 8 Vértices $=$ 8 Aristas $=$ 14 $\rightarrow$ $8 + 8 = 14 + 2$
Convexo

f) Caras $=$ 4 Vértices $=$ 4 Aristas $=$ 6 $\rightarrow$ $4 + 4 = 6 + 2$
Convexo

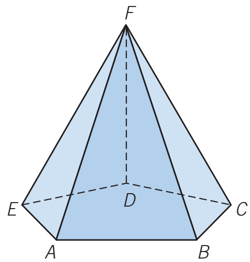
g) Caras $=$ 9 Vértices $=$ 9 Aristas $=$ 16 $\rightarrow$ $9 + 9 = 16 + 2$
Convexo

h) Caras $=$ 11 Vértices $=$ 16 Aristas $=$ 24 $\rightarrow$ $11 + 16 \neq 24 + 2$
Cóncavo

036 ●
En esta tabla están representados los poliedros regulares. Complétala y comprueba que todos cumplen la relación de Euler.

	Caras	Vértices	Aristas	$C + V - A$
Tetraedro	4	4	6	2
Cubo	6	8	12	2
Octaedro	8	6	12	2
Dodecaedro	12	20	30	2
Icosaedro	20	12	30	2

037 **Dibuja una pirámide pentagonal. Cuenta sus aristas, vértices y caras, y comprueba que se cumple la relación de Euler.**



Caras $= 6$, vértices $= 6$, aristas $= 10$

Sí cumple la relación de Euler: $6 + 6 = 10 + 2$

038 **Determina el polígono que forma la base de un prisma en cada caso.**

a) Si tiene 10 vértices.

b) Si tiene 9 aristas.

c) Si tiene 9 caras.

a) Pentágono b) Triángulo c) Heptágono

039 **Averigua el polígono que forma la base de una pirámide en cada caso.**

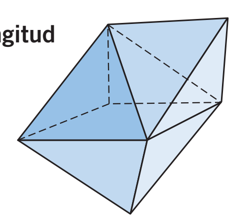
a) Si tiene 10 vértices.

b) Si tiene 12 aristas.

c) Si tiene 9 caras.

a) Eneágono b) Hexágono c) Octógono

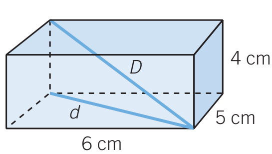
040 **Tenemos un tetraedro y un octaedro, con la misma longitud de arista, y los pegamos por una cara para formar otro poliedro. ¿Cumple este poliedro la relación de Euler?**



Caras $= 10$, vértices $= 7$, aristas $= 15$

Sí la cumple: $10 + 7 = 15 + 2$

041 **Las tres aristas de un ortoedro miden 5, 6 y 4 cm, respectivamente. Halla su diagonal.**



$d =$ diagonal de la base $= \sqrt{6^2 + 5^2}$

$\rightarrow d = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} = 7{,}8$ cm

$D =$ diagonal del ortoedro $= \sqrt{4^2 + d^2}$

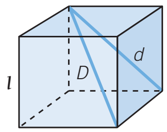
$\rightarrow D = \sqrt{16 + 61} = \sqrt{77} = 8{,}8$ cm

042 **Obtén la diagonal de un cubo cuya arista mide 3 cm.**

$d =$ diagonal de la base $= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ cm

$D =$ diagonal del cubo $= \sqrt{3^2 + (\sqrt{18})^2} = \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

043 La diagonal de un cubo mide $\sqrt{27}$ m. ¿Cuánto mide su arista? ¿Y la diagonal de una cara?

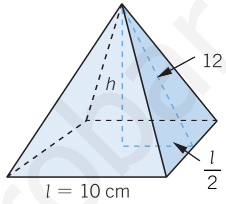


$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$

$D^2 = d^2 + l^2 = 3l^2 \rightarrow (\sqrt{27})^2 = 3l^2 \rightarrow l^2 = 9 \rightarrow l = 3$ m

$d^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} \rightarrow d = 3\sqrt{2} = 4{,}2$ m

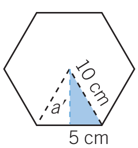
044 La apotema de una pirámide cuadrangular regular mide 12 cm y su arista básica 10 cm. ¿Cuánto mide su altura?

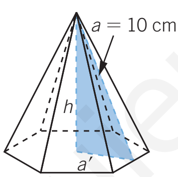


$$a^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 12^2 = h^2 + 5^2$$

$$\rightarrow h^2 = 144 - 25 = 119 \rightarrow h = 10{,}9 \text{ cm}$$

045 La apotema de una pirámide hexagonal regular mide 10 cm y su arista básica 10 cm. ¿Cuánto medirá su altura?





Hallamos la apotema, a', de la base:

$$10^2 = a'^2 + 5^2 \rightarrow a' = \sqrt{75} \text{ cm}$$

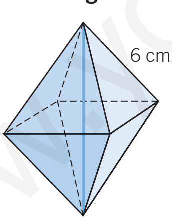
Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo de color de la pirámide:

$$a^2 = h^2 + a'^2 \rightarrow 10^2 = h^2 + (\sqrt{75})^2$$

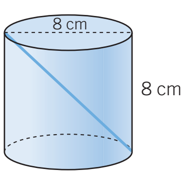
$$\rightarrow h^2 = 100 - 75 \rightarrow h = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

046 Halla la longitud de los segmentos marcados en los siguientes cuerpos geométricos.

a)

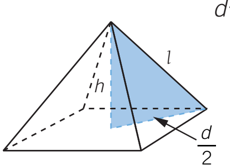


b)



a) Hallamos la diagonal de la base, que es un cuadrado de lado $l = 6$ cm.

$$d^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2 \rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de color:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow 6^2 = h^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow h^2 = 36 - 18 \rightarrow h = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Luego el segmento mide $2h = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2} = 8{,}5$ cm.

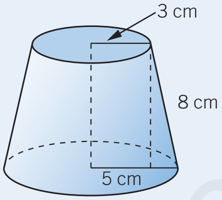
b) El segmento marcado es la diagonal de un cuadrado de lado $l = 8$ cm.

$$d = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2} = 11{,}3 \text{ cm}$$

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA DE UN TRONCO DE CONO?

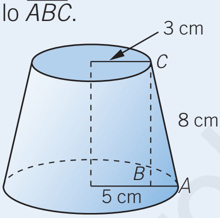
Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtienen otro cono y un nuevo cuerpo geométrico llamado tronco de cono. Calcula la altura del tronco de cono.



PRIMERO. Se define el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$.

$\overline{AB} = 5 - 3 = 2$ cm

$\overline{BC} = 8$ cm

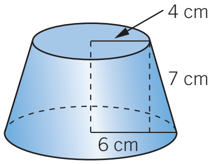


SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$$

$$8^2 = 2^2 + (\overline{AC})^2 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{64 - 4} = 7{,}75 \text{ cm}$$

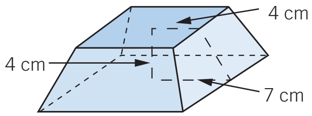
048 ●● **Obtén la altura del tronco de cono que ves en la figura.**



La altura es:

$$h = \sqrt{7^2 - (6 - 4)^2} = \sqrt{45} = 6{,}71 \text{ cm}$$

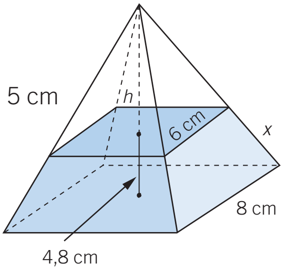
049 ●● **Calcula la longitud de la altura de la cara lateral de este tronco de pirámide:**



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$a = \sqrt{4^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

050 ●●● **Calcula la arista lateral, *x*, del tronco de pirámide y la altura, *h*, de la pirámide.**

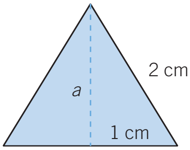


$$x = \sqrt{\left(\frac{8-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-6}{2}\right)^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{25{,}04} = 5 \text{ cm}$$

Por semejanza de triángulos:

$$\left.\begin{array}{r} h - 4{,}8 \rightarrow 6 \\ h \rightarrow 8 \end{array}\right\} \rightarrow h = 19{,}2 \text{ cm}$$

051 Calcula el área total de un prisma triangular recto de altura 3 cm y cuya base es un triángulo equilátero de 2 cm de lado.



Hallamos el área de la base:

$$2^2 = a^2 + 1^2 \rightarrow a = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}\text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot a \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Y calculamos el área de una cara lateral (rectángulo):

$$A_{Cara} = 2 \cdot 3 = 6\text{ cm}^2 \rightarrow A_L = 3 \cdot A_C = 3 \cdot 6 = 18\text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 18 + 2\sqrt{3} = 21{,}5\text{ cm}^2$$

052 Halla el área de un ortoedro de altura 5 cm y cuya base es un rectángulo de 3 × 4 cm.

Calculamos el área de cada clase de cara lateral:

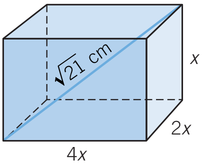
$$A_{①} = 3 \cdot 5 = 15\text{ cm}^2 \qquad A_{②} = 4 \cdot 5 = 20\text{ cm}^2$$

$$A_{Base} = 4 \cdot 3 = 12\text{ cm}^2$$

$$A_T = 2 \cdot A_{①} + 2 \cdot A_{②} + 2 \cdot A_{Base}$$

$$A_T = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12 = 30 + 40 + 24 = 94\text{ cm}^2$$

053 El largo de un ortoedro es el doble que el ancho, y el ancho es el doble que la altura. Si su diagonal vale $\sqrt{21}$ cm, halla el área total.



Altura = x
Ancho = $2x$
Largo = $2 \cdot 2x = 4x$

La diagonal de la base, d', es:

$$d' = \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{20x^2}\text{ cm}$$

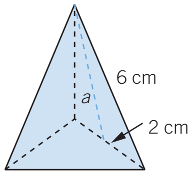
Y la diagonal del ortoedro, d, es:

$$d^2 = d'^2 + x^2 \rightarrow (\sqrt{21})^2 = (\sqrt{20x^2})^2 + x^2 \rightarrow 21 = 20x^2 + x^2$$
$$\rightarrow 21 = 21x^2 \rightarrow x = 1\text{ cm}$$

Luego sus dimensiones son 4 cm, 2 cm y 1 cm:

$$A_T = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16 + 8 + 4 = 28\text{ cm}^2$$

054 **Determina el área total de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 6 cm, y con base un triángulo equilátero de 4 cm de lado.**

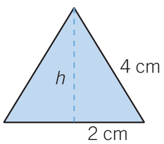


Hallamos la apotema de una cara lateral:

$$a = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot a \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5{,}66 = 11{,}32 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot A_C \rightarrow A_L = 3 \cdot 11{,}32 = 34 \text{ cm}^2$$



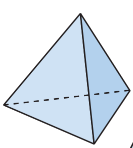
Calculamos el área de la base:

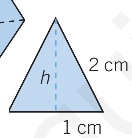
$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{,}5 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5 = 7 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 34 + 7 = 41 \text{ cm}^2$$

055 **Obtén el área de una cara y el área total de un tetraedro regular cuya arista vale 2 cm.**





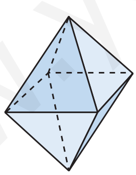
Hallamos el área de una cara:

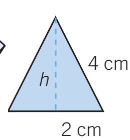
$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_T = 4 \cdot A_C = 4\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ cm}^2$$

056 **Calcula el área de una cara y el área total de un octaedro regular cuya arista mide 4 cm.**





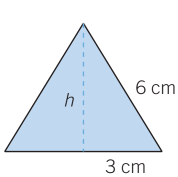
Calculamos el área de una cara:

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_T = 8 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow A_T = 8 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3} = 55{,}4 \text{ cm}^2$$

057 **Halla el área de una cara y el área total de un icosaedro regular cuya arista es de 6 cm.**



El área total del icosaedro es: $A_T = 20 \cdot A_{\text{Cara}}$

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \rightarrow h = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5{,}2 = 15{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Total}} = 20 \cdot 15{,}6 = 312 \text{ cm}^2$$

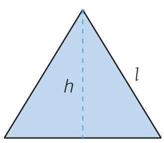
058 Calcula la arista de:

a) Un tetraedro de área total $16\sqrt{3}$ cm².

b) Un icosaedro cuyas caras miden $\sqrt{3}$ cm².

c) Un octaedro de área total $18\sqrt{3}$ cm².

a) $A_T = 4 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow 16\sqrt{3} = 4 \cdot A_C \rightarrow A_C = 4\sqrt{3}$ cm²



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

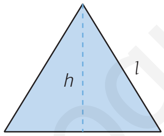
$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} l \cdot h \rightarrow A_C = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = 4 \text{ cm}$$

b) $$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2} l \cdot \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow 2\sqrt{3} = l \cdot \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$\rightarrow 2\sqrt{3} = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow l^2 = 4 \rightarrow l = 2 \text{ cm}$$

c) $A_T = 8 \cdot A_{\text{Cara}} \rightarrow 18\sqrt{3} = 8 \cdot A_C \rightarrow A_C = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²

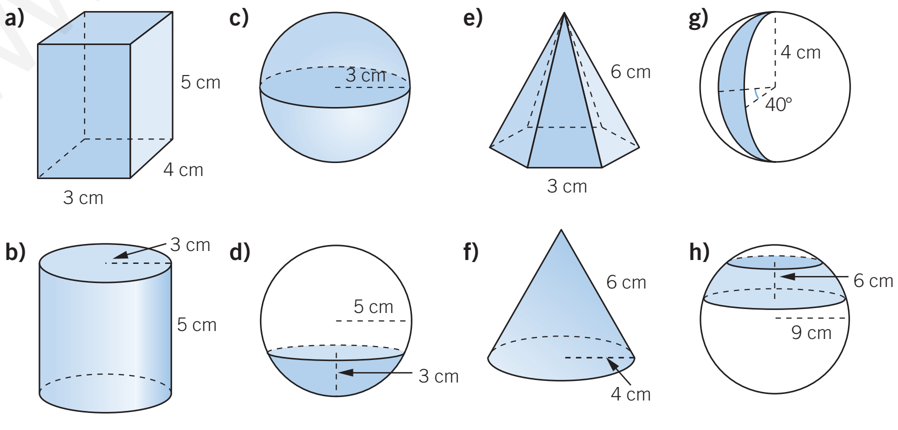


$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow l^2 = 9 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

059 Calcula el área de los siguientes cuerpos y figuras esféricas.



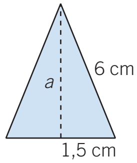
a) $A_T = 2 \cdot (3 \cdot 4) + 2 \cdot (4 \cdot 5) + 2 \cdot (3 \cdot 5) = 24 + 40 + 30 = 94 \text{ cm}^2$

b) $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow A_T = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5$
$\rightarrow A_T = 56{,}52 + 94{,}2 = 150{,}72 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow A_{\text{Esfera}} = 4\pi \cdot 3^2 = 113{,}04 \text{ cm}^2$

d) $A_{\text{Casquete}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Casquete}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 94{,}2 \text{ cm}^2$

e) Calculamos la apotema de una cara lateral:

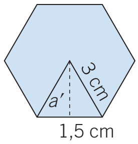


$a = \sqrt{6^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{33{,}75} = 5{,}8 \text{ cm}$

$A_{\text{Cara}} = \dfrac{1}{2} b \cdot a \rightarrow A_C = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5{,}8 = 8{,}7 \text{ cm}^2$

$A_L = 6 \cdot A_C \rightarrow A_L = 6 \cdot 8{,}7 = 52{,}2 \text{ cm}^2$

Después, determinamos el área de la base:



$a' = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6 \text{ cm}$

$A_B = \dfrac{P \cdot a'}{2} \rightarrow A_B = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 52{,}2 + 23{,}4 = 75{,}6 \text{ cm}^2$

f) Hallamos el área lateral:
$A_L = \pi rg \rightarrow A_L = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 75{,}36 \text{ cm}^2$
$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$
$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 75{,}36 + 50{,}24 = 125{,}6 \text{ cm}^2$

g) $A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi \cdot 4^2 \cdot 40}{360} = 22{,}33 \text{ cm}^2$

h) $A_{\text{Zona}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Zona}} = 2\pi \cdot 9 \cdot 6 = 339{,}12 \text{ cm}^2$

060 **Halla el área de:**

a) Un cubo cuya diagonal de una cara mide 10 cm.
b) Un cilindro de 20 cm de diámetro de la base y altura 12 cm.
c) Un cono de 4 cm de radio y 6 cm de altura.
d) Una esfera de 12 cm de diámetro.
e) Un huso esférico de 80° y radio 20 cm.
f) Un casquete esférico de 10 cm de radio y 9 cm de altura.
g) Una zona esférica de 8 cm de altura y 12 cm de radio.
h) Una pirámide hexagonal regular de altura 3 cm y lado de la base 3 cm.

a) $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow 10^2 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{50} \text{ cm}$
$A_{\text{Cara}} = l^2 \rightarrow A_C = 50 \text{ cm}^2$
$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot A_C \rightarrow A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot 50 = 300 \text{ cm}^2$

b) $A_L = 2\pi rh \rightarrow A_L = 2\pi \cdot 10 \cdot 12 = 753{,}6 \text{ cm}^2$
$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$
$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \rightarrow A_T = 753{,}6 + 2 \cdot 314 = 1\,381{,}6 \text{ cm}^2$

c) $A_L = \pi rg \rightarrow A_L = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{4^2 + 6^2} = 90{,}56 \text{ cm}^2$

$A_B = \pi r^2 \rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 90{,}56 + 50{,}24 = 104{,}8 \text{ cm}^2$

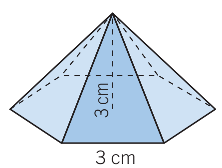
d) $A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow A_{\text{Esfera}} = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}2 \text{ cm}^2$

e) $A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \rightarrow A_{\text{Huso}} = \dfrac{4\pi \cdot 20^2 \cdot 80}{360} = 1\,116{,}4 \text{ cm}^2$

f) $A_{\text{Casquete}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Casquete}} = 2\pi \cdot 10 \cdot 9 = 565{,}2 \text{ cm}^2$

g) $A_{\text{Zona}} = 2\pi rh \rightarrow A_{\text{Zona}} = 2\pi \cdot 12 \cdot 8 = 602{,}9 \text{ cm}^2$

h) Calculamos primero la arista lateral y la apotema de la cara lateral:



$\text{Arista} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24 \text{ cm}$

$\text{Apotema} = \sqrt{18 - 1{,}5^2} = 3{,}97 \text{ cm}$

$A_{\text{Cara}} = \dfrac{3 \cdot 3{,}97}{2} = 5{,}96 \text{ cm}^2$

$A_L = 6 \cdot 5{,}96 = 35{,}76 \text{ cm}^2$

La apotema de la base es:

$a = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} = 2{,}6 \text{ cm}$

$A_{\text{Base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{18 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$

$A_T = 35{,}76 + 23{,}4 = 59{,}16 \text{ cm}^2$

061 **El área lateral de una pirámide recta de base cuadrada y regular es de 80 cm², y el perímetro de la base mide 32 cm. Calcula la apotema de la pirámide.**

$A_L = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow 80 = \dfrac{32 \cdot a}{2} \rightarrow a = 5 \text{ cm}$

062 **Dos cilindros tienen la misma superficie lateral y sus radios miden 6 m y 8 m. Calcula su altura, sabiendo que se diferencian en 3 m. Halla también la superficie lateral y total de cada cilindro.**

$2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot (x + 3) = 2\pi \cdot 8 \cdot x \rightarrow 12{,}56x = 113{,}04 \rightarrow x = 9 \text{ m}$

El cilindro de radio 6 m tiene una altura de 12 m, y el cilindro de radio 8 m tiene una altura de 9 m.

Cilindro de radio 6 m:

$\text{Área lateral} = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 = 452{,}16 \text{ m}^2$

$\text{Área base} = \pi \cdot 6^2 = 113{,}04 \text{ m}^2$

$\text{Área total} = 452{,}16 + 2 \cdot 113{,}04 = 678{,}24 \text{ m}^2$

Cilindro de radio 8 m:

$\text{Área lateral} = 2\pi \cdot 8 \cdot 9 = 452{,}16 \text{ m}^2$

$\text{Área base} = \pi \cdot 8^2 = 200{,}96 \text{ m}^2$

$\text{Área total} = 452{,}16 + 2 \cdot 200{,}96 = 854{,}08 \text{ m}^2$

063 ●●
Un cilindro tiene una altura igual que el diámetro de la base y su área es de 470 cm². Halla el radio de la base.

Altura: $2x$, radio: x.

Área lateral $= 2x \cdot \pi \cdot 2x = 12{,}56x^2$

Área base $= \pi \cdot x^2 = 3{,}14x^2$

Área total $= 12{,}56x^2 + 2 \cdot 3{,}14x^2 = 18{,}84x^2 = 470 \rightarrow x = 4{,}99$ cm

064 ●●
Calcula la altura de un cilindro si el área de una de las bases es igual a la superficie lateral, y cada una de ellas mide 154 cm². Halla el área total.

Radio: x, altura: y.

Área base $= \pi \cdot x^2 = 154 \rightarrow x = 7$ cm

Área lateral $= 14 \cdot \pi \cdot y = 154 \rightarrow y = 3{,}5$ cm

Radio: 7 cm, altura: 3,5 cm.

065 ●●
Determina la superficie lateral de un cono cuya altura coincide con el diámetro de la base, si la longitud de la circunferencia de la base mide 18,85 cm.

$2\pi r = 18{,}85$ cm $\rightarrow r = 3$ cm, $h = 3 \cdot 2 = 6$ cm

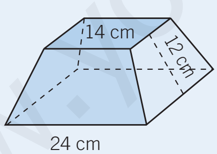
$g = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6{,}71$ cm $\rightarrow A_L = \pi r g = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 6{,}71 = 63{,}21$ cm²

066 **HAZLO ASÍ**

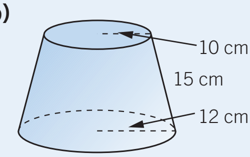
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA LATERAL DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE Y DE UN TRONCO DE CONO?

Calcula el área lateral de estas figuras.

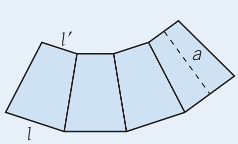
a)



b)

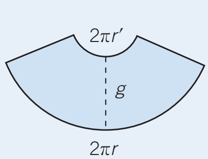


a) El área lateral de un tronco de pirámide es:



$$A_{\text{Lateral}} = \frac{n \cdot (l + l')}{2} \cdot a = \frac{4 \cdot (24 + 14)}{2} \cdot 12 = 912 \text{ cm}^2$$

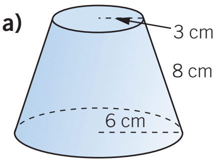
b) El área lateral de un tronco de cono es:



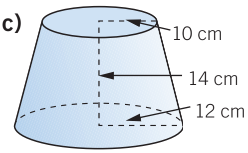
$$A_{\text{Lateral}} = \pi(r + r')g = \pi(12 + 10) \cdot 15 = 1036{,}2 \text{ cm}^2$$

067 Calcula el área total de estas figuras.

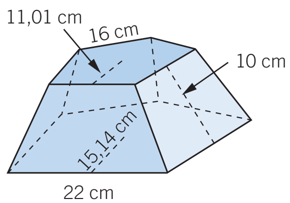
a)



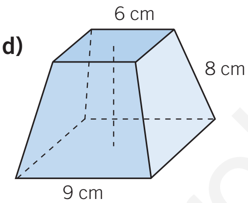
c)



b)



d)



a) Área lateral $= \pi \cdot (6 + 3) \cdot 8 = 226{,}08$ cm^2

Área base 1 $= \pi \cdot 6^2 = 113{,}04$ cm^2

Área base 2 $= \pi \cdot 3^2 = 28{,}26$ cm^2

Área total $= 226{,}08 + 113{,}04 + 28{,}26 = 367{,}38$ cm^2

b) Área lateral $= 5 \cdot \dfrac{16 + 22}{2} \cdot 10 = 950$ cm^2

Área total $= 950 + \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 11{,}01}{2} + \dfrac{22 \cdot 5 \cdot 15{,}14}{2} = 2\,223{,}1$ cm^2

c) La generatriz es: $g = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm

Área lateral $= \pi \cdot (10 + 12) \cdot 14{,}14 = 976{,}79$ cm^2

Área base 1 $= \pi \cdot 12^2 = 452{,}16$ cm^2

Área base 2 $= \pi \cdot 10^2 = 314$ cm^2

Área total $= 976{,}79 + 452{,}16 + 314 = 1\,742{,}95$ cm^2

d) Área lateral $= 4 \cdot \dfrac{6 + 9}{2} \cdot 8 = 240$ cm^2

Área base 1 $= 81$ cm^2

Área base 2 $= 36$ cm^2

Área total $= 240 + 81 + 36 = 357$ cm^2

068 El radio de una esfera mide 3 cm. Calcula su área total.

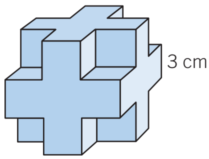
$A = 4\pi \cdot 3^2 = 113{,}04$ cm^2

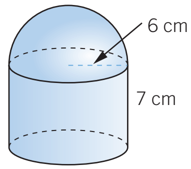
069 El círculo máximo de una esfera tiene un área de 78,54 cm^2. Determina el radio y el área total.

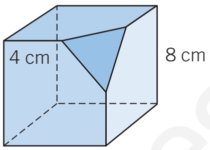
Círculo $= \pi \cdot r^2 = 78{,}54$ cm^2 $\rightarrow r = 5$ cm

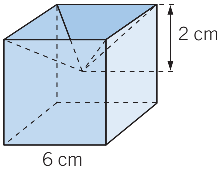
$A = 4\pi \cdot 5^2 = 314$ cm^2

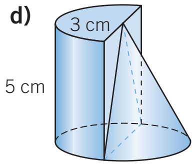
070 **Obtén el área total de los siguientes cuerpos geométricos.**

a)


c)


e)


b)


d)


a) Hallamos el área de un cuadrado de lado $l = 3$ cm $\rightarrow A = l^2 = 9$ cm^2

Son 6 cruces y cada cruz consta de 5 cuadrados $\rightarrow A = 6 \cdot 5 \cdot 9 = 270$ cm^2

Son 8 huecos y cada hueco está formado por 3 cuadrados
$\rightarrow A = 8 \cdot 3 \cdot 9 = 216$ cm^2

Luego el área total será:

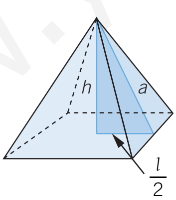
$$A_T = 270 + 216 = 486 \text{ cm}^2$$

que es igual al área de un cubo de arista: $3 \cdot 3 = 9$ cm
$\rightarrow A_{\text{Cara}} = 9^2 = 81$ cm^2 $\rightarrow A_T = 6 \cdot A_C \rightarrow A_T = 6 \cdot 81 = 486$ cm^2

b) La superficie total es la suma del área de las 5 caras del cubo y las 4 caras laterales de la pirámide.

$$A_{\text{Cubo}} = 5 \cdot 6^2 = 5 \cdot 36 = 180 \text{ cm}^2$$
$$A_{L\ \text{Pirámide}} = 4 \cdot A_{\text{Cara}}$$

Para hallar el área de una cara, calculamos su apotema, a:



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \rightarrow a = 3{,}6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot a \rightarrow A_C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3{,}6 = 10{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_{L\ \text{Pirámide}} = 4 \cdot 10{,}8 = 43{,}2 \text{ cm}^2$$

Luego tenemos que: $A_T = 180 + 43{,}2 = 223{,}2$ cm^2

c) El área del cilindro es:

$$A = 2\pi rh + \pi r^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 7 + \pi \cdot 6^2 = 376{,}8 \text{ cm}^2$$

y el área de la semiesfera es:

$$A = \frac{4\pi r^2}{2} \rightarrow A = 2\pi \cdot 6^2 = 226{,}1 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 376{,}8 + 226{,}1 = 602{,}9 \text{ cm}^2$$

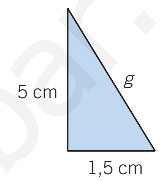
d) Hallamos el área del semicilindro:

$$A_L = \frac{2\pi rh}{2} + 2rh - rh = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 5 + 1{,}5 \cdot 5 = 31{,}05 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow A_B = \pi \cdot 1{,}5^2 = 7{,}07 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 31{,}05 + 7{,}07 = 38{,}12 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del semicono, hallamos lo que mide la generatriz:



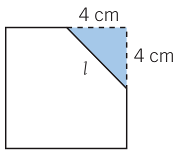
$$g = \sqrt{5^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{25 + 2{,}25} = 5{,}22 \text{ cm}$$

$$A_L = \frac{\pi rg}{2} \rightarrow A_L = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 5{,}22}{2} = 12{,}29 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow A_B = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5^2}{2} = 3{,}53 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 12{,}29 + 3{,}53 = 15{,}82 \text{ cm}^2$$

e) Determinamos lo que mide el lado del triángulo de la esquina:



$$l^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \rightarrow l = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cara completa}} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

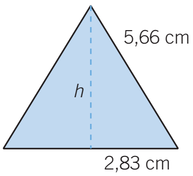
$$A_{\text{Corte}} = \frac{1}{2}\, b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cara recortada}} = 64 - 8 = 56 \text{ cm}^2$$

El área lateral del cubo será:

$$A_L = 3 \cdot A_{\text{Cara}} + 3 \cdot A_{\text{Cara recortada}} \rightarrow A_L = 3 \cdot 64 + 3 \cdot 56 = 192 + 168 = 360 \text{ cm}^2$$

Finalmente hallamos el área del triángulo de la esquina del cubo:

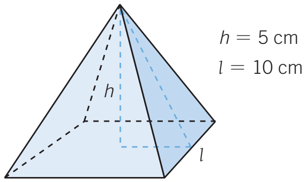


$$h = \sqrt{5{,}66^2 - 2{,}83^2} = \sqrt{24} \rightarrow h = 4{,}9 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Esquina}} = \frac{1}{2}\, l \cdot h \rightarrow A_{\text{Esquina}} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}66 \cdot 4{,}9 = 13{,}9 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 360 + 13{,}9 = 373{,}9 \text{ cm}^2$$

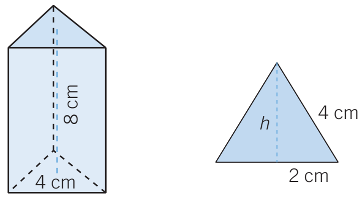
071 **Obtén el volumen de una pirámide cuadrangular recta de arista 10 cm y altura 5 cm.**



$$A_B = l^2 \rightarrow A_B = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = 166{,}7 \text{ cm}^3$$

072 ●● **Calcula el volumen de un prisma triangular recto de altura 8 cm y cuya base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.**



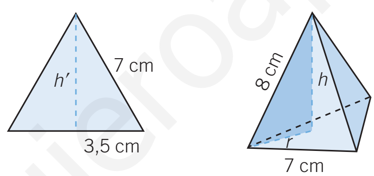
Hallamos el área de la base:

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 6{,}9 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot h \rightarrow V = 6{,}9 \cdot 8 = 55{,}2 \text{ cm}^3$$

073 ●● **Halla el volumen de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 8 cm, y con base, un triángulo equilátero de 7 cm de lado.**



Hallamos el área de la base:

$$h' = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{36{,}75} = 6{,}1 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{1}{2} b \cdot h' \rightarrow A_B = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6{,}1 = 21{,}4 \text{ cm}^2$$

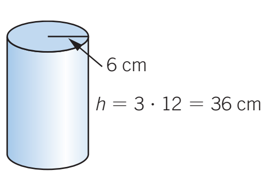
Para calcular la altura de la pirámide aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de color, y tenemos en cuenta que, por ser equilátero, el radio es:

$$r = \frac{2}{3} h' \rightarrow r = \frac{2}{3} \cdot 6{,}1 = 4{,}1 \text{ cm}$$

$$8^2 = h^2 + r^2 \rightarrow h = \sqrt{64 - 16{,}81} = 6{,}9 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 21{,}4 \cdot 6{,}9 = 49{,}2 \text{ cm}^3$$

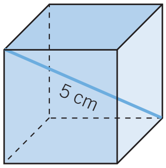
074 ●● **Calcula el volumen de un cilindro de 12 cm de diámetro, y altura, el triple del diámetro.**



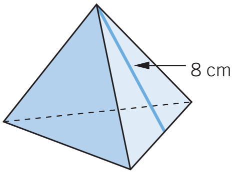
$$V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot 6^2 \cdot 36 = 4\,069{,}4 \text{ cm}^3$$

075 ●●● **Obtén el volumen de estos cuerpos geométricos.**

a)



b)



a) La arista es: $5 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} \rightarrow a = 2{,}89$ cm

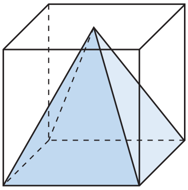
$V = 2{,}89^3 = 24{,}14$ cm^3

b) La arista es: $8 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = 9{,}24$ cm

La altura es: $h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{56{,}89} = 7{,}54$ cm

$V = 9{,}24 \cdot 8 \cdot 7{,}54 = 557{,}35$ cm^3

076 ●● **En el interior de un cubo de 12 cm de arista construimos una pirámide cuya base es una cara del cubo y el vértice es el centro de la cara opuesta. Calcula el área y el volumen de esta pirámide.**



12 cm

La apotema es: $a = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 13{,}42$ cm

Área lateral $= 4 \cdot \frac{12 \cdot 13{,}42}{2} = 322{,}08$ cm^2

Área base $= 12^2 = 144$ cm^2. Área total $= 144 + 322{,}08 = 466{,}08$ cm^2

Volumen $= \frac{12^2 \cdot 12}{3} = 576$ cm^3

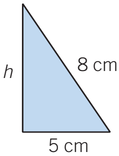
077 ● **Halla el volumen de un cono:**

a) De radio 5 cm y altura 8 cm.

b) De radio 5 cm y generatriz 8 cm.

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 209{,}3$ cm^3

b) Hallamos la altura del cono:



$h = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = 6{,}24$ cm

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 6{,}24 = 163{,}28$ cm^3

078 Obtén el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 20 cm.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,186{,}7 \text{ cm}^3$$

079 Un cubo y una esfera tienen un área de 216 cm². ¿Cuál tiene mayor volumen?

$$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot A_{\text{Cara}} = 6l^2 \rightarrow 216 = 6l^2 \rightarrow l = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow 216 = 4\pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{17{,}2} = 4{,}15 \text{ cm}$$

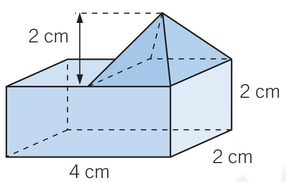
$$V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow V_{\text{Cubo}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 4{,}15^3 = 299{,}2 \text{ cm}^3$$

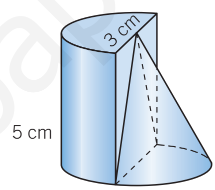
La esfera tiene mayor volumen.

080 Obtén el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

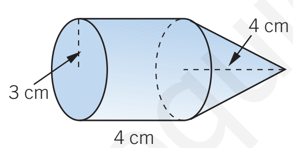
a)



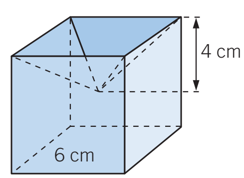
e)



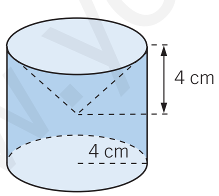
b)



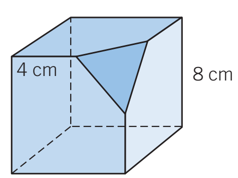
f)



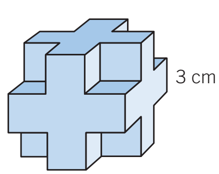
c)



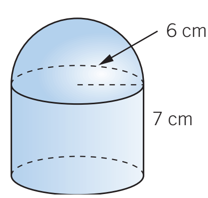
g)



d)



h)



a) $V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8}{3} = 2{,}7 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \rightarrow V_{\text{Ortoedro}} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \text{ cm}^3$

$V_T = V_{\text{Pirámide}} + V_{\text{Ortoedro}} = 2{,}7 + 16 = 18{,}7 \text{ cm}^3$

b) $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}68 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04 \text{ cm}^3$

$V_T = 37{,}68 + 113{,}04 = 150{,}72 \text{ cm}^3$

c) $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 67 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 401{,}92 \text{ cm}^3$

$V_T = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Cono}} = 401{,}92 - 67 = 334{,}92 \text{ cm}^3$

d) $V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow V_{\text{Cubo}} = 9^3 = 729 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Hueco}} = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$

$V_T = V_{\text{Cubo}} - 8 \cdot V_{\text{Hueco}} = 729 - 8 \cdot 27 = 513 \text{ cm}^3$

e) $V_{\text{Semicilindro}} = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Semicilindro}} = \dfrac{1}{2}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 17{,}66 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Semicono}} = \dfrac{1}{6}\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Semicono}} = \dfrac{1}{6}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 5{,}89 \text{ cm}^3$

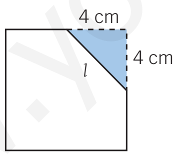
$V_T = 17{,}66 + 5{,}89 = 23{,}55 \text{ cm}^3$

f) $V_{\text{Pirámide}} = \dfrac{1}{3} A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Cubo}} = l^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

$V_T = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirámide}} = 216 - 24 = 192 \text{ cm}^3$

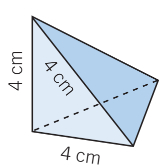
g) Hallamos el lado del triángulo equilátero:



$l^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \rightarrow l = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

$V_{\text{Cubo}} = l^3 = 8^3 = 512 \text{ cm}^3$

Determinamos el volumen del pico que se ha biselado del cubo (es una pirámide triangular):



$A_{\text{Base}} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$

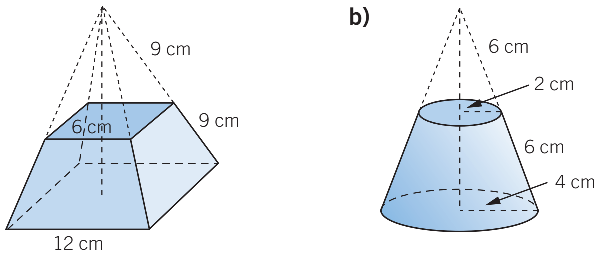
$V_{\text{Pico}} = \dfrac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow V_{\text{Pico}} = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4 = 10{,}7 \text{ cm}^3$

h) $V_{\text{Semiesfera}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 452{,}16 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 = 791{,}28 \text{ cm}^3$

$V_T = 452{,}16 + 791{,}28 = 1\,243{,}44 \text{ cm}^3$

081 Calcula el volumen de estas figuras.



a) La diagonal de la base es: $d = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ cm

La altura de la pirámide grande es:

$$h = \sqrt{18^2 - (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{324 - 72} = 15{,}88 \text{ cm}$$

Por semejanza. la altura de la pirámide pequeña será la mitad:

$$\frac{15{,}88}{2} = 7{,}94 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 15{,}88 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 7{,}94 = 666{,}96 \text{ cm}^3$$

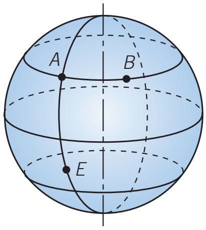
b) La altura del cono grande es: $h = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = 11{,}31$ cm

Por semejanza, la altura del cono pequeño será la mitad:

$$\frac{11{,}31}{2} = 5{,}655 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 11{,}31 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5{,}655 = 165{,}73 \text{ cm}^3$$

082 Observa la situación de las ciudades *A* y *B* y contesta.



a) La ciudad *B* está en el mismo paralelo que la ciudad *A*. ¿Cuál es la latitud de *B*? ¿Qué relación hay entre las latitudes de *A* y *B*?

b) Las ciudades *A* y *E* están en el mismo meridiano. ¿Qué relación hay entre sus longitudes?

a) Las latitudes son iguales.

b) Las longitudes son iguales.

083 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS DE DIFERENCIAS HORARIAS?

¿Qué diferencia horaria hay entre Tarragona, con coordenadas geográficas 1° 15' E 41° 7' N, y Cáceres, con coordenadas 6° 23' O 39° 28' N?

PRIMERO. Se calcula la diferencia, en grados, entre las longitudes de los puntos. Se consideran como positivas las longitudes Este, y como negativas las longitudes Oeste.

Tarragona: $1°\ 15' = 1 + \frac{15}{60} = 1{,}25°$ E

Cáceres: $6°\ 23' = 6 + \frac{23}{60} = 6{,}383°$ O

Diferencia: $1{,}25° - (-6{,}383°) = 7{,}633°$

SEGUNDO. Se divide este resultado entre 15 y se obtiene la diferencia horaria, en horas, entre los dos puntos.

$$\frac{7{,}633}{15} = 0{,}509 \text{ h} = 30 \text{ min } 32{,}4 \text{ s}$$

La diferencia horaria es de 30 min 32,4 s.

084 **Si la longitud de Madrid es de 3° 41' O:**

a) ¿Qué diferencia horaria tiene con Tarragona?

b) ¿Y con Almería (2° 26' O)?

c) ¿Con qué ciudades no tiene Madrid diferencia horaria?

d) ¿Qué diferencia hay entre Almería y Cáceres?

a) Tarragona: $1°\ 15' = 1 + \frac{15}{60} = 1{,}25°$ E

Madrid: $3°\ 41' = 3 + \frac{41}{60} = 3{,}68°$ O

Diferencia: $1{,}25° - (-3{,}68°) = 4{,}93°$

$\frac{4{,}93}{15} = 0{,}329 \text{ h} = 19 \text{ min } 44{,}4 \text{ s}$

b) Almería: $2°\ 26' = 2 + \frac{26}{60} = 2{,}43°$ O

Diferencia: $3{,}68° - 2{,}43° = 1{,}25°$

$\frac{1{,}25}{15} = 0{,}083 \text{ h} = 5 \text{ min}$

c) Madrid no tiene diferencia horaria con aquellas ciudades que tienen su misma longitud.

d) Almería: $2°\ 26' = 2 + \frac{26}{60} = 2{,}433°$ O

Cáceres: $6°\ 23' = 6 + \frac{23}{60} = 6{,}383°$ O

Diferencia: $6{,}383° - 2{,}433° = 3{,}95°$

$\frac{3{,}95}{15} = 0{,}263 \text{ h} = 15 \text{ min } 48 \text{ s}$

085 **Sabiendo que Fornells (isla de Menorca) tiene una longitud de 4° 7' E, ¿qué diferencia horaria tiene con Madrid, cuya longitud es 3° 41' O?**

Menorca: $4°\,7' = 4 + \frac{7}{60} = 4{,}12°$ E

Madrid: $3°\,41' = 3 + \frac{41}{60} = 3{,}68°$ O

$4{,}12° - (-3{,}68°) = 7{,}8°$

$\frac{7{,}80}{15} = 0{,}52$ h $= 31$ min 12 s

086 **Un ascensor tiene las siguientes medidas: 100 × 100 × 250 cm. ¿Es posible introducir en él una vara metálica que mide 288 cm?**

La longitud de la mayor vara que se puede meter en el ascensor es la diagonal del mismo.

$$d = \sqrt{100^2 + 100^2 + 250^2} = \sqrt{82\,500} = 287{,}22 \text{ cm} < 288 \text{ cm}$$

Por tanto, la vara no se podrá introducir en el ascensor.

087 **Queremos pintar una habitación rectangular (incluido el techo) de 4 × 6 m y 3 m de altura. Cada uno de los botes que vamos a utilizar contiene pintura suficiente para pintar 30 m².**

a) ¿Cuántos botes tendremos que comprar si nos atenemos a lo que indica el fabricante?

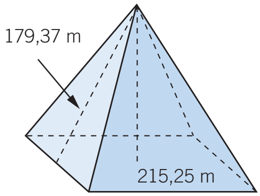
b) Si al final hemos utilizado 4 botes, ¿para cuántos metros cuadrados nos da cada bote?

El área lateral es: $(4 + 4 + 6 + 6) \cdot 3 = 60$ m^2 y el área del techo es: $6 \cdot 4 = 24$ m^2. El área total es: $60 + 24 = 84$ m^2.

a) El número de botes es: $84/30 = 2{,}8$, por lo que necesitamos 3 botes.

b) Si hemos gastado 4 botes completos, cada bote da para pintar $84 : 4 = 21$ m^2.

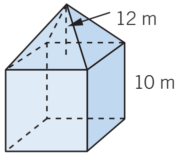
088 **La pirámide de Kefrén tiene las medidas que se indican en la figura. Halla la altura de la pirámide.**



Formando un triángulo rectángulo con la apotema, la altura y medio lado, la altura será:

$$h = \sqrt{179{,}37^2 - 107{,}625^2} = \sqrt{20\,590{,}46} = 143{,}49 \text{ m}$$

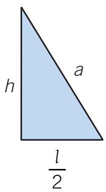
089 ●● **Calcula el área total de una torre cúbica de 10 m de arista, que tiene un tejado en forma piramidal cuya altura es 12 m.**



El área lateral de la parte cúbica es:

$$A_{\text{Cubo}} = 4 \cdot 10^2 = 400 \text{ m}^2$$

Para hallar el área lateral de la pirámide, calculamos primero lo que mide la altura de una de sus caras:



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ m}$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} b \cdot a \rightarrow A_{\text{Cara}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65 \text{ m}^2$$

$$A_{L \text{ Pirámide}} = 4 \cdot 65 = 260 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Torre}} = 400 + 260 = 660 \text{ m}^2$$

090 ●● **Un cubo y una esfera tienen el mismo volumen, 125 cm³. ¿Cuál tiene menor área? Si tuvieras que construir un depósito cúbico o esférico, ¿en qué forma se necesita menos material?**

$$V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow 125 = l^3 \rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot A_C = 6l^2 \rightarrow A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 125 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 125}{4\pi}} = 3{,}1 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \rightarrow A_{\text{Esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 3{,}1^2 = 120{,}7 \text{ cm}^2$$

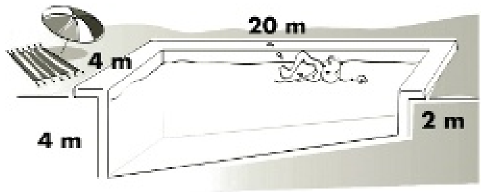
La esfera tiene menor área que el cubo. Por tanto, elegiría la forma esférica.

091 ●● **La Géode es un gigantesco cine con forma de esfera. Calcula su área sabiendo que su volumen es de 24 416 640 dm³.**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 24\,416\,640 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 24\,416\,640}{4\pi}} = 180 \text{ dm}$$

$$A = 4\pi r^2 \rightarrow A = 4\pi \cdot 180^2 = 406\,944 \text{ dm}^2$$

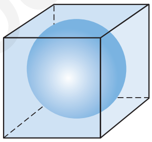
092 ●● **Halla el volumen de esta piscina.**



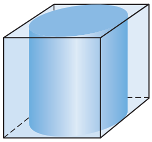
Considerando la piscina como un prisma de base trapezoidal, el área de la base es: $A_{\text{Base}} = \dfrac{4+2}{2} \cdot 20 = 60\ \text{m}^2$ y el volumen es: $V = 60 \cdot 4 = 240\ \text{m}^3$

093 ●●● **En un depósito cúbico lleno de agua y de arista 3 m, introducimos los siguientes cuerpos.**

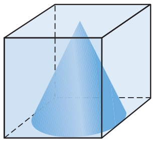
a) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de agua hay en el cubo después de introducir una esfera de radio 1,5 m?



b) ¿Qué porcentaje queda de la cantidad inicial de agua si introducimos un cilindro de diámetro y altura 3 m?



c) ¿Y si introducimos un cono de 3 m de diámetro e igual altura?



a) $V_{\text{Cubo}} = l^3 \rightarrow V_{\text{Cubo}} = 3^3 = 27\ \text{m}^3$

$V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 = 14{,}13\ \text{m}^3$

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Esfera}} = 27 - 14{,}13 = 12{,}87\ \text{m}^3$

El tanto por ciento lo hallamos mediante una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si de } 27\ \text{m}^3 \longrightarrow 12{,}87\ \text{m}^3\\ \text{de } 100\ \text{m}^3 \longrightarrow x\ \ \text{m}^3\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\,287}{27} = 47{,}7\,\%$$

Queda el 47,7% del volumen inicial.

b) $V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = 21{,}2\ \text{m}^3$

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cilindro}} = 27 - 21{,}2 = 5{,}8\ \text{m}^3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si de } 27\ \text{m}^3 \longrightarrow 5{,}8\ \text{m}^3\\ \text{de } 100\ \text{m}^3 \longrightarrow x\ \ \text{m}^3\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{580}{27} = 21{,}5\,\%$$

c) $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = 7{,}1\ \text{m}^3$

$V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cono}} = 27 - 7{,}1 = 19{,}9\ \text{m}^3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si de } 27\ \text{m}^3 \longrightarrow 19{,}9\ \text{m}^3\\ \text{de } 100\ \text{m}^3 \longrightarrow x\ \ \text{m}^3\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\,990}{27} = 73{,}7\,\%$$

094 ●●

Una empresa que vende zumo en envases con forma de ortoedro, cuyas medidas son 11 × 6 × 15 cm, decide cambiar dichos envases por otros con estas características.

- **Disminuye un 10 % el área de la base.**
- **Aumenta un 10 % la altura.**

a) El volumen del nuevo envase, ¿es mayor o menor que el del antiguo?

b) Si se mantiene el mismo precio, ¿es más rentable para el cliente el nuevo envase?

c) El precio del envase es 1,40 €. ¿Cuánto gana la empresa si envasa 99 000 litros de zumo al mes? ¿Y cuánto ganaba antes?

a) $V = 11 \cdot 6 \cdot 15 = 990 \text{ cm}^3$

$A_B = 11 \cdot 6 = 66 \text{ cm}^2 \rightarrow A_B' = 0{,}9 \cdot 66 = 59{,}4 \text{ cm}^2$

$h' = 1{,}1 \cdot h \rightarrow h' = 110\,\% \cdot 15 = 16{,}5 \text{ cm}$

$V' = A_B' \cdot h' \rightarrow V' = 59{,}4 \cdot 16{,}5 = 980{,}1 \text{ cm}^3$

Luego el volumen del nuevo envase es menor que el del antiguo.

b) No, pues por el mismo precio tiene menos zumo.

c) $V' = 980{,}1 \text{ cm}^3 = 0{,}98 \text{ dm}^3 = 0{,}98\ \ell$

$99\,000\ \ell : 0{,}98\ \ell = 101\,020{,}4$ envases

Actualmente gana: $101\,020 \cdot 1{,}40$ €/envase $= 141\,428$ €

$V = 990 \text{ cm}^3 = 0{,}99 \text{ dm}^3 = 0{,}99\ \ell$

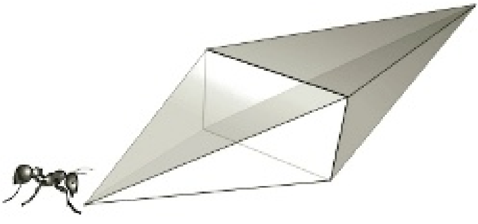
$99\,000\ \ell : 0{,}99\ \ell = 100\,000$ envases

Antes ganaba: $100\,000 \cdot 1{,}40$ €/envase $= 140\,000$ €

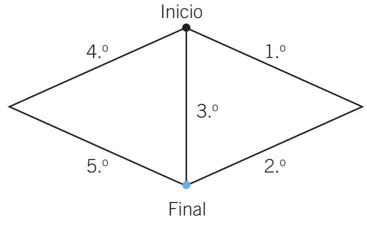
095 ●●●

Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.

Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.



Si consideramos los cuatro laterales del octaedro, cada punto final es el punto inicial del siguiente lateral.

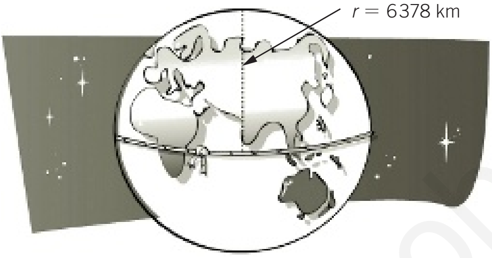


Con el cubo no se puede hacer porque cada vértice es la intersección de tres aristas (no cuatro) y, al intentar recorrerlo, la segunda vez que la hormiga llegue a un vértice no podrá salir de él.

096 ●●● **Imagina que con una cuerda rodeamos el ecuador de la Tierra.**

a) Sabiendo que el radio de la Tierra mide 6 378 km, ¿qué longitud tendrá la cuerda?

b) Con una cuerda que es un metro más larga hacemos una circunferencia. ¿Cuál es la diferencia entre los radios de ambas?



c) Hacemos lo mismo con una bola que tiene 18 mm de radio. ¿Cuál es ahora la diferencia entre los radios de las dos circunferencias?

a) Longitud $= 2\pi r = 2\pi \cdot 6\,378 = 40\,074{,}15588$ km $\rightarrow$ $40\,074\,155{,}88$ m

b) $40\,074\,156{,}88 = 2\pi r$

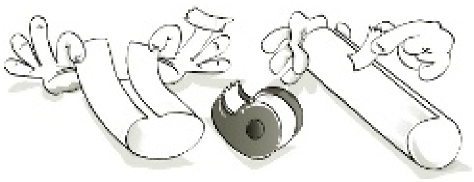
$r = 6\,378\,000{,}16$

$6\,378\,000{,}16 - 6\,378\,000 = 0{,}16$ m $= 16$ cm $\rightarrow$ La diferencia es 16 cm.

c) La distancia no varía, independientemente de la longitud del radio.

$$2\pi r + 1 = 2\pi(r + d) \rightarrow d = \frac{1}{2\pi} = 0{,}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

097 ●●● **En el año 1638 el matemático Galileo propuso el siguiente problema: «Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles, se obtienen dos cilindros distintos».**
¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?



Consideramos que los lados miden a y b.

El cilindro de altura a tiene de volumen:

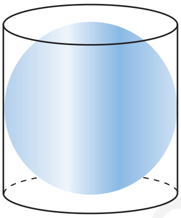
$$r = \frac{b}{2\pi} \rightarrow V = \pi r^2 a = \pi \frac{b^2}{4\pi^2} a = \frac{b^2 a}{4\pi}$$

El cilindro de altura b tiene de volumen:

$$r = \frac{a}{2\pi} \rightarrow V = \pi r^2 b = \pi \frac{a^2}{4\pi^2} b = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

Por tanto, solo tienen el mismo volumen si la hoja es cuadrada.

098 **Si tenemos una esfera inscrita en un cilindro, calcula cuál es la diferencia de volúmenes entre la esfera y el cilindro en función del radio de la esfera.**



Volumen cilindro $= \pi r^2 \cdot (2r) = 2\pi r^3$

Volumen esfera $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Por tanto, el volumen de la esfera es $\dfrac{2}{3}$ del volumen del cilindro.

Su diferencia es: $\dfrac{2}{3}\pi r^3$

099 **En un libro de Matemáticas hemos encontrado este problema: «Si el lado de un octaedro es l, su volumen es: $V = l^3 \cdot 0{,}4714$». Investiga cómo se obtiene esta fórmula.**

El volumen del octaedro es el de dos pirámides con base un cuadrado de lado y arista l.

La apotema lateral es: $a = \sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$

La altura de la pirámide es: $h = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}l$

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3}A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{\sqrt{2}}{6}l^3$$

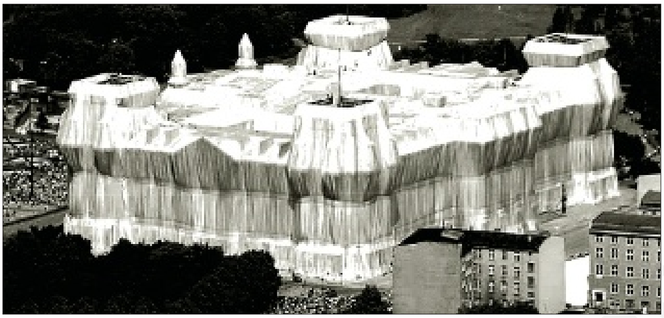
$$V_{\text{Octaedro}} = 2 \cdot V_{\text{Pirámide}} = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3 = 0{,}4714\, l^3$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

100 **Christo Javacheff y su recientemente fallecida esposa Jeanne han sido artistas muy populares.**

Sus obras más representativas consisten en envolver con tela objetos y monumentos.

En 1982 rodearon 11 islas de la bahía de Florida, para lo que utilizaron 603 000 m² de tela rosa. En 1985 empaquetaron el Pont-Neuf sobre el río Sena, en la ciudad de París. En 1995 envolvieron en tela el Reichstag de Berlín.

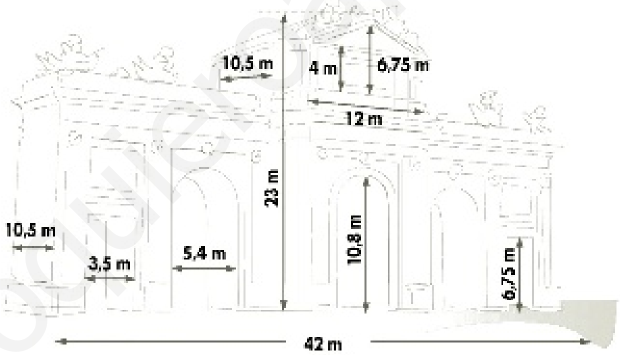


Eres capaz de... Comprender

a) ¿Cómo se puede calcular la tela necesaria para envolver estos edificios?

Eres capaz de... Resolver

b) Uno de sus proyectos fue envolver la Puerta de Alcalá en Madrid.



¿Cuántos metros cuadrados de tela hubieran necesitado, aproximadamente, para envolver este monumento sin tapar los arcos?

Eres capaz de... Decidir

c) ¿Crees que hubiera sido necesaria más tela para envolver la Puerta de Alcalá que la utilizada para el Reichstag de Berlín?

a) Se calcula el área del edificio que queda a la vista.

b) Calculamos el área total (como si fuera maciza), le restamos los huecos de los arcos y le sumamos sus partes interiores.

Área frontal = Área trasera =

$$= 42 \cdot (23 - 6{,}75) + 12 \cdot 4 + \frac{12 \cdot (6{,}75 - 4)}{2} = 747 \text{ m}^2$$

$$\text{Área lateral} = 2 \cdot 10{,}5 \cdot (23 - 6{,}75) + 2 \cdot 10{,}5 \cdot \frac{42 - 12}{2} +$$

$$+ 2 \cdot 10{,}5 \cdot 4 + 2 \cdot 10{,}5 \cdot \sqrt{6^2 + (6{,}75 - 4)^2} = 878{,}85 \text{ m}^2$$

$$\text{Área total} = \text{Área frontal} + \text{Área trasera} + \text{Área lateral} =$$
$$= 747 + 747 + 878{,}85 = 2\,372{,}85 \text{ m}^2$$

$$\text{Área arcos} = 2 \cdot 2 \cdot 3{,}5 \cdot 6.75 +$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot \left(\left(10{,}8 - \frac{5{,}4}{2}\right) \cdot 5{,}4 + \frac{3{,}14 \cdot 2{,}7^2}{2}\right) = 425{,}61 \text{ m}^2$$

$$\text{Área interior} = 2 \cdot 10{,}5 \cdot (2 \cdot 6{,}75 + 3{,}5) +$$
$$+ 3 \cdot 10{,}5 \cdot (2 \cdot 8{,}1 + 3{,}14 \cdot 2{,}7) = 1\,134{,}36 \text{ m}^2$$

Y operando: $2\,372{,}85 - 425{,}61 + 1\,134{,}36 = 3\,081{,}6$ m^2 hubieran necesitado para envolver el monumento.

c) La cantidad de tela necesaria para envolver el Reichstag de Berlín es mucho mayor que la que se necesitaría para envolver la Puerta de Alcalá.

101 ●●●

El producto más vendido de la fábrica de dulces LA GOLOSA son unas galletas circulares de 6 cm de diámetro y un grosor de 5 mm.

Las galletas se comercializan en paquetes de 40 unidades, envueltas en papel de celofán, y se venden en cajas con forma de ortoedro que contienen cuatro paquetes.

Las cajas van recubiertas con el mismo papel de celofán que los paquetes.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Qué forma tendrá un paquete de galletas? ¿Cuánto papel de celofán se necesita para envolverlo?

b) ¿Qué medidas tendrá la caja de galletas?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Si la producción de galletas diaria se estima en 10 000 unidades, ¿cuánto cartón y papel de celofán se necesita al día?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

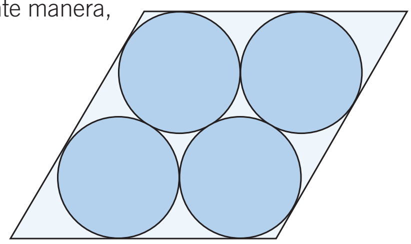
d) ¿Opinas que si la caja tuviera otra forma se podría aprovechar mejor el espacio? ¿Qué cantidad de cartón ahorrarían diariamente?

a) Un paquete tiene forma de cilindro, de 3 cm de radio y una altura de $0,5 \cdot 40 = 20$ cm.
Para envolverlo hace falta: $2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 20 = 433,32$ cm²

b) Las medidas de la caja son: 12 cm × 12 cm × 20 cm

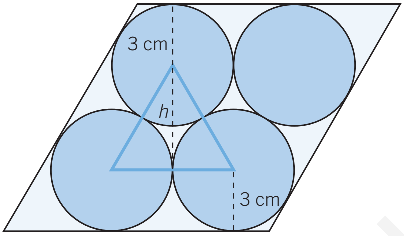
c) El papel de celofán para envolver un paquete es igual a su área.
$A_{\text{Paquete}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 3(3 + 20) = 433,32 \text{ cm}^2$
El área de la caja es: $A_{\text{Caja}} = 2 \cdot 12 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \cdot 20 = 1\,248 \text{ cm}^2$
El material necesario para fabricar cada caja es:
$A_{\text{Celofán}} = 4 \cdot 433,32 + 1\,248 = 2\,981,28 \text{ cm}^2$
$A_{\text{Cartón}} = 1\,248 \text{ cm}^2$
El número de cajas diarias es $10\,000 : 40 = 250$, por lo que el material empleado cada día es:
$\text{Total}_{\text{Celofán}} = 250 \cdot 2\,981,28 \text{ cm}^2 = 745\,320 \text{ cm}^2 = 74,532 \text{ m}^2$
$\text{Total}_{\text{Cartón}} = 250 \cdot 1\,248 \text{ cm}^2 = 312\,000 \text{ cm}^2 = 31,2 \text{ m}^2$

d) Colocándolas de la siguiente manera, tenemos que:



El área lateral es la misma, pero el área de la base es menor, luego se ahorra cartón.

La base del romboide es dos veces el diámetro de la galleta, 12 cm, y la altura es:



Altura $= 3 + 3 + h$, donde h es la altura de un triángulo equilátero de lado igual al diámetro de la galleta, 6 cm.

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$h = 6 + 5{,}2 = 11{,}2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Base}} = 12 \cdot 11{,}2 = 134{,}4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Ahorro}_{\text{Cartón}} = 2 \cdot (A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Romboide}}) = 2 \cdot (12^2 - 134{,}4) = 19{,}2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Total ahorro} = 250 \cdot 19{,}2 = 4\,800 \text{ cm}^2 = 0{,}48 \text{ m}^2$$

El ahorro de cartón diario sería de $0{,}48 \text{ m}^2$.

10 Movimientos y semejanzas

El carro del Sol

Cuenta la leyenda que en Alejandría, en los tiempos en que se construía el famoso faro, un grupo de hombres derrotó al Sol.

Apolo, al que otros llaman Ra, ordenó a sus siervos que le llevaran los ocho hombres más sabios de todos los tiempos, pues quería para él la sabiduría del mundo.

Los siervos comenzaron la tarea y encontraron a los siete primeros. Fue fácil, pues todos ellos estaban en el Hades y se les conocía como los Siete Sabios.

Al octavo lo buscaron entre los vivos y entre los muertos, en la tierra y en el cielo, pero no aparecía. Cansados de tanto buscar, le preguntaron al Oráculo:

–Su nombre es Euclides, y el lugar donde se encuentra es la biblioteca de Alejandría.

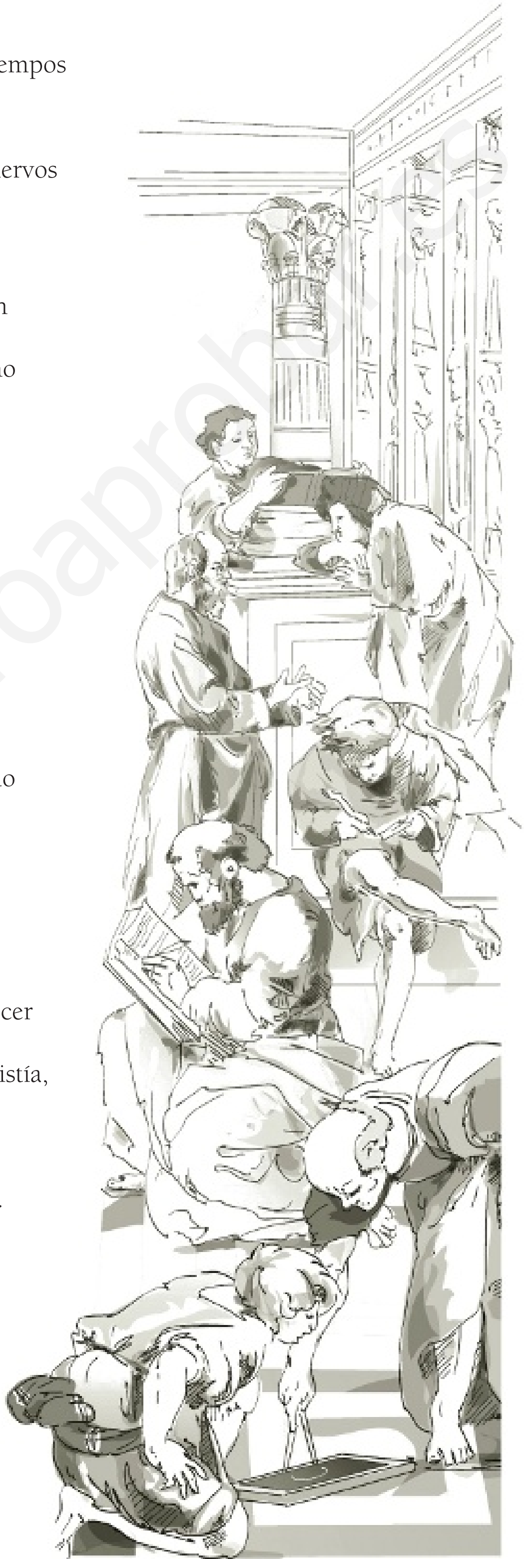
Montados en el carro de Apolo volaron hasta la biblioteca y allí hallaron a un grupo de hombres. El más anciano, que estudiaba dos cuadrados de diferente tamaño, anotando sus semejanzas y sus diferencias, fue capturado por los siervos de Apolo.

–¡Euclides es nuestro!

En ese instante todos los demás hombres los rodearon diciendo:

–¡Yo soy Euclides! ¡Yo soy Euclides!

Los enviados, ante la imposibilidad de reconocer quién era realmente Euclides, se fueron y le dijeron a Apolo que el octavo sabio no existía, que era uno y eran todos. Después de esto, Apolo liberó a los Siete Sabios, y preguntado por la razón contestó que no hay muros que contengan la sabiduría y el conocimiento.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre la vida de Euclides, matemático que vivió alrededor del año 300 a.C.**

En la siguiente página se puede encontrar una breve biografía de Euclides y un resumen de sus aportaciones a las matemáticas:

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm

2 **Existen diversas teorías sobre la existencia de Euclides, investiga sobre ellas.**

En esta página, dedicada a la divulgación de las matemáticas, que depende de la Real Sociedad Matemática Española, puedes leer una extensa biografía de Euclides desarrollada por Luis Vega Reñón, de la UNED, donde encontrarás diversas teorías sobre la existencia de Euclides:

http://www.divulgamat.net/

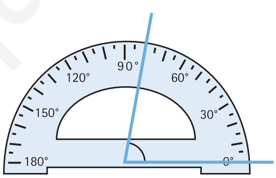
3 **Euclides está muy relacionado con la geometría. Investiga sobre la obra de este matemático.**

En la siguiente página se muestra un resumen y enlaces a los contenidos de los trece libros que componen la principal obra de Euclides, *Los Elementos*.

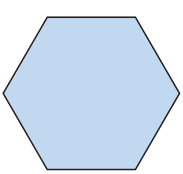
http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

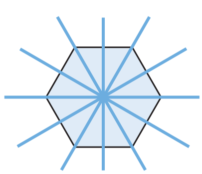
EVALUACIÓN INICIAL

1 **Dibuja con el transportador un ángulo de 80°.**



2 **Encuentra los ejes de simetría de este polígono.**





3 **Busca el término que falta en las proporciones.**

a) $\dfrac{12}{8} = \dfrac{9}{x}$ b) $\dfrac{3}{9} = \dfrac{x}{21}$ c) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{25}$

a) $12x = 72 \rightarrow x = 6$

b) $63 = 9x \rightarrow x = 7$

c) $100 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

Movimientos y semejanzas

EJERCICIOS

001 **Dadas estas parejas de puntos, calcula, en cada caso, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y halla su módulo.**

a) $A(1, 3)$ $\quad B(-4, 5)$

b) $A(4, 0)$ $\quad B(-1, -5)$

c) $A(-1, -3)$ $\quad B(5, -7)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-4 - 1, 5 - 3) = (-5, 2) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1 - 4, -5 - 0) = (-5, -5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

c) $\overrightarrow{AB} = (5 + 1, -7 + 3) = (6, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$

002 **Dados el punto $A(2, 4)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (-3, 5)$, determina el punto B, extremo de $\overrightarrow{AB}$.**

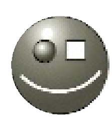
$$A(2, 4);\ B(x, y) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3 = x - 2 \rightarrow x = -1 \\ 5 = y - 4 \rightarrow y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow B(-1, 9)$$

003 **Escribe tres vectores con módulo 4. ¿Puedes escribir un vector con módulo −2?**

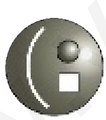
$\overrightarrow{AB}(4, 0)$; $\overrightarrow{CD}(0, 4)$ y $\overrightarrow{EF}(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

No existe ningún vector cuyo módulo sea −2, ya que el módulo, que representa una medida de longitud, no puede ser negativo.

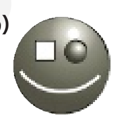
004 **¿Cuáles de las figuras resultan al aplicar un movimiento a esta figura?**



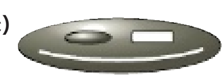
a)



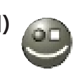
b)



c)



d)



Las figuras de los apartados a) y b), porque mantienen la forma y el tamaño.

005 **Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas.**

a) Una transformación es un movimiento.

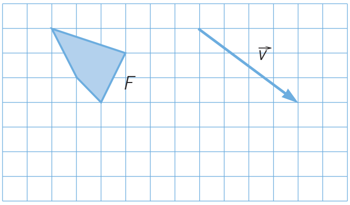
b) Un movimiento conserva siempre la forma.

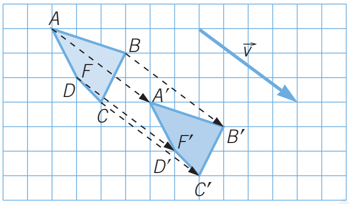
c) Una transformación mantiene el tamaño de las figuras.

Es cierta la afirmación del apartado b).

006 **Dibuja una letra E y aplícale distintas transformaciones geométricas.**

007 **Obtén la figura trasladada de la figura *F* mediante el vector $\vec{v}$.**





008 **Un cuadrado tiene como vértices los puntos *A*(−1, 1), *B*(1, 1), *C*(1, −1) y *D*(−1, −1).**

a) Determina su trasladado *A′ B′ C′ D′* mediante la traslación de vector $\vec{v}$ = (4, −2).

b) Comprueba gráficamente que los puntos *A′*, *B′*, *C′* y *D′* forman también un cuadrado.

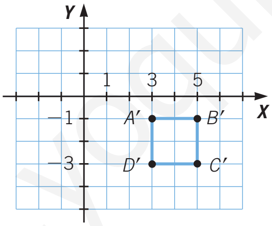
a) $A(-1, 1) \xrightarrow{\vec{v} = (4, -2)} A'(3, -1)$

$B(1, 1) \longrightarrow B'(5, -1)$

$C(1, -1) \longrightarrow C'(5, -3)$

$D(-1, -1) \longrightarrow D'(3, -3)$

b)

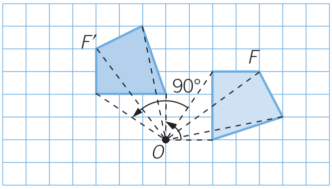


009 **Determina la traslación que transforma el punto *A*(−1, 4) en *A′*(5, 2).**

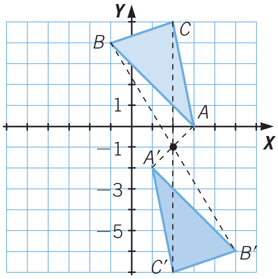
Es una traslación cuyo vector $\vec{v}$ es:

$$\vec{v} = (5 - (-1), 2 - 4) = (6, -2)$$

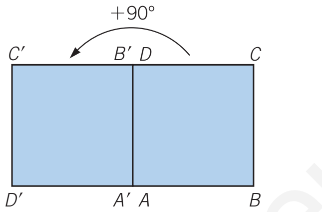
010 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante un giro de centro *O* y ángulo de 90°.**



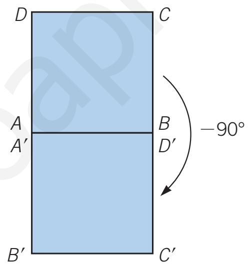
011 **Un triángulo tiene por vértices los puntos *A*(3, 0), *B*(−1, 4) y *C*(2, 5). Halla su transformado por un giro de centro (2, −1) y ángulo de 180°.**



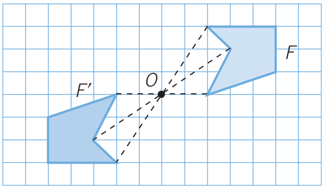
012 **¿En qué figura se transforma el cuadrado *ABCD* mediante un giro *G*(*A*; 90°)? ¿Y mediante un giro *G*(*A*; −90°)?**



En ambos casos se transforma en un cuadrado.



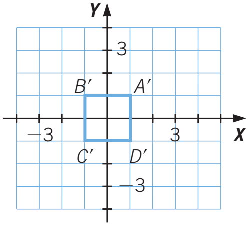
013 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante una simetría central de centro *O*.**



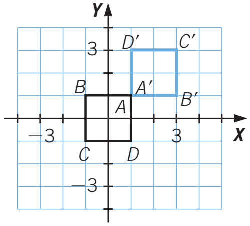
014 **Dibuja el cuadrado de vértices:**

***A*(1, 1) *B*(−1, 1) *C*(−1, −1) *D*(1, −1)**

y calcula su simétrico respecto al origen de coordenadas y respecto al punto *A*(1, 1).

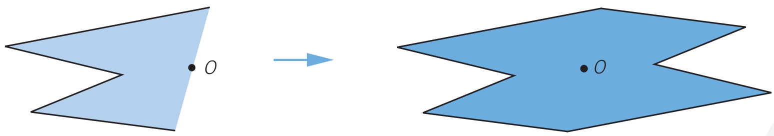


Respecto al origen es el mismo cuadrado.

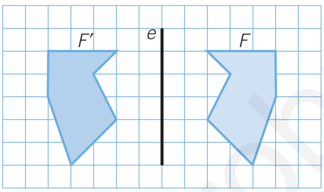


$A' = (1, 1)$ $B' = (3, 1)$
$C' = (3, 3)$ $D' = (1, 3)$

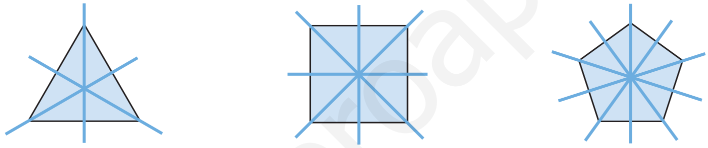
015 **De esta figura ha desaparecido la mitad. Sabiendo que es simétrica respecto al punto *O*, reconstrúyela.**



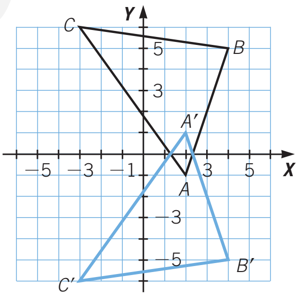
016 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante una simetría de eje *e*.**



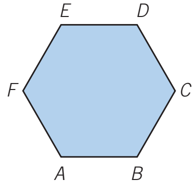
017 **Señala todos los ejes de simetría que tengan las siguientes figuras.**

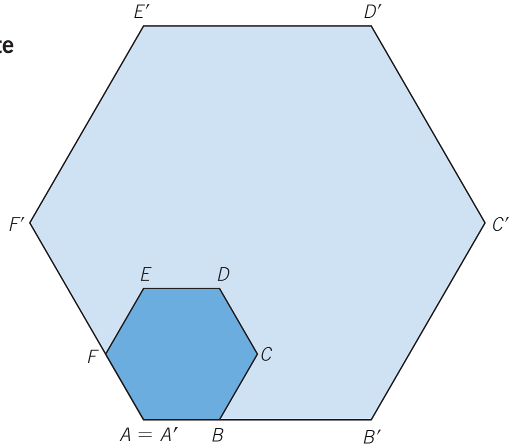


018 **Un triángulo tiene por vértices *A*(2, −1), *B*(4, 5) y *C*(−3, 6). Halla su transformado mediante una simetría respecto al eje de abscisas.**



019 **Transforma este hexágono mediante una homotecia de centro el vértice *A* y razón 3.**





020 **Determina si un triángulo de lados de 3, 4 y 5 cm es semejante a otro de lados de 1,5; 2 y 2,5 cm.**

Son semejantes, de razón 2.

$$\frac{3}{1,5} = \frac{4}{2} = \frac{5}{2,5} = 2 = k$$

021 **Obtén los puntos y las rectas dobles de una homotecia.**

El único punto doble de una homotecia es el centro de la homotecia, *O*.
Las rectas dobles son las rectas que se transforman en sí mismas, es decir, las rectas que pasan por el centro de la homotecia.

022 **Construye un friso a partir de esta figura, utilizando una traslación.**

p

p p p p p p p

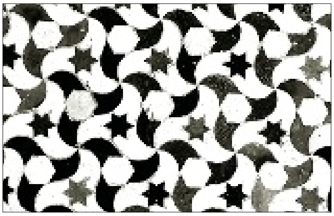
023 **Identifica qué movimientos intervienen en este friso:**

dddddddd

qqqqqqqq

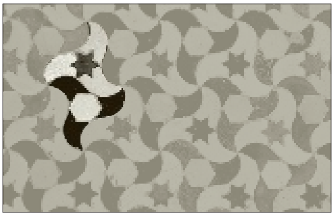
En ambos casos interviene una traslación.

024 **¿Cuál es la figura básica que se ha utilizado para construir este mosaico de la Alhambra de Granada?**



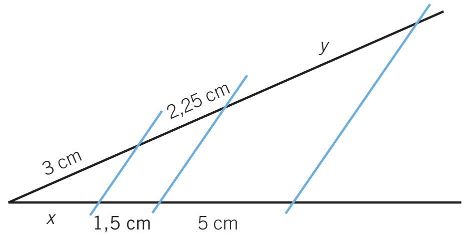
¿A partir de qué movimientos se ha obtenido?

La figura básica es:



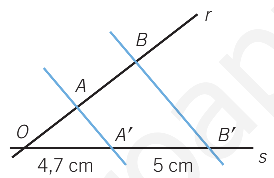
Los movimientos son giros de 120° y traslaciones.

025 **Halla las longitudes desconocidas.**



$$\frac{3}{x} = \frac{2,25}{1,5} = \frac{y}{5} \rightarrow x = 2 \text{ cm};\ y = 7,5 \text{ cm}$$

026 **Sabiendo que la razón $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1,6$, calcula $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$.**



$$1,6 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$$

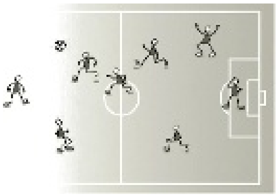
$$1,6 = \frac{\overline{AB}}{5} \rightarrow \overline{AB} = 8 \text{ cm}$$

$$1,6 = \frac{\overline{OB}}{9,7} \rightarrow \overline{OB} = 15,52 \text{ cm}$$

027 **Raúl tiene que cortar un listón de 30 cm en 7 partes iguales. Solo dispone de un trozo que mide 21 cm. ¿Cómo lo puede dividir?**

Dividimos el trozo de 21 cm en 7 partes iguales, de 3 cm cada una, y aplicamos el teorema de Tales. Unimos los dos listones por un extremo y luego unimos con un segmento los otros dos extremos. Después, trazamos paralelas al segmento por las divisiones del listón de 21 cm. Los puntos de corte con el listón de 30 cm son los lugares en los que debemos cortar.

028 **Halla las dimensiones reales de este campo de fútbol.**



1 : 3000

Largo:

$4 \text{ cm} \cdot 3000 = 12\,000 \text{ cm} = 120 \text{ m}$

Ancho:

$2,5 \text{ cm} \cdot 3000 = 7\,500 \text{ cm} = 75 \text{ m}$

029 **¿A qué escala está dibujado un mapa en el que la distancia entre dos poblaciones es 4,5 cm si la distancia real es 54 km?**

$$\frac{54 \text{ km}}{4,5 \text{ cm}} = \frac{5\,400\,000 \text{ cm}}{4,5 \text{ cm}} = 1\,200\,000$$

Escala 1 : 1 200 000

030 **Dos pueblos *A* y *B* están separados entre sí por 50 km. ¿A qué distancia se encuentran en un mapa a escala 1 : 800 000?**

5 000 000 cm : 800 000 = 6,25 cm

ACTIVIDADES

031 **Dadas las parejas de puntos, calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.**

a) $A(-1, 3)$, $B(4, 5)$

b) $A(-2, 0)$, $B(1, -3)$

c) $A(4, -1)$, $B(2, -6)$

d) $A(-3, -3)$, $B(-1, -2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (4 - (-1), 5 - 3) = (5, 2) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29}$

b) $\overrightarrow{AB} = (1 - (-2), -3 - 0) = (3, -3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}$

c) $\overrightarrow{AB} = (2 - 4, -6 - (-1)) = (-2, -5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29}$

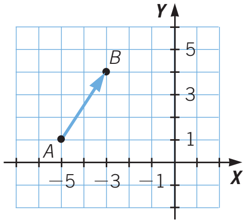
d) $\overrightarrow{AB} = (-1 - (-3), -2 - (-3)) = (2, 1) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

032 **Determina las coordenadas de *A* en el vector $\overrightarrow{AB}$ y represéntalo gráficamente.**

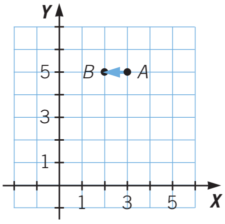
a) $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ y $B(-3, 4)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 0)$ y $B(2, 5)$

a) $A = (-5, 1)$



b) $A = (3, 5)$



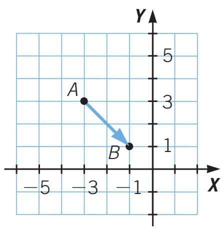
033 **Obtén las coordenadas de B en el vector $\overrightarrow{AB}$ y represéntalo.**

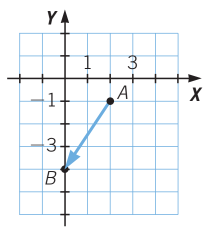
a) $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ **y** $A(-3, 3)$

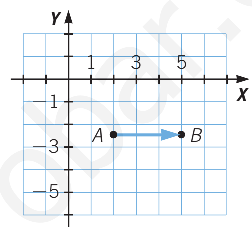
b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -3)$ **y** $A(2, -1)$

c) $\overrightarrow{AB} = (3, 0)$ **y** $A\left(2, -\frac{5}{2}\right)$

a) $B = (-1, 1)$ b) $B = (0, -4)$ c) $B = \left(5, -\frac{5}{2}\right)$



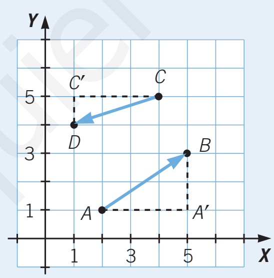




034 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LAS COORDENADAS DE UN VECTOR EN UN SISTEMA DE COORDENADAS?

Halla las coordenadas de los vectores.



Se considera el vector como la diagonal de un rectángulo y se calculan las dimensiones de sus lados.

PRIMERO. La primera coordenada del vector es la dimensión del largo del rectángulo que determina.

Se considera positiva si el desplazamiento es hacia la derecha, y negativa si es hacia la izquierda.

a) AA' → 3 unidades a la derecha ⟶ 3

b) CC' → 3 unidades a la izquierda → −3

SEGUNDO. La segunda es la dimensión de la altura del rectángulo. Se considera positiva si el desplazamiento es hacia arriba, y negativa si es hacia abajo.

a) $A'B$ → 2 unidades hacia arriba → 2

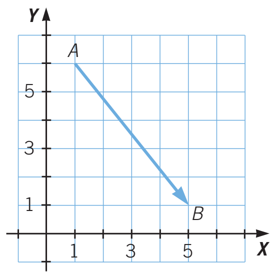
b) $C'D$ → 1 unidad hacia abajo ⟶ −1

Luego las coordenadas de los vectores son $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ y $\overrightarrow{CD} = (-3, -1)$.

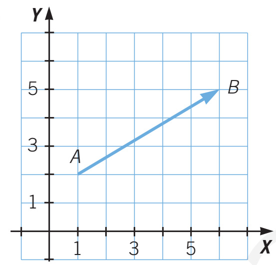
035 ●●

Determina las coordenadas de los extremos del vector $\vec{AB}$, y obtén sus coordenadas y su módulo.

a)



b)



a) $\vec{AB} = (5, 1) - (1, 6) = (4, -5)$

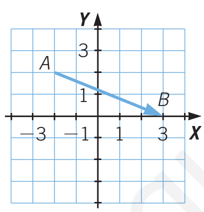
$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

b) $\vec{AB} = (6, 5) - (1, 2) = (5, 3)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

036 ●●

Dibuja el vector de extremos $A(-2, 2)$ y $B(3, 0)$ y calcula sus coordenadas y módulo.



$\vec{AB} = (3 - (-2), 0 - 2) = (5, -2)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

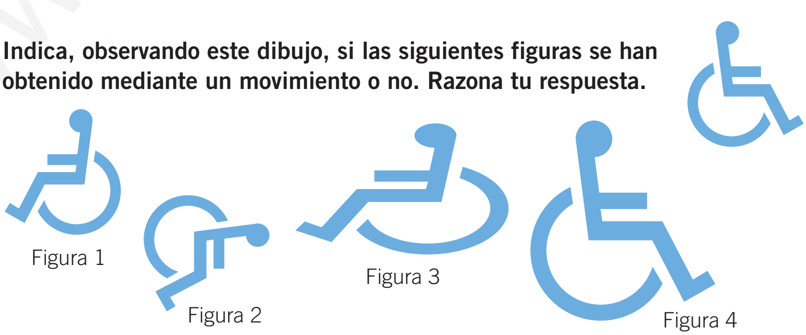
037 ●●●

Escribe tres vectores con módulo 9. ¿Podrías escribir más? ¿Cuántos?

Por ejemplo, (0, 9), (−9, 0) y (9, 0). Se podrían escribir infinitos vectores. Para cada punto de origen serían todos los vectores que terminan en la circunferencia de radio 9 y cuyo centro es dicho punto.

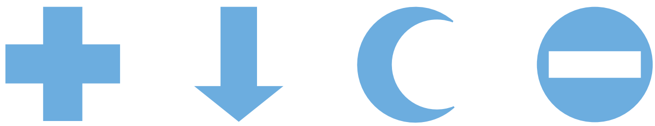
038 ●

Indica, observando este dibujo, si las siguientes figuras se han obtenido mediante un movimiento o no. Razona tu respuesta.



Las figuras 1 y 2 conservan la forma y el tamaño, por lo que se han obtenido mediante un movimiento. Las figuras 3 y 4 no; la figura 3 no conserva la forma ni el tamaño, y la figura 4 conserva la forma pero no el tamaño.

039 Dibuja, a partir de las figuras, otras figuras en las que se conserve:



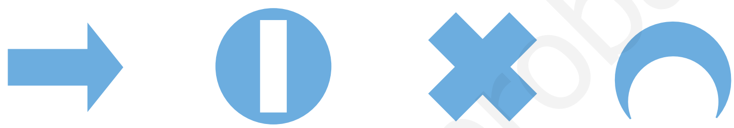
a) El tamaño.

b) La forma.

c) El tamaño y la forma.

d) Ni el tamaño ni la forma.

a)



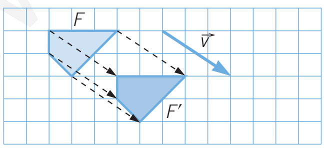
b)

c)

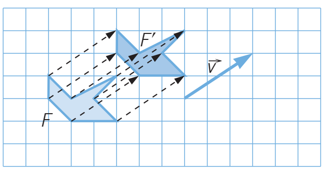
d)

040 Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante una traslación de vector $\vec{v}$.

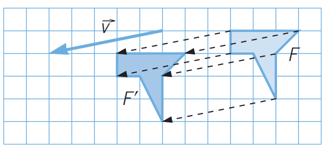
a)



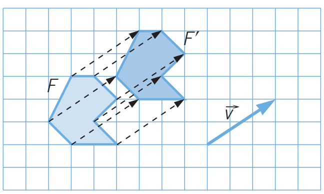
c)



b)



d)



041 Completa la siguiente tabla:

Punto	Vector de traslación	Punto trasladado
$A(1, 3)$	**$\vec{v} = (1, -2)$**	$A'(2, 1)$
$B(-2, -4)$	$\vec{u} = (2, 7)$	**$B'(0, 3)$**
$C(10, 7)$	**$\vec{w} = (-3, -5)$**	**$C'(7, 2)$**
$D(1, 5)$	$\vec{s} = (4, -4)$	**$D'(5, 1)$**
$E(0, 3)$	**$\vec{t} = (3, -2)$**	$E'(3, 1)$

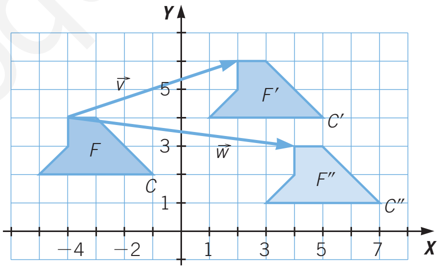
042 ¿Cuál es el vector de la traslación que lleva el punto $A(2, -3)$ al punto $A'(-1, 7)$?

$\vec{v} = (-3, 10)$

043 Calcula las coordenadas del punto transformado del punto $B(4, -2)$ mediante una traslación de vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}\right)$.

$$B' = \left(\frac{21}{5}, \frac{-8}{3}\right)$$

044 Determina gráficamente los vectores de las traslaciones que transforman la figura F en F' y F'', respectivamente. Obtén también sus coordenadas.



Tomamos el vértice superior izquierdo de las tres figuras:

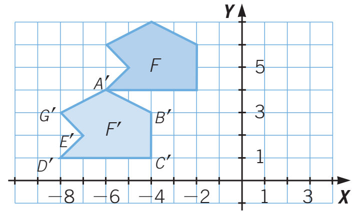
En $F \rightarrow A(-4, 4)$
En $F' \rightarrow A'(2, 6)$
En $F'' \rightarrow A''(4, 3)$

$\rightarrow \vec{v} = (2 - (-4), 6 - 4) = (6, 2)$
$\rightarrow \vec{w} = (4 - (-4), 3 - 4) = (8, -1)$

Lo comprobamos transformando el vértice derecho de la figura F:

$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{v} = (6, 2)} C'(5, 4)$$
$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{w} = (8, -1)} C''(7, 1)$$

que corresponden a las coordenadas de los picos de F' y F''.



045 ●●

Halla la figura *F* que ha dado lugar a la figura *F′*, al aplicarle una traslación de vector $\vec{v} = (-2, -3)$. Antes de hacerlo, determina cuáles serán las coordenadas de los vértices de la figura *F*.

$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\vec{v} = (-2,\,-3)} A'(-6, 4) \to \begin{cases} x_1 - 2 = -6 \to x_1 = -4 \\ y_1 - 3 = 4 \longrightarrow y_1 = 7 \end{cases}$$

$$B(x_2, y_2) \xrightarrow{\vec{v} = (-2,\,-3)} B'(-4, 3) \to \begin{cases} x_2 - 2 = -4 \to x_2 = -2 \\ y_2 - 3 = 3 \longrightarrow y_2 = 6 \end{cases}$$

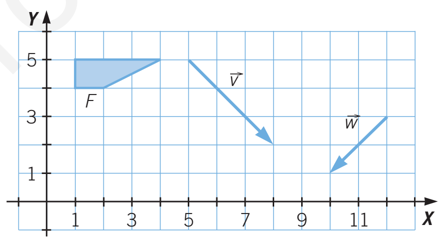
$$C(x_3, y_3) \xrightarrow{\vec{v} = (-2,\,-3)} C'(-4, 1) \to \begin{cases} x_3 - 2 = -4 \to x_3 = -2 \\ y_3 - 3 = 1 \longrightarrow y_3 = 4 \end{cases}$$

$$D(x_4, y_4) \xrightarrow{\vec{v} = (-2,\,-3)} D'(-8, 1) \to \begin{cases} x_4 - 2 = -8 \to x_4 = -6 \\ y_4 - 3 = 1 \longrightarrow y_4 = 4 \end{cases}$$

$$E(x_5, y_5) \xrightarrow{\vec{v} = (-2,\,-3)} E'(-7, 2) \to \begin{cases} x_5 - 2 = -7 \to x_5 = -5 \\ y_5 - 3 = 2 \longrightarrow y_5 = 5 \end{cases}$$

$$G(x_6, y_6) \xrightarrow{\vec{v} = (-2,\,-3)} G'(-8, 3) \to \begin{cases} x_6 - 2 = -8 \to x_6 = -6 \\ y_6 - 3 = 3 \longrightarrow y_6 = 6 \end{cases}$$

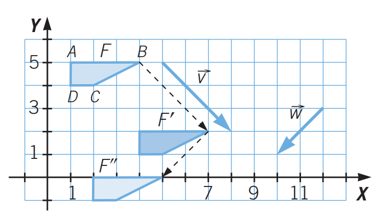
046 ●●●



Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante la traslación de vector $\vec{v}$. Llámala *F′*. Después, halla la figura transformada de *F′* por la traslación de vector $\vec{w}$. Llámala *F″*.

a) ¿Puedes pasar directamente de *F* a *F″* con una traslación? Si crees que sí, dibuja el vector de dicha traslación y escribe sus coordenadas.

b) Escribe las coordenadas de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y suma sus abscisas y ordenadas. ¿Qué relación tiene el resultado con el del apartado a)?



$\vec{v} = (8, 2) - (5, 5) = (3, -3)$

Los puntos de *F* se convertirán en:

$$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{v} = (3,\,-3)} A'(4, 2)$$
$$B(4, 5) \longrightarrow B'(7, 2)$$
$$C(2, 4) \longrightarrow C'(5, 1)$$
$$D(1, 4) \longrightarrow D'(4, 1)$$

$\vec{w} = (10, 1) - (12, 3) = (-2, -2)$

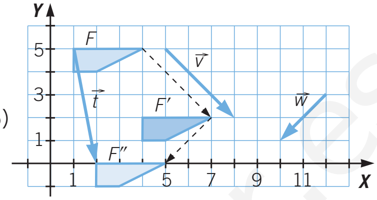
Los puntos de *F′* se convertirán en:

$$A'(4, 2) \xrightarrow{\vec{w} = (-2,\,-2)} A''(2, 0)$$
$$B'(7, 2) \longrightarrow B''(5, 0)$$
$$C'(5, 1) \longrightarrow C''(3, -1)$$
$$D'(4, 1) \longrightarrow D''(2, -1)$$

a) Sí, porque mantienen la forma y el tamaño.
Lo comprobamos con la transformación de un punto de F en F'' y lo aplicamos a los otros tres puntos de F.

$$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{t}\,=\,(x,\, y)} A''(2, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + x = 2 \to x = 1 \\ 5 + y = 0 \to y = -5 \end{array}\right\} \to \vec{t} = (1, -5)$$



Si aplicamos el vector $\vec{t}$ a los otros tres puntos de F:

$$B(4, 5) \xrightarrow{\vec{t}\,=\,(1,\,-5)} B''(5, 0)$$
$$C(2, 4) \xrightarrow{\qquad\quad} C''(3, -1)$$
$$D(1, 4) \xrightarrow{\qquad\quad} D''(2, -1)$$

vemos que coinciden con los puntos obtenidos mediante los dos movimientos.

b) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -3) + (-2, -2) = (1, -5)$

Se trata del vector $\vec{t}$ obtenido en el apartado a).

047 ●● **Considera el punto $P(0, 5)$. Si realizamos una traslación de vector $\vec{v} = (3, 4)$ y, a continuación, otra de $\vec{w} = (-2, -1)$:**

a) ¿Cuál es el punto que se obtiene?

b) Si después de realizar las dos traslaciones, se obtuviera el punto $Q(2, -2)$, ¿de qué punto habríamos partido?

a) $P' = (0 + 3 - 2, 5 + 4 - 1) = (1, 8)$

b) $R = (2 - 3 + 2, -2 - 4 + 1) = (1, -5)$

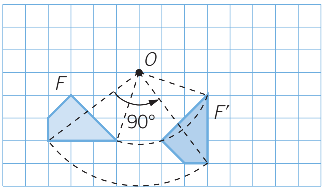
048 ● **Obtén la figura transformada de F por el giro de centro O y el ángulo indicado.**

a) Ángulo de 90°.

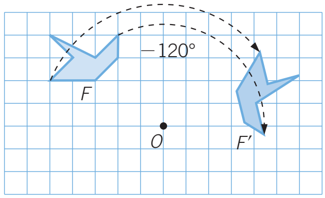
b) Ángulo de 45°.

c) Ángulo de −120° (120° en el sentido de las agujas del reloj).

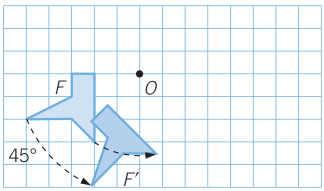
a)



c)

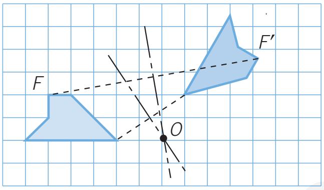


b)



049 ●●

Determina el centro y el ángulo del giro que transforma *F* en *F′*.



El centro *O* es el de la figura.

El ángulo del giro es de $-120°$ aproximadamente.

050 ●●

Halla la figura *F* que ha dado lugar a la figura *F′* al aplicarle un giro de centro el origen y ángulo de 90°.

Al aplicar un giro de 90° a los vértices de *F*, se cumple que:

$A(x_1, y_1) \rightarrow A'(-6, 3) \rightarrow x_1 = 3, y_1 = 6$

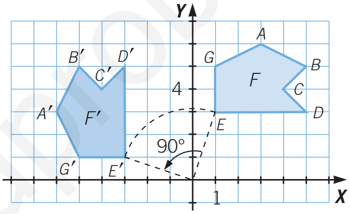
$B(x_2, y_2) \rightarrow B'(-5, 5) \rightarrow x_2 = 5, y_2 = 5$

$C(x_3, y_3) \rightarrow C'(-4, 4) \rightarrow x_3 = 4, y_3 = 4$

$D(x_4, y_4) \rightarrow D'(-3, 5) \rightarrow x_4 = 5, y_4 = 3$

$E(x_5, y_5) \rightarrow E'(-3, 1) \rightarrow x_5 = 1, y_5 = 3$

$G(x_6, y_6) \rightarrow G'(-5, 1) \rightarrow x_6 = 1, y_6 = 5$



051 ●●

Completa esta tabla, referida a distintos giros con centro en el origen de coordenadas.

Punto	Ángulo	Punto transformado
***A*(1, 0)**	**90°**	$A'(0, 1)$
$B(3, 0)$	**90°**	***B′*(0, 3)**
***C*(1, 2)**	**180°**	$C'(-1, -2)$
$D(-3, -4)$	**180°**	***D′*(3, 4)**
***E*(0, 3)**	90°	***E′*(−3, 0)**

052 ●●●

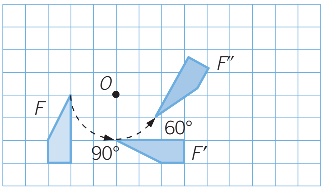
Obtén la figura *F′*, transformada de la figura *F* mediante un giro de centro *O* y ángulo de 90°. Después, halla la figura *F″*, transformada de *F′* por un giro de centro *O* y ángulo de 60°.

a) Halla la transformada de *F* por un giro de centro *O* y ángulo de 150° (90° + 60°).

b) ¿A qué movimiento equivalen dos giros consecutivos con el mismo centro?

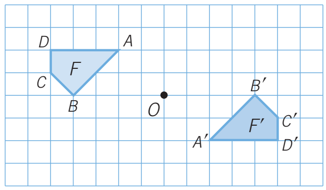
a) La figura transformada por el giro de 150° es igual a la que resulta al aplicar un giro de 90° y luego otro de 60°.

b) Equivalen a un giro de igual centro y de amplitud la suma de las amplitudes.

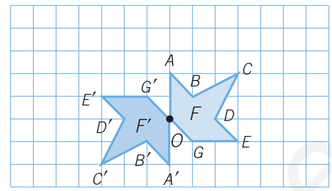


053 Obtén la figura transformada de ***F*** por una simetría central de centro ***O***.

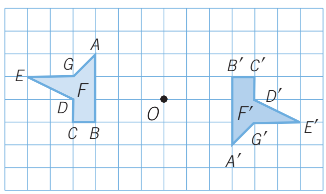
a)



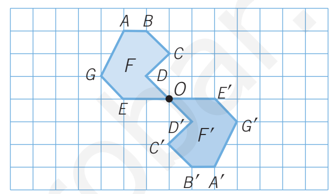
c)



b)



d)



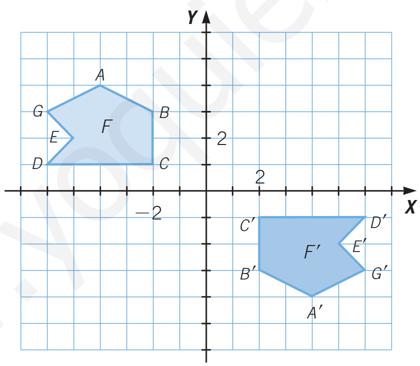
054 Determina la figura transformada de ***F*** mediante:

a) Una simetría de centro el origen.

b) Una simetría de eje el eje de ordenadas.

¿Qué relación hay entre las coordenadas de los vértices de *F* y los de sus transformados?

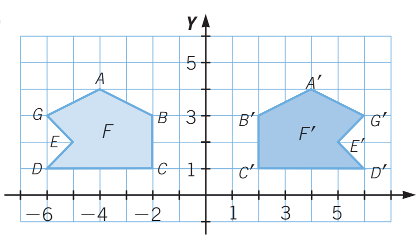
a)



$A(-4, 4) \longrightarrow A'(4, -4)$
$B(-2, 3) \longrightarrow B'(2, -3)$
$C(-2, 1) \longrightarrow C'(2, -1)$
$D(-6, 1) \longrightarrow D'(6, -1)$
$E(-5, 2) \longrightarrow E'(5, -2)$
$G(-6, 3) \longrightarrow G'(6, -3)$

Un punto $P(x, y)$ se transforma en $P'(-x, y)$ al aplicarle una simetría de eje Y.

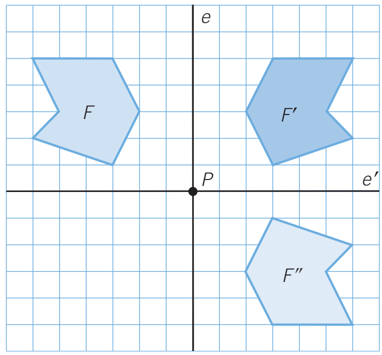
b)



$A(-4, 4) \longrightarrow A'(4, 4)$
$B(-2, 3) \longrightarrow B'(3, 2)$
$C(-2, 1) \longrightarrow C'(1, 2)$
$D(-6, 1) \longrightarrow D'(1, 6)$
$E(-5, 2) \longrightarrow E'(5, 2)$
$G(-6, 3) \longrightarrow G'(3, 6)$

Un punto $P(x, y)$ se transforma en $P'(y, x)$ al aplicarle una simetría de centro el origen.

055 ●●
Determina el centro de simetría que transforma F en F' y F' en F'', y el eje de simetría que realiza las mismas transformaciones.

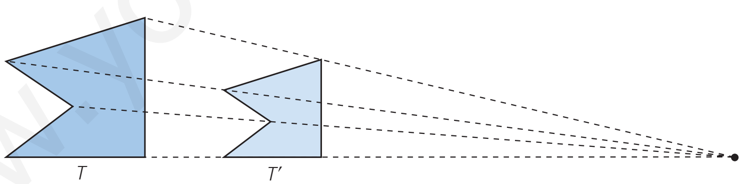


La simetría respecto al eje e transforma F en F' y la simetría respecto a e' transforma F' en F''.
La simetría respecto al punto P transforma F en F''.

056 ●●
Completa la tabla, referida a distintas simetrías.

Punto	Eje de simetría	Punto trasladado
$A(1, 3)$	**Ordenadas**	$A'(-1, 3)$
$B(0, 3)$	**Ordenadas**	**$B'(0, 3)$**
$C(2, -1)$	**Abscisas**	$C'(2, 1)$
$D(5, 0)$	**Abscisas**	**$D'(5, 0)$**

057 ●
Las figuras T y T' son homotéticas. Halla el centro y la razón de la homotecia.



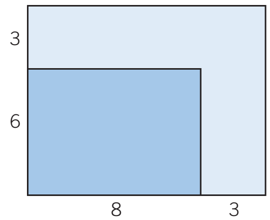
058 ●
Calcula la longitud de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 7, 11 y 13 cm, si la razón de semejanza es $k = 3$.

Los lados serán: $7 \cdot 3 = 21$ cm; $11 \cdot 3 = 33$ cm y $13 \cdot 3 = 39$ cm

059 ●●
Los seis lados de un hexágono miden 13, 14, 15, 17, 19 y 20 cm. Un lado de otro hexágono semejante mide 80 cm. Si la razón de semejanza es un número entero, ¿cuánto miden los demás lados?

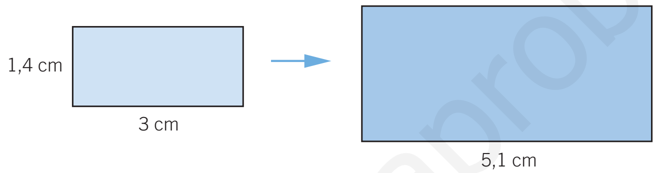
Para que la razón de semejanza sea un número entero, el lado de 80 cm se corresponderá con el de 20 cm, ya que es el único divisor. La razón es 4 y los lados medirán 52, 56, 60, 68, 76 y 80 cm, respectivamente.

060 **Dibuja un rectángulo de 8 × 6 cm y añádele 3 cm en cada lado. ¿Has obtenido un rectángulo semejante? ¿Por qué?**



No son rectángulos semejantes, porque los lados no son proporcionales.

061 **Calcula la razón de semejanza de estos polígonos. ¿Qué relación tienen los perímetros?**



La razón es: $5{,}1 : 3 = 1{,}7$

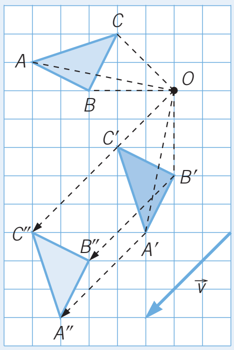
La altura del segundo triángulo es: $1{,}4 \cdot 1{,}7 = 2{,}38$ cm

La razón de los perímetros es: $14{,}96 : 8{,}8 = 1{,}7$

062 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REALIZA UNA COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS?

Transforma el triángulo $\widehat{ABC}$ mediante un giro de centro O y ángulo de 90°, y traslada su transformado mediante el vector $\vec{v}$.

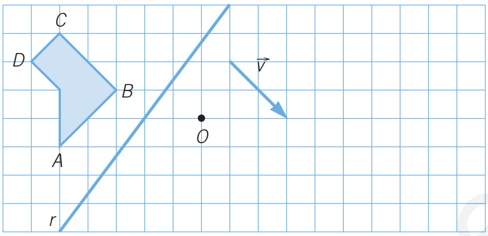


PRIMERO. Se realiza el primer movimiento. En este caso, el giro de 90°.

SEGUNDO. Sobre la figura resultante, $\widehat{A'B'C'}$, se realiza el segundo movimiento. En este caso, la traslación.

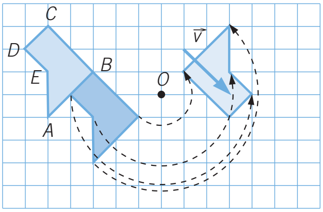
La figura resultante de la composición de movimientos, un giro y una traslación, es el triángulo $\widehat{A''B''C''}$.

063 Aplica a esta figura:

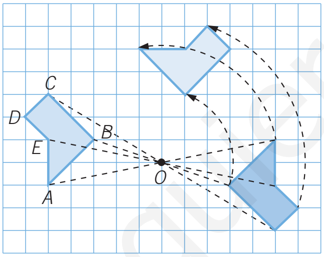


a) Una traslación de vector $\vec{v}$ y un giro de centro O y ángulo de 180°.
b) Una simetría de centro O y un giro de centro O y ángulo de 90°.
c) Una simetría respecto a la recta r y una traslación de vector $\vec{v}$.

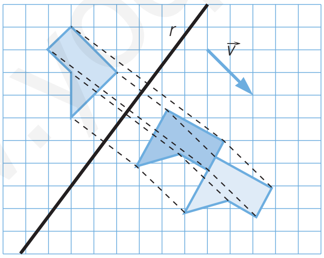
a)



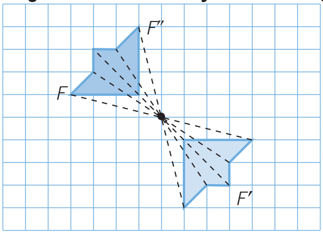
b)



c)



064 Dibuja una figura y aplícale dos simetrías centrales consecutivas con el mismo centro. ¿Qué relación hay entre la figura original y la última figura que obtienes?



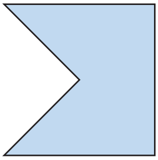
La figura original y la última figura obtenida son la misma.

065 ●●● **Construye un friso a partir de esta figura utilizando:**

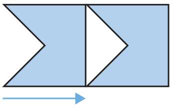
a) Una traslación cuyo vector mide la base de la figura.

b) Un giro de 90° y una traslación cuyo vector es el doble de la base de la figura.

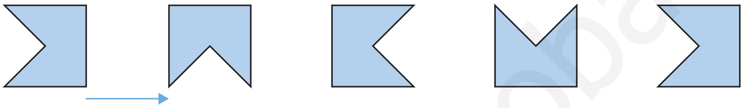
c) Una simetría respecto a una recta y una traslación cuyo vector mide la base de la figura.



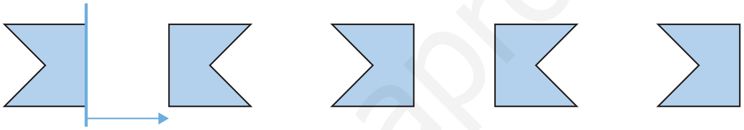
a)



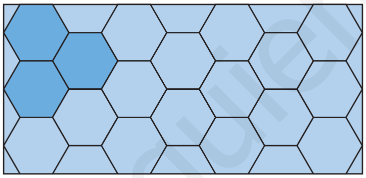
b)



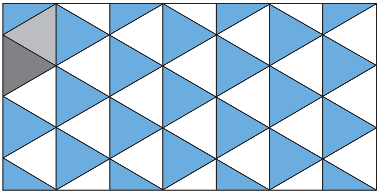
c)



066 ●● **Completa el siguiente mosaico.**



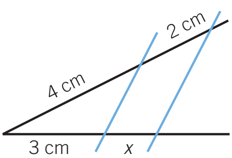
067 ●●● **Identifica qué movimientos intervienen en este mosaico.**



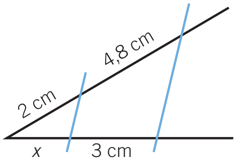
Los movimientos que intervienen son dos giros de 120° cada uno y una traslación.

068 ● **Calcula las longitudes desconocidas.**

a)



b)

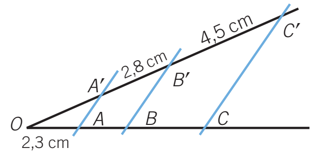


a) $\frac{4}{3} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 1,5$

b) $\frac{2}{x} = \frac{4,8}{3} \rightarrow x = 1,25$

069 En la siguiente figura, la razón $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8$.

Calcula $\overline{OA'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

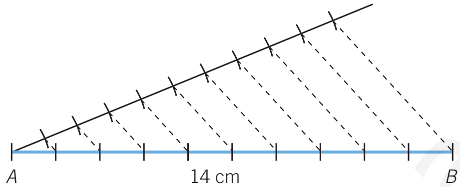


$$0{,}8 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{2{,}3}{\overline{OA'}} \rightarrow \overline{OA'} = 2{,}875 \text{ cm}$$

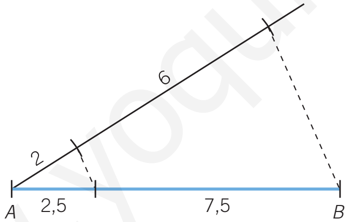
$$0{,}8 = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{2{,}8} \rightarrow \overline{AB} = 2{,}24 \text{ cm}$$

$$0{,}8 = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}}{4{,}5} \rightarrow \overline{BC} = 3{,}6 \text{ cm}$$

070 Divide gráficamente un segmento AB, con $\overline{AB} = 14$ cm, en 10 partes iguales.

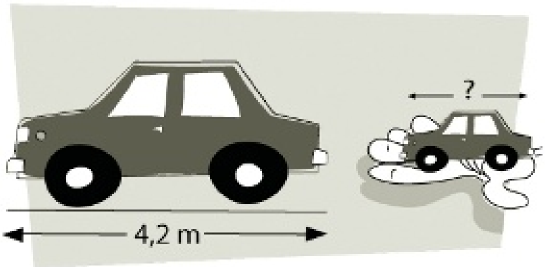


071 Divide gráficamente un segmento AB, con $\overline{AB} = 10$ cm, en partes proporcionales a dos segmentos de medidas 2 cm y 6 cm. Calcula numéricamente las longitudes de los segmentos hallados y compáralas con la solución gráfica.



$$\frac{10}{8} = \frac{x}{2} = \frac{y}{6} \rightarrow x = 2{,}5 \text{ cm};\ y = 7{,}5 \text{ cm}$$

072 La longitud de un coche en la realidad es de 4,2 m. ¿Cuál será su longitud en una maqueta a escala 1 : 200? ¿Y a escala 1 : 400?



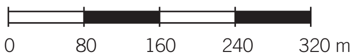
En la escala 1 : 200 medirá: 420 : 200 = 2,1 cm

Y en la escala 1 : 400 medirá: 420 : 400 = 1,05 cm

073 Si tenemos una maqueta del coche anterior que mide 7,5 cm, ¿a qué escala está hecha?

420 : 7,5 = 56. La escala es 1 : 56.

074 En un mapa aparece esta escala gráfica:



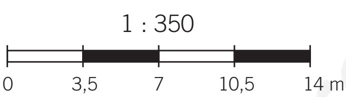
a) ¿Cuál es su escala numérica?

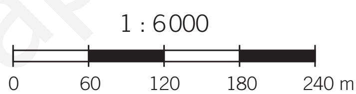
b) ¿Qué distancia real separa a dos puntos que en el mapa distan 8 cm?

a) 1 : 8000

b) 8 · 8000 = 64 000 cm = 640 m

075 Construye la escala gráfica correspondiente a las escalas numéricas 1 : 350 y 1 : 6000.





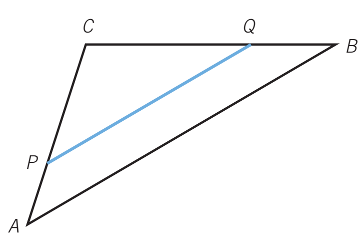
076 Tenemos dos mapas que representan una región, siendo la escala del primero 1 : 400 000, y la del segundo, 1 : 1 000 000.

a) ¿Cuál de los dos mapas es mayor?

b) Si dos poblaciones se encuentran a 20 km de distancia en la realidad, ¿qué distancia las separa en cada uno de los mapas?

c) En el primer mapa, dos ciudades, *A* y *B*, se encuentran separadas entre sí por 2,3 cm. ¿A qué distancia real se encuentran?

d) ¿A qué distancia estarán esas ciudades en el segundo mapa?



a) Es mayor el primer mapa por tener una escala menor.

b) En el primer mapa: 2 000 000 cm : 400 000 = 5 cm

En el segundo mapa: 2 000 000 cm : 1 000 000 = 2 cm

c) 2,3 cm · 400 000 = 920 000 cm = 9,2 km

d) 920 000 cm : 1 000 000 = 0,92 cm = 9,2 mm

077 ●●●

Tenemos un mapa a escala 1 : 150 000.

a) Si realizamos una fotocopia al 80 %, ¿cuál será la nueva escala?

b) ¿Y si la hacemos al 120 %?

c) Una distancia real de 15 km, ¿qué longitud tendrá en cada uno de los tres mapas?

a) $\dfrac{150\,000}{\dfrac{80}{100}} = 187\,500$. Escala 1 : 187 500

b) $\dfrac{150\,000}{\dfrac{120}{100}} = 125\,000$. Escala 1 : 125 000

c) 15 km = 1 500 000 cm

$\dfrac{1\,500\,000}{150\,000} = 10$ cm en la escala 1 : 150 000

$\dfrac{1\,500\,000}{187\,500} = 8$ cm en la escala 1 : 187 500

$\dfrac{1\,500\,000}{125\,000} = 12$ cm en la escala 1 : 125 000

078 ●●

Queremos hacer un armario en miniatura, semejante a otro cuyas dimensiones son 180 × 110 × 45 cm, de forma que la altura sea 13,5 cm. Calcula su ancho y su profundidad.

La razón de semejanza es: 180 : 13,5 = 13,33
El ancho es: 110 : 13,33 = 8,25 cm
y la profundidad es: 45 : 13,33 = 3,375 cm

079 ●●

Determina las dimensiones que tendrá una casa rectangular en un plano a escala 1 : 50, si en la realidad su base es la mitad de la altura y su área es 144 m².

Base: x. Altura: $2x \rightarrow 2x \cdot x = 144 \rightarrow x = 8{,}49$
Base: 8,49 m. Altura: 16,97 m.

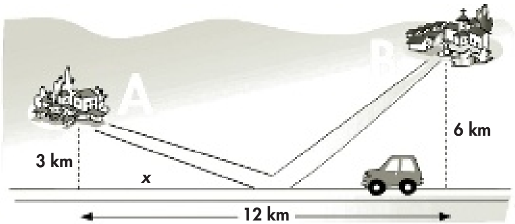
En el plano a escala 1 : 50, las dimensiones son:
Base: 8,49 m : 50 = 17 cm
Altura: 17 cm · 2 = 34 cm

080 ●●

Una célula humana tiene un diámetro aproximado de 3,5 millonésimas de metro y, con un microscopio electrónico, se ve con un diámetro de 1,75 cm. Calcula cuántos aumentos tiene el microscopio.

0,0000035 m = 0,00035 cm $\rightarrow \dfrac{1{,}75}{0{,}00035} = 5\,000$ aumentos

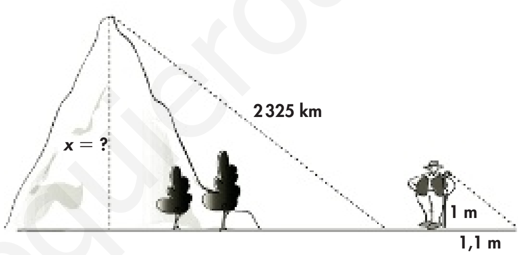
081 **Se va a hacer un desvío en una carretera de forma que su trazado sea una línea recta respecto a dos poblaciones *A* y *B*. Calcula en qué punto de la carretera habrá que hacer el desvío para que el trayecto hacia ambas poblaciones sea el mínimo.**



El desvío debe hacerse en el punto en el que se formen dos triángulos semejantes.

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{12 - x} \rightarrow 36 - 3x = 6x \rightarrow 9x = 36 \rightarrow x = 4 \text{ km}$$

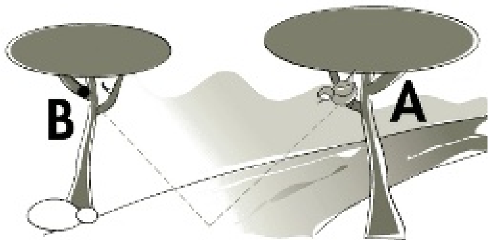
082 **Calcula la altura *x* de una montaña si desde el extremo de su sombra podemos medir la distancia a la cima, y esta es de 2 325 m, y, en ese momento, un bastón de 1 m produce una sombra de 1,1 m.**



Como los triángulos son semejantes, la hipotenusa del triángulo formado por el bastón es: $\sqrt{1 + 1{,}21} = 1{,}49$ m. Realizamos una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}49 \rightarrow 2325 \\ 1 \longrightarrow \quad x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2325}{1{,}49} = 1560 \text{ m es la altura de la montaña.}$$

083 **Un pájaro está posado sobre la rama de un árbol (punto *A*), situado al borde de un río, y quiere pasar a otro árbol de la orilla opuesta (punto *B*), aprovechando para beber agua sin parar su vuelo. ¿Hacia qué punto del río debe dirigirse para hacer el recorrido más corto?**

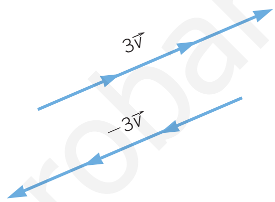


Debe dirigirse hacia el punto en el que los dos triángulos que se forman con su trayectoria, el río y las alturas de los puntos, sean semejantes. Es el punto donde el pájaro ve reflejado el punto *B* en el agua.

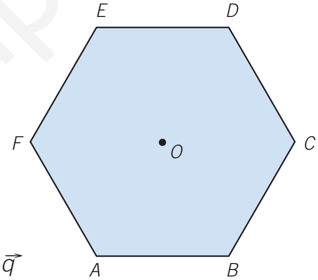
084 **Para sumar gráficamente los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se coloca el origen de $\vec{w}$ en el extremo de $\vec{v}$, y el vector suma tiene como origen el de $\vec{v}$ y como extremo el de $\vec{w}$.**

Para multiplicar un vector por un número positivo se dibuja un vector, de igual dirección y sentido que el original, y cuyo módulo sea el del vector original multiplicado por el número.

Si el número es negativo, se hace el mismo proceso pero cambiando el sentido.

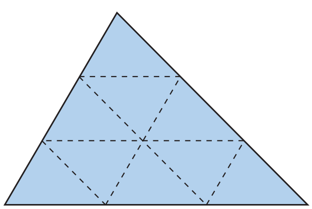


Basándote en esto y observando la figura, escribe los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{OD}$ en función de $\vec{p} = \overrightarrow{EF}$ y $\vec{q} = \overrightarrow{ED}$.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{q}$$
$$\overrightarrow{BC} = -\vec{p}$$
$$\overrightarrow{FO} = \vec{q}$$
$$\overrightarrow{EO} = \vec{p} + \vec{q}$$
$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{p} = 2 \cdot \vec{p} + \vec{q}$$
$$\overrightarrow{EB} = 2 \cdot \overrightarrow{EO} = 2 \cdot \vec{p} + 2 \cdot \vec{q}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = -\vec{p} + \vec{q}$$
$$\overrightarrow{OD} = -\vec{p}$$

085 **Escribe el perímetro, *p*, la altura, *h*, y el área, *a*, de los triángulos pequeños en función del perímetro, *P*, la altura, *H* y el área, *A*, del triángulo grande.**



Los lados y la altura de cada triángulo pequeño son un tercio de los del triángulo grande:

$$h = \frac{H}{3}$$

$$p = \frac{P}{3}$$

$$a = \frac{\text{base} \cdot h}{2} = \frac{\frac{\text{BASE}}{3} \cdot \frac{H}{3}}{2} = \frac{A}{9}$$

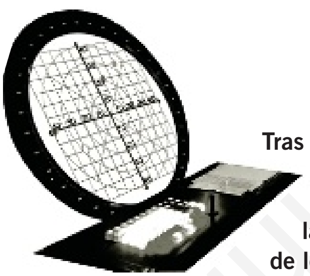
PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

086 ●●●

En los aeropuertos se controlan los movimientos de los aviones para coordinar los aterrizajes y despegues.

Este trabajo lo realizan los controladores aéreos, quienes mediante el radar sitúan la posición de los aviones y establecen su trayectoria, posición y velocidad con la que se aproximan a las pistas de aterrizaje.

En la pantalla de un radar se observa, en un momento determinado, la posición de cuatro aviones que siguen trayectorias rectilíneas.



Tras unos minutos, la posición de los aviones ha cambiado y desde la torre de control deben informar de la nueva posición, la trayectoria y la velocidad de cada uno de los aviones.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuáles son las posiciones iniciales de cada uno de los aviones?

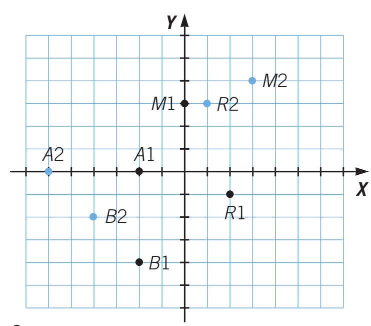
b) ¿Cuáles son sus posiciones finales?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Determina la trayectoria que ha seguido cada avión.

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) ¿Cuál crees que ha sido el avión más rápido?



a) Rojo1 (2, −1); Morado1 (0, 3); Amarillo1 (−2, 0); Blanco1 (−2, −4).

b) Rojo2 (1, 3); Morado2 (3, 4); Amarillo2 (−6, 0); Blanco2 (−4, −2).

c) Trayectorias:
Rojo $\overrightarrow{(-1, 4)}$; Morado $\overrightarrow{(-4, 0)}$; Amarillo $\overrightarrow{(3, 1)}$; Blanco $\overrightarrow{(-2, 2)}$.

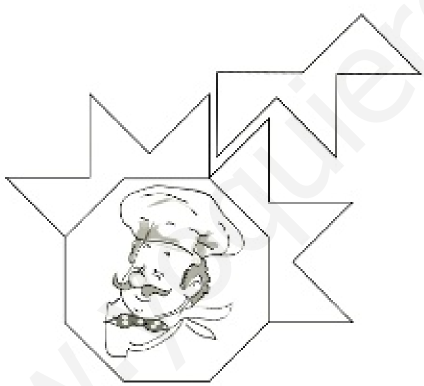
d) La mayor velocidad corresponde al mayor módulo de su vector trayectoria.
Rojo → $\sqrt{17}$ Morado → $\sqrt{10}$ Amarillo → 4 Blanco → $\sqrt{8}$
La mayor velocidad es la del avión rojo, después el amarillo, el morado y el blanco.

087 ●●●

En el restaurante El Manjar su famoso *chef* mezcla los productos tradicionales con un toque imaginativo de alta cocina, por lo que es muy valorado por público y críticos.

El dueño del restaurante, Julián Guisado, ante la nueva reforma que se hará del local, ha ideado una forma de potenciar la figura del *chef* dentro del restaurante.

En el primer diseño que ha realizado ha colocado el octógono en el centro de la sala, y luego lo ha rodeado con distintas baldosas amarillas, cubriendo completamente la sala.



Eres capaz de… Comprender

a) ¿Cuántas baldosas son necesarias para rodear el octógono?

Eres capaz de… Resolver

b) ¿Cuántas baldosas amarillas son necesarias para rodear la primera fila que rodea el octógono?

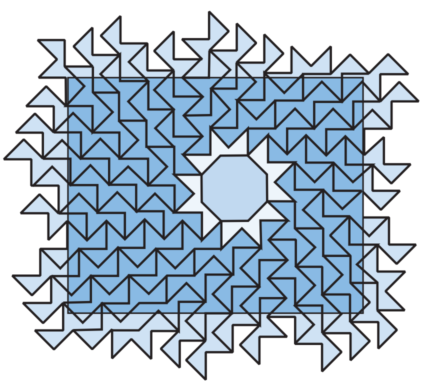
Eres capaz de… Decidir

c) Si la planta del local es rectangular, ¿es posible enlosar el local sin que queden huecos? ¿Cómo debe colocar las coronas para lograrlo?

a) Para rodear el octógono son necesarias 4 baldosas.

b) Para rodear la primera fila que rodea el octógono son necesarias 12 baldosas.

c) Sí es posible. Una manera de hacerlo es la siguiente:



11 Funciones

La gripe española

Salamanca, 1918. Dos enfermeras, una de ellas con evidentes signos de agotamiento, realizaban el cambio de turno en el hospital. La enfermera saliente, Carmen, le daba unas pautas a la inexperta enfermera que llegaba a relevarla.

–No te involucres personalmente con el paciente, no quieras saber ni su nombre, porque probablemente en pocos días habrá muerto. –La gripe causaba estragos entre la población–. Observa los síntomas y si ves que el enfermo tiene los pies azules… no te entretengas y reza por su alma.

Tres años después, Ana, cuyo trabajo de voluntaria había concluido, leía en el periódico local las cifras oficiales de muertes por gripe en los últimos años.

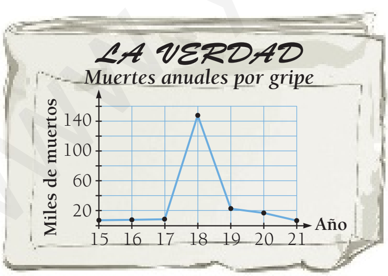
El Diario

Muertes anuales por gripe en España	
1915	6 481
1916	7 021
1917	7 479
1918	147 114
1919	21 235
1920	17 825
1921	5 837

Sus ojos se humedecieron al recordar a su amiga Carmen, que engrosaba el número de víctimas correspondiente a 1918.

El número de muertes a causa de esta pandemia se cifró entre 20 y 40 millones en todo el mundo.

El otro diario de la ciudad, en lugar de una tabla, presentó la información mediante una gráfica.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **El ámbito científico es uno de los campos en los que más se utilizan las funciones. Busca casos reales en los que se use la representación de funciones.**

En esta página, pinchando en cualquiera de las empresas que aparecen, se muestra su evolución bursátil en forma de gráfica:
http://www.bolsagrafica.com/

2 **Según los datos oficiales, ¿cuántas muertes hubo por gripe española en España entre los años 1915 y 1921?**

El Instituto Nacional de Estadística (INE) publica anualmente el Anuario Estadístico de España. Esta publicación se halla disponible desde 1858 y se puede consultar en la página del INE: http://www.ine.es/prodyser/pubweb/anuarios_mnu.htm

En el anuario del año 1949 aparece, en las páginas 826 y 827, una tabla relativa a las muertes por enfermedades infecciosas desde 1900 hasta 1948:
http://www.ine.es/inebaseweb/treeNavigation.do?tn=164782&tns=164546

3 **Busca datos y distintos tipos de gráficas sobre la incidencia de la gripe A en el mundo durante el año 2009.**

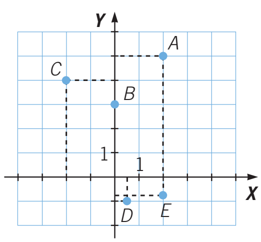
En esta página del Servicio de Salud de la Junta de Andalucía puedes encontrar diversas gráficas de la evolución de la gripe en el año 2009:
http://www.juntadeandalucia.es/servicioandaluzdesalud/principal/documentosacc.asp?pagina=gr_actualidad1_b5

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Representa, en un sistema de coordenadas, estos puntos.**

***A*(2, 5)** **_C_(−2, 4)** **_E_(2; −0,75)**

***B*(0, 3)** **_D_(0,5; −1)**



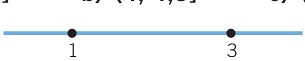
2 **Indica el tipo de variable en cada caso.**

a) El número de calzado.
b) La temperatura media diaria.
c) La producción de botes de tomate.
d) El consumo eléctrico.

a) Variable discreta
b) Variable continua
c) Variable discreta
d) Variable continua

3 **Representa estos intervalos en la recta numérica, y pon tres ejemplos de puntos que pertenezcan a ellos.**

a) [1, 3] **b) (4; 4,5]** **c) (−0,5; 0)** **d) [1; 2,2)**

a) 

1; 1,5; 3

b)

4,01; 4,45; 4,48

c) 

−0,45; −0,6; −0,3

d)

1; 2; 2,19

EJERCICIOS

001 **Di, razonando tu respuesta, si la relación entre los siguientes pares de magnitudes es o no una función.**

a) El peso de una persona y su altura.
b) El peso de un barril y la cantidad de líquido que contiene.
c) La longitud del lado de un polígono regular y su perímetro.
d) La calificación en un examen y el número de horas empleadas en su estudio.
e) El número de obreros y el tiempo que tardan en acabar un trabajo.

a) No, porque a un valor de altura le pueden corresponder diferentes valores de peso, y viceversa.
b) Sí, pues el peso del barril está en función del líquido contenido.
c) Sí, ya que para cada valor de lado hay un valor de perímetro.
d) No es necesariamente una función, porque puede ocurrir que salga mal el examen habiendo estudiado mucho.
e) Sí, puesto que al aumentar el número de obreros disminuirá el tiempo que se tarda en finalizar el trabajo.

002 **Dados los números 3, 5, 7 y 9, calcula para cada uno el número o números que les corresponden con estas relaciones, e indica cuáles son funciones.**

a) Su doble más 2.
b) Sumarle una unidad y dividir el resultado entre 2.
c) Su cuarta potencia.
d) Su raíz cuadrada.

a) $3 \rightarrow 2 \cdot 3 + 2 = 8$ $\quad 7 \rightarrow 2 \cdot 7 + 2 = 16$
$5 \rightarrow 2 \cdot 5 + 2 = 12$ $\quad 9 \rightarrow 2 \cdot 9 + 2 = 20$

b) $3 \rightarrow \dfrac{3+1}{2} = 2$ $\quad 7 \rightarrow \dfrac{7+1}{2} = 4$
$5 \rightarrow \dfrac{5+1}{2} = 3$ $\quad 9 \rightarrow \dfrac{9+1}{2} = 5$

c) $3 \rightarrow 3^4 = 81$ $\quad 7 \rightarrow 7^4 = 2\,401$
$5 \rightarrow 5^4 = 625$ $\quad 9 \rightarrow 9^4 = 6\,561$

d) $3 \rightarrow \pm\sqrt{3}$ $\quad 7 \rightarrow \pm\sqrt{7}$
$5 \rightarrow \pm\sqrt{5}$ $\quad 9 \rightarrow \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Son funciones las relaciones de los apartados a), b) y c).

003 **Escribe dos relaciones que sean funciones y otras dos que no lo sean.**

Ejemplo de relaciones que son funciones:
- El coste de una llamada telefónica y su duración.
- El tiempo de descarga de un archivo en Internet y su tamaño.

Ejemplo de relaciones que no son funciones:
- El número de alumnos en un aula y el número de aprobados.
- La edad de una persona y su peso.

004 **Expresa, mediante un enunciado, las siguientes funciones.**

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -x + 3$

a) Función que asocia a cada número su doble menos 1.

b) Función que asocia a cada número su opuesto más 3.

005 **Obtén la expresión algebraica de la función que asocia a cada número:**

a) Su triple.

b) Su cuadrado.

c) Su doble más 5.

d) Su mitad.

a) $y = 3x$ b) $y = x^2$ c) $y = 2x + 5$ d) $y = \frac{x}{2}$

006 **Dada la función que asocia a cada número su cuarta parte más 3:**

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Calcula $f(8)$, $f(-4)$ y $f(10)$.

a) $y = f(x) = \frac{x}{4} + 3$

b) $f(8) = \frac{8}{4} + 3 = 5$

$f(-4) = \frac{-4}{4} + 3 = 2$

$f(10) = \frac{10}{4} + 3 = \frac{10 + 12}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

007 **Piensa en una función de la que no puedas hallar su expresión algebraica.**

La función que asocia el DNI de una persona y su estatura en centímetros.

008 **Halla una tabla de valores para las siguientes funciones, exprésalas mediante un enunciado y obtén su representación gráfica.**

a) $y = x + 2$

b) $y = 2x + 3$

c) $y = x^2$

d) $y = x^2 + x$

e) $y = -3x - 1$

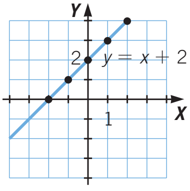
f) $y = x^2 + 1$

g) $y = 4x - 4$

h) $y = -x$

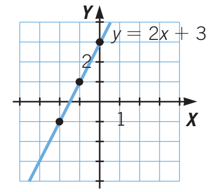
a) Función que asocia a cada número ese número más 2.

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4



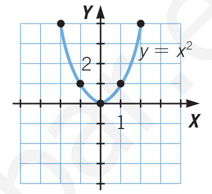
b) Función que asocia a cada número su doble más 3.

x	−2	−1	0	1	2
y	−1	1	3	5	7



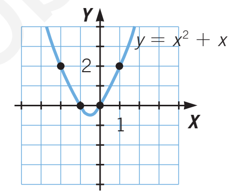
c) Función que asocia a cada número su cuadrado.

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



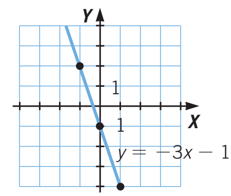
d) Función que asocia a cada número su cuadrado más el propio número.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	0	0	2	6



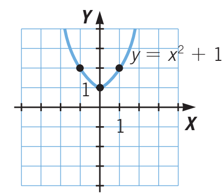
e) Función que asocia a cada número el triple de su opuesto menos 1.

x	−2	−1	0	1	2
y	5	2	−1	−4	−7



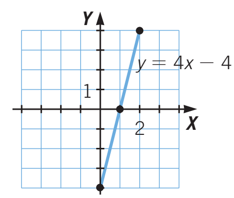
f) Función que asocia a cada número su cuadrado más 1.

x	−2	−1	0	1	2
y	5	2	1	2	5



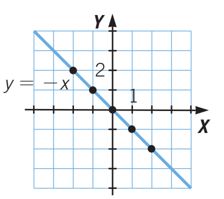
g) Función que asocia a cada número su cuádruple menos 4.

x	−2	−1	0	1	2
y	−12	−8	−4	0	4



h) Función que asocia a cada número su opuesto.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	1	0	−1	−2



009 **Un punto pertenece a la gráfica de una función si sus coordenadas verifican su ecuación. ¿Pertenecen $(-1, 2)$ y $(0, -1)$ a $y = -2x$?**

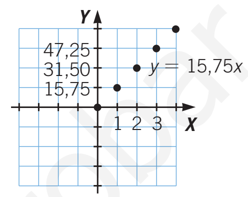
$(-1, 2) \rightarrow 2 = -2 \cdot (-1) \rightarrow$ Sí pertenece.

$(0, -1) \rightarrow -1 \neq -2 \cdot 0 \longrightarrow$ No pertenece.

010 **El precio de una entrada es 15,75 €. Expresa esta función mediante una ecuación, una tabla y una gráfica.**

$y = 15{,}75x$

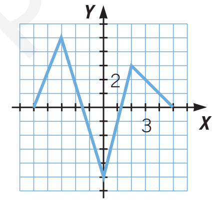
x	0	1	2	3
y	0	15,75	31,50	47,25



011 **Determina el dominio y recorrido de la función.**

Dom $f = [-5, 5]$

Im $f = [-5, 5]$



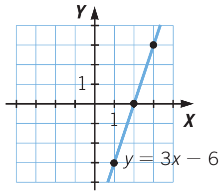
012 **Dada la función que asocia a cada número real su triple menos 6, obtén:**

a) Su expresión algebraica.

b) Su dominio, recorrido y gráfica.

a) $y = 3x - 6$

b) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = \mathbb{R}$



013 **Considerando la función que asocia a cada número real su inverso más 3:**

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Obtén su dominio y recorrido.

c) ¿Cuál es el valor de la función si $x = 2$?

(Recuerda que no se puede dividir entre 0.)

a) $y = \dfrac{1}{x} + 3$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$; Im $f = \mathbb{R} - \{3\}$

c) $f(2) = \dfrac{1}{2} + 3 = 3{,}5$

014 **Considera la función que a cada número real le hace corresponder -1 si el número es negativo y $+1$ si es positivo.**

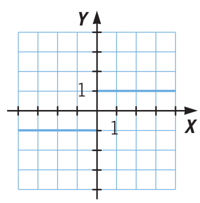
a) ¿Cuál es el valor de la función si $x = 2$?

b) Dibuja su gráfica.

c) Determina su dominio y recorrido.

a) $f(2) = +1$.

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

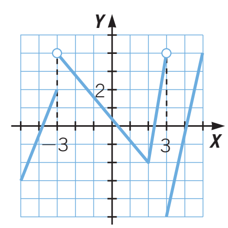


c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

In $f = \{-1, +1\}$

015 **¿Es continua esta función?**

No es continua, tiene dos puntos de discontinuidad en $x = -3$ y en $x = +3$.



016 **Dadas las funciones $y = -x + 3$ e $y = x^2$:**

a) Forma las tablas de valores.

b) Representa las funciones.

c) ¿Son funciones continuas?

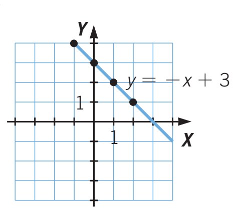
a) $y = -x + 3$

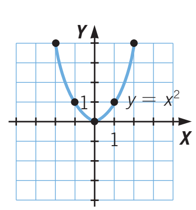
x	−2	−1	0	1	2
y	5	4	3	2	1

$y = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

b)





c) Las dos funciones son continuas.

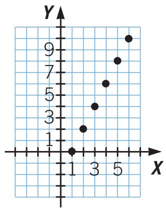
017 **Dibuja las gráficas de estas funciones definidas mediante un enunciado.**

a) A cada número natural le hacemos corresponder su doble menos 2.

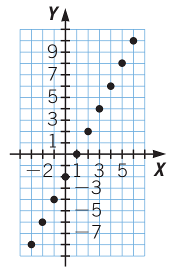
b) A cada número entero le hacemos corresponder su doble menos 2.

c) A cada número real le hacemos corresponder su doble menos 2.

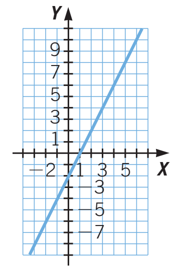
a)



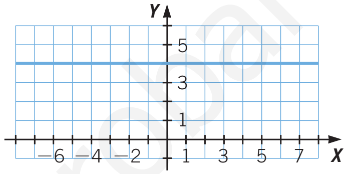
b)



c)

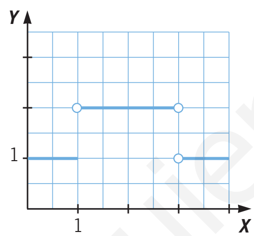


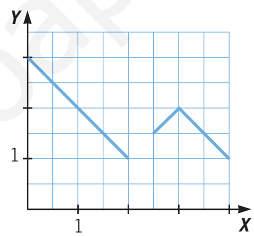
018 **¿Es continua la función que a cada número real le hace corresponder el número 4?**



Es una función continua, pues se puede dibujar de un solo trazo.

019 **Determina los puntos de discontinuidad de estas funciones.**

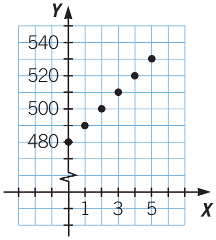




La primera función es discontinua en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

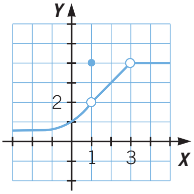
La segunda función es discontinua en el intervalo (2; 2,5).

020 **Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 € y, por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión. Dibuja la gráfica que expresa la ganancia en función del número de muebles vendidos.**



Es una función discreta, su gráfica está formada por puntos aislados.

021 **Dibuja la gráfica de una función con puntos de discontinuidad en $x = 1$ y $x = 3$.**



Respuesta abierta. Por ejemplo:

022 **Halla los puntos de corte con los ejes de estas funciones.**

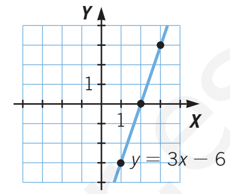
a) $y = 3x - 6$ **b)** $y = x + 1$ **c)** $y = -2x$ **d)** $y = x^2 - 4$

a) Punto de corte con el eje X:

$y = 0 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow y = 3 \cdot 0 - 6 = -6 \rightarrow (0, -6)$

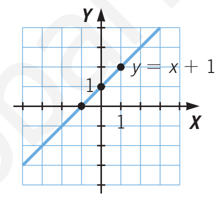


b) Punto de corte con el eje X:

$y = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 1 = 1 \rightarrow (0, 1)$

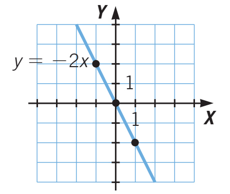


c) Punto de corte con el eje X:

$y = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow y = -2 \cdot 0 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

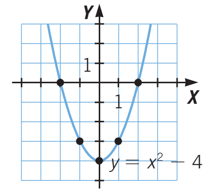


d) Puntos de corte con el eje X:

$y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \left\langle \begin{array}{l} (+2, 0) \\ (-2, 0) \end{array} \right.$

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 4 = -4 \rightarrow (0, -4)$



023 **La función $y = x^2 - 5x + 6$, ¿en qué puntos corta a los ejes?**

Puntos de corte con el eje X:

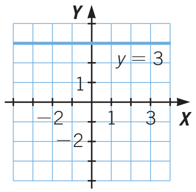
$$y = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$$

Los puntos de corte son (3, 0) y (2, 0).

Punto de corte con el eje Y:

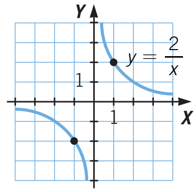
$x = 0 \rightarrow y = 0 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow (0, 6)$

024 **Representa la función $y = 3$. ¿Qué observas? ¿En qué puntos corta a los ejes?**



Es una recta paralela al eje X, que corta al eje Y en el punto (0, 3).

025 **Dada la función $y = \dfrac{2}{x}$, di en qué puntos corta a los ejes.**



Puntos de corte con el eje *X*:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{2}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene solución, no lo corta.

Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{0} \rightarrow$ No está definida, no lo corta.

026 **La función $y = 5x$, ¿en qué punto corta al eje *Y*?**
¿Y la función $y = 5x + 1$?
¿Y la función $y = 5x - 2$?
Con los resultados anteriores, ¿en qué punto crees que cortará al eje *Y* la función $y = 5x - 7$?

Puntos de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot 0 = 0 \longrightarrow (0, 0)$

$x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot 0 + 1 = 1 \longrightarrow (0, 1)$

$x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot 0 - 2 = -2 \rightarrow (0, -2)$

La función $y = 5x - 7$ cortará al eje *Y* en el punto $(0, -7)$.

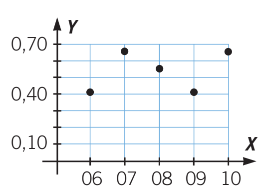
027 **¿Cuántos puntos de corte puede tener una función con el eje *Y*? ¿Y con el eje *X*?**

En el eje *Y* una función solo puede cortar una vez, ya que si no ocurriera así el 0 tendría más de una imagen.

En el eje *X* puede cortar infinitas veces.

028 **Observa los precios, en euros, del kilogramo de patatas en el período 2006-2010. Representa los datos en una gráfica y analiza su crecimiento y decrecimiento.**

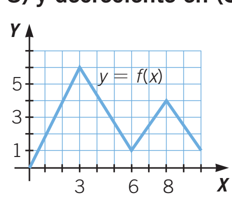
Año	2006	2007	2008	2009	2010
Precio	0,51	0,65	0,57	0,49	0,64



Es creciente en (2006, 2007) y (2009, 2010).

Es decreciente en (2007, 2009).

029 **Dibuja la gráfica de una función que sea creciente en los intervalos (0, 3) y (6, 8) y decreciente en (3, 6) y (8, 10).**

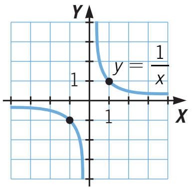


030 **La siguiente tabla muestra las ventas de coches durante los cinco primeros meses del año. Sin representar los datos, analiza su crecimiento y decrecimiento.**

Mes	E	F	M	A	M
Ventas	2 000	1 875	1 690	1 600	1 540

Es decreciente en todo el dominio presentado en la tabla (desde enero hasta mayo).

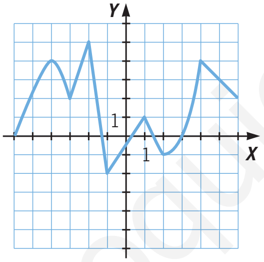
031 **Representa gráficamente la función $y = \frac{1}{x}$, y analiza su crecimiento y decrecimiento. ¿Es constante en algún tramo?**



Es decreciente en sus dos ramas, y se trata de una hipérbola.

No es constante en ningún tramo.

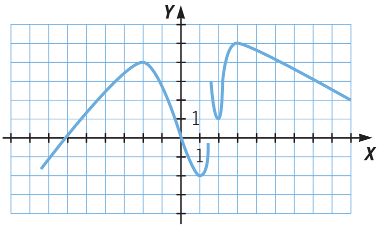
032 **Determina los máximos y mínimos de la función.**



La función tiene mínimos en los puntos de abscisa $x = -3$, -1 y 2.
En $x = -1$ hay un mínimo absoluto, siendo los otros dos relativos.

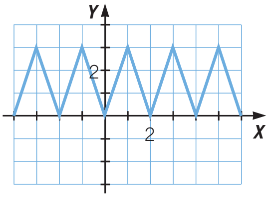
La función tiene máximos en los puntos de abscisa $x = -4$, -2, 1 y 4.
En $x = -2$ hay un máximo absoluto, siendo los otros tres relativos.

033 **Dibuja una función que tenga máximos en $x = -2$ y $x = 3$ y mínimos en $x = 1$ y $x = 2$.**

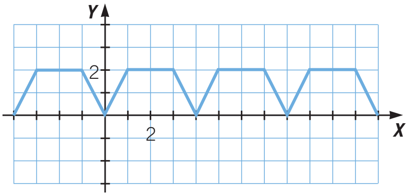


034 **Dibuja una función de período 2 y otra de período 4.**

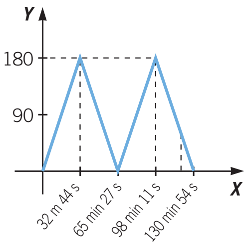
Con período 2:



Con período 4:



035 **Dibuja la gráfica de la función que mide el ángulo formado por las manecillas del reloj desde las 0:00 hasta las 2:00 horas. ¿Cuáles son los máximos y los mínimos?**

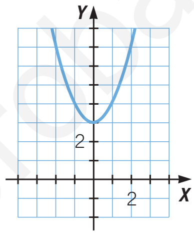


Suponiendo que tomamos el ángulo agudo que forman, los máximos se sitúan aproximadamente en las 0:30 h (0 h 32 min 44 s) y en las 1:35 h (1 h 38 min 11 s), y el mínimo en las 1:05 h.

036 **Representa gráficamente la función dada mediante esta tabla de valores.**

x	...	−2	−1	0	1	2	...
y	...	7	4	3	4	7	...

¿Es una función simétrica?



Es una función simétrica respecto del eje *Y*.

037 **Analiza las simetrías de estas funciones.**

a) $y = 4$ **b)** $y = x^4$ **c)** $y = x^3$

a) $\left.\begin{array}{r} f(x) = 4 \\ f(-x) = 4 \end{array}\right\} f(-x) = f(x) \rightarrow$ Función par

b) $\left.\begin{array}{r} f(x) = x^4 \\ f(-x) = (-x)^4 = x^4 \end{array}\right\} f(-x) = f(x) \rightarrow$ Función par

c) $\left.\begin{array}{r} f(x) = x^3 \\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(-x) \neq f(x) \longrightarrow \text{Función no par} \\ f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{Función impar} \end{array}$

038 **Una función, ¿puede ser simétrica respecto del eje *X*? Razona tu respuesta.**

No es posible, porque cada valor de *X* tendría dos imágenes y entonces no sería una función.

ACTIVIDADES

039 **De estas relaciones, señala las que representan una función. Razona tu respuesta.**

a) Un número positivo y su raíz cuadrada.
b) Un número positivo y su raíz cúbica.
c) Un número negativo y su valor absoluto.
d) El número de lados de la base de una pirámide y su número total de aristas.

a) No es función. Un número positivo tiene una raíz positiva y otra negativa.
b) Es función. Un número solo tiene una raíz cúbica.
c) Es función. Cada número negativo tiene un valor absoluto, que es el mismo número cambiado de signo.
d) Es función. El número de aristas es el doble que el número de lados, y a cada número de lados le corresponde un único número de aristas.

040 **Escribe tres ejemplos de funciones y señala cuál es cada variable.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Velocidad de un automóvil y tiempo que tarda en recorrer 100 km; variable *x*: velocidad, variable *y*: tiempo.

N.º de divisores de un número entero; variable *x*: número entero, variable *y*: n.º de divisores.

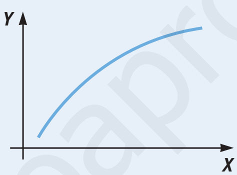
Altura de una nube y tiempo que tarda en caer una gota de lluvia; variable *x*: altura, variable *y*: tiempo.

041 **HAZLO ASÍ**

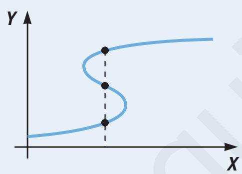
¿CÓMO SE IDENTIFICA UNA FUNCIÓN MEDIANTE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA?

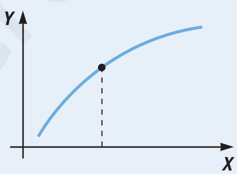
Indica si estas gráficas son funciones o no.

a)


b)


PRIMERO. Se determina si a algún valor de *x* le corresponde más de un valor de *y*.

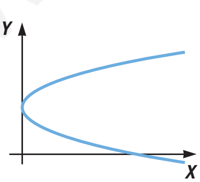
a)


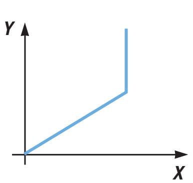
b)


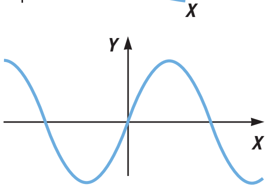
SEGUNDO. Si ocurre así, la gráfica no corresponde a una función. En caso contrario, sí corresponde a una función.

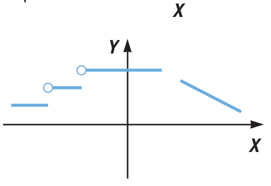
Por tanto, b) es función y a) no lo es.

042 **Indica cuáles son funciones y cuáles no.**

a)


c)


b)


d)


a) No es función.
b) Sí es función.
c) No es función.
d) Sí es función.

043 Escribe la expresión algebraica de la relación que existe entre las siguientes magnitudes.

a) El radio de una circunferencia y su longitud.
b) El radio de una esfera y su volumen.
c) El área de un círculo y su radio.

a) $y = 2\pi x$ b) $y = \frac{4}{3}\pi x^3$ c) $y = \sqrt{\frac{x}{\pi}}$

044 Dada la función que asocia a cada número el inverso de la suma de ese número más 5:

a) Determina su expresión algebraica.
b) ¿Existe valor de la función para $x = -2$?

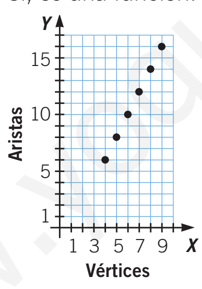
a) $y = \frac{1}{x+5}$

b) Sí, $y = \frac{1}{3}$

045 Considera la relación existente entre el número de vértices de una pirámide y su número de aristas.

a) ¿Es una función? Construye una tabla de valores y represéntala gráficamente.
b) ¿Es posible establecer una expresión algebraica que represente la función?

a) Sí, es una función.

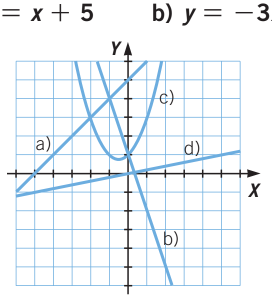


Vértices	4	5	6	7	8	9	…
Aristas	6	8	10	12	14	16	…

b) $y = 2(x - 1)$, para $x \geq 4$

046 Expresa, de todas las maneras posibles, las siguientes funciones.

a) $y = x + 5$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = x^2 + x + 1$ d) $y = \frac{x}{5}$



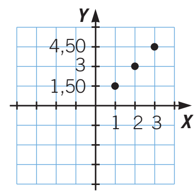
Se recomienda practicar en común la expresión de una función de distintas formas con los ejemplos de esta actividad, que abarcan los tipos de funciones más habituales.

047 ●●

Una bolsa de patatas fritas cuesta 1,50 €. Expresa algebraicamente la función *Número de bolsas–Precio*, construye una tabla de valores y realiza su gráfica.

x	0	1	2	3
y	0	1,50	3	4,5

$y = 1{,}5x$



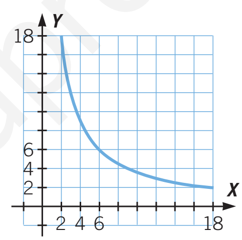
048 ●●

Haz una tabla de valores con el largo y el ancho de los rectángulos de área 36 m^2.

Expresa, de forma algebraica, y representa la función *Largo–Ancho*.

Largo	18	12	9	6	4	3	2
Ancho	2	3	4	6	9	12	18

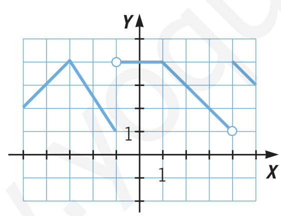
$$y = \frac{36}{x}$$



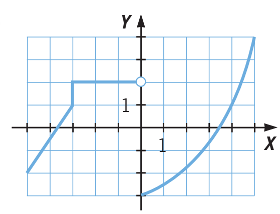
049 ●

Estudia la continuidad de estas funciones. ¿Tienen puntos de discontinuidad?

a)



b)

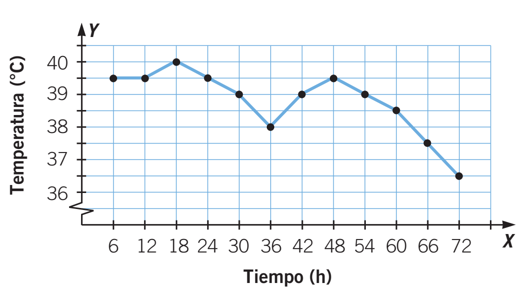


a) No es continua, porque presenta dos saltos en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 4$.

b) No es continua, ya que tiene un salto en $x = 0$.

050 ●

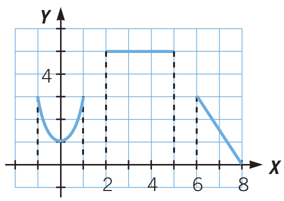
Luis está enfermo y le toman la temperatura 4 veces al día durante 3 días, obteniendo los puntos de esta gráfica. ¿Podemos unir los puntos? ¿Es una función continua?



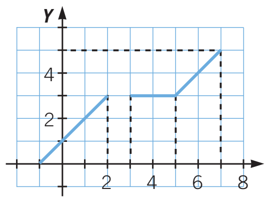
Sí, podemos unir los puntos. Las variables son continuas y la gráfica también lo es.

051 Determina el dominio y el recorrido de estas funciones.

a)



b)



a) Dominio $= [-1, 8] - (1, 2) - (5, 6) = [-1, 1] \cup [2, 5] \cup [6, 8]$
Recorrido $= [0, 3] \cup \{5\}$

b) Dominio $= [-1, 7] - (2, 3) = [-1, 2] \cup [3, 7]$
Recorrido $= [0, 5]$

052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN CON SU EXPRESIÓN ALGEBRAICA?

Halla el dominio de las funciones.

a) $y = 2x - 3$ **b)** $y = \dfrac{3 + 2x}{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{x - 1}$

PRIMERO. Se clasifica el tipo de expresión.

a) $y = 2x - 3 \longrightarrow$ Es una expresión polinómica.

b) $y = \dfrac{3 + 2x}{x - 1} \rightarrow$ Es una expresión que tiene la variable x en el denominador.

c) $y = \sqrt{x - 1} \longrightarrow$ Es una expresión que tiene la variable x bajo una raíz.

SEGUNDO. Se calcula el dominio dependiendo del tipo de expresión.

a) Un polinomio está definido para todos los números reales: Dom $f = \mathbb{R}$

b) Un cociente no está definido cuando el denominador es 0, luego la función no está definida en $x = 1$: Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

c) Las raíces solo están definidas para números positivos; por tanto, la función está definida cuando x es mayor o igual que 1: Dom $f = [1, +\infty)$

053 **Calcula el dominio de estas funciones.**

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = \dfrac{5}{x - 5}$

c) $y = \sqrt{x + 1}$

d) $y = \sqrt{x - 2}$

a) $\mathbb{R}$

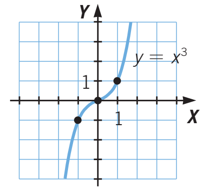
b) $\mathbb{R} - \{5\}$

c) $[-1, +\infty)$

d) $[2, +\infty)$

054 ●●

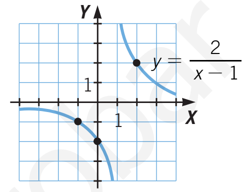
Estudia la continuidad de la función $y = x^3$, y obtén su dominio y recorrido.



Es una función continua, con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $\mathbb{R}$.

055 ●●●

Estudia la continuidad de la función $y = \dfrac{2}{x-1}$, y obtén su dominio y recorrido.



$$y = \frac{2}{x-1} \rightarrow \begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\} \\ \text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

056 ●●●

Dada la función $f(x) = \sqrt{x+4}$:

a) Construye una tabla de valores.

b) Estudia su continuidad.

c) Dibuja su gráfica.

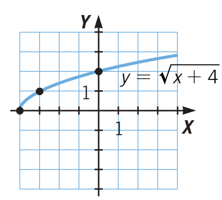
d) Determina su dominio y recorrido.

a)

x	-4	-3	0
y	0	1	2

b) Es continua en todo su dominio.

c)



d) Dom $f = [-4, +\infty)$

Im $f = [0, +\infty)$

057 ●

Halla los puntos de corte con los ejes de las funciones.

a) $y = 4x - 1$

b) $y = 5$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = (x-3)^2$

e) $y = x^3 - 8$

f) $y = -3$

a) $y = 4x - 1 \rightarrow$ Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \cdot 0 - 1 = -1 \rightarrow P(0, -1)$

Eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = 4x - 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{4} \rightarrow Q\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$

b) $y = 5 \rightarrow$ Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow P(0, 5)$

Eje $X \rightarrow y \neq 0$, no tiene punto de corte con este eje.

c) $y = x^2 - 3 \rightarrow$ Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 - 3 = -3 \rightarrow P(0, -3)$

Eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow Q(\sqrt{3}, 0)$ y $Q'(-\sqrt{3}, 0)$

d) $y = (x-3)^2 \rightarrow$ Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = (0-3)^2 = 9 \rightarrow P(0, 9)$

Eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = (x-3)^2 \rightarrow x = 3 \rightarrow Q(3, 0)$

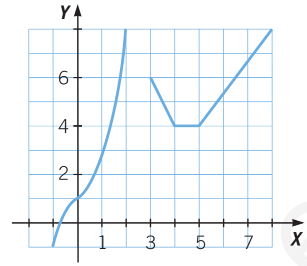
e) $y = x^3 - 8 \rightarrow$ Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -8 \rightarrow P(0, -8)$

Eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow Q(2, 0)$

f) $y = -3 \rightarrow$ Eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow P(0, -3)$

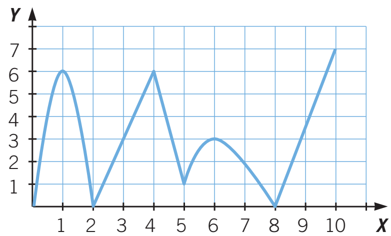
Eje $X \rightarrow y \neq 0$, no tiene punto de corte con este eje.

058 Analiza el crecimiento de la función.



La función es creciente en $[-1, 2]$ y en $[5, 8]$, es decreciente en $[3, 4]$ y es constante en $(4, 5)$.

059 Observa la gráfica correspondiente a esta función.



a) Señala su dominio y recorrido.

b) ¿Es una función continua?

c) Estudia su crecimiento y decrecimiento.

d) Señala sus máximos y mínimos, si los tiene.

a) $\text{Dom } f = [0, 10]$; $\text{Im } f = [0, 7]$

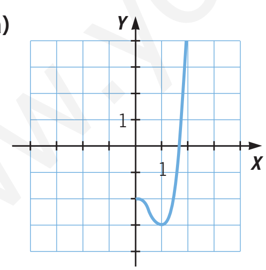
b) Es continua en todo su dominio.

c) Es creciente en $[0, 1] \cup [2, 4] \cup [5, 6] \cup [8, 10]$.
Es decreciente en $[1, 2] \cup [4, 5] \cup [6, 8]$.

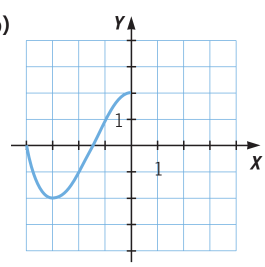
d) Presenta máximos en $x = 1$, $x = 4$ y $x = 6$.
Presenta mínimos en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

060 Completa las siguientes gráficas para que resulte una función simétrica respecto del eje *Y*.

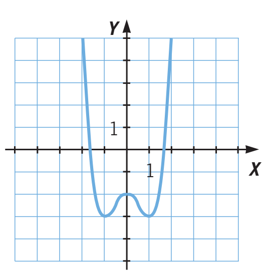
a)



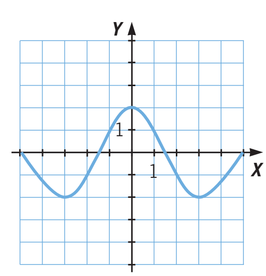
b)



a)



b)



061 ●●●

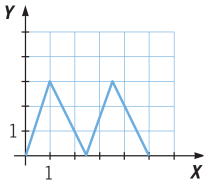
Una función, ¿puede ser simétrica respecto del eje *Y* y respecto del origen? Si crees que sí, pon un ejemplo.

Solo lo es la función $y = 0$, ya que verifica: $f(-x) = -f(-x)$

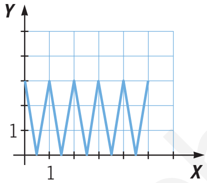
062 ●●

Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas.

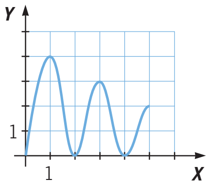
a)



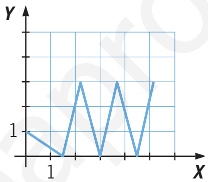
c)



b)



d)



Son periódicas las funciones de los apartados a) y c), y no lo son las funciones de los apartados b) y d).

063 ●●

Estudia las características de las funciones que relacionan:

a) La longitud del lado de un hexágono regular con su área.

b) La longitud del lado de un cuadrado con su diagonal.

c) Un número real y su cubo.

d) Un número real y el triple de su raíz cuadrada.

a) $A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{6l \cdot l \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

Es una función continua y creciente en todo su dominio → Dom $f = \mathbb{R}$

b) La función es $d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$; es continua y creciente → Dom $f = \mathbb{R}$

c) $y = x^3$ → Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = \mathbb{R}$

Es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, y es simétrica respecto del origen.

d) $y = 3\sqrt{x}$ → Dom $f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

Im $f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

Es continua, creciente y no tiene máximos ni mínimos.

064 Estudia las características de las siguientes funciones.

a) $y = -3x$ **c)** $y = x^2 + 2x + 1$ **e)** $y = (x - 1)^2$

b) $y = 2x - 5$ **d)** $y = \dfrac{2}{x} - 2$ **f)** $y = x^3 - 3$

a) $y = -3x \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$
Es continua, decreciente, no tiene máximos ni mínimos, y presenta simetrías respecto del origen de coordenadas.

b) $y = 2x - 5 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$
Es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni presenta simetrías.

c) $y = x^2 + 2x + 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$
Es continua, decreciente desde $-\infty$ hasta -1, creciente desde -1 hasta $+\infty$, y tiene un mínimo en $x = -1$. No es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen de coordenadas.

d) $y = \dfrac{2}{x} - 2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$; $\text{Im } f = \mathbb{R} - \{-2\}$
Es continua y decreciente, no presenta simetrías respecto del eje Y, ni respecto del origen de coordenadas.

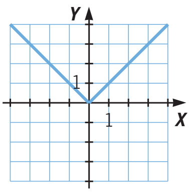
e) $y = (x - 1)^2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$
Es continua, decreciente desde $-\infty$ hasta 1, creciente desde 1 hasta $+\infty$, y tiene un mínimo en $x = 1$. No es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen de coordenadas.

f) $y = x^3 - 3 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$
Es continua y creciente, y no presenta simetrías respecto del eje Y, ni respecto del origen de coordenadas.

065 Analiza estas funciones.

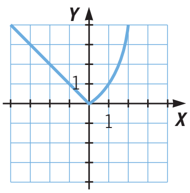
a) $y = |x|$ **(valor absoluto de x)** **b)** $y = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [0, +\infty)$
Es continua.
Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.
Tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.
Es simétrica respecto del eje Y.

b) $y = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [0, +\infty)$
Es continua.
Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.
Tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. No presenta simetrías.

066 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REPRESENTA UNA FUNCIÓN CONOCIENDO ALGUNAS DE SUS CARACTERÍSTICAS?

Representa una función con estos datos:

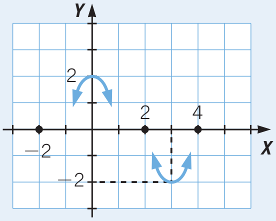
– Dom $f = \mathbb{R}$

– Pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(2, 0)$ y $(4, 0)$.

– Tiene un mínimo en $(3, -2)$.

– Tiene un máximo en $(0, 2)$.

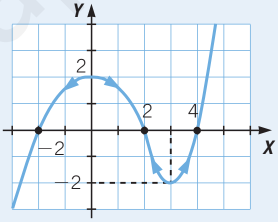
PRIMERO. Se representan los puntos por los que pasa la función.



SEGUNDO. Se dibujan los puntos en los que hay mínimos y máximos.

Sobre los mínimos se representa un arco con su parte cóncava hacia abajo. Y sobre los máximos, un arco con su parte cóncava hacia arriba.

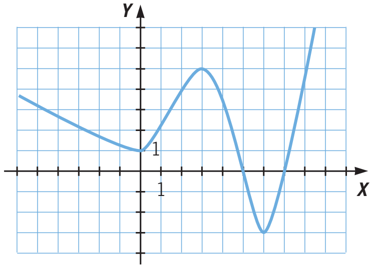
TERCERO. Siguiendo las indicaciones de las flechas que señalan la dirección de la gráfica y los puntos por los que pasa, se representa la función.



067 ●●

Representa una función tal que:

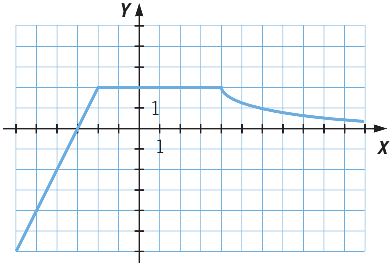
- **Dom $f = \mathbb{R}$**
- **Pasa por los puntos $(5, 0)$ y $(7, 0)$.**
- **Tiene puntos mínimos en $(0, 1)$ y $(6, -3)$.**
- **Tiene un máximo en $(3, 5)$.**



068 ●●

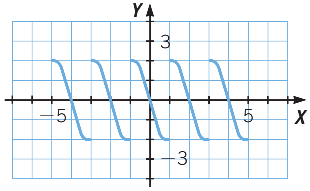
Representa una función con estas características:

- **Dom $f = \mathbb{R}$**
- **Pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 2)$.**
- **Es creciente hasta $x = -2$, constante en el intervalo $(-2, 4)$ y decreciente a partir de $x = 4$.**



069 ●●

Dibuja una función periódica, con dominio el intervalo (-5, 5) y recorrido (-2, 2). ¿Existe más de una solución?



Existen infinitas soluciones.

070 ●●●

Representa la gráfica de una función simétrica respecto del eje *Y* y que siempre sea creciente. ¿Es posible?

No es posible, ya que si es creciente en los valores positivos será decreciente en los negativos, y al revés, por ser simétrica respecto del eje *Y*.

Si $a > b > 0$, entonces $f(a) > f(b)$, por ser creciente y simétrica respecto del eje *Y*. Sin embargo, la condición de que $f(-a) > f(-b)$ es imposible por ser una función creciente, ya que $-b > -a$.

071 ●●

En un instituto han medido la longitud, en metros, de la sombra del edificio principal cada hora, a lo largo de un día de invierno (a partir de las 18:00 horas era de noche), obteniendo esta tabla.

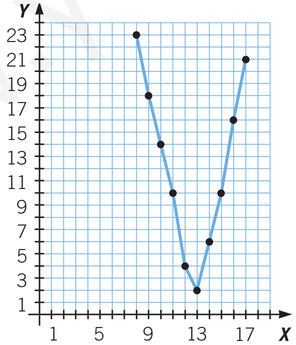
Hora	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Longitud	23	18	14	10	4	2	6	10	16	21

a) Haz la representación gráfica.

b) ¿Es una función continua?

c) Estudia las características de la función.

a)

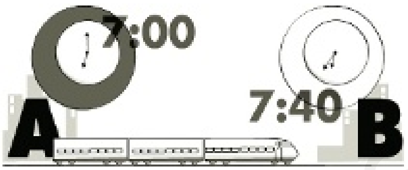


b) Es continua.

c) Es decreciente desde que sale el sol hasta las 13:00 horas, en que pasa a ser creciente hasta la puesta de sol. Tiene un mínimo en las 13:00 horas. Su dominio es el conjunto representado por las horas de sol.

072 ●●

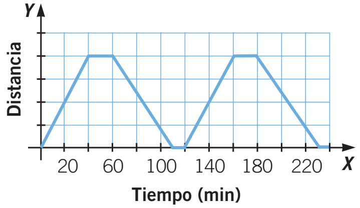
Un tren realiza el trayecto entre dos ciudades *A* y *B*. Sale de *A* a las 7:00 horas y se dirige a *B* a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Después, para durante 20 minutos y parte de *B* hacia *A*, llegando en 50 minutos. Se detiene 10 minutos y, a la hora en punto, vuelve a salir hacia *B*.



a) Representa la función *Tiempo–Distancia* a la ciudad *A*.

b) Realiza un estudio completo de la función.

a)



b) La función es continua en todo su dominio.

Es creciente en los intervalos (0, 40), (120, 160)…

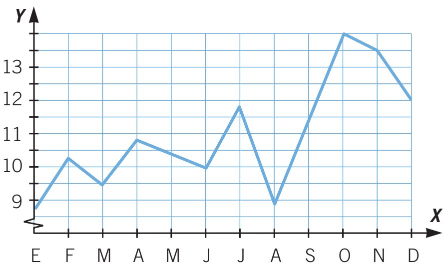
Es constante en los intervalos (40, 60), (110, 120), (160, 180)…

Es decreciente en los intervalos (60, 110), (180, 230)…

Es una función periódica, con período $T = 120$ minutos.

073 ●●

En la gráfica se muestra la superficie de edificación de viviendas (en millones de metros cuadrados) concedida en cada mes del año.



a) Analiza su continuidad.

b) ¿En qué puntos corta a los ejes?

c) Estudia su crecimiento.

d) Señala sus máximos y mínimos.

e) ¿En qué meses se superaron los 12 millones de metros cuadrados? ¿Entre qué dos meses se registró el mayor crecimiento?

a) Es una función continua.

b) No corta al eje *X* y corta al eje *Y* en (E; 8,5).

c) Es creciente de enero a febrero, de marzo a abril, de junio a julio y de agosto a octubre. Es decreciente de febrero a marzo, de abril a junio, de julio a agosto y de octubre a diciembre.

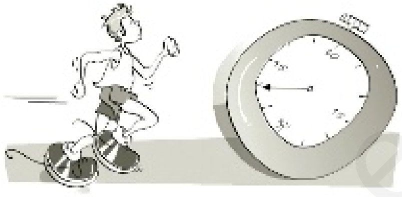
d) Máximos relativos: febrero, abril, julio y octubre. Máximo absoluto: octubre. Mínimos relativos: marzo, junio y agosto. Mínimo absoluto: enero.

e) Se superaron los 12 millones en octubre, noviembre y diciembre. El mayor crecimiento se registró en los meses de agosto y septiembre.

074 ●●

En un entrenamiento para una carrera de 5 000 m, un atleta ha registrado estos tiempos.

Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	…
Espacio (m)	0	65	130	195	260	325	…

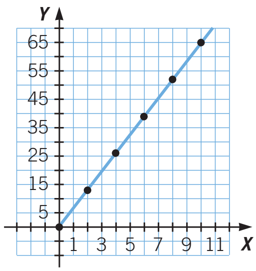


a) Representa los datos en una gráfica.

b) Si continúa con la misma velocidad, ¿qué tiempo tardará en recorrer 5 000 m?

c) Escribe la expresión algebraica que relaciona el espacio recorrido con el tiempo empleado.

a)

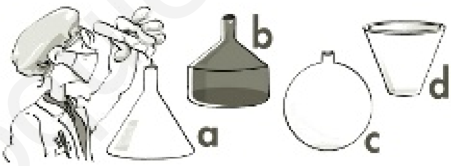


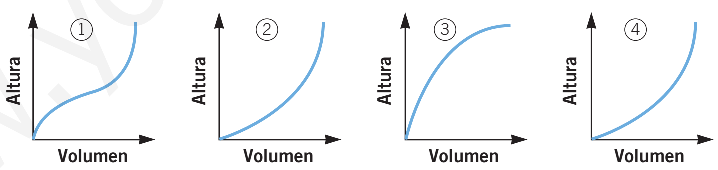
b) $t = 5\,000 : 6{,}5 = 769{,}23$ s $= 12$ min $49{,}23$ s

c) $y = 6{,}5x$

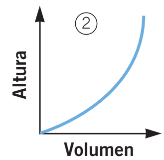
075 ●●●

¿Qué gráfica corresponde al llenado de cada frasco?

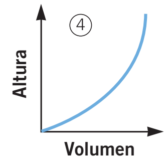




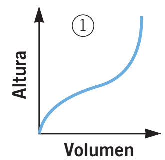
a) Es un cono. A medida que crece el volumen, la altura crece cada vez más rápido. Su gráfica es:



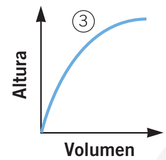
b) La parte baja es un cilindro, siendo el volumen proporcional a la altura y, después, es un cono, por lo que según aumenta el volumen, el crecimiento de la altura se acelera. Su gráfica es:



c) Es una esfera. La altura crece más rápido al principio y al final del llenado del volumen de la esfera, coincidiendo con los polos. Su gráfica es:



d) Es un cono invertido. El crecimiento de la altura se ralentiza a medida que vamos teniendo mayor volumen. Su gráfica es:



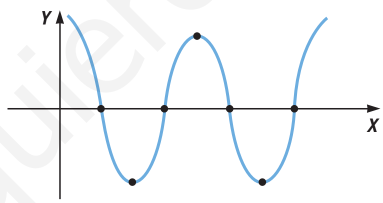
076 ●●●

Considera una función continua.

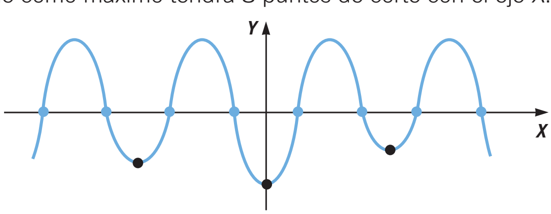
a) ¿Cuántos máximos, al menos, deberá tener la función si corta exactamente 4 veces al eje *X*?

b) Y si no es constante en ningún intervalo, ¿cuál es el mayor número de veces que puede cortar al eje *X* si tiene 3 mínimos?

a) Los cuatro puntos de corte con el eje *X* delimitan tres intervalos, en los cuales, por ser continua la función, tiene que existir, al menos, un máximo o un mínimo. El menor número de máximos se consigue con dos mínimos y entre ellos un máximo.



b) Como presenta 3 mínimos, tiene a lo sumo 4 máximos y, por ser una función continua, cada mínimo se situará entre 2 puntos máximos. Cada máximo puede ocasionar 2 puntos de corte con el eje *X*, por lo que como máximo tendrá 8 puntos de corte con el eje *X*.



077 ●●●

¿Puede una función par valer -7 en $x = 0$? ¿Y una función impar?

Sí, una función par puede valer -7 en $x = 0$.

Una función impar no, ya que si es una función impar será simétrica respecto del origen, por lo que tendría que pasar también por el punto (0, 7), lo que no es posible porque entonces el 0 tendría más de una imagen.

Todas las funciones impares que cortan al eje *Y*, lo hacen en el punto (0, 0).

078 ●●● **De una función sabemos que todos los elementos de su recorrido son positivos y, además, que:**

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Si $f\left(\frac{2}{3}\right) = 4$, ¿cuánto vale $f(5)$? ¿Y $f(0)$?

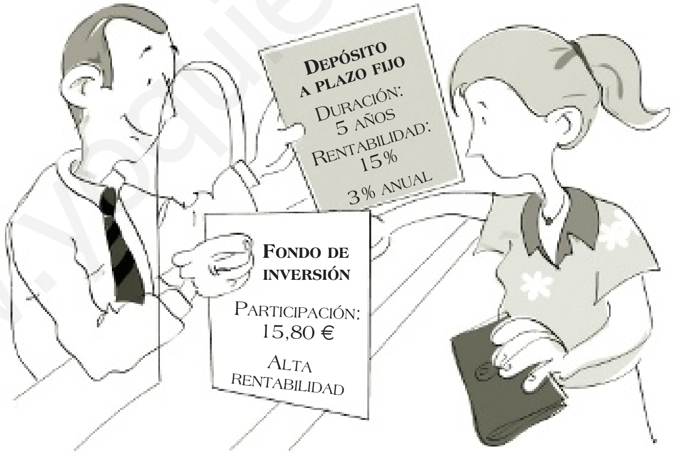
$$4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3} + 0\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot f(0) = 4 \cdot f(0) \rightarrow f(0) = 1$$

$$4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(5) = f\left(15 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{15} = 2^{15} = 32\,768$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

079 ●●● **Marta decidió invertir sus ahorros en el año 2006. Tuvo que elegir entre dos productos financieros:**



El depósito a plazo fijo tenía una duración de 5 años. Pasado este tiempo, el banco le devolvería el capital que había ingresado más un 15 % de intereses. En caso de retirarlo antes, el banco le ofrecía un interés del 3 % cada año.

Por otra parte, el fondo de inversión no tenía una rentabilidad fija, y el interés podía variar dependiendo de los índices bursátiles.

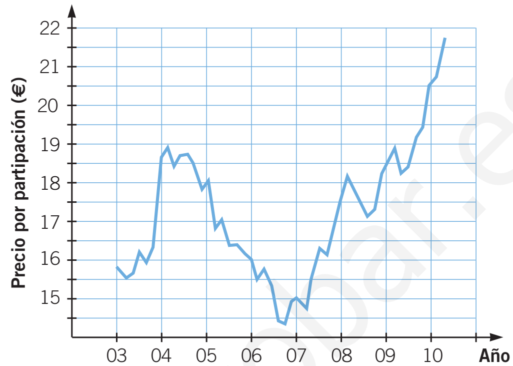
ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si invierte 1 000 € en un depósito a plazo fijo, ¿cuánto dinero recibirá a los 5 años? ¿Y si lo saca a los 2 años?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Finalmente Marta se decidió por el fondo de inversión, y compró 1 519 participaciones.

Esta es la rentabilidad de su fondo en los últimos años:



¿En qué momentos, desde el año 2006, el depósito a plazo fijo le habría ofrecido mayor rentabilidad?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) A la vista del gráfico, ¿crees que hubiera sido mejor haber invertido en el depósito a plazo fijo?

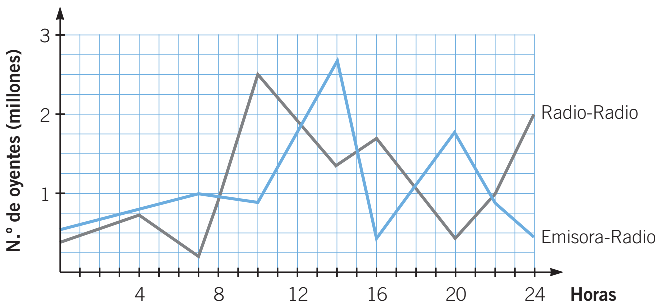
a) En un año recibe: $1\,000 \cdot 0{,}15 = 150$ €
En 5 años recibe: $150 \cdot 5 = 750$ €
Si lo retira a los 2 años recibe: $1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 2 = 60$ €

b) y c) La elección depende del momento en que se retire el dinero.
Por ejemplo, durante el año 2006, y en casi todos los meses de los años 2007 y 2008, hubiera sido más rentable el depósito a plazo fijo.

080 ●●●

El Instituto General de Medios de Comunicación ha hecho públicos los datos recogidos en su última encuesta realizada a los oyentes.

En esta gráfica aparece el número de oyentes (en millones) de las dos emisoras de radio con mayor audiencia del país.



Eres capaz de… Comprender

a) ¿Cuántos oyentes, aproximadamente, tenía Radio-Radio a las 7 de la mañana? ¿Y Emisora-Radio?

b) ¿A qué hora se produjo el máximo de audiencia en Radio-Radio? ¿Y en Emisora-Radio?

Eres capaz de… Resolver

c) Estas son las programaciones diarias de las dos cadenas.

¿Qué conclusiones obtienes del estudio de la gráfica y de sus programaciones?

Eres capaz de… Decidir

d) ¿Cómo modificarías la programación de las cadenas para aumentar la audiencia?

a) Radio-Radio: 1 000 000 : 4 = 250 000 oyentes
Emisora-Radio: 1 000 000 oyentes

b) Máximo de audiencia de Radio-Radio: a las 10 de la mañana.
Máximo de audiencia de Emisora-Radio: a las 14 horas.

c) y d) Se observa que la mayor audiencia se obtiene con la emisión de programas deportivos o informativos, mientras que las menores audiencias se corresponden con programas culturales y de humor. Lo aconsejable sería que las cadenas aumentaran los programas con este tipo de contenido para incrementar la audiencia.

12 Funciones lineales y afines

El cálculo tiene dos padres

Al oír abrirse la puerta, Leibniz levantó los ojos del papel en el que escribía y, sin tan siquiera saludar al recién llegado, comenzó a quejarse, visiblemente alterado:

–De todos es conocido que la trayectoria de mi vida es intachable. ¿Cómo es posible que duden de mí? He dado sobradas pruebas de honestidad y talento suficientes para esto y aún para más.

La respiración agitada de Leibniz hizo que su interlocutor, Bernoulli, lo calmara asegurándole que nadie en todo el mundo, salvo en Inglaterra, dudaba de él.

–Yo no conocía el trabajo del maestro Newton, incluso le escribí contándole mis progresos. Pero no he plagiado el trabajo de nadie –aseveró Leibniz.

–He venido a comunicarte una buena noticia: la comisión ha acabado sus investigaciones y su conclusión es que las dos teorías han sido desarrolladas independientemente. Es más, en mi opinión tu sistema es mucho mejor, sobre todo por la notación que utilizas.

La teoría desarrollada por Leibniz y por Newton es de capital importancia para el estudio de muchas propiedades relativas a las funciones. Leibniz fue el primero en utilizar el término «función» para designar la relación entre dos magnitudes.

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre la vida y la obra de los personajes que aparecen en el texto.**

En la enciclopedia online Kalipedia: www.kalipedia.com, tecleando en el buscador Gottfried Wilhelm Leibniz aparece un enlace a una biografía de Leibniz, donde se muestran sus logros matemáticos y filosóficos.

En la página de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, puedes encontrar una biografía de Newton y su contribución a la ciencia realizada por Camilo Ramos Rojas:
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/03-1-b-newton.html

2 **¿Cuál fue el conflicto que enfrentó a Newton con Leibniz? ¿Cómo se resolvió la pugna?**

En esta página puedes tener acceso a la versión digital del libro *Historia y Filosofía de las Matemáticas,* escrito por Ángel Ruiz Zúñiga, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica. En este libro, en el capítulo 15, hallarás una sección donde se detalla el conflicto entre Newton y Leibniz:
http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Portada.htm

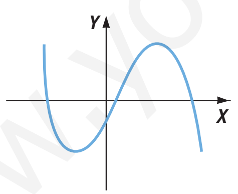
3 **¿Cuáles fueron las aportaciones más importantes de Leibniz al estudio de las funciones?**

En la siguiente página, que depende de la Real Sociedad Matemática Española, puedes encontrar una extensa biografía de Leibniz, realizada por Mary Sol de Mora, en la que aparecen detallados sus avances matemáticos:
http://www.divulgamat.net/

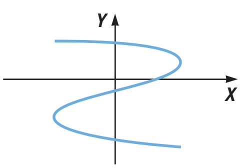
EVALUACIÓN INICIAL

1 **Indica si estas gráficas son funciones o no.**

a)



b)



a) Es una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) No es una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y.

2 **Obtén el valor absoluto de los números: 7, -8, 0, 6, -1, -6^2 y $(-6)^2$.**

$|7| = 7$ $\quad |-8| = 8$ $\quad |0| = 0$ $\quad |6| = 6$

$|-1| = 1$ $\quad |-6^2| = 36$ $\quad |(-6)^2| = 36$

3 **Resuelve este sistema:** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 2y = 11} \\ \boldsymbol{-x - y = -7} \end{array}\right\}$

Sumando las dos ecuaciones: $y = 4$

$x + 2 \cdot 4 = 11 \rightarrow x = 11 - 8 = 3$

EJERCICIOS

001 **Indica si las funciones son lineales y, en ese caso, determina su pendiente y su crecimiento o decrecimiento.**

a) $y = 3x - 4$ **c)** $y = \frac{3}{4}x$ **e)** $y = \frac{4}{x}$

b) $y = 5x$ **d)** $y = \frac{1}{3}x + 2$ **f)** $y = x^2$

a) No es lineal.
b) Lineal y creciente, $m = 5$.
c) Lineal y creciente, $m = 3/4$.
d) No es lineal.
e) No es lineal.
f) No es lineal.

002 **Pon dos ejemplos de función lineal creciente y otros dos de decreciente.**

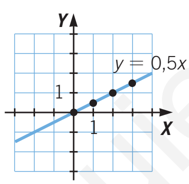
Función lineal creciente: $y = 3x$; $y = 4x$
Función lineal decreciente: $y = -5x$; $y = -x$

003 **Obtén una tabla de valores y representa las siguientes funciones lineales.**

a) $y = 0{,}5x$ **b)** $y = -2x$ **c)** $y = 4x$ **d)** $y = x$ **e)** $y = -0{,}5x$ **f)** $y = 10x$

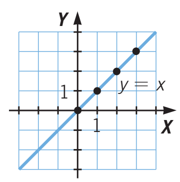
a)

x	0	1	2	3
y	0	0,5	1	1,5



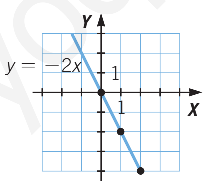
d)

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3



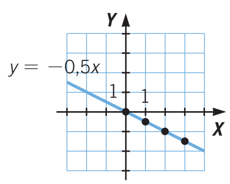
b)

x	0	1	2	3
y	0	−2	−4	−6



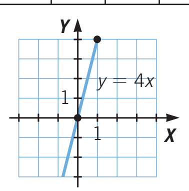
e)

x	0	1	2	3
y	0	−0,5	−1	−1,5



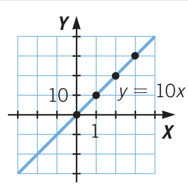
c)

x	0	1	2	3
y	0	4	8	12



f)

x	0	1	2	3
y	0	10	20	30



004 **Una función de proporcionalidad directa pasa por el punto** $P(-5, 10)$**.**

a) Calcula su pendiente.
b) Determina su expresión algebraica.
c) ¿Cómo es la función, creciente o decreciente?

a) $m = 10 : (-5) = -2$ b) $y = -2x$ c) Es decreciente.

005 **Indica si estas funciones son afines, y determina su pendiente y su ordenada.**

a) $y = 3x - 4$ **b)** $y = \dfrac{-2}{5}x + 3$ **c)** $y = x^2 - 5$ **d)** $y = \dfrac{2}{x} + 1$

a) Es afín: $m = 3$, $n = -4$

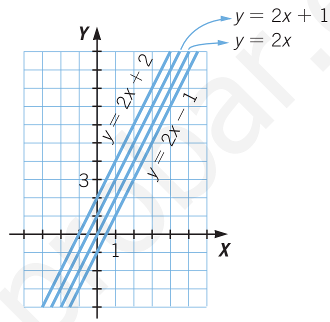
b) Es afín: $m = -\dfrac{2}{5}$, $n = 3$

c) No es afín.

d) No es afín.

006 **Representa la función afín $y = 2x + n$ para $n = 1$, $n = 2$, $n = -1$ y $n = 0$. ¿Cómo son las rectas que has dibujado?**

Son rectas paralelas.



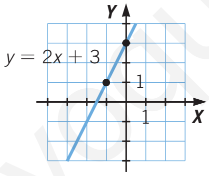
007 **Obtén una tabla de valores y representa estas funciones afines.**

a) $y = 2x + 3$ **c)** $y = -3x + 1$ **e)** $y = 5x - 5$

b) $y = -x + 4$ **d)** $y = x + 3$ **f)** $y = 0{,}5x + 3$

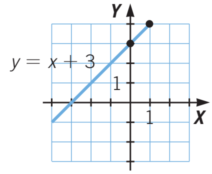
a)

x	0	1	2	3
y	3	5	7	9



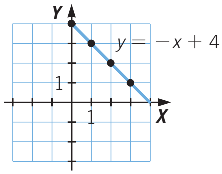
d)

x	0	1	2	3
y	3	4	5	6



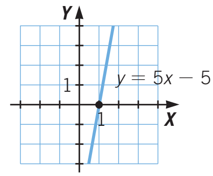
b)

x	0	1	2	3
y	4	3	2	1



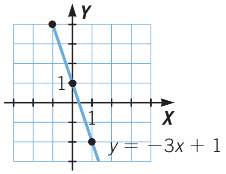
e)

x	0	1	2	3
y	−5	0	5	10



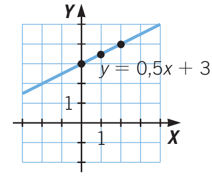
c)

x	0	1	2	3
y	1	−2	−5	−8



f)

x	0	1	2	3
y	3	3,5	4	4,5

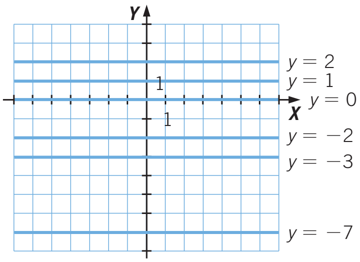


008 **Una recta que pasa por tres cuadrantes, ¿es una función lineal o afín? Razona tu respuesta.**

Es afín, porque para que pase por tres cuadrantes es necesario que no pase por el origen.

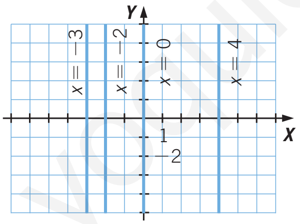
009 **Representa las siguientes rectas.**

a) $y = -7$
b) $y = 0$
c) $y = 1$
d) $y = 2$
e) $y = -2$
f) $y = -3$



010 **Representa gráficamente estas rectas.**

a) $x = -3$
b) $x = 0$
c) $x = 4$
d) $x = -2$



011 **Determina las coordenadas del punto de corte de las rectas determinadas por las ecuaciones $y = 3$, $x = -2$.**

Son rectas secantes, perpendiculares, que se cortan en el punto $P(-2, 3)$.

012 **Halla la ecuación de la recta:**

a) Paralela al eje X y que pasa por $P(1, 3)$.
b) Paralela al eje Y y que pasa por $P(-1, 4)$.

a) Es paralela al eje $X \rightarrow m = 0 \rightarrow y = n$
Pasa por $P(1, 3) \rightarrow 3 = 0 \cdot 1 + n \rightarrow n = 3$
Luego se trata de la recta $y = 3$.

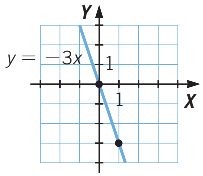
b) Es paralela al eje $Y \rightarrow x = k$
Pasa por $P(-1, 4) \rightarrow x = -1$
Luego se trata de la recta $x = -1$.

013 **Determina dos puntos por los que pasen las siguientes funciones y represéntalas.**

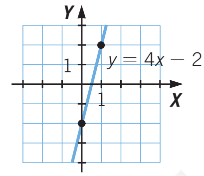
a) $y = -3x$ **c)** $y = -2x + 4$ **e)** $y = 4x - 2$ **g)** $y = -0{,}4x$

b) $y = -6x + 7$ **d)** $y = -4x$ **f)** $y = -x + 3$ **h)** $y = x - 2$

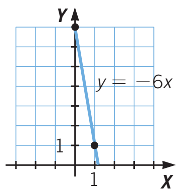
a) $x = 0 \rightarrow y = 0$
$x = 1 \rightarrow y = -3$



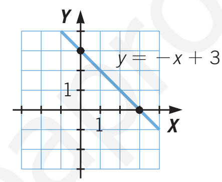
e) $x = 0 \rightarrow y = -2$
$x = 1 \rightarrow y = 2$



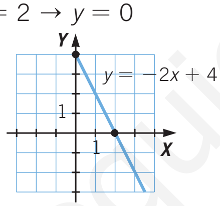
b) $x = 0 \rightarrow y = 7$
$x = 1 \rightarrow y = 1$



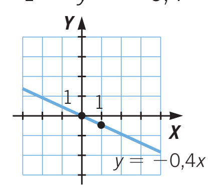
f) $x = 0 \rightarrow y = 3$
$x = 3 \rightarrow y = 0$



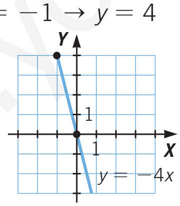
c) $x = 0 \rightarrow y = 4$
$x = 2 \rightarrow y = 0$



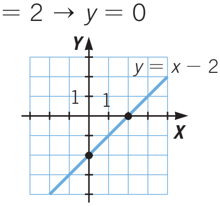
g) $x = 0 \rightarrow y = 0$
$x = 1 \rightarrow y = -0{,}4$



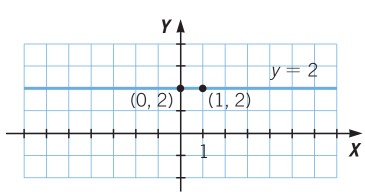
d) $x = 0 \longrightarrow y = 0$
$x = -1 \rightarrow y = 4$



h) $x = 0 \rightarrow y = -2$
$x = 2 \rightarrow y = 0$



014 **Estudia la recta que pasa por (0, 2) y (1, 2).**



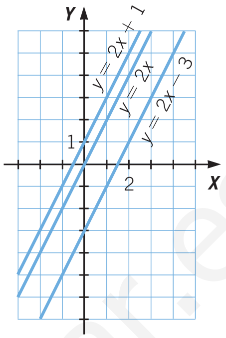
Es una recta paralela al eje X.
Su expresión algebraica es $y = 2$.

015 **Representa, en unos mismos ejes, las funciones y explica sus diferencias.**

a) $y = 2x$

b) $y = 2x - 3$

c) $y = 2x + 1$



Son rectas paralelas que se diferencian en el valor de la ordenada en el origen.

016 **Obtén la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos.**

a) $A(1, 6)$ y $B(3, 9)$

b) $A(-1, 0)$ y $B(0, 4)$

c) $A(-3, 6)$ y $B(2, -4)$

d) $A(2, 4)$ y $B(3, 1)$

e) $A(-1, -2)$ y $B(2, 5)$

a) $m = \frac{9-6}{3-1} = \frac{3}{2} \to 6 = \frac{3}{2} \cdot 1 + n \to 6 - \frac{3}{2} = n \to n = \frac{9}{2}$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

b) $m = \frac{4-0}{0-(-1)} = 4 \to 0 = 4 \cdot (-1) + n \to n = 4$

$y = 4x + 4$

c) $m = \frac{-4-6}{2-(-3)} = \frac{-10}{5} = -2 \to 6 = -2 \cdot (-3) + n \to n = 0$

$y = -2x$

d) $m = \frac{1-4}{3-2} = -3 \to 4 = -3 \cdot 2 + n \to n = 10$

$y = -3x + 10$

e) $m = \frac{5-(-2)}{2-(-1)} = \frac{7}{3} \to -2 = \frac{7}{3} \cdot (-1) + n \to n = -2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$

017 **Comprueba si las rectas anteriores pasan por el punto de coordenadas (1, 1). ¿Corresponde alguna a una función afín?**

a) $1 \neq \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 6$. No pertenece.

b) $1 \neq 4 + 4 = 8$. No pertenece.

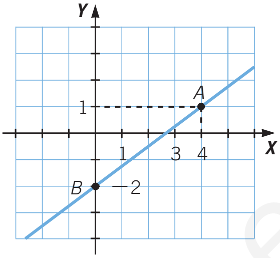
c) $1 \neq -2$. No pertenece.

d) $1 \neq -3 + 10 = 7$. No pertenece.

e) $1 \neq \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. No pertenece.

Son funciones afines, menos la función del apartado c) que es lineal.

018 **Halla la ecuación de la recta de esta gráfica.**



Como pasa por (4, 1) y (0, −2) $\rightarrow m = \frac{3}{4}$

Y como pasa por (0, −2)

$$\rightarrow -2 = \frac{3}{4} \cdot 0 + n \rightarrow n = -2$$

La ecuación de la recta es: $y = \frac{3}{4}x - 2$

019 **Calcula la ecuación de la recta que tiene la misma pendiente que la recta que pasa por los puntos *A*(3, 5) y *B*(−1, 4) y pasa, a su vez, por *C*(5, 0).**

$m = \frac{4-5}{-1-3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$. Como pasa por (5, 0) $\rightarrow 0 = \frac{1}{4} \cdot 5 + n$

$\rightarrow n = -\frac{5}{4}$. La ecuación de la recta es: $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \rightarrow y = \frac{x-5}{4}$

020 **Determina la posición relativa de estas parejas de rectas.**

a) $\boldsymbol{y = x + 2}$, $\boldsymbol{y = -x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{y = 6x}$, $\boldsymbol{y = 6x - 5}$ **c)** $\boldsymbol{y = 2x + 3}$, $\boldsymbol{y = 2x - 11}$ **d)** $\boldsymbol{y = x - 9}$, $\boldsymbol{y = -x + 9}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 1 \\ m' = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Son secantes.
Sumando ambas ecuaciones:

$$2y = 4 \rightarrow y = 2 \rightarrow 2 = x + 2 \rightarrow x = 0 \rightarrow P(0, 2)$$

b) $\left.\begin{array}{l} y = 6x \\ y = 6x - 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 6 \\ m' = 6 \end{array}\right\} \longrightarrow$ Son paralelas.

c) $\left.\begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 2 \\ m' = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow$ Son paralelas.

d) $\left.\begin{array}{l} y = x - 9 \\ y = -x + 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 1 \\ m' = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Son secantes.
Sumando ambas ecuaciones:

$$2y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = x - 9 \rightarrow x = 9 \rightarrow P(9, 0)$$

021 **Halla el punto de corte de las rectas.**

a) $\boldsymbol{y = x + 8}$, $\boldsymbol{y = 2x}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3x + 1}$, $\boldsymbol{y = 6x + 2}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = x + 8 \\ y = 2x \end{array}\right\} \rightarrow x + 8 = 2x \rightarrow x = 8 \rightarrow y = 16$

Se cortan en el punto $P(8, 16)$.

b) $\left.\begin{array}{l} y = 3x + 1 \\ y = 6x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow 3x + 1 = 6x + 2 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow y = 0$

Se cortan en el punto $P\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

022 **Calcula las coordenadas de los vértices de un triángulo que tiene sus lados en las rectas:**

$$r: y = -x + 5 \qquad s: y = x + 7 \qquad t: y = 2x - 9$$

Los vértices son la solución de los tres sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 5 \\ y = x + 7 \end{array}\right\} \rightarrow -x + 5 = x + 7 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 6. \text{ Solución: } (-1, 6)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 5 \\ y = 2x - 9 \end{array}\right\} \rightarrow -x + 5 = 2x - 9 \rightarrow x = \frac{14}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}. \text{ Solución: } \left(\frac{14}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 9 \\ y = x + 7 \end{array}\right\} \rightarrow 2x - 9 = x + 7 \rightarrow x = 16 \rightarrow y = 23. \text{ Solución: } (16, 23)$$

023 **Escribe tres rectas secantes y tres paralelas a las siguientes rectas.**

a) $y = -x + 4$ **b)** $y = 3x - 7$ **c)** $y = -6x - 1$ **d)** $y = 4$

a) $y = -x + 4$
Rectas secantes: $y = 3x - 1$ $y = x - 4$ $y = 2x + 3$
Rectas paralelas: $y = -x + 1$ $y = -x - 1$ $y = -x + 2$

b) $y = 3x - 7$
Rectas secantes: $y = x - 7$ $y = -x + 1$ $y = 2x - 1$
Rectas paralelas: $y = 3x - 1$ $y = 3x + 1$ $y = 3x + 2$

c) $y = -6x - 1$
Rectas secantes: $y = x + 1$ $y = 6x - 5$ $y = -x + 3$
Rectas paralelas: $y = -6x + 1$ $y = -6x - 2$ $y = -6x$

d) $y = 4$
Rectas secantes: $y = x - 1$ $y = x$ $y = x + 1$
Rectas paralelas: $y = 0$ $y = -1$ $y = 2$

024 **En un puesto del mercado hemos visto la siguiente oferta: «Una bolsa de 10 kg de tomates cuesta 16 €».**

a) Si lo consideramos una función, ¿qué variables estamos relacionando?
b) Expresa la función de todas las formas posibles.
c) ¿Qué tipo de función es?
d) ¿Cuánto cuesta una bolsa de 7 kg?

a) Relacionamos el número de kilos de tomates (variable independiente) con el precio (variable dependiente).

b) $$\left.\begin{array}{r} 10 \text{ kg} \text{ — } 16\text{ €} \\ 1 \text{ kg} \text{ — } y\text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{16 \cdot 1}{10} = 1{,}6 \rightarrow y = 1{,}6x$$

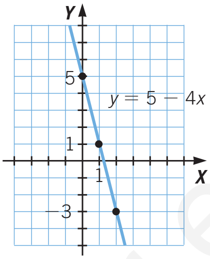
c) Es una función lineal.

d) $y = 1{,}6 \cdot 7 = 11{,}20$ €

025 **La temperatura, en un lugar de la Antártida, a las 12 h es de 5 °C y cada hora baja 4 °C. Expresa la función de todas las maneras posibles.**

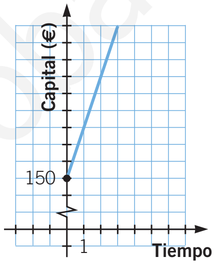
$y = 5 - 4x$, siendo x el número de horas transcurridas desde las 12 h, e y la temperatura (en °C).

x	0	1	2	3	4
y	5	1	−3	−7	−11



026 **La ecuación que nos da el interés de un depósito bancario es $y = 3 \cdot t$. Si el capital invertido es 150 €, halla la ecuación que relaciona el capital con el tiempo, y represéntala.**

Capital = Capital invertido + Interés → $C = 150 + 3t$



027 **Calcula gráficamente el punto de corte de las siguientes rectas:**

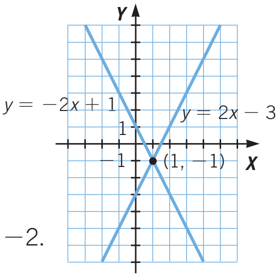
$$y = 2x - 3 \qquad y = -2x + 1$$

Estudia también sus propiedades.

Son rectas afines, que se cortan en el punto (1, −1).

La recta $y = 2x - 3$ es creciente, con pendiente 2.

La recta $y = -2x + 1$ es decreciente, con pendiente −2.

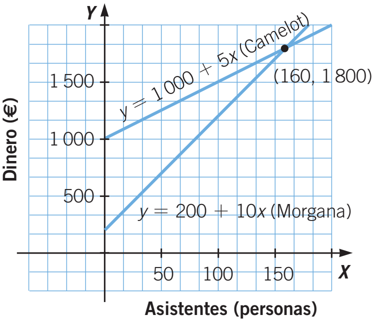


028 **Para celebrar la fiesta de fin de curso, un grupo de amigos alquila un local, y eligen entre dos locales cuyas ofertas son:**

CAMELOT: 1 000 € y 5 € por asistente.

MORGANA: 200 € y 10 € por asistente.

La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas. ¿Cuál de ellos elegirías?



La ecuación del coste respecto de los asistentes es:

CAMELOT: $y = 1\,000 + 5x$

MORGANA: $y = 200 + 10x$

Si el número de asistentes es menor de 160 es preferible elegir Morgana, pero en caso de ser mayor de 160 es mejor Camelot.

029 **Un tren sale de Retortillo con destino a Villoria a una velocidad de 90 km/h. En ese momento sale otro tren de Villoria a Retortillo a 100 km/h.**

Si la distancia entre las dos poblaciones es de 344 km, ¿a qué distancia de ambas se cruzan los trenes?

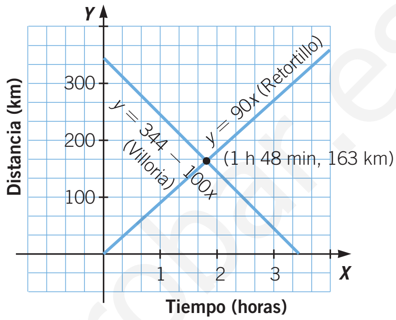
La ecuación del trayecto de los trenes en función del tiempo es:

Salida de Retortillo: $y = 90x$

Salida de Villoria: $y = 344 - 100x$

El punto de corte de las dos rectas es (1 h 48 min, 163 km).

Luego se cruzan a 163 km de Retortillo.



ACTIVIDADES

030 ●● **Una función lineal pasa por el punto de coordenadas (2, 8). Determina su pendiente y su ecuación. ¿Es creciente o decreciente?**

$y = mx \rightarrow 8 = m \cdot 2 \rightarrow m = 4 \rightarrow y = 4x \rightarrow$ Es creciente.

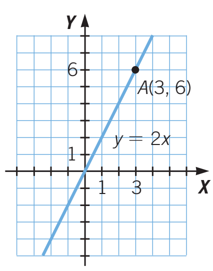
031 ● **Este es el gráfico de una función de proporcionalidad directa. Dibuja los ejes si el punto *A* tiene de abscisa $x = 3$.**

a) ¿Cuál es la ordenada del punto *A*?

b) ¿Y la expresión algebraica de la función?

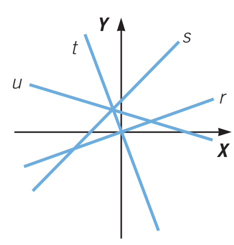
a) La ordenada en *A* es 6.

b) $y = 2x$



032 ● **Clasifica estas funciones en lineales y afines. ¿Cómo lo haces?**

Son lineales las funciones *r* y *t*. Son afines las funciones *s* y *u*. Las funciones lineales son rectas que pasan por el origen de coordenadas.



033 ● **Clasifica las funciones.**

a) $y = -\frac{1}{3}x$ **b)** $y = -0{,}25x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x + 5$ **d)** $y = 1{,}7x$

Son lineales las funciones de a), b) y d). Es afín la función del apartado c).

034 ● **En las siguientes funciones, señala cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen.**

a) $y = -3x + 6$ **b)** $y = 10x$ **c)** $y = -2x - 5$ **d)** $y = -9x$

a) Pendiente: -3. Ordenada en el origen: 6.
b) Pendiente: 10. Ordenada en el origen: 0.
c) Pendiente: -2. Ordenada en el origen: -5.
d) Pendiente: -9. Ordenada en el origen: 0.

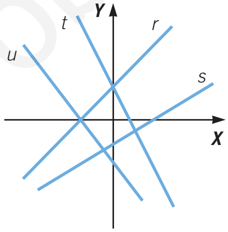
035 ● **Clasifica las funciones en crecientes y decrecientes sin representarlas. ¿Cómo lo haces?**

a) $y = 12x - 3$ **c)** $y = 0{,}25x - 3$ **e)** $y = -\dfrac{12}{5}x$

b) $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{2}{3}$ **d)** $y = -7x - 4$ **f)** $y = 0{,}7x + 0{,}65$

Son crecientes a), b), c) y f), porque tienen pendientes positivas.
Y son decrecientes d) y e), por tener pendientes negativas.

036 ●● **Determina el signo de la pendiente y de la ordenada en el origen de estas funciones:**

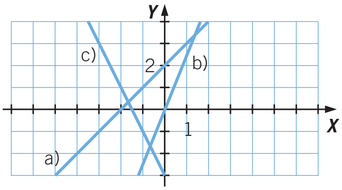


Recta r: $m > 0$ y $n > 0$ Recta t: $m < 0$ y $n > 0$
Recta s: $m > 0$ y $n < 0$ Recta u: $m < 0$ y $n < 0$

El signo de la pendiente lo deducimos por la inclinación de la recta, y el de la ordenada en el origen, por el punto de corte con el eje Y.

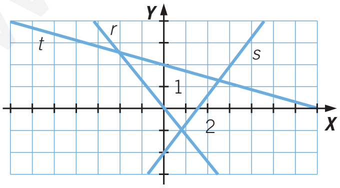
037 ● **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = x + 2$
b) $y = 2{,}5x$
c) $y = -2x - 3$



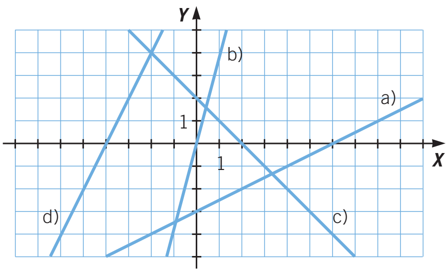
038 ●● **Dibuja en unos ejes de coordenadas.**

a) Una función lineal de pendiente negativa.
b) Una función afín de pendiente positiva y ordenada en el origen negativa.
c) Una función afín de pendiente negativa y ordenada en el origen positiva.



a) Recta r
b) Recta s
c) Recta t

039 ● **Calcula las expresiones algebraicas de las funciones representadas por estas rectas.**



a) Pasa por (0, −3) y (6, 0) → $m = \frac{1}{2}$. Como pasa por (0, −3)
→ $-3 = 0 + n \rightarrow n = -3$. La ecuación de la recta es: $y = \frac{x}{2} - 3$

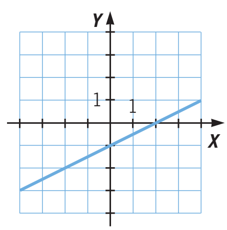
b) Pasa por (0, 0) y (1, 4) ⟶ $m = 4$. Como pasa por (0, 0) → $0 = 0 + n$
→ $n = 0$. La ecuación de la recta es: $y = 4x$

c) Pasa por (0, 2) y (2, 0) ⟶ $m = -1$. Como pasa por (0, 2) → $2 = 0 + n$
→ $n = 2$. La ecuación de la recta es: $y = -x + 2$

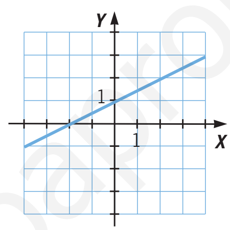
d) Pasa por (0, 8) y (−4, 0) → $m = 2$. Como pasa por (0, 8) → $8 = 0 + n$
→ $n = 8$. La ecuación de la recta es: $y = 2x + 8$

040 ¿Cuál es la representación de $y = -\frac{1}{2}x - 1$?

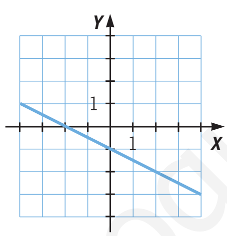
a)



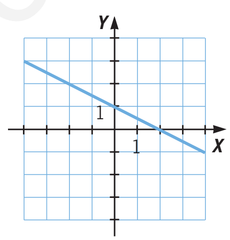
c)



b)



d)



Como la función tiene pendiente negativa es decreciente, y como además pasa por (0, −1), la solución es la del apartado b).

041 **Di qué puntos pertenecen a la gráfica de la función $y = 3x - 6$.**

***A*(1, 3)** ***B*(−1, −9)** ***C*(1, −9)** ***D*(11, 27)** ***E*(−4, −6)** ***F*(5, 9)**

$A(1, 3) \longrightarrow y = 3 \cdot 1 - 6 = -3 \neq 3$
$B(-1, -9) \rightarrow y = 3 \cdot (-1) - 6 = -9$
$C(1, -9) \longrightarrow y = 3 - 6 = -3 \neq -9$
$D(11, 27) \longrightarrow y = 3 \cdot 11 - 6 = 33 - 6 = 27$
$E(-4, -6) \rightarrow y = 3 \cdot (-4) - 6 = -18 \neq -6$
$F(5, 9) \longrightarrow y = 3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9$

Pertenecen a la función los puntos *B*, *D* y *F*.

042 **Escribe cuatro puntos que pertenezcan a cada una de estas rectas.**

a) $y = 2x - 5$ **b)** $y = -3x - 2$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ **d)** $y = 0,25x - 3$

a) Para $x = 0 \longrightarrow y = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \rightarrow (0, -5)$
Para $x = 1 \longrightarrow y = 2 \cdot 1 - 5 = -3 \rightarrow (1, -3)$
Para $x = -1 \rightarrow y = 2 \cdot (-1) - 5 = -7 \rightarrow (-1, -7)$
Para $x = 2 \longrightarrow y = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \rightarrow (2, -1)$

b) Para $x = 0 \longrightarrow y = -3 \cdot 0 - 2 = -2 \rightarrow (0, -2)$
Para $x = 1 \longrightarrow y = -3 \cdot 1 - 2 = -5 \rightarrow (1, -5)$
Para $x = -1 \rightarrow y = -3 \cdot (-1) - 2 = 1 \rightarrow (-1, 1)$
Para $x = 2 \longrightarrow y = -3 \cdot 2 - 2 = -8 \rightarrow (2, -8)$

c) Para $x = 0 \longrightarrow y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Para $x = 1 \longrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} = -2 \rightarrow (1, -2)$

Para $x = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{3}{2} = -1 \rightarrow (-1, -1)$

Para $x = 2 \longrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \rightarrow \left(2, -\frac{5}{2}\right)$

d) Para $x = 0 \longrightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$
Para $x = 1 \longrightarrow y = 0{,}25 \cdot 1 - 3 = -2{,}75 \rightarrow (1; -2{,}75)$
Para $x = -1 \rightarrow y = 0{,}25 \cdot (-1) - 3 = -3{,}25 \rightarrow (-1; -3{,}25)$
Para $x = 2 \longrightarrow y = 0{,}25 \cdot 2 - 3 = -2{,}5 \rightarrow (2; -2{,}5)$

043 ●●
Di si estas ecuaciones son de funciones lineales o afines, y si son, o no, crecientes o decrecientes.

a) $y + 6x = 4$ **c)** $x - 5y = 0$ **e)** $y - 3x = 0$
b) $5x + y = 0$ **d)** $x = 3y$ **f)** $2x - y = 5$

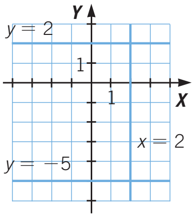
a) $y = -6x + 4 \rightarrow$ Función afín: $m = -6$, y decreciente.
b) $y = -5x \longrightarrow$ Función lineal: $m = -5$, y decreciente.
c) $y = \frac{x}{5} \longrightarrow$ Función lineal: $m = \frac{1}{5}$, y creciente.
d) $y = \frac{x}{3} \longrightarrow$ Función lineal: $m = \frac{1}{3}$, y creciente.
e) $y = 3x \longrightarrow$ Función lineal: $m = 3$, y creciente.
f) $y = 2x - 5 \longrightarrow$ Función afín: $m = 2$, y creciente.

044 ●●
Representa las siguientes rectas.

a) $y = 2$ **b)** $y = -5$ **c)** $x = 2$

¿Cuáles de ellas corresponden a gráficas de funciones? ¿De qué tipo de funciones se trata?

a) y b) son funciones. Son funciones constantes $y = k$.



045 ●●

Determina la ecuación y el tipo de función a partir de su descripción.

a) Su gráfica pasa por el origen y por el punto de coordenadas (3, −4).

b) Su pendiente es $m = -4$ y pasa por (1, 5).

c) Su ordenada es $n = 2$ y pasa por (2, 6).

a) $-4 = m \cdot 3 \rightarrow m = -\frac{4}{3}$

Función $y = -\frac{4}{3}x$. Es lineal.

b) $y = mx + n \rightarrow 5 = -4 \cdot 1 + n \rightarrow n = 9$

Función $y = -4x + 9$. Es afín.

c) $6 = m \cdot 2 + 2 \rightarrow 4 = 2m \rightarrow m = 2$

Función $y = 2x + 2$. Es afín.

046 ●

Dados los puntos $A(0, -3)$ y $B(3, 5)$:

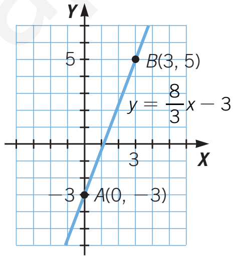
a) Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por ellos.

b) ¿Cuál es su ecuación? Represéntala.

a) $m = \frac{5+3}{3-0} = \frac{8}{3}$

Como pasa por (0, −3), la ordenada en el origen es −3.

b) $y = \frac{8}{3}x - 3$



047 ●

Obtén la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos, e indica de qué tipo de función se trata.

a) (1, 5) y (−3, −15)

b) (0, 2) y (1, 4)

c) (2, 4) y (4, 6)

d) (−1, 4) y (3, −12)

a) $m = \frac{-15-5}{-3-1} = \frac{-20}{-4} = 5 \rightarrow y = 5x + n$

Sustituimos el punto $A(1, 5)$:

$5 = 5 \cdot 1 + n \rightarrow n = 0 \rightarrow y = 5x \rightarrow$ Función lineal

b) $m = \frac{4-2}{1-0} = 2 \rightarrow y = 2x + n$

Sustituimos el punto $A(0, 2)$:

$2 = 2 \cdot 0 + n \rightarrow n = 2 \rightarrow y = 2x + 2 \rightarrow$ Función afín

c) $m = \frac{6-4}{4-2} = 1 \rightarrow y = x + n$

Sustituimos el punto $A(2, 4)$:

$4 = 2 + n \rightarrow n = 2 \rightarrow y = x + 2 \rightarrow$ Función afín

d) $m = \dfrac{-12 - 4}{3 - (-1)} = \dfrac{-16}{4} = -4 \rightarrow y = -4x + n$

Sustituimos el punto $A(-1, 4)$:
$4 = -4 \cdot (-1) + n \rightarrow 4 = 4 + n \rightarrow n = 0 \rightarrow y = -4x \rightarrow$ Función lineal

048 ●

Determina la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = 1$ y pasa por el origen.

La ecuación es $y = x$.

049 ●●●

Halla la ecuación de una recta:

a) Que pase por $A(2, 4)$ y tenga la misma pendiente que $y = -3x - 5$.

b) Que tenga igual pendiente que $3x + 2y = 6$ y pase por $B(-2, 3)$.

a) $y = -3x + n \rightarrow 4 = -3 \cdot 2 + n \rightarrow n = 10 \rightarrow y = -3x + 10$

b) $2y = 6 - 3x \rightarrow y = 3 - \dfrac{3}{2}x \rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$

$y = -\dfrac{3}{2}x + n \rightarrow 3 = -\dfrac{3}{2} \cdot (-2) + n \rightarrow 3 = 3 + n \rightarrow n = 0$

$\rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x$

050 ●●

Dada la recta de ecuación $2(x - 5) = 5(y - 3)$:

a) Calcula su pendiente.

b) Determina si pasa por el punto $A(2, 7)$.

a) $m = \dfrac{2}{5}$

b) $2 \cdot (2 - 5) = -6 \neq 5 \cdot (7 - 3) = 20$. No pasa por el punto A.

051 ●

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 5)$ y cuya ordenada en el origen es -4.

Pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(0, -4)$

$\rightarrow m = \dfrac{-4 - 5}{0 + 1} = -9$. La ecuación de la recta es: $y = -9x - 4$

052 ●

Calcula la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto $B(1, 5)$.

Pasa por los puntos $(1, 5)$ y $(0, 0)$ $\rightarrow m = \dfrac{5 - 0}{1 - 0} = 5$

053 ●●

Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas.

La ecuación del eje de abscisas es $y = 0$ y la del eje de ordenadas es $x = 0$.

054 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE COMPRUEBA SI TRES PUNTOS ESTÁN ALINEADOS?

Comprueba si los puntos $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(3, 6)$ están alineados.

Tres puntos están alineados si pertenecen a la misma recta.

PRIMERO. Se halla la recta que pasa por dos puntos.

Se eligen dos puntos: $A(-1, 2)$ y $B(1, 4)$.

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{4 - 2}{1 - (-1)} = 1$$

$$y = 1 \cdot x + n \xrightarrow{A(-1,\,2)} 2 = -1 + n \rightarrow n = 3$$

La recta que pasa por A y B es $y = x + 3$.

SEGUNDO. Se comprueba si el tercer punto pertenece a la recta.

$$y = x + 3 \xrightarrow{C(3,\,6)} 6 = 3 + 3$$

Vemos que C pertenece a la recta que pasa por A y B.

Por tanto, los tres puntos están alineados.

055 **Averigua si los puntos $A\left(1, -\frac{1}{12}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ y $C\left(4, \frac{23}{12}\right)$ están alineados.**

La pendiente de la recta que pasa por A y B es: $m = \dfrac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{12}}{-\frac{3}{4} - 1} = \dfrac{2}{3}$,

y por pasar por A: $-\dfrac{1}{12} = \dfrac{2}{3} + n \rightarrow n = -\dfrac{3}{4}$

La ecuación de la recta es: $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}$. Vemos si C pertenece a la recta:

$\dfrac{23}{12} = \dfrac{2}{3} \cdot 4 - \dfrac{3}{4}$. Por tanto, los tres puntos están alineados.

056 **Dados los puntos $A(2, -1)$, $B\left(-3, -\frac{2}{3}\right)$ y $C(6, k)$, calcula k para que estén alineados.**

La pendiente de la recta es: $m = \dfrac{-\frac{2}{3} + 1}{-3 - 2} = -\dfrac{1}{15}$, y por pasar por A:

$-1 = -\dfrac{1}{15} \cdot 2 + n \rightarrow n = -\dfrac{13}{15}$. La ecuación de la recta es:

$y = -\dfrac{1}{15}x - \dfrac{13}{15}$, y para que pase por $C \rightarrow k = -\dfrac{1}{15} \cdot 6 - \dfrac{13}{15} = -\dfrac{19}{15}$

057 **Obtén la recta que pasa por $A(2, 3)$ y $B(1, -3)$. Halla el valor de p para que el punto $C(p, -5)$ pertenenezca a la recta.**

$$m = \frac{-3 - 3}{1 - 2} = 6 \rightarrow y = 6x + n$$

Sustituimos el punto $A(2, 3)$: $3 = 6 \cdot 2 + n \rightarrow n = 3 - 12 = -9 \rightarrow y = 6x - 9$

Y sustituimos el punto $C(p, -5)$: $-5 = 6p - 9 \rightarrow 4 = 6p \rightarrow p = \dfrac{2}{3}$

058 ●● **Los puntos $A(2, 3)$, $B(3, 4)$ y $C(5, 7)$, ¿pertenecen a la misma recta? Determínalo sin representarlos. Explica cómo lo haces.**

Tomamos dos de los puntos, A y B, y hallamos la ecuación de la recta que los une:

$$m = \frac{4-3}{3-2} = 1 \rightarrow y = x + n \rightarrow 3 = 2 + n \rightarrow n = 1 \rightarrow y = x + 1$$

Luego comprobamos si el punto $C(5, 7)$ pertenece o no a la recta:

$y = 5 + 1 = 6 \neq 7 \rightarrow$ Los tres puntos no pertenecen a la misma recta.

059 ● **Determina, sin representarlas, si las siguientes parejas de rectas son secantes o paralelas.**

a) $y = -4x + 2$ $\quad y = 4x + 1$ $\qquad$ **c)** $y = 2x + 3$ $\quad y = -2x - 11$

b) $y = -3x$ $\quad y = -3x + 6$ $\qquad$ **d)** $y = 1{,}5x$ $\quad y = -1{,}5x$

Comprobamos si ambas rectas tienen o no la misma pendiente:

a) $m = -4 \qquad m' = 4 \longrightarrow$ Son secantes.

b) $m = -3 \qquad m' = -3 \longrightarrow$ Son paralelas.

c) $m = 2 \qquad m' = -2 \longrightarrow$ Son secantes.

d) $m = 1{,}5 \qquad m' = -1{,}5 \rightarrow$ Son secantes.

060 ● **Obtén, de forma algebraica y gráfica, el punto de corte de cada par de rectas.**

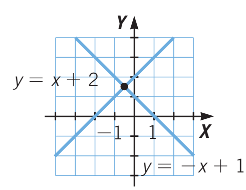
a) $y = x + 2$ $\quad y = -x + 1$ $\qquad$ **c)** $y = 2x$ $\quad y = -2x + 4$

b) $y = -3x$ $\quad y = 3x + 6$ $\qquad$ **d)** $y = 3x$ $\quad y = 2x - 5$

a) $x + 2 = -x + 1 \rightarrow 2x = -1$

$\rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow y = -\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2}$

$P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

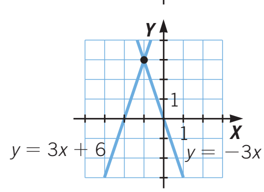


b) $-3x = 3x + 6$

$\rightarrow -6x = 6 \rightarrow x = -1$

$y = -3 \cdot (-1) = 3$

$P(-1, 3)$

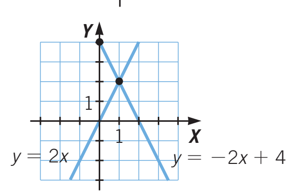


c) $2x = -2x + 4$

$\rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$

$y = 2 \cdot 1 = 2$

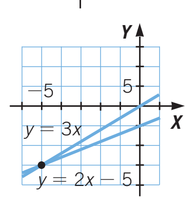
$P(1, 2)$



d) $3x = 2x - 5 \rightarrow x = -5$

$y = 3 \cdot (-5) = -15$

$P(-5, -15)$



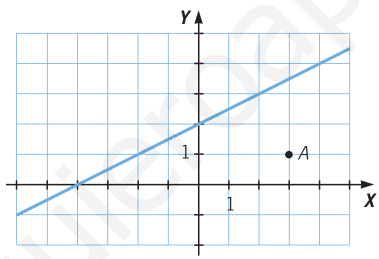
061 Escribe la ecuación de tres rectas paralelas y tres secantes a las siguientes rectas.

a) $y = 9x - 6$ **b)** $y = -7x$ **c)** $y = -11x + 13$ **d)** $y = x$

Las rectas paralelas tendrán la misma pendiente (m) y distinta ordenada en el origen (n). Las rectas secantes tendrán distinta pendiente.

a)	Rectas paralelas:	$y = 9x$	$y = 9x - 1$	$y = 9x + 3$
	Rectas secantes:	$y = x$	$y = x + 5$	$y = -x + 1$
b)	Rectas paralelas:	$y = -7x + 1$	$y = -7x - 1$	$y = -7x + 3$
	Rectas secantes:	$y = x$	$y = 2x - 3$	$y = 7x$
c)	Rectas paralelas:	$y = -11x$	$y = -11x + 1$	$y = -11x - 1$
	Rectas secantes:	$y = x$	$y = x - 1$	$y = 3x + 5$
d)	Rectas paralelas:	$y = x + 3$	$y = x - 4$	$y = x + 1$
	Rectas secantes:	$y = 3x + 2$	$y = -2x + 5$	$y = 8x - 3$

062 Determina una recta que, siendo paralela a la recta de la figura, pase por el punto *A*.



La pendiente es: $m = \dfrac{2-0}{0+4} = \dfrac{1}{2}$, y por pasar por $A(3, 1)$:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 + n \rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta es: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

063 Dada la recta r: $2x - 3y = 12$, calcula.

a) La recta s, paralela a r, y que pasa por $B(-3, 2)$.

b) La recta t, que tenga la misma ordenada en el origen que r, y pase por el punto $A(2, -7)$.

c) La recta z, paralela a t, y que pasa por el origen.

a) Por ser paralela a r, es de la forma $2x - 3y = c$, y por pasar por $(-3, 2)$ $\rightarrow -6 - 6 = c \rightarrow c = -12$. La recta es: $2x - 3y = -12$

b) La ordenada en el origen es -4, y como pasa por $(0, -4)$ y $(2, -7)$:

$m = \dfrac{-7+4}{2-0} = -\dfrac{3}{2}$. La ecuación de la recta es: $y = -\dfrac{3}{2}x - 4$

c) Por ser paralela a t y pasar por el origen de coordenadas, $y = -\dfrac{3}{2}x$

064 Determina la ecuación de una recta.

a) Que pase por $A(-1, -3)$ y sea paralela a la recta $y = -3x - 5$.

b) Que pase por $A(-2, -1)$ y sea paralela a la recta que pasa por $B(1, 0)$ y $C(0, 4)$.

a) Por ser paralela, tenemos que: $m = -3 \rightarrow y = -3x + n$

Sustituimos $A(-1, -3) \rightarrow -3 = -3 \cdot (-1) + n \rightarrow n = -6$
$\rightarrow y = -3x - 6$

b) $m = \dfrac{4 - 0}{0 - 1} = -4 \rightarrow y = -4x + n$

Sustituimos $A(-2, -1) \rightarrow -1 = -4 \cdot (-2) + n \rightarrow n = -9$
$\rightarrow y = -4x - 9$

065 Obtén la ecuación de una recta:

a) Que pasa por $A(-1, 0)$ y es paralela al eje Y.

b) Que pasa por $B(0, 4)$ y es paralela al eje X.

c) Que pasa por $C(3, 0)$ y es paralela al eje X.

d) Que pasa por $D(0, -2)$ y es paralela al eje Y.

a) Es paralela al eje $Y \rightarrow x = k$

Pasa por $(-1, 0) \rightarrow x = -1$

b) Es paralela al eje $X \rightarrow m = 0 \rightarrow y = n$

Pasa por $(0, 4) \rightarrow y = 4$

c) Es paralela al eje $X \rightarrow m = 0 \rightarrow y = n$

Pasa por $(3, 0) \rightarrow y = 0$

d) Es paralela al eje $Y \rightarrow x = k$

Pasa por $(0, -2) \rightarrow x = 0$

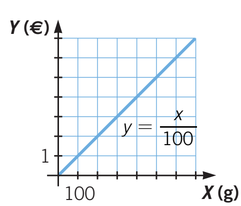
066 Pilar quiere comprar patatas fritas a granel para celebrar su cumpleaños. Una bolsa de 200 gramos le cuesta 2 €.

a) Estudia y representa gráficamente la función que relaciona los gramos comprados y el precio.

b) ¿Cuánto costará comprar medio kilo?

a) $y = \dfrac{2}{200} \cdot x = \dfrac{x}{100}$

siendo x = peso (g)
y = precio (€)



b) $y = \dfrac{500}{100} = 5$ €

067 ●●

Una motocicleta se desplaza a una velocidad constante de 35 km/h.

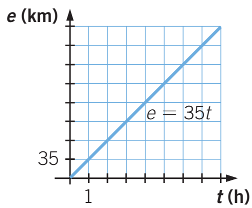
a) Escribe la ecuación de la función que relaciona el tiempo con el espacio recorrido.

b) ¿De qué tipo es? Obtén su gráfica.

c) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 245 km?

a) $e = 35t$, siendo t = tiempo (h)
e = espacio (km)

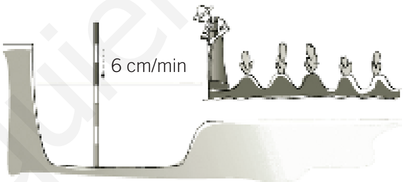
b) Es una función lineal.



c) Para $e = 245 \rightarrow 245 = 35t \rightarrow t = 7$ h

068 ●●

Al abrir las compuertas de un estanque, el nivel de agua inicial es de 120 cm, y desciende a razón de 6 cm por minuto.



a) Haz una tabla en la que se refleje el nivel de agua (cm) en función del tiempo (minutos).

b) ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

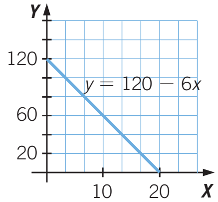
c) ¿Qué nivel de agua habrá a los 15 minutos?

d) ¿Cuánto tarda el estanque en vaciarse?

a)

Tiempo (minutos)	0	1	2	10	20
Nivel (cm)	120	114	108	60	0

b) $y = 120 - 6x \rightarrow$ Función afín



c) $x = 15 \rightarrow y = 120 - 6 \cdot 15 = 30$ cm

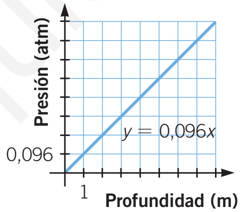
d) $y = 0 \rightarrow 120 - 6x = 0 \rightarrow x = 20$ minutos

069 **La siguiente tabla relaciona la presión que ejerce el agua en el mar y la profundidad a la que estamos.**

Profundidad (m)	1	2	3	10
Presión (atm)	0,096	0,192	0,288	0,96

Estudia la función que relaciona ambas magnitudes y represéntala. ¿Qué presión ejercerá el agua en la Fosa de las Marianas, cuya profundidad es 11 033 m?

$y = 0{,}096x$, siendo $x =$ profundidad (m)
$y =$ presión (atm)



Para $x = 11\,033$ m $\rightarrow y = 0{,}096 \cdot 11\,033 = 1\,059{,}17$ atm

070 **A nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, pero cada incremento de 100 m en la altitud supone una décima de grado menos para hervir.**

a) Calcula el punto de ebullición en las cimas del Aneto (3 404 m) y del Everest (8 850 m).

b) Indica la expresión algebraica de la función *Temperatura de ebullición–Altitud*.

a) En el Aneto hierve a: $100 - (3\,404 : 100) \cdot 0{,}1 = 95{,}596$ °C

En el Everest hierve a: $100 - (8\,850 : 100) \cdot 0{,}1 = 91{,}596$ °C

b) $y = 100 - \dfrac{x}{1\,000}$

071 ●●

Un corredor sale del kilómetro 2 de un maratón con una velocidad de 9 km/h.

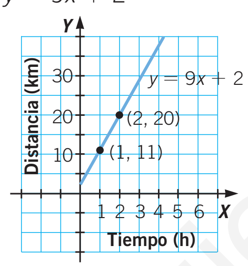
a) Completa la tabla.

b) Escribe la expresión algebraica de la función *Distancia – Tiempo* y represéntala gráficamente.

a)

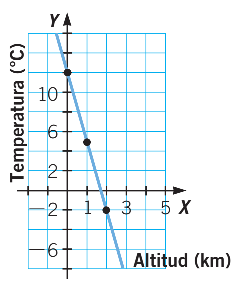
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4
Distancia (al km 0)	2	11	20	29	38

b) $y = 9x + 2$



072 ●

La gráfica siguiente refleja la temperatura atmosférica (°C) en función de la altitud (km).



a) Escribe la expresión algebraica de la función *Altitud – Temperatura*.

b) ¿Cuál es su ordenada en el origen? ¿Qué significado tiene?

c) ¿Qué temperatura habrá a 9 km de altitud?

a) Como pasa por (0, 12) y (2, −2) $\rightarrow m = -7$
Y como pasa por (0, 12) $\rightarrow 12 = 0 + n$
$\rightarrow n = 12$. La ecuación de la recta es: $y = -7x + 12$

b) La ordenada en el origen es 12, y esto significa que a nivel del mar la temperatura del aire es 12 °C.

c) Habrá una temperatura de −51 °C.

073 ●●●

El coste fijo en la factura mensual del agua es de 10 € al mes. A eso hay que añadir el precio por metro cúbico, que depende del consumo.

- **Consumos menores que 80 m³: 0,90 €**
- **Consumos entre 80 m³ y 120 m³: 1,50 €**
- **Consumos mayores que 120 m³: 2 €**

Representa sobre los mismos ejes las funciones *Consumo–Precio* para cada uno de los tres tramos de consumo.

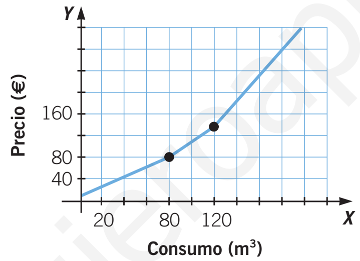
Para consumos de $x < 80$ m³: $y = 10 + 0{,}90x$

Para $x = 80 \rightarrow y = 10 + 72 = 82$ €

Para consumos de 80 m³ $< x <$ 120 m³: $y = 82 + (x - 80) \cdot 1{,}50$

Para $x = 120$ m³ $\rightarrow y = 82 + 40 \cdot 1{,}50 = 142$ €

Para consumos de $x > 120$ m³: $y = 142 + (x - 120) \cdot 2$

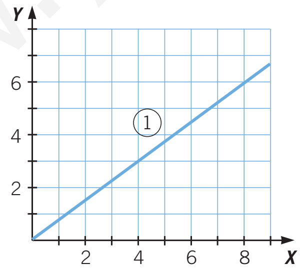


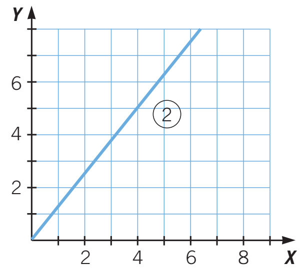
074 ●●●

Elena ha hecho el gráfico del precio final de un artículo en función del precio inicial, después de aplicarle un 25 % de descuento.

a) ¿Cuál de los siguientes gráficos es el más adecuado para representar esta función? ¿Por qué?

b) Calcula la ecuación de las rectas.





a) El gráfico más adecuado es el gráfico 1, ya que el precio final es menor que el original. Lo que antes valía 4 ahora valdrá 3. El punto (4, 3) no está en el gráfico 2.

b) Gráfico 1: $y = 0{,}75x$

Gráfico 2: $y = 1{,}25x$

075 Hemos encontrado la siguiente afirmación:

> Si $(a, 0)$ y $(0, b)$ son los puntos de corte de una recta con los ejes, siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces la ecuación de esa recta es:
>
> $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Investiga si es cierta y utilízala para hallar la recta que pasa por los puntos (3, 0) y (0, 5).

Por pasar por $(a, 0)$ y $(0, b)$, la pendiente es $m = \frac{-b}{a}$, por lo que la ecuación es: $y = \frac{-b}{a}x + n$, y por pasar por $(0, b)$, tenemos que $n = b$,

siendo la ecuación: $y = \frac{-b}{a}x + b \rightarrow \frac{y}{b} = \frac{-1}{a}x + 1 \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Luego la ecuación es correcta.

La ecuación de la recta que pasa por (3, 0) y (0, 5) es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$

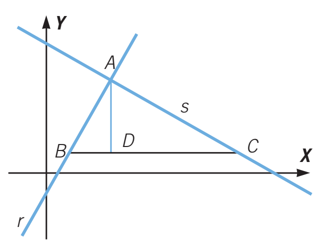
076 Completa el razonamiento.

Sean r y s dos rectas perpendiculares.

La pendiente de r es $\frac{AD}{BD} = m_1$.

Y la pendiente de s es $-\frac{AD}{DC} = m_2$, porque al ser s decreciente, su pendiente será …

El triángulo ABC es … porque $\hat{A}$ es …



Como AD es una … del triángulo ABC, los triángulos ABD y ADC son … y sus lados son …

Así, resulta: $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}$ y $m_1 \cdot m_2 = …$

¿Qué relación existe entre las pendientes de dos rectas perpendiculares?

Sean r y s dos rectas perpendiculares. La pendiente de r es $\frac{AD}{BD} = m_1$.

Y la pendiente de s es $-\frac{AD}{DC} = m_2$, porque al ser s decreciente, su pendiente será negativa. El triángulo ABC es rectángulo porque $\hat{A}$ es un ángulo recto. Como AD es una altura del triángulo ABC, los triángulos ABD y ADC son semejantes y sus lados son proporcionales.

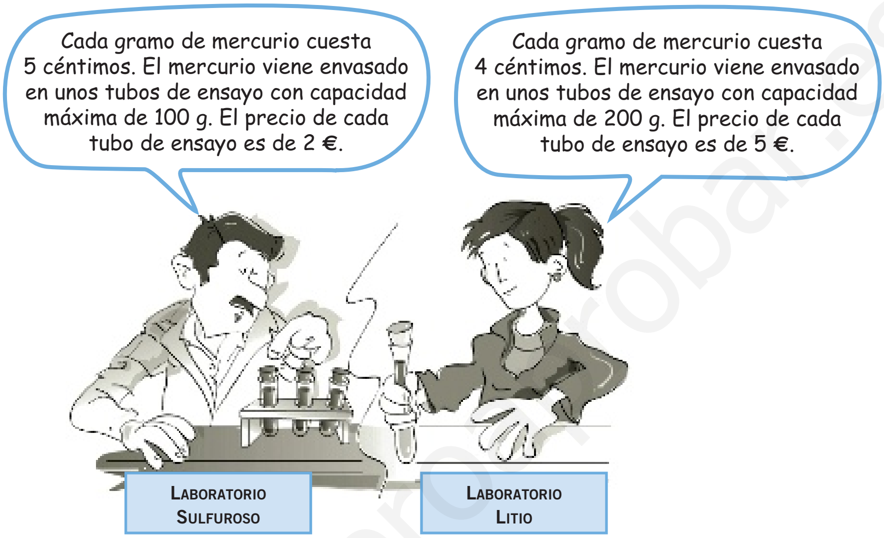
Así, $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}$ y $m_1 \cdot m_2 = \frac{AD}{BD} \cdot \left(\frac{-AD}{DC}\right) = -1$, por lo que $m_1 = \frac{-1}{m_2}$.

La pendiente de una es la opuesta de la inversa de la pendiente de la otra.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

077 ●●●

Para realizar un experimento de química con sus alumnos, el profesor Potasio necesita comprar mercurio. Por ello, acude a dos laboratorios de productos químicos para informarse de los precios y le dan la siguiente información:



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Dibuja sobre unos mismos ejes de coordenadas las gráficas que representan la relación existente entre el precio y la cantidad de mercurio comprado en cada laboratorio.

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

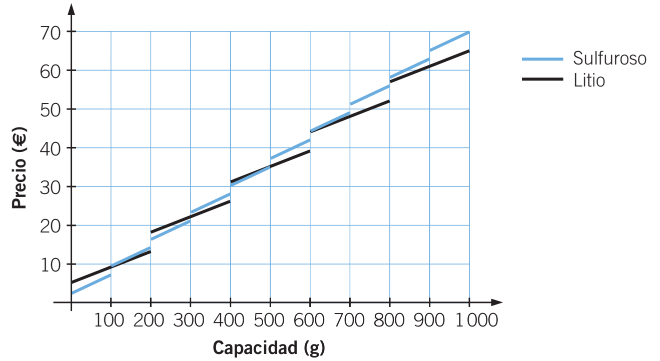
b) ¿Cuánto costarían 400 g de mercurio en el Laboratorio Sulfuroso? ¿Y en el Laboratorio Litio?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si tuviéramos que comprar 350 g, ¿en qué laboratorio sería más barato?

d) ¿Qué laboratorio elegirías si se necesitasen 700 g de mercurio?

a)



b) Sulfuroso: $\frac{2}{100} \cdot 400 + 400 \cdot 0{,}5 = 28$ €

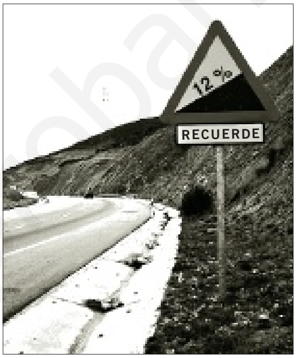
Litio: $\frac{400}{200} \cdot 5 + 400 \cdot 0{,}04 = 26$ €

c) Les interesa comprar en el Laboratorio Sulfuroso.

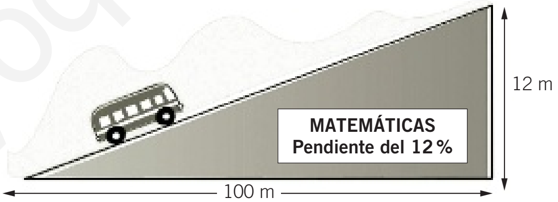
d) El Laboratorio Litio.

078 ●●●

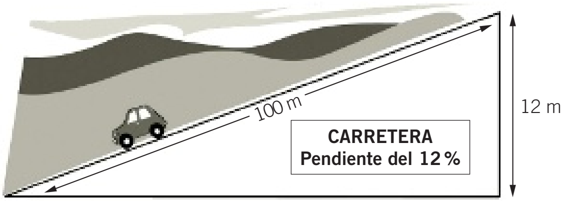
Estas vacaciones, Desi ha viajado a un pueblo de la montaña. Para llegar atravesó carreteras de montaña muy estrechas y empinadas. En una de ellas su hermano vio esta señal y le preguntó qué significaba.



Desi le contó que había estudiado en Matemáticas que la pendiente de una recta marcaba la inclinación que tenía. Entonces dedujo que 12 % significaba que, por cada 100 metros que se avanzan en horizontal, se suben 12 metros en vertical.



Como no estaba muy segura, al llegar a casa consultó el código de circulación. En él vio que en tráfico la pendiente tiene un significado distinto.



Una pendiente del 12 % en carretera significa que por cada 100 metros que recorres subes 12 metros.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) En una pendiente matemática del 12 %, ¿cuántos metros hay que recorrer en la carretera para subir 12 m?

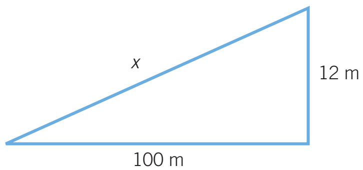
ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿Qué debería indicar una señal de tráfico que marcase una pendiente matemática del 12 %?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) ¿Cuál de las dos pendientes, en la carretera o en Matemáticas, indica mayor inclinación?

a)



Una pendiente matemática del 12 % equivale a un triángulo de catetos 100 m y 12 m.

$$x = \sqrt{100^2 + 12^2} = 100{,}72 \text{ m}$$

b) La pendiente de tráfico es:

$$m = \frac{12}{100{,}72} = 0{,}1191 \rightarrow 11{,}91\,\%$$

c) La pendiente en la carretera indica mayor inclinación, ya que al hacerlo sobre 100 m recorridos, que es la hipotenusa del triángulo, la base o el cateto es menor que 100 m, por lo que con igual pendiente se indica el mismo desnivel, siendo menor el número de metros recorridos en horizontal.

13 Estadística

¡Dios salve a la Reina!

Sidney Herbert, que ocupaba el cargo de Secretario de Estado para la Guerra, había tomado la decisión más arriesgada de su carrera política al encargar a su amiga Florence Nightingale la organización del cuerpo de enfermeras de campaña con objeto de mejorar los hospitales en la guerra de Crimea. Era el año 1854 y su futuro político estaba en manos de aquella dama.

Cuando se preparaba para ir a la zona de conflicto, el país entero se estremeció por la aniquilación de la Brigada Ligera, tras una carga suicida contra las baterías rusas. Esta acción fue difundida, no como un desastre, sino como prueba del valor y el honor de los ingleses.

Nightingale comenzó a aplicar medidas higiénicas, fue recopilando datos y organizándolos mediante gráficos para facilitar su lectura.

El informe, que fue enviado al Secretario de la Guerra, solicitaba ayuda para eliminar las trabas que estaba encontrando entre los mandos del ejército, y concluía con una nota manuscrita que rezaba:

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Florence Nightingale ocupa una página honorífica en la historia de las matemáticas. Busca información sobre su vida y su obra.**

En esta página puedes leer una extensa biografía de Florence Nightingale:
http://www.ibe.unesco.org/publications/ThinkersPdf/nightins.PDF

2 **¿Cuáles fueron las medidas que adoptó Florence para frenar la mortalidad en los hospitales militares?**

En la siguiente página descubrirás cómo aplicó los estudios estadísticos a la organización de los hospitales y las técnicas de enfermería:
http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_3755_biografia_florence_nightingale.htm

3 **¿A qué campo aplicó Florence Nightingale sus estudios de Estadística?**

En la siguiente página hallarás sus aportaciones a la Estadística y el campo donde las aplicó:
http://www.estadisticaparatodos.es/bibliografias/bibliografias.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Define cinco intervalos de la misma amplitud, en los que estén contenidos estos valores:**

14	**16**	**12**	**20**	**10**	**19**	**16**	**14**	**17**	**15**	**12**	**11**	**10**	**12**	**13**
20	**15**	**12**	**14**	**20**	**19**	**13**	**16**	**17**	**12**	**11**	**10**	**14**	**12**	**19**

¿Cuántos valores contiene cada intervalo?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

[10; 12,5) → 11 valores
[12,5; 15) → 6 valores
[15; 17,5) → 7 valores
[17,5; 20) → 3 valores
[20; 22,5) → 3 valores

2 **Define cuatro intervalos de la misma amplitud, en los que estén contenidos estos valores:**

3,5	**5,2**	**6,3**	**3,2**	**4,1**	**6,8**	**6**	**5,1**	**6,3**	**4,9**	**5,4**	**3,7**
4,6	**5,7**	**5**	**6,2**	**5,9**	**4,2**	**7**	**5,3**	**4,6**	**5,3**	**3,8**	**4,2**

¿Cuántos valores contiene cada intervalo?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

[3,2; 4,2) → 5 valores
[4,2; 5,2) → 7 valores
[5,2; 6,2) → 7 valores
[6,2; 7,2) → 5 valores

3 **Calcula el punto medio de los intervalos [1, 3], (−3, −1) y [−3, 1).**

[1, 3] → 2 (−3, −1) → −2 [−3, 1) → −1

EJERCICIOS

001 **Queremos realizar un estudio estadístico de la talla de calzado que usan los alumnos de 3.º ESO de un instituto.**

a) ¿Cuál sería la población?

b) Elige una muestra. ¿Qué tamaño tiene?

a) La población es el conjunto de alumnos de 3.º ESO del instituto.

b) Una muestra es los alumnos de una de las clases. Y su tamaño es el número de alumnos de la clase.

002 **Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra.**

a) La longitud de los tornillos que, ininterrumpidamente, produce una máquina.

b) La estatura de todos los turistas en un año.

c) El peso de un grupo de cinco amigos.

a) Una muestra, pues no podemos medir todos los tornillos.

b) Una muestra, debido a la gran cantidad de turistas que hay.

c) La población, porque es un grupo pequeño.

003 **Este es el titular de un periódico.**

«EL PESO MEDIO DE LOS ESPAÑOLES ES 69 KG.»

a) ¿Cómo crees que se llega a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población?

b) ¿Qué características debe tener la muestra? ¿Podrían ser todos los individuos de la muestra de la misma edad? Si todos son mujeres, ¿sería correcta la muestra?

a) Se ha tomado una muestra representativa de los distintos grupos en que se puede dividir la población, se les ha encuestado y se ha calculado la media. Sería muy costoso y prácticamente imposible preguntar a todos los españoles.

b) La muestra debe ser representativa de las distintas edades y sexos, que deben estar en la misma proporción en que aparecen en la población.

004 **Piensa y escribe un ejemplo de población para hacer un estudio estadístico. ¿Qué muestra podríamos tomar? Indica quiénes son los individuos y cuál es el tamaño de la muestra.**

Población: todos los jóvenes de una determinada ciudad inscritos en equipos de fútbol.

Muestra: todos los jóvenes de un instituto que juegan al fútbol en algún equipo.

Individuos: cada uno de los jóvenes de la muestra anterior.

Tamaño de la muestra: número de jóvenes de la muestra anterior.

005 **Determina si las variables estadísticas son cualitativas o cuantitativas.**

a) Año de nacimiento.
b) Color del pelo.
c) Profesión de una persona.
d) Perímetro torácico.
e) Estado civil.
f) Perímetro de la cintura.
g) Número de veces que se ha viajado en avión.

Son cualitativas: b), c) y e).
Son cuantitativas: a), d), f) y g).

006 **Clasifica estas variables en cualitativas o cuantitativas, y en ese caso, di si son discretas o continuas.**

a) Provincia de residencia.
b) Número de vecinos de un edificio.
c) Profesión del padre.
d) Consumo de gasolina por cada 100 km.

Son cuantitativas: b) y d).
Son cualitativas: a) y c).
Es discreta b) y es continua d).

007 **Si una variable estadística cuantitativa puede tomar infinitos valores, ¿es discreta o continua?**

En principio no tiene que ser necesariamente discreta ni continua. Lo que sí podemos afirmar es que si una variable es continua puede tomar infinitos valores.

Si la variable es discreta, el número de valores que puede tomar en cada tramo es finito, pero la variable puede tomar infinitos valores. Por ejemplo, si preguntamos sobre cuál es el número natural preferido, en principio hay infinitas respuestas, que son todos los números naturales, aunque la variable es discreta.

008 **Las estaturas, en cm, de 28 jóvenes son:**

155	**178**	**170**	**165**	**173**	**168**	**160**
166	**176**	**169**	**158**	**170**	**179**	**161**
164	**156**	**170**	**171**	**167**	**151**	**163**
158	**164**	**174**	**176**	**164**	**154**	**157**

Forma una tabla con intervalos, efectúa el recuento de datos y obtén las marcas de clase de cada intervalo.

Intervalo	Marca de clase	Recuento
[150, 160)	155	7
[160, 170)	165	11
[170, 180)	175	10

009 **El color de pelo (M = moreno, R = rubio, P = pelirrojo) de 30 personas es:**

M R P M M M M R R P
M M P R R R P M M M
P M M M M M R M M M

Construye su tabla de frecuencias.

Color	f_i	h_i	F_i	H_i
Moreno	18	0,6	18	0,6
Rubio	7	0,23	25	0,83
Pelirrojo	5	0,17	30	1
Total	30	1		

010 **¿Por qué los intervalos en las tablas son cerrados por un lado y abiertos por el otro?**

Si fueran abiertos por ambos lados habría un punto que no estaría en ningún intervalo, y si los dos fueran cerrados habría un punto que estaría en dos intervalos, y ambas situaciones no son correctas.

011 **El número de horas diarias que trabajan con el ordenador 30 personas es:**

3	4	0	5	5
3	4	5	0	2
2	5	3	2	0
1	2	2	1	2
0	3	1	2	1
1	2	1	4	3

a) ¿De qué tipo es la variable estadística?

b) Construye la tabla de frecuencias.

a) La variable es cuantitativa discreta.

b)

Horas diarias	f_i	h_i
0	4	0,13
1	6	0,2
2	8	0,27
3	5	0,17
4	3	0,1
5	4	0,13
Total	30	1

012 **Los resultados de un test de inteligencia realizado a 20 personas han sido:**

100	80	92	101	75	93	101	100	121	114
65	72	121	68	102	97	89	73	113	94

Obtén la tabla de frecuencias, tomando intervalos de amplitud 10.

Edad	f_i	h_i
[65, 75)	4	0,2
[75, 85)	2	0,1
[85, 95)	4	0,2
[95, 105)	6	0,3
[105, 115)	2	0,1
[115, 125)	2	0,1
Total	20	1

013 **¿Qué ocurre si la suma de las frecuencias absolutas no es igual al número total de datos?**

Si ocurre esto es porque no hemos contabilizado alguno de los datos o nos hemos equivocado en el cálculo.

014 **Los pesos, en kg, de 24 personas son:**

68,5	**34,2**	**47,5**	**39,2**	**47,3**	**79,2**
46,5	**58,3**	**62,5**	**58,7**	**80**	**63,4**
58,6	**50,2**	**60,5**	**70,8**	**30,5**	**42,7**
59,4	**39,3**	**48,6**	**56,8**	**72**	**60**

a) Agrúpalos en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias.

b) ¿Cuántas personas pesan menos de 50 kg?

c) Calcula el tanto por ciento sobre el total que representa el intervalo de mayor frecuencia absoluta.

a)

Intervalo	f_i	F_i	h_i	H_i
[30, 40)	4	4	4/24 = 0,17	0,17
[40, 50)	5	9	5/24 = 0,21	0,38
[50, 60)	6	15	6/24 = 0,25	0,63
[60, 70)	5	20	5/24 = 0,21	0,84
[70, 80)	3	23	3/24 = 0,12	0,96
[80, 90)	1	24	1/24 = 0,04	1
	24		1	

b) Fijándonos en la columna de las frecuencias absolutas acumuladas, F_i, vemos que 9 personas pesan menos de 50 kg.

c) El intervalo de mayor frecuencia es [50, 60): $f_i = 6$ y $h_i = 0{,}25 \rightarrow 25\,\%$

015 **El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:**

3 4 3 5 5 1 1 1 1 2 3 4 5 0 2

0 3 2 2 1 2 1 3 2 0 1 2 1 4 3

Obtén la tabla de frecuencias. ¿Qué significan las frecuencias acumuladas?

Horas diarias	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	8	0,27	11	0,37
2	7	0,23	18	0,6
3	6	0,2	24	0,8
4	3	0,1	27	0,9
5	3	0,1	30	1
Total	30	1		

Las frecuencias acumuladas representan el número de alumnos o la proporción de ellos que estudian como máximo un determinado número de horas.

016 **Explica cómo completarías una tabla de frecuencias en la que conoces solo las frecuencias absolutas acumuladas.**

La primera frecuencia absoluta acumulada coincide con la primera frecuencia absoluta. Las demás frecuencias absolutas se calculan por la diferencia de frecuencias absolutas acumuladas consecutivas.

$$f_1 = F_1 \qquad f_i = F_i - F_{i-1}$$

El tamaño muestral es la última frecuencia absoluta acumulada y, a partir de ahí, obtenemos las frecuencias relativas.

017 **En un edificio de 16 vecinos, el número de televisores por vivienda es:**

0 1 1 2   1 3 2 1   1 1 2 2   3 0 3 2

a) Construye la tabla de frecuencias. ¿Qué tipo de variable es? Razona tu respuesta.

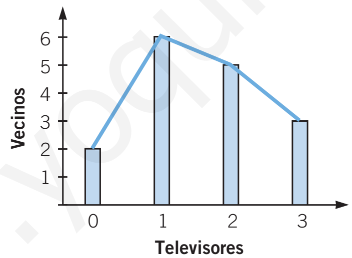
b) Realiza el diagrama de barras y el polígono de frecuencias de los datos.

c) Haz lo mismo con las frecuencias acumuladas.

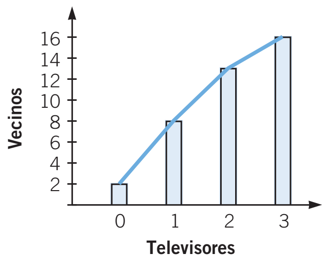
a) Es una variable cuantitativa discreta.

Televisores	f_i	h_i	F_i	H_i
0	2	0,125	2	0,125
1	6	0,375	8	0,5
2	5	0,3125	13	0,8125
3	3	0,1875	16	1
Total	16	1		

b) FRECUENCIAS ABSOLUTAS



c) FRECUENCIAS ACUMULADAS



018 **En un aparcamiento público hay 25 coches rojos, 19 amarillos, 39 plateados, 50 blancos, 27 verdes, 30 azules y 10 negros.**

a) Construye la tabla de frecuencias.

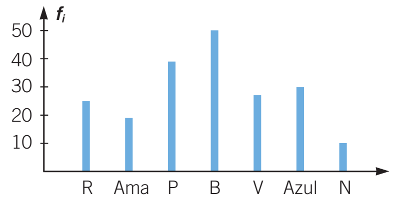
b) ¿Puedes hallar las frecuencias acumuladas?

c) Realiza el diagrama de barras.

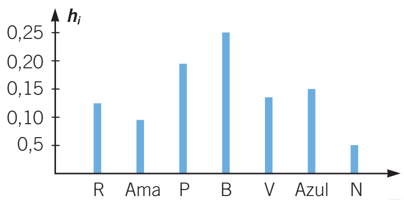
a)

Color del coche	f_i	h_i
Rojo	25	25/200 = 0,125
Amarillo	19	19/200 = 0,095
Plateado	39	39/200 = 0,195
Blanco	50	50/200 = 0,25
Verde	27	27/200 = 0,135
Azul	30	30/200 = 0,15
Negro	10	10/200 = 0,05

b) No se pueden hallar las frecuencias acumuladas, ya que se trata de una variable cualitativa.

c) 

019 **Haz los gráficos del ejercicio anterior con las frecuencias relativas. ¿Qué observas?**



Es el mismo gráfico, pero ha cambiado la escala de frecuencias.

020 **Las longitudes, en cm, de 18 grillos son:**

1,8	**1,9**	**2**	**2,4**	**2,6**	**2,8**
1,7	**1,9**	**2,3**	**1,6**	**2,1**	**3**
2,3	**2,7**	**2,9**	**1,5**	**1,8**	**2,6**

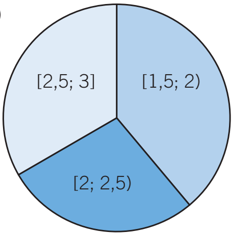
a) Construye la tabla de frecuencias tomando intervalos.

b) Representa los datos mediante un histograma y un polígono de frecuencias.

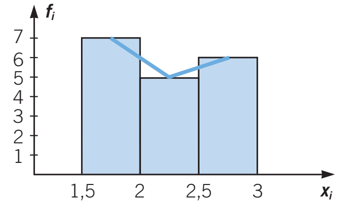
c) Realiza un diagrama de sectores. ¿Qué gráfico te parece más adecuado?

a)

Intervalo	f_i
[1,5; 2)	7
[2; 2,5)	5
[2,5; 3]	6

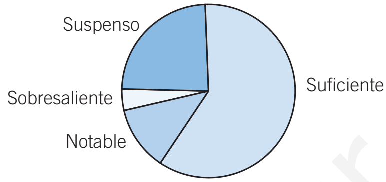
c) 

Es preferible el histograma, ya que los datos corresponden a una variable cuantitativa.

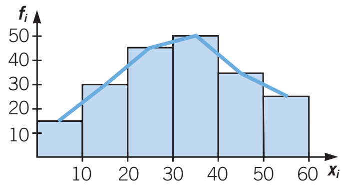
b) 

021 **Representa estos datos: en una clase de 50 alumnos, 12 de ellos han suspendido, 30 han sacado Suficiente, un 12 % ha obtenido Notable y el resto Sobresaliente.**

Notas	f_i
Suspenso	12
Suficiente	30
Notable	6
Sobresaliente	2
	50



022 **Haz la tabla de frecuencias que corresponde a este gráfico.**



Variable	f_i	h_i
[0, 10)	15	0,075
[10, 20)	30	0,15
[20, 30)	45	0,225
[30, 40)	50	0,25
[40, 50)	35	0,175
[50, 60)	25	0,125
Total	200	1

023 **Las estaturas, en cm, de 24 alumnos de 3.° ESO son:**

158	**160**	**168**	**156**	**166**	**158**	**160**	**168**
168	**158**	**156**	**164**	**162**	**166**	**164**	**168**
162	**158**	**156**	**166**	**160**	**168**	**160**	**160**

a) Agrúpalas en intervalos.

b) Calcula la media, la mediana y la moda.

a)

Intervalo	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$
[155, 160)	7	157,5	1 102,5
[160, 165)	9	162,5	1 462,5
[165, 170)	8	167,5	1 340
	24		3 905

b) $\overline{x} = \dfrac{3\,905}{24} = 162{,}7$ cm

$Me = 162{,}5$ cm

$Mo = 162{,}5$ cm

024 **Interpreta las medidas de centralización del número de suspensos de 15 alumnos.**

4 1 0 4 1 4 1 2 3 0 2 4 0 3 1

Suspensos	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,2	3	0,2
1	4	0,27	7	0,47
2	2	0,13	9	0,6
3	2	0,13	11	0,73
4	4	0,27	15	1
	15	1		

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Cada alumno tiene 2 suspensos de media.

Hay dos modas: $Mo = 1$ y $Mo = 4$.

Como $Me = 2$, la mitad ha suspendido como máximo 2 asignaturas.

025 **Añade un valor que no haga variar la mediana.**

18 8 7 9 12 15 21 12

La mediana actual es 12 e, independientemente del valor que añadamos, seguirá siendo 12, ya que ahora son números pares, y al añadir un número más serán impares, y alguno de los dos valores 12 seguirá siendo el valor central.

026 **Calcula los cuartiles de este conjunto de datos que expresan los días de baja laboral solicitados por 10 trabajadores.**

0 2 3 4 2 1 1 0 0 3

Bajas	f_i	F_i
0	3	3
1	2	5
2	2	7
3	2	9
4	1	10
Total	10	

$10 \cdot 0,25 = 2,5 \rightarrow Q_1 = 0$

$$10 \cdot 0,5 = 5 \rightarrow Q_2 = Me = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

$10 \cdot 0,75 = 7,5 \rightarrow Q_3 = 3$

027 **Interpreta los cuartiles que has calculado en el ejercicio anterior.**

Los trabajadores que no han estado de baja son al menos el 25 %; la mitad de los trabajadores ha estado como máximo 1 día de baja, y el 75 % de los trabajadores ha estado como máximo 3 días de baja.

028 **Se han convocado unas oposiciones en las que hay 50 plazas y se han presentado 200 personas. Estos son los resultados.**

Notas (x_i)	3	4	5	6	7	8	9	10
Opositores (f_i)	6	25	34	42	50	27	13	3

¿Qué indicará Q_3?

Q_3 indicará la puntuación necesaria para obtener una plaza en las oposiciones.

029 **Las longitudes, en mm, de una muestra de tornillos son las siguientes:**

Longitud	f_i
[13, 14)	8
[14, 15)	7
[15, 16)	2
[16, 17)	3

Calcula sus medidas de dispersión utilizando las marcas de clase.

Longitud	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[13, 14)	13,5	8	108	1	8	8
[14, 15)	14,5	7	101,5	0	0	0
[15, 16)	15,5	2	31	1	2	2
[16, 17)	16,5	3	49,5	2	6	12
		20	290		16	22

$$\bar{x} = \frac{290}{20} = 14,5$$

$$DM = \frac{16}{20} = 0,8 \qquad \sigma^2 = \frac{22}{20} = 1,1 \qquad \sigma = 1,05$$

030 **Las notas obtenidas por un alumno en cinco exámenes han sido: 3, 8, 5, 7 y 4, y las de otro alumno: 2, 9, 4, 5 y 7.**

¿En qué alumno es mayor la dispersión?

Para el primer alumno:

$R = 8 - 3 = 5$

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
3	1	3	2,4	2,4	5,76
4	1	4	1,4	1,4	1,96
5	1	5	0,4	0,4	0,16
7	1	7	1,6	1,6	2,56
8	1	8	2,6	2,6	6,76
	5	27		8,4	17,2

$$\bar{x} = \frac{27}{5} = 5,4 \qquad DM = \frac{8,4}{5} = 1,68$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{17,2}{5}} = 1,85 \qquad CV = \frac{1,85}{5,4} = 0,34$$

Para el segundo alumno:

$R = 9 - 2 = 7$

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
2	1	2	3,4	3,4	11,56
4	1	4	1,4	1,4	1,96
5	1	5	0,4	0,4	0,16
7	1	7	1,6	1,6	2,56
9	1	9	3,6	3,6	12,96
	5	27		10,4	29,2

$$\bar{x} = \frac{27}{5} = 5,4 \qquad DM = \frac{10,4}{5} = 2,08$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{29,2}{5}} = 2,42 \qquad CV = \frac{2,42}{5,4} = 0,45$$

Por tanto, la dispersión es mayor en el segundo alumno.

031 **Pregunta a 5 compañeros por su edad y su altura. Compara la dispersión de las dos variables.**

Los resultados variarán según la muestra.

ACTIVIDADES

032 **Queremos hacer un estudio del número de horas que los alumnos dedican a la lectura.**

a) Elige una muestra para realizar el estudio.
b) ¿Qué tamaño tiene dicha muestra?
c) ¿Cuál es la población?

Respuesta abierta. Por ejemplo:
a) Los alumnos de la clase.
b) El número de alumnos de la clase.
c) Todos los alumnos del instituto.

033 **Indica el tipo de variable estadística que estamos estudiando y di, en cada caso, qué sería mejor, si estudiar una muestra o la población.**

a) El programa favorito de los miembros de tu familia.
b) La talla de calzado de los alumnos de un IES.
c) La temperatura media diaria de tu provincia.
d) La edad de los habitantes de un país.
e) El sexo de los habitantes de un pueblo.
f) El dinero gastado a la semana por tus amigos.
g) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
h) El color del pelo de tus compañeros de clase.

a) Cualitativa. Población.
b) Cuantitativa discreta. Muestra.
c) Cuantitativa continua. Población.
d) Cuantitativa continua. Muestra.
e) Cualitativa. Muestra.
f) Cuantitativa continua. Población.
g) Cualitativa. Muestra.
h) Cualitativa. Población.

034 De las siguientes variables, ¿cuáles son discretas?

a) Número de mascotas.
b) Talla de calzado.
c) Perímetro craneal.
d) Ingresos diarios en una frutería.
e) Kilogramos de carne consumidos en el comedor de un IES durante una semana.

Son discretas: a) y b).

Son continuas: c), d) y e).

035 Al preguntar a 20 personas sobre el número de veces que habían viajado al extranjero, el resultado fue:

3	5	4	4	2	3	3	3	5	2
6	1	2	3	3	6	5	4	4	3

a) Organiza los datos haciendo un recuento.
b) Obtén la tabla de frecuencias.

a) 1 → I   2 → III   3 → ~~IIII~~ II   4 → IIII   5 → III   6 → II

b)

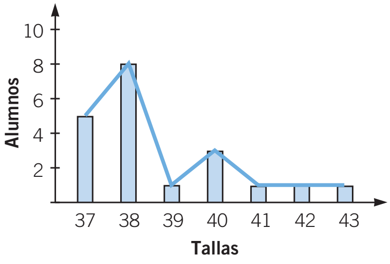
x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
1	1	1	1/20 = 0,05	0,05	5
2	3	4	3/20 = 0,15	0,2	15
3	7	11	7/20 = 0,35	0,55	35
4	4	15	4/20 = 0,2	0,75	20
5	3	18	3/20 = 0,15	0,9	15
6	2	20	2/20 = 0,1	1	10
	20		1		100

036 La talla de calzado que utilizan 20 alumnos en una clase de Educación Física es:

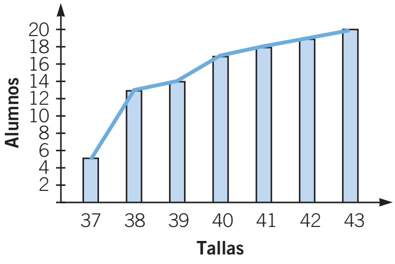
37	40	39	37	38
38	38	41	42	37
43	40	38	38	38
40	37	37	38	38

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias absolutas y para las frecuencias absolutas acumuladas.

FRECUENCIAS ABSOLUTAS



FRECUENCIAS ACUMULADAS



037 **Las estaturas, en cm, de 27 jóvenes son:**

155	**178**	**170**	**165**	**173**	**168**	**160**	**166**	**176**
169	**158**	**170**	**179**	**161**	**164**	**156**	**170**	**171**
167	**151**	**163**	**158**	**164**	**174**	**176**	**164**	**154**

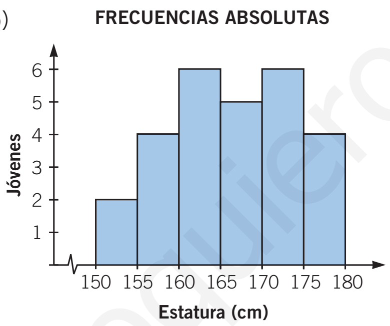
a) Utiliza intervalos de amplitud 5 para formar una tabla de frecuencias.

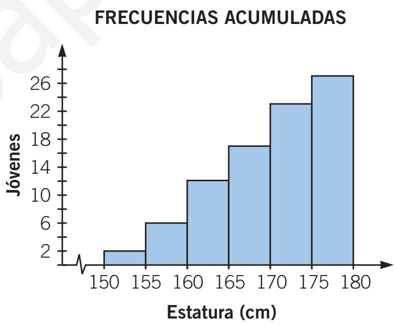
b) Represente los datos en un histograma, utilizando las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas.

a)

Intervalo	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[150, 155)	152,5	2	2	2/27 = 0,074	0,074
[155, 160)	157,5	4	6	4/27 = 0,148	0,222
[160, 165)	162,5	6	12	6/27 = 0,222	0,444
[165, 170)	167,5	5	17	5/27 = 0,185	0,629
[170, 175)	172,5	6	23	6/27 = 0,222	0,851
[175, 180)	177,5	4	27	4/27 = 0,148	1
		27		1	

b)

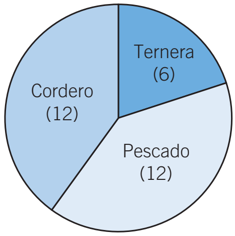




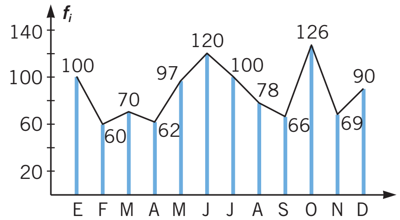
038 **De los 30 asistentes a una cena, el 20 % comió ternera, el 40 % cordero y el resto pescado. Indica la variable estadística y organiza los resultados en una tabla de frecuencias. Después, representa los datos en un gráfico de sectores.**

La variable estadística es el tipo de comida de los asistentes a la cena.

Comida	f_i	h_i
Ternera	6	0,2
Cordero	12	0,4
Pescado	12	0,4
	30	1



039 El número de veces que se alquiló cada mes la pista de tenis de un polideportivo viene representado en este gráfico.



a) Obtén las frecuencias relativas y acumuladas.

b) ¿En qué porcentaje de meses se alquiló la pista más de 80 veces?

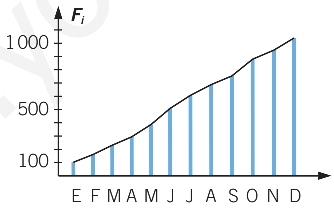
c) Representa el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

a)

Mes	f_i	F_i	h_i	H_i
Ene	100	100	0,096	0,096
Feb	60	160	0,058	0,154
Mar	70	230	0,067	0,221
Abr	62	292	0,06	0,281
May	97	389	0,093	0,374
Jun	120	509	0,116	0,49
Jul	100	609	0,096	0,586
Ago	78	687	0,075	0,661
Sep	66	753	0,063	0,724
Oct	126	879	0,121	0,845
Nov	69	948	0,066	0,911
Dic	90	1038	0,087	1

b) Se alquiló más de 80 veces en enero, mayo, junio, julio, octubre y diciembre, es decir, en el 50 % de los meses.

c)



040 **Obtén las medidas de centralización de esta serie de datos.**

3	**2**	**4**	**9**	**8**	**7**	**3**	**2**	**4**	**5**	**1**	**8**	**6**	**1**	**5**
1	**0**	**2**	**4**	**1**	**2**	**5**	**6**	**5**	**4**	**7**	**1**	**3**	**0**	**5**
8	**6**	**3**	**4**	**0**	**9**	**2**	**5**	**7**	**4**	**0**	**2**	**1**	**5**	**6**

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	4	6	6	4	6	7	4	3	3	2
F_i	4	10	16	20	26	33	37	40	43	45

Media: $\bar{x} = \dfrac{176}{45} = 3,91$

Mediana: $Me = 4$

Moda: $Mo = 5$

041 Vuelve a realizar la actividad anterior con intervalos de amplitud 2. ¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué crees que sucede esto?

Variable	x_i	f_i	F_i
[0, 2)	1	10	10
[2, 4)	3	10	20
[4, 6)	5	13	33
[6, 8)	7	7	40
[8, 10)	9	5	45

Media: $\bar{x} = \dfrac{199}{45} = 4{,}42$

Mediana: $Me = 5$

Moda: $Mo = 5$

Los resultados son diferentes. Esto ocurre porque al agrupar suponemos que los datos están en la marca de clase, por lo que las operaciones varían.

042 Determina la mediana de estos datos.

a)

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	5	3	4	2	4	6

b)

Var.	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
f_i	1	3	5	2

a) Como $N = 5 + 3 + 4 + 2 + 4 + 6 = 24$, la mediana corresponderá al valor x_i que ocupe las posiciones 12.ª-13.ª. En este caso, resulta:

$$x_{12} = 3 \text{ y } x_{13} = 4 \rightarrow Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$

b) Como $N = 1 + 3 + 5 + 2 = 11$ y $F_3 = 9 > \dfrac{11}{2}$

$\rightarrow Me =$ marca de clase del intervalo $[20, 30) = 25$

043 Obtén la media, mediana, moda y cuartiles de los datos de esta tabla.

x_i	26	28	30	32
f_i	6	7	4	3

a) Si cada valor de la tabla se multiplica por 3, ¿cuál será la media? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?

b) Si a todos los valores de una variable les restamos o los dividimos entre un mismo número, ¿cuál es la nueva media?

$$\bar{x} = \frac{26 \cdot 6 + 28 \cdot 7 + 30 \cdot 4 + 32 \cdot 3}{20} = \frac{568}{20} = 28{,}4$$

Como $N = 20$, la mediana corresponderá al valor x_i que ocupe las posiciones 10.ª-11.ª. En este caso, $Me = 28$, $Q_1 = 26$ y $Q_3 = 30$.

El valor más repetido es $Mo = 28$.

a) $$\bar{x} = \frac{(3 \cdot 26) \cdot 6 + (3 \cdot 28) \cdot 7 + (3 \cdot 30) \cdot 4 + (3 \cdot 32) \cdot 3}{20} =$$

$$= \frac{3 \cdot (26 \cdot 6 + 28 \cdot 7 + 30 \cdot 4 + 32 \cdot 3)}{20} = 3 \cdot \bar{x}_{\text{anterior}}$$

En este caso, tenemos que: $\bar{x}_{\text{nueva}} = 3 \cdot 28{,}4 = 85{,}2$

Por tanto, resulta: $Me = 3 \cdot 28 = 84$, $Q_1 = 78$, $Q_3 = 90$ y $Mo = 84$

b) Si a todos los valores les restamos el mismo número, $\bar{x}_{\text{nueva}} = \bar{x} -$ número. Y si a todos los valores los dividimos entre el mismo número, $\bar{x}_{\text{nueva}} = \bar{x}$: número.

044 **Los siguientes datos: 10, 17, *a*, 19, 21, *b*, 25 tienen como media, mediana y moda 19. ¿Cuánto valen *a* y *b*?**

$$\bar{x} = \frac{10 + 17 + a + 19 + 21 + b + 25}{7} = 19$$

$92 + a + b = 7 \cdot 19 = 133 \rightarrow a + b = 41$

10 - 17 - a - 19 - 21 - b - 25

Como a tiene que ser 19 (moda) $\rightarrow 19 + b = 41 \rightarrow b = 22$

045 **Considera el conjunto de datos:**

23 17 19 *x* *y* 16

Sabiendo que la media es 20 y la moda es 23, ¿cuáles son los valores de *x* e *y*?

$$20 = \frac{23 + 17 + 19 + x + y + 16}{6} \rightarrow 120 = 75 + x + y \rightarrow x + y = 45$$

Si la moda es $Mo = 23$, x o y (o ambos) deben ser iguales a 23.

Si fuera $x = y = 23 \rightarrow x + y = 23 + 23 = 46 \neq 45$

Por tanto, resulta: $x = 23 \rightarrow y = 45 - 23 = 22$

046 **Estos son los datos de una encuesta sobre el número de radios en los hogares españoles.**

N.º de radios	0	1	2	3	4
N.º de hogares	432	8343	6242	1002	562

a) ¿Cuántas radios tiene la cuarta parte de los hogares?
b) ¿Y el 75 %?
c) ¿Qué significado tiene la mediana?

a) $\dfrac{16\,581}{4} = 4\,145{,}25 \rightarrow Q_1 = 1$

El 25 % de los hogares tiene 1 o ninguna radio.

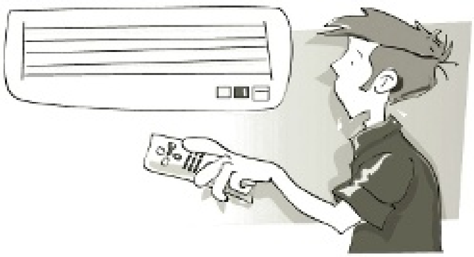
b) $\dfrac{16\,581}{4} \cdot 3 = 12\,435{,}75 \rightarrow Q_3 = 2$

El 75 % de los hogares tiene 2 radios o menos.

c) La mediana es un valor que tiene tantos datos mayores que ella como menores.

x_i	f_i	F_i
0	432	432
1	8343	8775
2	6242	15017
3	1002	16019
4	562	16581
	16581	

047 Resuelve con tu calculadora esta actividad.



Durante un mes, ocho dependientes vendieron los siguientes aparatos de aire acondicionado.

8 11 5 14 8 11 16 11

Calcula la media, desviación típica y coeficiente de variación de los datos.

Ordenamos los datos: 5 - 8 - 8 - 11 - 11 - 11 - 14 - 16

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 1}{8} = \frac{84}{8} = 10{,}5$$

$$\sigma^2 = \frac{(5 - 10{,}5)^2 \cdot 1 + \ldots + (16 - 10{,}5)^2 \cdot 1}{8} =$$

$$= \frac{30{,}25 + 12{,}5 + 0{,}75 + 12{,}25 + 30{,}25}{8} =$$

$$= \frac{86}{8} = 10{,}75 \rightarrow \sigma = \sqrt{10{,}75} = 3{,}28 \rightarrow CV = \frac{3{,}28}{10{,}5} = 0{,}312$$

048 Las edades, en años, de los 30 primeros visitantes al Planetario han sido:

20 7 10 13 4 7 8 11 16 14 8 10 16 18 12
3 6 9 9 4 13 5 10 17 10 18 5 7 10 20

Obtén sus medidas estadísticas.

Ordenamos los datos:

3 - 4 - 4 - 5 - 5 - 6 - 7 - 7 - 7 - 8 - 8 - 9 - 9 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 11 - 12 - 13 - 13 - 14 - 16 - 16 - 17 - 18 - 18 - 20 - 20

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 20 \cdot 2}{30} = \frac{320}{30} = 10{,}7$$

$Me = 10 \quad Mo = 10 \quad R = 17$

$$\sigma^2 = \frac{(3 - 10{,}7)^2 \cdot 1 + \ldots + (20 - 10{,}7)^2 \cdot 2}{30} = 23{,}29$$

$$\sigma = \sqrt{23{,}29} = 4{,}83 \rightarrow CV = \frac{4{,}83}{10{,}7} = 0{,}451$$

049 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE COMPARA LA DISPERSIÓN DE DOS VARIABLES ESTADÍSTICAS?

El peso medio de una muestra de recién nacidos es $\bar{x} = 2{,}85$ kg y su desviación típica es $\sigma = 1$ kg. El peso medio de sus madres es $\bar{x} = 62$ kg, con una desviación típica de $\sigma = 15$ kg. ¿En cuál de las distribuciones es mayor la dispersión?

PRIMERO. Se calculan los coeficientes de variación.

$$CV_{\text{bebés}} = \frac{1}{2{,}85} = 0{,}35 = 35\,\% \qquad CV_{\text{madres}} = \frac{15}{62} = 0{,}24 = 24\,\%$$

SEGUNDO. Se comparan los coeficientes.

$0{,}35 > 0{,}24 \rightarrow$ La dispersión es mayor en los pesos de los bebés que en los de sus madres, aunque pueda parecer lo contrario si observamos sus desviaciones típicas: $1 < 15$.

050 ●● **Las notas de Alberto en 5 exámenes son 4, 6, 6, 7 y 5, y las de Ana son 43, 62, 60, 50 y 55. ¿Cuál de ellos es más regular en su rendimiento académico?**

En el caso de Alberto, las medidas estadísticas son:

$$\bar{x} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

$$\sigma^2 = \frac{5{,}2}{5} = 1{,}04 \rightarrow \sigma = 1{,}02$$

$$CV = \frac{1{,}02}{5{,}6} = 0{,}18$$

En el caso de Ana, las medidas estadísticas son:

$$\bar{x} = \frac{270}{5} = 54$$

$$\sigma^2 = \frac{238}{5} = 47{,}6 \rightarrow \sigma = 6{,}9$$

$$CV = \frac{6{,}9}{54} = 0{,}13$$

Por tanto, Ana es más regular en su rendimiento académico.

051 ●● **Halla la media, mediana, moda y desviación típica de los siguientes datos.**

Peso (kg)	N.º de alumnos
[41, 47)	5
[47, 53)	6
[53, 59)	1
[59, 65)	4
[65, 71)	4

Peso (kg)	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[41, 47)	44	5	5	220	116,64	583,2
[47, 53)	50	6	11	300	23,04	138,24
[53, 59)	56	1	12	56	1,44	1,44
[59, 65)	62	4	16	248	51,84	207,36
[65, 71)	68	4	20	272	174,24	696,96
		20		1096		1627,2

$$\bar{x} = \frac{1096}{20} = 54,8$$

$Me = 50$

$Mo = 50$

$$\sigma^2 = \frac{1627,2}{20} = 81,36 \rightarrow \sigma = 9,02$$

052 ●●

Las notas obtenidas por 40 alumnos en Música han sido:

6 4 1 7 3   6 6 2 5 2   4 9 5 10 8   2 6 10 5 7
5 3 7 8 4   6 0 5 8 7   6 9 7 2 5   6 8 7 3 6

Calcula la media y la desviación típica de los datos, considerando primero la variable como discreta y, después, agrupando los datos en los intervalos [0, 5), [5, 7), [7, 9) y [9, 10]. ¿Qué diferencias observas?

Ordenamos, en primer lugar, los datos:

0 - 1 - 2 - 2 - 2 - 2 - 3 - 3 - 3 - 4 - 4 - 4 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 8 - 8 - 8 - 8 - 9 - 9 - 10 - 10

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 2}{40} = 5,5$$

$$\sigma^2 = \frac{(0 - 5,5)^2 \cdot 1 + \ldots + (10 - 5,5)^2 \cdot 2}{40} = 5,8$$

$$\sigma = \sqrt{5,8} = 2,4 \rightarrow CV = \frac{2,4}{40} = 0,06$$

Agrupamos los datos en intervalos:

Intervalo	Marca de clase	f_i
[0, 5)	2,5	12
[5, 7)	6	14
[7, 9)	8	10
[9, 10]	9,5	4

$$\bar{x} = \frac{2,5 \cdot 12 + 6 \cdot 14 + 8 \cdot 10 + 9,5 \cdot 4}{40} = \frac{232}{40} = 5,8$$

$$\sigma^2 = \frac{(2,5 - 5,8)^2 \cdot 12 + \ldots + (9,5 - 5,8)^2 \cdot 4}{40} = 5,86$$

$$\sigma = \sqrt{5,86} = 2,42 \rightarrow CV = \frac{2,42}{40} = 0,06$$

Se observa que la media y la desviación típica varían.

053 ●● **Los precios del alquiler mensual de la vivienda se recogen en la siguiente tabla:**

Precio (€)	N.º de viviendas
240	13
270	33
300	40
330	35
360	30
390	16
420	20

a) ¿Cuál es la media de los alquileres?

b) Indica cuál es el precio más común.

c) Obtén la mediana. ¿Qué significa?

d) Calcula la varianza y la desviación típica. ¿Para qué sirven estas medidas?

Precio (€)	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
240	13	13	3 120	57 600	748 800
270	33	46	8 910	72 900	2 405 700
300	40	86	12 000	692,22	27 688,98
330	35	121	11 550	13,61	476,52
360	30	151	10 800	1 135,01	34 050,16
390	16	167	6 240	4 056,40	64 902,33
420	20	187	8 400	8 777,79	175 555,72
	187		61 020		302 673,71

a) $\bar{x} = \dfrac{61\,020}{187} = 326{,}31$ €

b) El precio más común es la moda.

$Mo = 300$ €

c) La mediana es el precio por debajo del cual están situados la mitad de los alquileres.

$Me = 330$ €

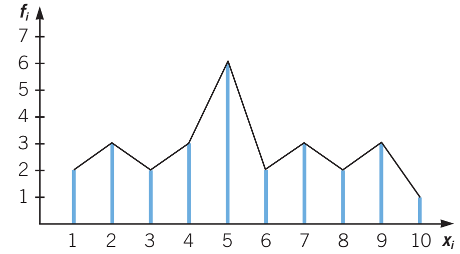
d) $\sigma^2 = \dfrac{302\,673{,}71}{187} = 1\,618{,}58$

$\sigma = 40{,}23$ €

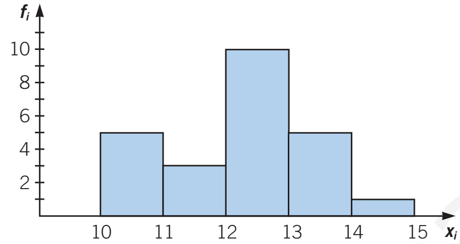
Estos números sirven para ver la dispersión de los datos; en este caso, para comprobar si hay mucha diferencia entre unos alquileres u otros, es decir, si el precio de alquilar es homogéneo.

054 **A partir de estos gráficos determina su tabla de frecuencias y halla la media, mediana, moda y desviación típica de los datos.**

a)



b)



a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	2	3	2	3	6	2	3	2	3	1

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + \ldots + 10 \cdot 1}{27} = 5{,}26$$

Como $N = 27$, la mediana corresponderá al valor que ocupa la posición 14.ª → $Me = 5$. La moda es $Mo = 5$.

$$\sigma^2 = \frac{(1 - 5{,}26)^2 \cdot 2 + \ldots + (10 - 5{,}26)^2 \cdot 1}{27} = 6{,}41$$

$$\sigma = \sqrt{6{,}41} = 2{,}53$$

b)

Intervalo	f_i	x_i
[10, 11)	5	10,5
[11, 12)	3	11,5
[12, 13)	10	12,5
[13, 14)	5	13,5
[14, 15)	1	14,5

$$\bar{x} = \frac{10{,}5 \cdot 5 + \ldots + 14{,}5 \cdot 1}{24} = 12{,}25$$

$Me = 12{,}5$

$Mo = 12{,}5$

$$\sigma^2 = \frac{(10{,}5 - 12{,}25)^2 \cdot 5 + \ldots + (14{,}5 - 12{,}25)^2 \cdot 1}{24} = 1{,}27$$

$$\sigma = \sqrt{1{,}27} = 1{,}13$$

055 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE INTERPRETAN LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN TÍPICA CONJUNTAMENTE?

Un equipo de baloncesto necesita un alero. Se han seleccionado dos jugadores que, en los últimos cinco partidos, han anotado estos puntos. ¿Cuál de ellos elegirías?

Jugador *A*	16	14	13	13	14
Jugador *B*	25	10	8	6	21

PRIMERO. Se calculan la media y la desviación típica.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{x}_A = 14\\ \sigma_A = 1{,}09\end{array}\right\} \text{Jugador } A \qquad \left.\begin{array}{l}\overline{x}_B = 14\\ \sigma_B = 7{,}56\end{array}\right\} \text{Jugador } B$$

SEGUNDO. Se analizan los resultados anteriores.

Como las medias son iguales, si el entrenador quisiera un jugador regular, escogería al jugador *A* (desviación típica baja significa datos parecidos); sin embargo, si quisiera un jugador que pudiera actuar de revulsivo, escogería al *B*, ya que alterna partidos muy buenos con otros peores (desviación típica elevada indica datos muy diferentes).

056 ●●● **Compara el rendimiento de dos alumnos que realizan 5 pruebas, obteniendo estos resultados:**

Juan	2	6	5	7	5
Ana	0	1	9	8	7

Juan: media = 5, desviación típica = 1,87

Ana: media = 5, desviación típica = 4,18

Teniendo la misma media, Juan es más constante en sus resultados, por tener menor desviación típica.

057 ● **En la primera evaluación, de los 30 alumnos de una clase, el 10 % aprobó todo, el 20 % suspendió una asignatura, el 50 % suspendió dos asignaturas y el resto suspendió más de dos.**

Realiza con estos datos una tabla de frecuencias. ¿Hay algún tipo de frecuencia que responda a la pregunta de cuántos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas? Razona tu respuesta.

Suspensos	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	0,1	3	0,1
1	6	0,2	9	0,3
2	15	0,5	24	0,8
Más de 2	6	0,2	30	1
Total	30	1		

Los alumnos que suspendieron menos de dos asignaturas se representan por la frecuencia absoluta acumulada en 1, que son 9 alumnos.

058 ●●

Un corredor entrena, de lunes a viernes, recorriendo las siguientes distancias: 2, 5, 5, 7 y 3 km, respectivamente. Si el sábado también entrena:

a) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?
b) ¿Y para que la mediana no varíe?
c) ¿Y para que la moda permanezca constante?

$$\overline{x} = \frac{2+5+5+7+3}{5} = 4{,}4 \qquad \text{Mediana: } 5 \qquad \text{Moda: } 5$$

a) El sábado debe recorrer 4,4 km.
b) Cualquier distancia mayor o igual que 5 km.
c) Cualquier distancia que no sea 2, 3 o 7 km.

059 ●●

Aplicadas una prueba de Cálculo Mental (CM) y una prueba de Psicomotricidad (P) a los 28 alumnos de una clase, los resultados fueron:

Puntuación	CM	P
[10, 20)	2	1
[20, 30)	8	7
[30, 40)	11	9
[40, 50)	4	5
[50, 60)	2	4
[60, 70)	1	2

a) ¿En qué prueba se obtuvieron mejores resultados (mayor media)?
b) ¿Dónde fue mayor la dispersión? (Usa el coeficiente de variación.)

a) Hallamos las respectivas medias:

$$\overline{x}_{CM} = \frac{15 \cdot 2 + 25 \cdot 8 + 35 \cdot 11 + 45 \cdot 4 + 55 \cdot 2 + 65 \cdot 1}{28} = \frac{970}{28} = 34{,}64$$

$$\overline{x}_{P} = \frac{15 \cdot 1 + 25 \cdot 7 + 35 \cdot 9 + 45 \cdot 5 + 55 \cdot 4 + 65 \cdot 2}{28} = \frac{1\,080}{28} = 38{,}57$$

En la prueba de Psicomotricidad se obtuvieron mejores resultados.

b) $$\sigma^2_{CM} = \frac{(15-34{,}64)^2 \cdot 2 + \ldots + (65-34{,}64)^2 \cdot 1}{24} = \frac{3\,696{,}44}{28} = 132{,}02 \rightarrow \sigma_{CM} = 11{,}49$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} \rightarrow CV = \frac{11{,}49}{34{,}64} = 0{,}332$$

$$\sigma^2_{P} = \frac{(15-38{,}57)^2 \cdot 1 + \ldots + (65-38{,}57)^2 \cdot 1}{28} = \frac{4\,642{,}86}{28} = 165{,}82 \rightarrow \sigma_P = 12{,}87 \rightarrow CV = \frac{12{,}87}{38{,}57} = 0{,}334$$

La dispersión fue prácticamente la misma en las dos pruebas.

060 De los 50 alumnos que respondieron a una prueba de 12 preguntas, el 10 % contestó correctamente a 3, el 50 % a 7, el 30 % a 10 y el resto al total de la prueba. Calcula la media, mediana y moda de los datos. Halla también su desviación típica.

En primer lugar, elaboramos la tabla de frecuencias:

x_i	f_i
3	$10\,\% \cdot 50 = 5$
7	$50\,\% \cdot 50 = 25$
10	$30\,\% \cdot 50 = 15$
12	$10\,\% \cdot 50 = 5$

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot 25 + 10 \cdot 15 + 12 \cdot 5}{50} = 8$$

La mediana se corresponderá con el valor medio de los valores 25.º y 26.º, ya que $N = 50$; en este caso, es $Me = 7$. El valor con mayor f_i es $Mo = 7$.

$$\sigma^2 = \frac{(3-8)^2 \cdot 5 + \ldots + (12-8)^2 \cdot 5}{50} = 5{,}8 \to \sigma = 2{,}4$$

061 **Los diplomados en Informática de gestión tienen un salario medio, en su primer empleo, de 1 280 €, con una desviación típica de 380 €.**

Por otra parte, los diplomados en Informática de sistemas tienen un salario medio de 1 160 €, con una desviación típica de 350 €.

Si a un diplomado en Informática de gestión le ofrecen un sueldo de 1 400 €, y a un diplomado en Informática de sistemas, un sueldo de 1 340 €:

a) ¿Cuál de los dos recibe mejor oferta?

b) Razona por qué es mejor una u otra oferta.

La respuesta parece obvia, ya que 1 400 > 1 340, luego aparentemente la mejor oferta sería la del diplomado en Informática de gestión.

Sin embargo, para compararlo teniendo en cuenta la población a la que pertenece cada individuo debemos considerar la media salarial y la dispersión de sueldo dentro de cada grupo.

Informática de gestión: gana 1 400 € y presenta una desviación de 120 € por encima de la media de su grupo (1 280 €).

Comparamos esa desviación (120 €) con la dispersión que presenta su grupo:

$$\sigma = 380 \rightarrow \frac{120}{380} = 0{,}31$$

Cuanto mayor sea este número más alejado estará de la media salarial.

Informática de sistemas: gana 1 340 € y presenta una desviación de 180 € por encima de la media de su grupo (1 160 €).

Comparamos la desviación (180 €) con la dispersión que presenta su grupo:

$$\sigma = 340 \rightarrow \frac{180}{340} = 0{,}52$$

De esta forma vemos que realmente la mejor oferta es la que recibe el diplomado en Informática de sistemas, porque $0{,}52 > 0{,}31$ y, por tanto, la oferta que le hacen se aleja más de la media salarial de su grupo.

062 ●●● **Un conjunto de datos, compuesto de números enteros positivos y diferentes entre sí, tiene 47 como media. Si uno de los datos es 97 y la suma de todos los datos es 329, ¿cuál es el mayor número que puede tener?**

$\overline{x} = 47 = \dfrac{329}{N} \rightarrow N = \dfrac{329}{47} = 7$ es el número de datos.

Al ser uno de ellos 97, hacemos que el resto sean los menores valores posibles: 1, 2, 3, 4 y 5.

El séptimo número es: $329 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 97) = 217$
Así, 217 es el mayor número posible.

063 ●●● **Dado el conjunto de datos:**

14 12 26 16 *x*

calcula *x* para que la mediana y la media de los datos sean iguales.

Si x vale más de 16, la mediana debe ser 16, y como queremos que la media sea 16, la suma de los cinco términos debe ser 80, por lo que $x = 80 - (12 + 14 + 16 + 26) = 12$. Como 12 no es mayor que 16, esto no es posible.

Si x vale 15, la mediana será 15, y como queremos que la media sea 15, la suma de los cinco términos debe ser 75, por lo que $x = 75 - (12 + 14 + 16 + 26) = 7$, que no es posible.

Si x vale menos de 14, la mediana debe ser 14, y como queremos que la media sea 14, la suma de los cinco términos debe ser 70, por lo que $x = 70 - (12 + 14 + 16 + 26) = 2$. Como 2 es menor que 14, la solución es $x = 2$.

064 **Si en un conjunto de cinco datos, la media es 10 y la mediana es 12, ¿cuál es el menor valor que puede tomar el recorrido?**

Como la mediana es 12, debe haber dos valores mayores o iguales que 12 y otros dos menores o iguales que 12, y para que el recorrido sea mínimo, los dos valores mayores deben ser los menores posibles (por ser la mediana mayor que la media), por lo que tomarán valor 12.

La suma de los cinco términos ha de ser 50 y tres de los términos suman 36, por lo que los otros dos han de sumar 14.
Para que el recorrido sea mínimo, el menor de los valores debe ser lo mayor posible, y eso sucede cuando los dos valores menores son iguales, por lo que tomarán valor 7.

Los valores son 7, 7, 12, 12, 12, 12 y su recorrido es 5.

065 **Cuando escribimos en orden creciente la media, la mediana y la moda del conjunto de datos: 10, 2, 5, 2, 4, 2, *x*, obtenemos una progresión aritmética. Calcula todos los posibles valores de *x*.**

La moda en cualquiera de los casos es 2.

Si x es menor que 2, la mediana será 2, por lo que para que estuvieran en progresión aritmética la media también debería ser 2, lo que no es posible.

Si x toma valor 3, la mediana es 3, por lo que para que estuvieran en progresión aritmética la media debería ser 2, 5 o 4, y eso es imposible.

Si x toma valor mayor o igual que 4, la mediana es 4, y como la media toma valores mayores que 4, para estar en progresión aritmética la media debe ser 6, por lo que la suma de los términos es 36:
$x = 36 - (2 + 2 + 2 + 4 + 5 + 10) = 11$

066 **Después de ordenar un conjunto de siete datos, tomamos los cuatro primeros datos, y resulta que su media es 5; pero si tomamos los cuatro últimos, su media es 8.**

Si la media de todos los números es $\frac{46}{7}$, ¿cuál será la mediana?

$$\overline{x} = \frac{46}{7} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 46$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 38 \end{array}\right\} \rightarrow 58 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 46 + x_4 \rightarrow x_4 = 12$$

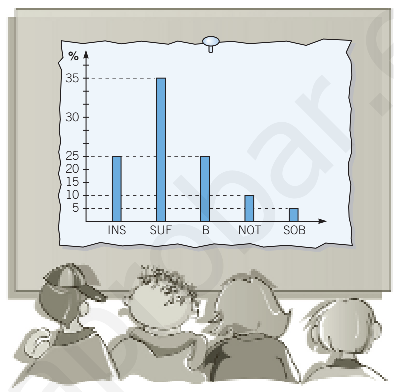
La mediana es 12.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

067 ●●●

La Consejería de Educación está valorando el rendimiento de los alumnos en Matemáticas. Por ello, ha elaborado un informe en el que se muestran los resultados de los alumnos de Secundaria en Matemáticas durante el curso pasado.

Un resumen del informe se muestra mediante este gráfico:



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Qué tanto por ciento de alumnos han suspendido Matemáticas?

b) Construye un diagrama de sectores con los datos que aporta el histograma.

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) El informe indica que el número de estudiantes que han obtenido suficiente es de 28 413. A la vista del gráfico y de los porcentajes, calcula cuántos alumnos obtuvieron notable y cuántos insuficiente.

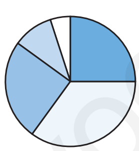
d) ¿Cuántos alumnos hay en Secundaria?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

e) ¿Crees que el histograma refleja fielmente la situación?

a) Han suspendido Matemáticas el 25 % de los alumnos.

b)

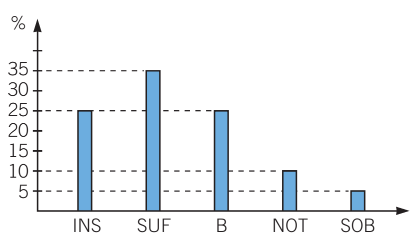


INS 25 % → 90°
SUF 35 % → 126°
B 25 % → 90°
NOT 10 % → 36°
SOB 5 % → 18°

c) Obtuvieron notable $\frac{28\,413}{35} \cdot 10 = 8\,118$ alumnos y obtuvieron insuficiente $\frac{28\,413}{35} \cdot 25 = 20\,295$ alumnos.

d) Si el 35 % del total son 28 413 → Total $= \frac{2\,841\,300}{35} = 81\,180$ alumnos

e) Si la escala del eje vertical fuese correcta tendríamos el histograma:

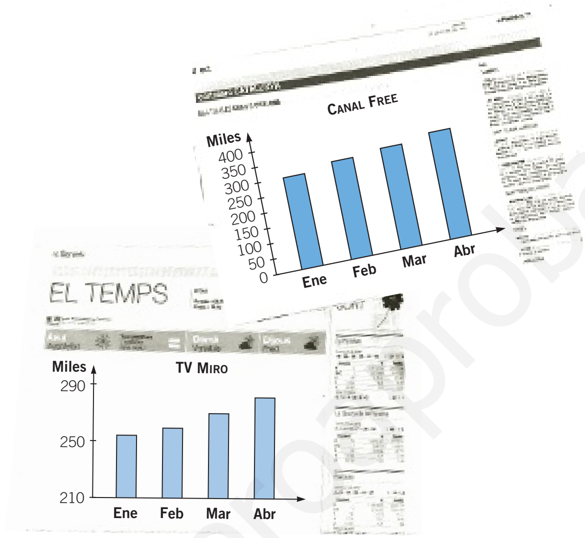


En el histograma que aparece en el informe se distorsiona la barra correspondiente al número de estudiantes que han obtenido suficiente. Esta barra mide más del doble que la barra de los alumnos que han obtenido insuficiente y, sin embargo, solo son un 10 % más.

068 ●●●

El número de espectadores de una cadena de televisión determina el coste de la publicidad que se emite.

Las dos cadenas de televisión con mayor índice de audiencia han presentado sus resultados de los cuatro primeros meses del año.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuántos espectadores tuvo Canal Free durante el mes de abril? ¿Cuántos tuvo TV Miro durante el mismo mes?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) En TV Miro insisten en que su crecimiento ha sido mayor. ¿Cuántos espectadores ganó cada cadena? ¿Son ciertas las afirmaciones de TV Miro?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) ¿Qué gráfico refleja mejor la situación?

a) Durante el mes de abril, Canal Free tuvo 350000 espectadores y TV Miro tuvo 280000 espectadores.

b) Desde enero hasta abril Canal Free ganó:

$$350000 - 300000 = 50000 \text{ espectadores}$$

TV Miro ganó menos de 40000 espectadores.

Las afirmaciones de TV Miro no son ciertas.

c) Las escalas de ambas gráficas son distintas, y por eso parece que el crecimiento de TV Miro es mayor; sin embargo, el aumento de espectadores en Canal Free es, aproximadamente, de 50000, mientras que el aumento de audiencia en la otra cadena es menor: unos 30000 espectadores más.

El crecimiento se aprecia mejor en la gráfica de TV Miro, y aunque ambas representaciones son válidas, para poder comparar la información deberíamos utilizar la misma escala.

14 Probabilidad

¡Jaque mate!

Desde que cruzó el Canal, perseguido por la intransigencia política y religiosa que recorría la Europa continental, se le podía encontrar en aquel café: el *Slaughter's Coffee House* era para Abraham de Moivre su segunda casa.

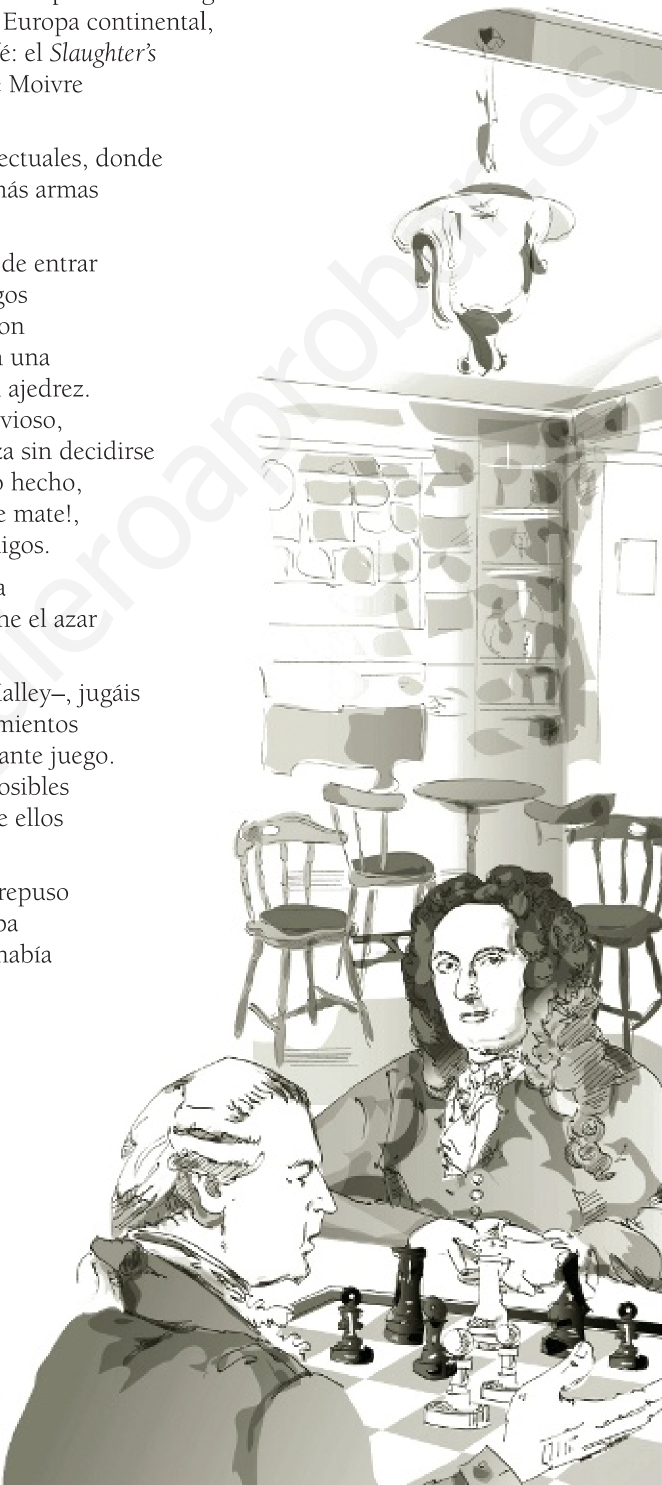
Era un centro de reunión de intelectuales, donde se podían defender las ideas sin más armas que la razón.

Los dos personajes que acababan de entrar en el local, Newton y Halley, amigos de Abraham de Moivre, lo buscaron con la mirada y lo encontraron en una de las mesas del fondo jugando al ajedrez. Su contrincante, visiblemente nervioso, movía su mano de una a otra pieza sin decidirse a mover ninguna. Apenas lo hubo hecho, Abraham cantó un triunfal: ¡Jaque mate!, y levantándose se acercó a sus amigos.

–Nunca aprenderá, todavía piensa que para ganar al ajedrez interviene el azar y que algún día le tocará.

–*Monsieur* De Moivre –contestó Halley–, jugáis con la ventaja de vuestros conocimientos de probabilidad y de este apasionante juego. Vuestro contrincante tenía siete posibles movimientos pero solo tras dos de ellos podíais dar jaque mate.

–Sin embargo lo hizo y yo gané –repuso De Moivre, al tiempo que guardaba en sus bolsillos las monedas que había apostado en la partida.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Abraham de Moivre, Isaac Newton y Edmund Halley son tres personajes a los que les unió una gran amistad. Investiga sobre su vida y su obra.**

En la siguiente página puedes leer una biografía de Edmund Halley:
http://www.astroseti.org/imprime.php?num=3649
En esta página podrás encontrar las biografías de Abraham de Moivre e Isaac Newton:
http://www.ugr.es/~eaznar/matematicos.htm

2 **¿Qué era el *Slaughter's Coffee House*? ¿Cuál es la relación entre De Moivre y el ajedrez?**

En esta página se muestra una breve historia del *Slaughter's Coffee House* de Londres y su relación con Abraham de Moivre:
http://www.damanegra.com/2008/04/30/old-slaughters-coffee-house-londres/

3 **Investiga sobre las aportaciones de De Moivre al estudio de la Estadística y la Probabilidad.**

En la misma página, en la biografía de Abraham de Moivre hallarás sus aportaciones a la Estadística y la Probabilidad.
http://www.ugr.es/~eaznar/matematicos.htm

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Nos hemos situado frente a un cruce de carreteras y hemos anotado el número de coches de cada color que pasaban por allí. En una hora han pasado:**

30 coches de color rojo **15 coches de color amarillo** **10 coches de color azul**
20 coches de color blanco **25 coches de color verde**

a) Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas, según el color de los coches.

b) ¿Qué porcentaje de los coches que han pasado por el cruce de carreteras eran de color amarillo?

a)

	f_i	F_i	h_i	H_i
Rojo	30	30	0,30	0,30
Blanco	20	50	0,20	0,50
Verde	25	75	0,25	0,75
Amarillo	15	90	0,15	0,90
Azul	10	100	0,10	1

b) Es de color amarillo el 15 % de los coches.

2 **Compara los siguientes pares de fracciones.**

a) $\frac{2}{3}$ **y** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{24}{11}$ **y** $\frac{36}{17}$ **c)** $\frac{14}{55}$ **y** $\frac{28}{110}$

a) $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} < \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{14}{55} = \frac{28}{110} = \frac{28}{110}$

b) $\frac{24}{11} = \frac{408}{187} > \frac{396}{187} = \frac{36}{17}$

Probabilidad

EJERCICIOS

001 **Clasifica los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas.**

a) Extraer una carta de una baraja.
b) Pesar un litro de mercurio.
c) Preguntar a tus compañeros un número.
d) Lanzar tres monedas y anotar el número de caras que salen.
e) Restar dos números conocidos.

Los experimentos de a), c) y d) son aleatorios, y los de b) y e) son deterministas.

002 **En una bolsa hay 10 bolas de 3 colores diferentes. Escribe un experimento aleatorio y otro determinista.**

Aleatorio: extraer una bola de la bolsa.

Determinista: hallar el peso de las tres bolas.

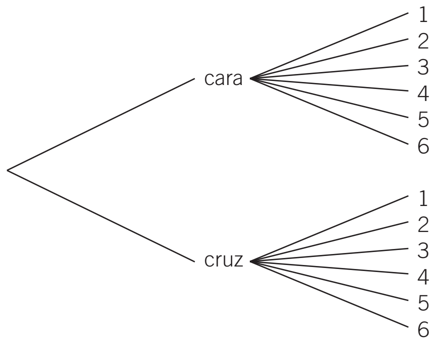
003 **Propón dos experimentos aleatorios. Determina sus sucesos elementales y dos sucesos compuestos.**

- Experimento 1: preguntar un número del 1 al 10.
  Sucesos elementales: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}.
  Suceso compuesto: obtener un número par.
- Experimento 2: acertar en la Quiniela.
  Sucesos elementales: {0}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11}, {12}, {13}, {14}.
  Suceso compuesto: acertar las apuestas suficientes para obtener premio.

004 **Escribe los posibles resultados que se pueden obtener en el experimento aleatorio de lanzar dos monedas al aire.**

Si llamamos c = cara, x = cruz, los posibles resultados son: (c, c), (c, x), (x, c) y (x, x).

005 **Lanzamos una moneda y un dado de seis caras. ¿Cuál es el espacio muestral? Ayúdate con un diagrama de árbol.**



E = {cara 1, cara 2, cara 3, cara 4, cara 5, cara 6, cruz 1, cruz 2, cruz 3, cruz 4, cruz 5, cruz 6}

006 **Determina dos sucesos compatibles y otros dos incompatibles en el ejercicio anterior.**

Compatibles:
Salir cruz y múltiplo de 3. Salir cruz y par.

Incompatibles:
Salir cara y par. Salir cruz y menor que 3.

007 **¿Existe algún suceso incompatible con todos los demás? ¿Y compatible?**

Un suceso incompatible con todos los demás sucesos es el suceso imposible, y uno compatible con todos es el suceso seguro.

008 **Dados los sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, calcula su unión e intersección.**

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
$A \cap B = \{1, 3\}$

009 **Al extraer una carta de la baraja española, expresa en forma de uniones e intersecciones los siguientes sucesos.**

a) «Sacar un número menor que 5 y mayor que 2»
b) «Sacar una figura de bastos»
c) «No sacar un as»

a) {Salir número menor que 5} $\cap$ {Salir número mayor que 2}

b) {Salir figura} $\cap$ {Salir bastos}

c) {Salir número mayor o igual que 2} $\cup$ {Salir figura}
Otra forma de hacerlo sería utilizando el suceso complementario:
si $A =$ {Salir as} $\rightarrow \overline{A} =$ {No salir as}.

010 **Extraemos una carta de la baraja. Halla la unión y la intersección de las parejas de sucesos.**

a) $A =$ «Sacar oros» y $B =$ «Sacar copas»
b) $C =$ «Sacar un as» y $D =$ «No sacar un as»
c) $F =$ «Sacar bastos» y $G =$ «Sacar un as»

a) $A \cup B =$ {Sacar oros o copas}
$A \cap B = \varnothing$

b) $C \cup D = E$
$C \cap D = \varnothing$

c) $F \cup G =$ {Sacar bastos o as}
$F \cap G =$ {Sacar as de bastos}

011 **¿Puede coincidir la unión de dos sucesos con uno de ellos? Si es así, ¿qué sucede con su intersección?**

La unión de dos sucesos coincide con uno de ellos cuando uno está incluido en el otro; en este caso, la unión de los dos sucesos es el suceso mayor y la intersección es el menor.

012 **Al lanzar un dado de 8 caras consideramos los siguientes sucesos:**

$$A = \{2, 4, 5, 8\} \text{ y } B = \{1, 2, 3, 7\}$$

Calcula.

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $\overline{A \cap B}$
d) $\overline{A} \cup \overline{B}$
e) $\overline{A \cup B}$
f) $\overline{A} \cap \overline{B}$

¿Qué observas en los resultados c) y d)? ¿Y en los resultados e) y f)?

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

b) $A \cap B = \{2\}$

c) $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $\overline{A} = \{1, 3, 6, 7\}$ $\overline{B} = \{4, 5, 6, 8\}$ $\rightarrow$ $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

e) $\overline{A \cup B} = \{6\}$

f) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{6\}$

Se cumple que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

013 **Considera el experimento aleatorio de lanzar una moneda.**
Calcula el espacio muestral y todos los sucesos que puedas, clasificándolos en elementales y compuestos. Halla, para cada uno de los sucesos anteriores, su complementario.

$E = \{\text{cara, cruz}\}$

Suceso	Complementario
$\varnothing$	E
{cara}	{cruz}
{cruz}	{cara}
E	$\varnothing$

014 **Si un suceso *A* está contenido en otro suceso *B*, ¿qué sucede con sus complementarios?**

El complementario de A contiene al complementario de B.

015 **Lanzamos 2 dados y sumamos los puntos que salen. Determina.**

a) **Un suceso seguro.**
b) **Un suceso imposible.**

¿Cuál será la probabilidad de estos dos sucesos?

a) Suceso seguro: «Sacar más de un punto». Probabilidad 1.

b) Suceso imposible: «Sacar más de 12 puntos». Probabilidad 0.

016 **En una urna hay 5 bolas blancas y 4 bolas rojas. Escribe.**

a) Un suceso imposible. **b) Un suceso seguro.**

a) Suceso imposible:
«Sacar bola verde»

b) Suceso seguro:
«No sacar bola azul»

017 **En el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda:**

a) Calcula el espacio muestral.

b) Di un suceso seguro y uno imposible.

c) ¿Qué probabilidad le asignarías al suceso «Salir cara»? Razona la respuesta.

a) $E = \{\text{cara, cruz}\}$

b) Suceso seguro: «Salir cara o cruz».
Suceso imposible: «Salir as de oros».

c) Si la moneda no está trucada, habrá la misma posibilidad de salir cara que de salir cruz, por lo que $P(\text{salir cara}) = \frac{1}{2}$.

018 **¿A qué es igual la unión de un suceso seguro y uno imposible? ¿Y la intersección? Calcula sus probabilidades.**

La unión es el suceso seguro y la intersección es el suceso imposible.
$P(\text{suceso seguro}) = 1$ $P(\text{suceso imposible}) = 0$

019 **Al lanzar un dado, calcula la probabilidad de obtener:**

a) Múltiplo de 5.
b) Divisor de 2.
c) Número primo.
d) Número 3.
e) Divisor de 6.
f) Par y divisor de 4.
g) Múltiplo de 7.
h) Menor que 10.
i) Número impar.

a) $P(\text{múltiplo de 5}) = \frac{1}{6}$

b) $P(\text{divisor de 2}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $P(\text{número primo}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $P(\text{número 3}) = \frac{1}{6}$

e) $P(\text{divisor de 6}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

f) $P(\text{par y divisor de 4}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

g) $P(\text{múltiplo de 7}) = \frac{0}{6} = 0$

h) $P(\text{menor que 10}) = \frac{6}{6} = 1$

i) $P(\text{número impar}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

020 **De una baraja española extraemos una carta. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caballo? ¿Y una figura? ¿Y oros? ¿Y una sota que no sea de copas?**

$P(\text{caballo}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $P(\text{oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ $P(\text{sota no de copas}) = \frac{3}{40}$

021 **En una caja hay 5 bolas amarillas y 7 bolas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola amarilla? ¿Y una bola roja?**

$P(\text{bola amarilla}) = \frac{5}{12}$ $P(\text{bola roja}) = \frac{7}{12}$

022 **Piensa en un experimento cuyos sucesos elementales sean equiprobables, pero en el que sea imposible aplicar la regla de Laplace.**

Por ejemplo, al elegir un punto de un intervalo de la recta real, no se puede aplicar la regla de Laplace porque el número de casos posibles es infinito.

023 **Se ha lanzado una moneda 85 veces, obteniéndose 43 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso «Salir cruz»?**

a) $\frac{43}{85}$
b) **42**
c) $\frac{42}{85}$
d) **0,42**

Si las caras son 43, las cruces serán 42. La frecuencia es c) $\frac{42}{85}$.

024 **Se lanza un dado de 4 caras y se anotan las veces que no aparece la cara 1.**

Lanzamientos	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27

a) Obtén la tabla de frecuencias relativas.
b) ¿Hacia qué valor tiende?
c) ¿Qué probabilidad le asignarías?

a)

Lanzamientos	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,28	0,25	0,23	0,27

b) Tiende hacia 0,25.

c) $P(\text{no salir cara 1}) = \frac{1}{4}$

025 **En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos 5000 veces una bola, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Estos han sido los resultados.**

Bola	1	2	3	4	5
f_i	1200	800	700	1300	1000

Calcula la probabilidad de obtener múltiplo de 2.

Si en la bolsa hay 100 bolas, ¿cuántas son de cada clase? Justifica tu respuesta.

$$P(\text{sacar par}) = \frac{800 + 1300}{5000} = 0{,}42$$

Bola	f_i	h_i
1	1200	0,24
2	800	0,16
3	700	0,14
4	1300	0,26
5	1000	0,20
Total	5000	1

Como la probabilidad se aproxima con las frecuencias relativas, aplicando la regla de Laplace cuando el número de casos posibles es 100, tenemos que: 1-24, 2-16, 3-14, 4-26, 5-20.

026 **Una máquina fabrica tornillos. ¿Cómo harías para calcular la probabilidad de que, escogido un tornillo al azar, sea defectuoso?**

Tomaría una muestra de tornillos al azar, contaría los que están defectuosos y dividiría el número de tornillos defectuosos entre el tamaño de la muestra.

027 **Se lanzan 2 dados y se suman sus puntos. Halla la probabilidad de que la suma sea:**

a) 3 **b) Mayor que 10.** **c) 7** **d) 4 o 5**

Al lanzar 2 dados se pueden dar 36 combinaciones posibles:

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6), (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$

a) Hay 2 combinaciones que dan suma 3: (1, 2) y (2, 1).

$$P(\text{suma } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b) Hay 3 combinaciones que dan suma mayor que 10: (5, 6), (6, 5) y (6, 6).

$$P(\text{suma mayor que } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c) Hay 6 combinaciones que dan suma 7: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4) y (4, 3).

$$P(\text{suma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

d) Hay 7 combinaciones que dan suma 4 o 5: (2, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3) y (3, 2).

$$P(\text{suma 4 o 5}) = \frac{7}{36}$$

028 **De una baraja española se extrae una carta. Obtén la probabilidad de que sea:**

a) Espadas.
b) Espadas y rey.
c) Sota u oros.
d) Distinta a una figura.

a) $P(\text{espadas}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{espadas y rey}) = \frac{1}{40}$

c) $P(\text{sota u oros}) = \frac{3+10}{40} = \frac{13}{40}$

d) $P(\text{no figura}) = \frac{40-12}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$

029 **Una urna tiene 4 bolas blancas, 2 rojas y 5 negras. Calcula la probabilidad de sacar una bola:**

a) Blanca. **b) Roja.** **c) Blanca o negra.**

a) $P(\text{blanca}) = \frac{4}{11}$

b) $P(\text{roja}) = \frac{2}{11}$

c) $P(\text{blanca o negra}) = \frac{9}{11}$

030 **Si en un experimento aleatorio $P(B) = 0{,}2$ y, además, $P(A \cup B) = P(A)$, ¿son *A* y *B* incompatibles? ¿Y complementarios?**

Como $P(A \cup B) = P(A)$, tenemos que: $P(A \cap B) = P(B) = 0{,}2$; por tanto, *A* y *B* no son incompatibles ni complementarios.

ACTIVIDADES

031 **Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.**

a) Extraer una carta de la baraja española.
b) Medir la hipotenusa en un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm.
c) Lanzar 3 monedas y anotar el número de caras.
d) Lanzar una chincheta y observar en qué posición queda.
e) Apretar un pulsador que enciende una bombilla en un circuito eléctrico.
f) Elegir al azar una ficha de dominó.
g) Medir la altura de un aula.
h) Lanzar una piedra al vacío y medir la aceleración.
i) Averiguar el resultado de un partido antes de que se juegue.

Son aleatorios: a), c), d), f) e i).
Son deterministas: b), e), g) y h).

032 **Escribe dos experimentos aleatorios y otros dos que no lo sean. Justifica tu respuesta.**

Aleatorios: el peso de un alumno y el número que va a salir en la lotería.
No aleatorios: la edad de un alumno de 1.º de Educación Infantil y los años a los que se alcanza la mayoría de edad en España.

033 **Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.**

a) Extraer una carta de la baraja española.
b) Lanzar una chincheta y anotar la posición de caída.
c) Sacar una bola de una urna con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes.
d) Lanzar 2 dados y restar las caras superiores.
e) Lanzar 2 dados y multiplicar las caras superiores.
f) Considerar las espadas de la baraja española y extraer una carta de ese grupo.
g) Escoger al azar un país de la Unión Europea.

a) E = {as, dos, ..., rey de oros, as, dos, ..., rey de copas, as, dos, ..., rey de espadas, as, dos, ..., rey de bastos}

b) E = {hacia arriba, hacia abajo}

c) E = {roja, azul, verde}

d) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

f) E = {as, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo, rey}

g) E = {Alemania, Austria, Bélgica, Bulgaria, Chipre, Dinamarca, Eslovaquia, Eslovenia, España, Estonia, Finlandia, Francia, Grecia, Hungría, Irlanda, Italia, Letonia, Lituania, Luxemburgo, Malta, Países Bajos, Polonia, Portugal, Reino Unido, República Checa, Rumanía, Suecia}

034 **Se lanzan 2 dados, uno rojo y otro azul.**
¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (3, 6), (4, 1), ..., (4, 6), (5, 1), ..., (5, 6), (6, 1), ..., (6, 6)\}$

035 **Se lanzan 2 dados y se multiplica el número de puntos obtenido en cada uno. ¿Cuántos resultados se pueden obtener? Describe el espacio muestral e indica dos sucesos que no sean elementales.**

Hay 18 resultados diferentes.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

Sucesos elementales: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {8}, {9}, {10}, {12}, {15}, {16}, {18}, {20}, {24}, {25}, {30}, {36}

Sucesos no elementales: «Par», «Menor que 20».

036 **Elegimos una ficha de dominó al azar. Determina los elementos de:**

a) El espacio muestral.
b) A = «Elegir una ficha cuyos números sumen 6»
c) B = «Elegir una ficha cuyos números multiplicados den 12»
Los sucesos A y B, ¿son compatibles o incompatibles?

a) El dominó no diferencia entre (a, b) y (b, a). $E = \{(0, 0), (0, 1), ..., (6, 6)\}$

b) $A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$

c) $B = \{(2, 6), (3, 4)\}$

$A \cap B = \emptyset \rightarrow$ Son incompatibles.

037 ●●

Considera el lanzamiento de 3 monedas. Escribe los siguientes sucesos: A = «Obtener al menos una cara» y B = «Obtener una sola cara». Calcula.

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $\overline{A}$ d) $\overline{B}$

$A = \{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C\}$
$B = \{C++, +C+, ++C\}$

a) $A \cup B = \{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C\} = A$

b) $A \cap B = \{C++, +C+, ++C\} = B$

c) $\overline{A} = \{+++\}$

d) $\overline{B} = \{CCC, CC+, C+C, +CC, +++\}$

038 ●●

Extraemos una de las 28 fichas del dominó al azar y sumamos los puntos. Escribe los sucesos.

a) A = «Obtener múltiplo de 5»

b) B = «Obtener número par»

Calcula: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{A}$, $\overline{B} \cap B$.

a) $A = \{5, 10\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$
$A \cap B = \{10\}$
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{0, 1, 3, 7, 9, 11\}$
$A \cup \overline{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
$\overline{B} \cap B = \emptyset$

039 ●●

En un bombo hay 15 bolas numeradas del 1 al 15 y se extrae una de ellas. Escribe los elementos que forman los sucesos.

a) «Múltiplo de 3»

b) «Múltiplo de 2»

c) «Mayor que 4»

d) «Mayor que 3 y menor que 8»

e) «Número impar»

Escribe un suceso compatible y otro incompatible con cada uno de ellos, y también el suceso contrario.

a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

Suceso compatible $\longrightarrow$ «Sacar mayor que 12»

Suceso incompatible $\rightarrow$ «Sacar menor que 3»

$\overline{A}$ = «No múltiplo de 3» $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

Suceso compatible $\longrightarrow$ «Sacar múltiplo de 3»

Suceso incompatible $\rightarrow$ «Sacar menor que 2»

$\overline{B}$ = «No par» $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

c) $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Suceso compatible $\longrightarrow$ «Sacar múltiplo de 7»

Suceso incompatible $\rightarrow$ «Sacar menor que 3»

$\overline{C} =$ «Menor o igual que 4» $= \{1, 2, 3, 4\}$

d) $D = \{4, 5, 6, 7\}$

Suceso compatible $\longrightarrow$ «Sacar múltiplo de 5»

Suceso incompatible $\rightarrow$ «Sacar mayor que 12»

$\overline{D} = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

e) $F = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

Suceso compatible $\longrightarrow$ «Sacar múltiplo de 7»

Suceso incompatible $\rightarrow$ «Sacar par mayor que 10»

$\overline{F} =$ «No impar» $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

040 **Al lanzar un dado de 6 caras, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Calcula.**

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) ¿Son A y B compatibles?

d) El contrario de los sucesos A, B, $A \cap B$ y $A \cup B$.

Encuentra, entre los sucesos anteriores, una pareja de sucesos compatibles, otra de incompatibles y otra de contrarios.

a) $A \cap B = \{2\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow$ Son compatibles.

d) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 6\}$ $\quad\overline{B} = \{4, 5, 6\}$

$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad\overline{A \cup B} = \{5, 6\}$

A y B son compatibles $\rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$A \cap B$ y $\overline{B}$ son incompatibles $\rightarrow (A \cap B) \cap \overline{B} = \emptyset$

A y $\overline{A}$ son contrarios.

041 **Se lanza un dado de 6 caras y se consideran los sucesos $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ y $C = \{3, 4\}$. Calcula.**

a) $\overline{A}$

b) $\overline{B}$

c) $\overline{C}$

d) $A \cup B$

e) $A \cap B$

f) $B \cup C$

g) $\overline{A \cup B}$

h) $\overline{A} \cap \overline{B}$

i) $\overline{A} \cup \overline{B}$

a) $\overline{A} = \{2, 4\}$

b) $\overline{B} = \{3, 6\}$

c) $\overline{C} = \{1, 2, 5, 6\}$

d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$

e) $A \cap B = \{1, 5\}$

f) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

g) $\overline{A \cup B} = \emptyset$

h) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{2, 3, 4, 6\}$

042 Sacamos dos cartas de una baraja española. Un suceso imposible es:

a) «Sacar dos oros»

b) «Sacar dos caballos de copas»

c) «Sacar dos cartas de distinto palo»

d) «Sacar dos figuras iguales del mismo palo»

Hay dos sucesos imposibles: b) «Sacar dos caballos de copas» y d) «Sacar dos figuras iguales del mismo palo». Por tanto, no pueden ser las dos cartas iguales.

043 Al lanzar un dado, ordena, de menor a mayor grado de probabilidad, los siguientes sucesos.

a) «Número impar»

b) «Número igual o mayor que 5»

c) «Número menor que 7»

d) «Número mayor que 7»

$P(\text{d}) = 0 < P(\text{b}) < P(\text{a}) < P(\text{c}) = 1$

044 De una baraja de 40 cartas se extrae una carta. Calcula las probabilidades de estos sucesos.

a) A = «Obtener oros»

b) B = «Obtener el rey de oros»

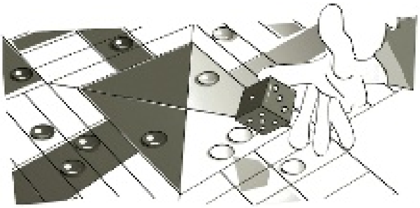
c) C = «Obtener espadas o copas»

a) $P(A) = \frac{10}{40} = 0{,}25$ b) $P(B) = \frac{1}{40} = 0{,}025$ c) $P(C) = \frac{20}{40} = 0{,}5$

045 Se lanza un dado al aire y se suman los puntos de todas las caras menos la de arriba. Obtén el espacio muestral y la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3.

$E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ $P(\text{múltiplo de } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}\widehat{3}$

046 En el juego del parchís se ha trucado el dado para que la probabilidad de que salga 5 sea cinco veces la probabilidad de que salga cualquier otra cara. ¿Qué afirmación es cierta?



a) $P(\text{cara } 5) = \frac{2}{3}$

b) $P(\text{cara } 5) = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{cara } 5) = \frac{5}{6}$

d) $P(\text{cara } 1) = \frac{1}{6}$

Como la suma de las probabilidades es 1, siendo x la probabilidad de que salga cualquiera de las caras distintas de 5 y $5x$ la de 5:
$x + x + x + x + x + 5x = 1 \rightarrow x = 0{,}1$ y $5x = 0{,}5$

Por tanto, la solución es b) $P(\text{cara } 5) = \frac{1}{2}$.

047 **En el caso del dado anterior, la probabilidad de sacar cara impar es:**

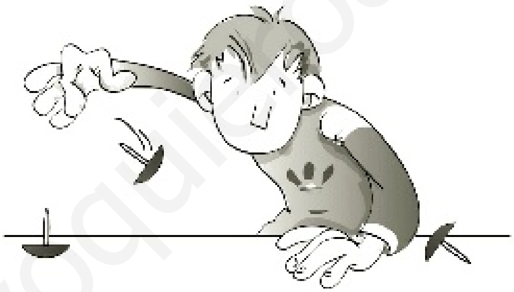
a) $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{7}{6}$

b) $\frac{3}{10}$ **d)** $\frac{7}{10}$

$P(\text{impar}) = P(\{1, 3, 5\}) = P(1) + P(3) + P(5) = 0{,}7$.

La solución es d) $\frac{7}{10}$.

048 **Al lanzar una chincheta, puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo.**



a) ¿Es un experimento aleatorio o determinista?
b) ¿Cuáles son los sucesos elementales?
c) ¿Son estos sucesos equiprobables?

a) Es aleatorio.
b) Los sucesos elementales son «Punta hacia arriba» y «Punta hacia abajo».
c) No son equiprobables, pues es más probable que caiga con la punta hacia abajo.

049 **Para comprobar si los sucesos elementales de la actividad anterior son equiprobables, realiza el experimento 100 veces (toma 10 chinchetas y lánzalas 10 veces). ¿Es mayor la frecuencia relativa del suceso «Punta hacia arriba»?**

Compara tu resultado con el obtenido por tus compañeros, y formad una tabla juntando todos los resultados.

Es mayor la frecuencia relativa del suceso «Punta hacia abajo».

050 ●●

En un bombo hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla. Los resultados son:

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11

Dados los sucesos A = «Múltiplo de 3», B = «Número impar» y C = «Divisor de 6», calcula:

a) La frecuencia relativa de A, B y C.

b) La frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cup C$.

¿Qué probabilidad le asignarías a cada suceso?

$A = \{3, 6, 9\}$ $\quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\quad C = \{1, 2, 3, 6\}$

a) Frecuencia de $A = 12 + 12 + 11 = 35$

Frecuencia de $B = 13 + 12 + 10 + 6 + 11 = 52$

Frecuencia de $C = 13 + 11 + 12 + 12 = 48$

b) Frecuencia de $A \cup B = 13 + 11 + 12 + 10 + 12 + 6 + 11 = 75$

Frecuencia de $A \cap B = 12 + 11 = 23$

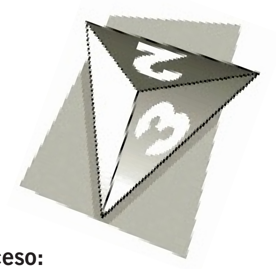
Frecuencia de $A \cup C = 13 + 11 + 12 + 12 + 11 = 59$

$$P(A) = \frac{35}{100} = 0{,}35 \qquad P(B) = \frac{52}{100} = 0{,}52 \qquad P(C) = \frac{48}{100} = 0{,}48$$

$$P(A \cup B) = \frac{75}{100} = 0{,}75 \quad P(A \cap B) = \frac{23}{100} = 0{,}23 \quad P(A \cup C) = \frac{59}{100} = 0{,}59$$

051 ●●

Se lanza 100 veces un dado tetraédrico y se anota el número de la cara oculta, obteniéndose:



Cara	1	2	3	4
f_i	28	22	30	20

Halla la frecuencia relativa del suceso:

a) Múltiplo de 3.

b) Múltiplo de 2.

c) Cara mayor que 1.

d) Cara menor que 1.

¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los sucesos anteriores?

a) Frecuencia 30 $\rightarrow P = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$

b) Frecuencia $22 + 20 = 42 \rightarrow P = \dfrac{42}{100} = 0{,}42$

c) Frecuencia $22 + 30 + 20 = 72 \rightarrow P = \dfrac{72}{100} = 0{,}72$

d) Frecuencia 0 $\rightarrow P = 0$

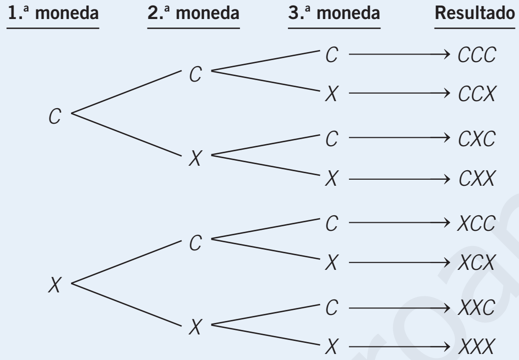
052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN PROBABILIDADES CON AYUDA DE UN DIAGRAMA DE ÁRBOL?

Lanzamos tres monedas. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

A **= «Sacar 3 caras»** ***D*** **= «Sacar 1 cruz»**
B **= «Sacar 2 caras»** ***F*** **= «Sacar a lo sumo 1 cara»**
C **= «No sacar ninguna cara»** ***G*** **= «Sacar más de 1 cara»**

PRIMERO. Se aplica la técnica del diagrama de árbol para encontrar los sucesos elementales.



$$E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$$

SEGUNDO. Se calculan las probabilidades utilizando la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{1}{8} \qquad P(C) = \frac{1}{8} \qquad P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{8} \qquad P(D) = \frac{3}{8} \qquad P(G) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

053 ●●

Se lanzan 4 monedas iguales.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 caras?

b) ¿Y de no obtener ninguna cara?

c) ¿Qué suceso es más probable, obtener 2 caras u obtener, al menos, 3 cruces?

Hay 16 sucesos elementales equiprobables.

a) $P(\text{4 caras}) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

b) $P(\text{0 caras}) = P(\text{4 cruces}) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

c) «Obtener 2 caras» = {CC++, C+C+, C++C, +CC+, +C+C, ++CC}

$P(\text{2 caras}) = \frac{6}{16} = 0{,}375$

«Obtener al menos 3 cruces» = {+++C, ++C+, +C++, C+++, ++++}

$P(\text{al menos 3 cruces}) = \frac{5}{16} = 0{,}3125$. La probabilidad de obtener 2 caras es mayor que la de obtener al menos 3 cruces.

054 ●●● **Un examen de tipo test consta de 5 preguntas, cada una de las cuales tiene 3 posibles respuestas.**

a) Calcula la probabilidad de acertar 3 preguntas si contestas al azar.

b) Si para aprobar el examen hay que contestar al menos 3 preguntas correctamente, halla la probabilidad de aprobar y de suspender.

$P(\text{acertar una pregunta}) = \frac{1}{3}$ $\quad P(\text{no acertar una pregunta}) = \frac{2}{3}$

a) «Acertar 3 preguntas» = {AAANN, AANAN, AANNA, ANAAN, ANANA, ANNAA, NAAAN, NAANA, NANAA, NNAAA}

$$P(\text{suceso elemental}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{243}$$

$$P(\text{acertar 3 preguntas}) = 10\cdot\frac{4}{243} = \frac{40}{243}$$

b) «Acertar 4 preguntas» = {AAAAN, AAANA, AANAA, ANAAA, NAAAA}

$$P(\text{suceso elemental}) = \frac{2}{243}$$

$$P(\text{acertar 4 preguntas}) = 5\cdot\frac{2}{243} = \frac{10}{243}$$

«Acertar 5 preguntas» = {AAAAA}

$$P(\text{acertar 5 preguntas}) = \frac{1}{243}$$

$$P(\text{aprobar}) = \frac{1+10+40}{243} = \frac{51}{243}$$

$$P(\text{suspender}) = 1 - P(\text{aprobar}) = 1 - \frac{51}{243} = \frac{192}{243}$$

055 ● **La probabilidad de un suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?**

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

056 ●● **Si en un dado $P(1) = P(2) = P(3) = 0{,}14$ y $P(4) = P(5) = P(6) = x$, ¿cuál es el valor de x?**

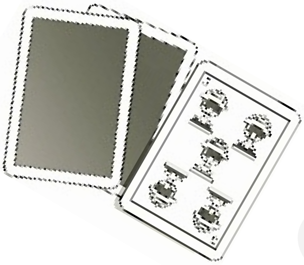
$$3\cdot 0{,}14 + 3x = 1 \rightarrow 3x = 1 - 0{,}42 \rightarrow x = \frac{0{,}58}{3}$$

057 ●● **En un dado trucado, la probabilidad de que salga cada una de las 6 caras es:**

Cara	1	2	3	4	5	6
f_i	0,1	0,1	0,1	a	b	0,4

Sabiendo que $P(4) = 2P(5)$, ¿cuánto valen a y b?

$$a = 2b \rightarrow 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 2b + b + 0{,}4 = 1 \rightarrow b = 0{,}1 \text{ y } a = 0{,}2$$



058 Se extrae una carta de la baraja española. Halla la probabilidad de:

a) Obtener un caballo.
b) No salir una figura.
c) No salir oros ni bastos.
d) Sacar el rey de oros o de espadas.

a) $P(\text{caballo}) = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

b) $P(\text{figura}) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3 \rightarrow P(\text{no figura}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

c) $P(\text{no oros ni bastos}) = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

d) $P(\text{rey de oros o de espadas}) = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$

059 Elegimos al azar un número del 1 al 30. Sean los sucesos A = «Obtener un número par menor o igual que 14», B = «Obtener un múltiplo de 3 menor o igual que 10» y C = «Obtener un múltiplo de 10». Calcula la probabilidad de:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A \cup \overline{B}$
d) $C \cup B$
e) $B \cap C$
f) $\overline{A} \cap B$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ $B = \{3, 6, 9\}$ $C = \{10, 20, 30\}$

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$
$P(A \cup B) = 0{,}3$

b) $A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 30\}$
$P(A \cup C) = 0{,}3$

c) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

$P(A \cup \overline{B}) = \dfrac{28}{30} = 0{,}93$

d) $C \cup B = B \cup C = \{3, 6, 9, 10, 20, 30\}$

$P(C \cup B) = \dfrac{6}{30} = 0{,}2$

e) $B \cap C = \varnothing \rightarrow P(B \cap C) = 0$

f) $\overline{A} \cap B = \{3, 9\} \rightarrow P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{2}{30} = 0{,}06$

060 ●●

En una urna hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Sacamos una bola cuyo número sea n y definimos los siguientes sucesos.

A = «n es múltiplo de 5» **D = «n es divisible por 10»**
B = «n es múltiplo de 3» **F = «n es divisible por 1»**
C = «n es divisible por 2»

a) ¿Cuántos sucesos elementales componen cada suceso? ¿Cuál es la probabilidad de cada uno?

b) ¿Hay dos sucesos incompatibles?

c) ¿Hay dos sucesos compatibles? ¿Y contrarios?

d) Halla la probabilidad de $A \cap B$, $B \cup C$ y D.

a) $A = 20 \longrightarrow P(A) = 0{,}2$
$B = 33 \longrightarrow P(B) = 0{,}33$
$C = 50 \longrightarrow P(C) = 0{,}5$
$D = 10 \longrightarrow P(D) = 0{,}1$
$F = 100 \rightarrow P(F) = 1$

b) No los hay.

c) Todas las parejas son compatibles. No hay sucesos contrarios.

d) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}33 = 0{,}6$
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0{,}33 + 0{,}5 - 0{,}165 = 0{,}665$
$P(D) = 0{,}1$

061 ●●●

Considera un juego en el que lanzas dos dados y ganas si la suma de puntos es 11 o 7.

a) Describe el espacio muestral de este experimento.

b) Calcula la probabilidad de ganar.

a) $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), (3, 1), \ldots, (3, 6), (4, 1), \ldots, (4, 6), (5, 1), \ldots, (5, 6), (6, 1), \ldots, (6, 6)\}$

b) $P(7 \cup 11) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

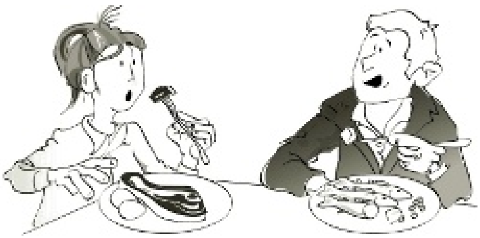
062 ●●

En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto pescado. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) Sea hombre.

b) Haya tomado pescado.

c) Sea hombre y tome pescado.



	Carne	Pescado	Total
Hombres	16	12	28
Mujeres	20	12	32
Total	36	24	60

a) $P(\text{hombre}) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} = 0{,}46$

b) $P(\text{pescado}) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

c) $P(\text{hombre y pescado}) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

063 ●● **En una guardería hay 20 niños y 16 niñas. La mitad de los niños y tres cuartas partes de las niñas son morenos y el resto son rubios. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido uno al azar, sea niño o tenga el pelo moreno?**

Niños $\rightarrow$ morenos $= 10$, rubios $= 10$

Niñas $\rightarrow$ morenas $= \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$, rubias $= 4$

$P(\text{niño o moreno}) = P(\text{niño}) + P(\text{moreno}) - P(\text{niño y moreno})$

$P(\text{niño o moreno}) = \frac{20}{36} + \frac{22}{36} - \frac{10}{36} = \frac{32}{36} = 0{,}89$

064 ●●● **En una ciudad leen el periódico *A* el 30 % de los habitantes, el periódico *B* el 20 % de los habitantes, leyendo el 7 % los dos periódicos.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que, escogido alguien al azar, lea alguno de los dos periódicos?

b) ¿Y de que no lea ningún periódico? ¿Y de que lea uno?

$P(A) = 0{,}3$
$P(B) = 0{,}2$
$P(A \text{ y } B) = 0{,}07$

a) $P(\text{lea } A \text{ o } B) = P(\text{lea } A) + P(\text{lea } B) - P(\text{lea } A \text{ y } B) =$
$= 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}07 = 0{,}43$

b) $P(\text{no lea } A \text{ ni } B) = 1 - P(\text{lea } A \text{ o } B) =$
$= 1 - 0{,}43 = 0{,}57$

$P(\text{lea solo uno}) = 1 - [P(\text{lea } A \text{ y } B) + P(\text{ninguno})] =$
$= 1 - [0{,}07 + 0{,}57] = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

065 ●●

Luis y Juan tienen que recoger la habitación que comparten. Luis pone en una bolsa 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul, y le propone a su hermano sacar una. Si es roja, recoge Juan, y si es azul, recoge él.

a) ¿Cuál es la probabilidad de cada bola?

b) ¿Es justo lo que propone Luis?

c) Juan no acepta el trato y propone que si sale rojo, recogerá él, y si sale azul o verde, recogerá Luis. ¿Es justo este trato? ¿Por qué?

a) $P(\text{roja}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad P(\text{azul}) = \frac{1}{6} = 0{,}16$

b) No, ya que es el triple de probable que le toque a Juan.

c) Sí, porque $P(\text{azul o verde}) = 0{,}5 = P(\text{roja})$.

066 ●●●

Si tengo 3 llaves que abren las 3 cerraduras de una puerta, pero no sé cuál es la que abre cada una, ¿cuál es la probabilidad de que acierte con la combinación a la primera oportunidad?¿Y si tuviera 3 llaves y solo 2 cerraduras? (Una de las llaves no abre ninguna cerradura.)

Si tengo tres llaves, $E = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

La combinación adecuada es solo una de las seis: $P(\text{acertar a la primera}) = \frac{1}{6}$

Si tengo dos llaves: $E = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$

La combinación adecuada es solo una de las seis: $P(\text{acertar a la primera}) = \frac{1}{6}$

067 ●●●

Paula va a una tienda 2 veces por semana, y Roberto trabaja en esa tienda 4 días a la semana. Si el viernes es el único día que no acude ninguno de los dos, ¿cuál es la probabilidad de que coincidan dos días? (La tienda cierra los domingos.)

Como Roberto trabaja cuatro de los cinco días posibles (lunes, martes, miércoles, jueves y sábado), solo hay un día que no trabaja, por lo que al menos coinciden un día. El suceso «Coincidir un día» se da cuando el día que no trabaja Roberto es uno de los dos que trabaja Paula, y su probabilidad es: $\frac{2}{5} = 0{,}4$ (casos favorables = 2 días, casos posibles = 5 días).

Como el suceso «Coincidir dos días» es el contrario de «Coincidir un día», su probabilidad es: $1 - 0{,}4 = 0{,}6$

068 **En el Oeste, tres vaqueros tienen que realizar una acción arriesgada, por lo que cortan tres palitos de distinta longitud, los tapan de forma que muestren la misma altura y cada vaquero elige uno. El que coge el más corto, pierde. ¿Por qué nunca discuten quién elige primero?**

$A =$ «Vaquero primero coge el palo más corto»
$B =$ «Vaquero segundo coge el palo más corto»
$C =$ «Vaquero tercero coge el palo más corto»

Son incompatibles, por lo que cada suceso está incluido en el complementario de los otros.

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

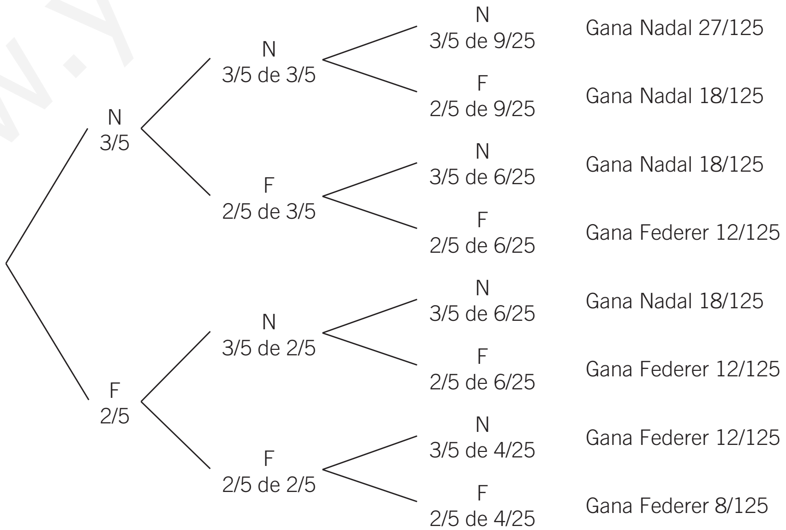
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Luego los tres vaqueros tienen la misma probabilidad de sacar el palo más corto.

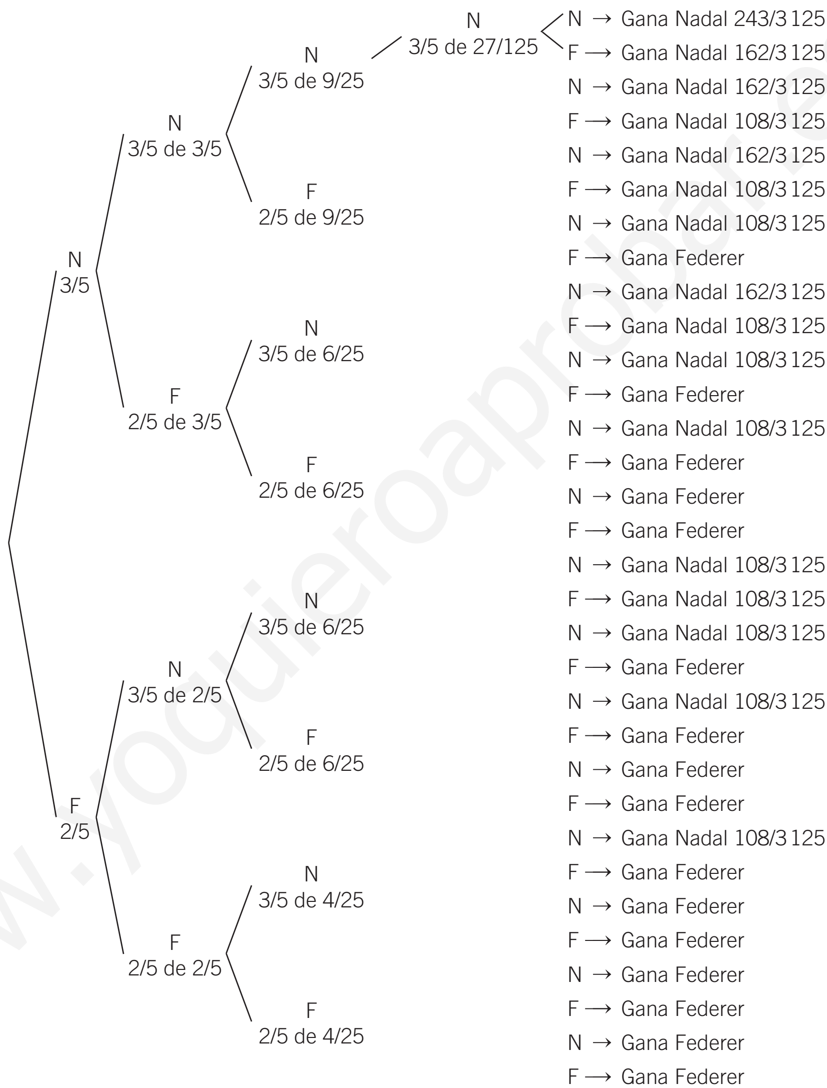
069 **Nadal es mejor que Federer en tierra batida y la probabilidad que tiene de ganarle un set es 3/5. Si el cansancio afecta a ambos por igual, explica por qué Nadal prefiere jugar al mejor de 5 sets que al mejor de 3 sets.**

Realizamos el diagrama de árbol con la frecuencia de victorias para cada caso.



Se observa que la probabilidad de que gane Nadal es:

$$P(\text{Nadal}) = \frac{27}{125} + \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{18}{125} = \frac{81}{125} = 0{,}65$$



$$P(\text{Nadal}) = \frac{\begin{array}{c}243+162+162+162+108+162+108+108+162+\\+108+108+108+162+108+108+108+108\end{array}}{3125} =$$

$$= \frac{2\,295}{3125} = 0{,}73$$

Por tanto, Nadal tiene mayor probabilidad de ganar en 5 sets.

070 **Tengo en el bolsillo dos monedas de 20 céntimos, dos de 10 céntimos y dos de 5 céntimos. Si saco dos monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cantidad superior o igual a 20 céntimos?**

Realizamos el diagrama de árbol que representa la extracción de las monedas:

Primera moneda	Segunda moneda	Total
20 cts. 2/6	20 cts. 1/5 de 2/6	40 cts. → 2/30
	10 cts. 2/5 de 2/6	30 cts. → 4/30
	5 cts. 2/5 de 2/6	25 cts. → 4/30
10 cts. 2/6	20 cts. 2/5 de 2/6	30 cts. → 4/30
	10 cts. 1/5 de 2/6	20 cts. → 2/30
	5 cts. 2/5 de 2/6	15 cts. → 4/30
5 cts. 2/6	20 cts. 2/5 de 2/6	25 cts. → 4/30
	10 cts. 2/5 de 2/6	15 cts. → 4/30
	5 cts. 1/5 de 2/6	10 cts. → 2/30

La probabilidad de sacar al menos 20 céntimos con dos monedas es:

$$P(> 20 \text{ cts.}) = \frac{2+4+4+4+2+4}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

071 **En una clase de 23 alumnos, el tutor revisa las fichas de sus alumnos y comprueba que dos alumnos cumplen años el mismo día del mismo mes. Al comentárselo al profesor de Matemáticas, este le dice que eso es más habitual que lo contrario, es decir, que no haya ninguna coincidencia. Comprueba que el profesor de Matemáticas tiene razón.**

Cuando son dos alumnos, la probabilidad de que no hayan nacido en la misma fecha es $\frac{364}{365}$. La probabilidad de que tres alumnos no hayan nacido en la misma fecha es: $\frac{363}{365}$ de $\frac{364}{365} = \frac{363 \cdot 364}{365^2}$

La probabilidad de cuatro alumnos es: $\frac{362}{365}$ de $\frac{363 \cdot 364}{365^2} = \frac{362 \cdot 363 \cdot 364}{365^3}$

Así, la probabilidad de que en 23 alumnos no haya coincidencias de fechas de nacimiento es: $\frac{342 \cdot 343 \cdot \ldots \cdot 363 \cdot 364}{365^{22}} = 0{,}46$

Por tanto, la probabilidad de que exista una coincidencia es 0,54, por lo que es más probable que lo contrario.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

072 ●●●

Con motivo de la semana cultural del instituto, se ha celebrado un campeonato de dardos. Tras varias eliminaciones hemos quedado como finalistas Ana, Bernardo, y yo.

Desde hace tiempo he ido apuntando las partidas que hemos jugado y quiénes han sido los ganadores.

Yo contra...

	Partidas jugadas	Ganadas por mí
Ana	36	22
Bernardo	44	35

Ana contra...

	Partidas jugadas	Ganadas por Ana
Bernardo	27	16

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿Cuántas partidas he ganado a Bernardo? ¿Con quién he perdido más partidas?

b) ¿Qué probabilidad tengo de ganar a Ana? ¿Y a Bernardo?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

La final consiste en una liga en la que todos jugaremos contra cada uno de los participantes. Cada victoria otorgará 1 punto al ganador y 0 puntos al perdedor.

Al finalizar la liga ganará el concursante con mayor puntuación.

c) ¿Cuántas partidas tendremos que jugar?

d) ¿Cuántas partidas tengo que ganar para estar seguro de que ganaré la liga?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

e) He estado analizando los datos y creo que tengo muchas posibilidades de ganar. ¿Opinas que esto es cierto?

a) He ganado 35 partidas a Bernardo.

He perdido más partidas con Ana: 14, que con Bernardo: 9.

b) $P(\text{ganar a Ana}) = \dfrac{22}{36} = \dfrac{11}{18}$ $\quad P(\text{ganar a Bernardo}) = \dfrac{35}{44}$

c) Hay que jugar 3 partidas. $A \langle$ B ——— Conmigo / Conmigo

d) Si consideramos que ganar es tener más puntos en solitario, sin empates, la única manera de hacerlo es ganar dos partidas, ya que si solo se gana una, en las otras dos partidas de la liga siempre habrá un jugador que gane al menos una, por lo que empataría.

e) Calculamos la probabilidad de ganar el campeonato.

Mi probabilidad de ganar el campeonato es: $\frac{11}{18} \cdot \frac{35}{44} = \frac{385}{792} = 0{,}49$

La probabilidad de que lo gane Ana es: $\frac{14}{36} \cdot \frac{16}{27} = \frac{56}{243} = 0{,}23$

La probabilidad de que lo gane Bernardo es: $\frac{9}{44} \cdot \frac{11}{27} = \frac{1}{12} = 0{,}083$

Luego soy el que más probabilidad tengo de ganar.

073 ●●●

La Dirección General de Tráfico va a llevar a cabo una campaña para reducir la siniestralidad en las carreteras.

Para determinar la incidencia de las infracciones más habituales, se han realizado múltiples controles de tráfico.

En cada control, los agentes han inspeccionado a 500 vehículos:

- Una media de 60 conductores no llevaba cinturón.
- De estos 60 conductores, 40 no respetaban la distancia de seguridad.
- Y 410 conductores circulaban correctamente.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Qué probabilidad hay de que, al parar a un conductor, este no lleve puesto el cinturón de seguridad?

b) ¿Qué probabilidad hay de que circule correctamente?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) A los conductores que no llevaban cinturón se les sancionó con la pérdida de 2 puntos, y a los que no respetaban la distancia de seguridad, con 3 puntos. ¿Qué probabilidad hay de que, al parar al conductor, este cometa una infracción que le cueste la pérdida de 5 puntos?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Ante estos datos, se plantean hacer controles persuasorios. ¿Cuántos vehículos, aproximadamente, se deben inspeccionar en cada control para no sobrepasar los 10 conductores sancionados con la pérdida de 5 puntos?

a) $P(\text{no llevar cinturón}) = \dfrac{60}{500} = \dfrac{3}{25}$

b) $P(\text{circular correctamente}) = \dfrac{410}{500} = \dfrac{41}{50}$

c) $P(\text{no llevar cinturón y no respetar la distancia de seguridad}) = \dfrac{40}{500} = \dfrac{2}{25}$

d) La frecuencia de conductores que no llevan el cinturón y no respetan la distancia de seguridad es: $\dfrac{40}{500} = \dfrac{2}{25}$.

$$x \cdot \frac{2}{25} < 10 \rightarrow x < 125$$

Por lo que para no sobrepasar los 10 conductores que son sancionados con 5 puntos debemos inspeccionar menos de 125 vehículos.

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:
Portada: **Pep Carrió**
Interiores: **Rosa María Barriga, Manuel García**

Ilustración: **Grafitti s.c., José María Valera**

Fotografía de cubierta: **Antonio Fernández**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**
Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**
Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**
Desarrollo gráfico: **José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Lourdes Román**
Confección y montaje: **Hilario Simón, Marisa Valbuena**

Corrección: **Marta Rubio, Gerardo Z. García**
Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: A. Toril; D. López; F. de Madariaga; GARCÍA-PELAYO/Juancho; GOYENECHEA; J. Jaime; ORONOZ; Prats i Camps; A. G. E. FOTOSTOCK; AGENCIA ESTUDIO SAN SIMÓN/A. Prieto; COMSTOCK; EFE/EPA/Justin Lane, Andreu Dalmau, M. Hernández de León, EPA PHOTO/Wolfgang Kumm; EFE/SIPA-PRESS/Peter Stumpf; FOAT; I. Preysler; JOHN FOXX IMAGES; PHOTODISC; STOCKBYTE; Airman Joe Hendricks, U.S. Navy; M. Vives; MATTON-BILD; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; ARCHIVO SANTILLANA

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España por

ISBN: 978-84-294-6849-6
CP: 220757
Depósito legal: