

Matemàtiques

Sèrie 2

SOLUCIONS,
CRITERIS DE PUNTUACIÓ
I CORRECCIÓ

INSTRUCCIONS

- Trieu i resoleu CINC dels set exercicis que es proposen.
- Indiqueu clarament quins heu triat. Si no ho feu així, s'entendrà que heu escollit els cinc primers.
- Cada exercici val 2 punts.

MATERIAL NECESSARI

- Material d'ús habitual: bolígraf, llapis, goma, regla, etcètera.
- Compàs i semicercle graduat (transportador).
- Calculadora científica.

Cadascú ha de portar el seu material. En cap cas no es permet la cessió de calculadores ni d'altres materials entre els aspirants.

1. a) Sabent que la Terra té un radi mitjà de 6.371 km, trobeu la longitud d'un meridià (cercle que passa pels dos pols de la Terra) i de la superfície de la Terra. (Arrodoniu els resultats fins a les unitats.)

[0,5 punts]

$$\text{Longitud meridià} = 2 \cdot \pi \cdot 6371 = 40.030 \text{ km}$$

$$\text{Superfície Terra} = 4 \cdot \pi \cdot 6371^2 = 510.064.472 \text{ km}^2$$

b) Si prenem com a aproximació del radi mitjà de la Terra la quantitat de 6400 km, quant valen ara la longitud del meridià i la de la superfície de la Terra? Calculeu l'error absolut i l'error relatiu que cometem en el càlcul de la longitud del meridià i en el càlcul la superfície de la Terra si agafem aquesta aproximació, i expliqueu on creieu que cometem un error més gran.

(Superfície d'una esfera = $4\pi r^2$)

[1,5 punts]

$$\text{Longitud meridià} = 2 \cdot \pi \cdot 6400 = 40.212 \text{ km}$$

$$\text{Superfície Terra} = 4 \cdot \pi \cdot 6400^2 = 514.718.540 \text{ km}^2$$

$$E_a \text{ longitud meridià} = 40.212 - 40.030 = 182 \text{ km}$$

$$E_r \text{ longitud meridià} = 182:40030 = 0,0045$$

$$E_a \text{ superfície Terra} = 514.718.540 - 510.064.472 = 4.654.068 \text{ km}^2$$

$$E_r \text{ superfície Terra} = 4.654.068 : 510.064.472 = 0,0091$$

Es comet un error més gran en el càlcul de la superfície de la Terra, ja que l'error relatiu d'aquest càlcul és major que el del càlcul de la longitud del meridià.

2. Relacioneu cadascuna de les expressions algebraiques següents amb les expressions de la taula.

[0,25 punts per cada relació correcta]

$$x + 2y; \sqrt{a} \cdot b; 2(a + b); \frac{3t}{5}; x - y; (a + b)^2; \sqrt{x \cdot y}; \frac{x + y}{2}$$

El quadrat de la suma de dos nombres	$(a + b)^2$
La diferència de dos nombres	$x - y$
La semisuma de dos nombres	$\frac{x + y}{2}$
El producte de l'arrel d'un nombre per un altre nombre	$\sqrt{a} \cdot b$
L'arrel del producte de dos nombres	$\sqrt{x \cdot y}$
La suma d'un nombre amb el doble d'un altre	$x + 2y$
Les tres cinquenes parts d'un nombre	$\frac{3t}{5}$
El doble de la suma de dos nombres	$2(a + b)$

3. Trobeu, en cada apartat, els nombres que compleixen la condició que s'indica.

a) $(2x + 1)^2 = 25$
[0,75 punts]

$$2x + 1 = \pm 5 \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

b) El seu triple dona el mateix valor que si al seu quadrat li restem 10 unitats.
[0,75 punts]

$$3x = x^2 - 10 \quad x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

c) $2^{3x-1} = 32$
[0,5 punts]

$$2^{3x-1} = 2^5 \quad 3x - 1 = 5 \quad x = 2$$

4. Considereu les rectes r: $y = -2x + 5$ i s: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{2}$

a) Trobeu dos punts que pertanyin a cadascuna de les rectes.
[0,75 punts]

$$r: x_1 = 1 \quad y_1 = -2 \cdot 1 + 5 = 3 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = -2 \cdot 2 + 5 = 1$$

Dos punts com a exemple de la recta r: (1, 3) i (2, 1)

$$s: x_1 = 2 \quad \frac{2+1}{3} = \frac{y_1-4}{2} \quad y_1 = 6 \quad x_2 = 5 \quad \frac{5+1}{3} = \frac{y_2-4}{2} \quad y_2 = 8$$

Dos punts com a exemple de la recta s: (2, 6) i (5, 8)

b) Trobeu un vector director de cadascuna de les rectes.
[0,5 punts]

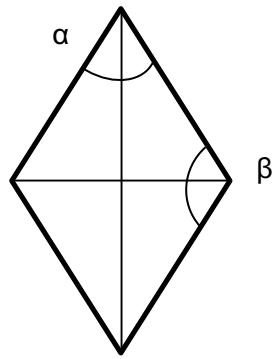
$$\vec{v}_r = (2 - 1, 1 - 3) = (1, -2) \quad \text{o qualsevol altre que hi sigui paral·lel.}$$

$$\vec{v}_s = (5 - 2, 8 - 6) = (3, 2) \quad \text{o qualsevol altre que hi sigui paral·lel.}$$

c) Calculeu l'angle que formen les dues rectes.
[0,75 punts]

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-1}{\sqrt{65}} \quad \alpha = 97,125^\circ \quad \text{o} \quad \beta = 180 - 97,125 = 82,875^\circ$$

5. Considereu l'estel en forma de rombe representat en el dibuix.



Sabent que la diagonal més llarga mesura 72 cm i la més curta, 38 cm, calculeu la mesura dels costats i la dels angles de l'estel.

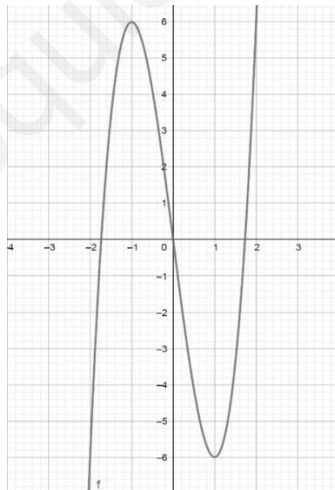
[2 punts]

$$\begin{aligned} \text{Costat} &= \sqrt{36^2 + 19^2} = 40,71 \text{ cm} \\ \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{19}{36} \quad \frac{\alpha}{2} = 27,824^\circ \quad \alpha = 55,648^\circ \\ \beta &= 180 - 55,648^\circ = 124,352^\circ \end{aligned}$$

Adjudiqueu 0,75 punts pel càlcul del costat, 0,75 punts pel càlcul del primer angle i 0,5 punts pel càlcul del segon angle.

6. Considereu el gràfic de la funció $f(x)$

[1 punt per apartat]



a) Trobeu les solucions de les equacions $f(x) = 0$ (aproximades) i $f'(x) = 0$

$$\text{Solucions (aproximades) de } f(x) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1,7 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1,7 \end{cases}$$

$$\text{Solucions de } f'(x) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

b) Sabent que $f'(2) = 27$ i $f(2) = 6$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt $x = 2$.

$$y = mx + n \quad m = 27 \quad 6 = 27 \cdot 2 + n \quad n = -48 \quad y = 27x - 48$$

7. En una finca forestal s'han mesurat els diàmetres dels troncs dels arbres que hi ha i les dades s'han recollit en la taula de freqüències següent:

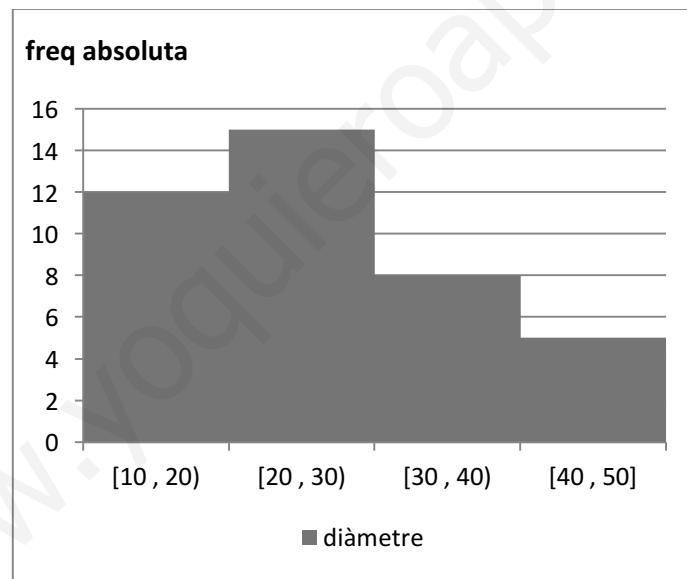
<i>Diàmetre (cm)</i>	<i>Marca de classe</i>	<i>Freqüència absoluta</i>	<i>Freqüència relativa</i>	<i>Percentatge</i>
[10 , 20)	15	12	0,3	30
[20 , 30)	25	15	0,375	37,5
[30 , 40)	35	8	0,2	20
[40 , 50]	45	5	0,125	12,5

$$N = 40$$

Acabeu d'omplir la taula, calculeu la mitjana aritmètica i representeu les dades en un histograma.

[2 punts]

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 12 + 25 \cdot 15 + 35 \cdot 8 + 45 \cdot 5}{40} = \frac{1060}{40} = 26,5$$



Adjudiqueu 1 punt per omplir la taula, 0,5 punts pel càlcul de la mitjana i 0,5 punts per l'histograma.