MATEMÁTICAS
EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

1. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [2 puntos] Calcule, o indique por qué no es posible, $A+B$, $A \cdot B$, $A + B^t$, C^2. (Nota: B^t denota la matriz traspuesta de B).

b) [1 punto] Calcule $\det(C)$. ¿Existe C^{-1}? (En caso de que exista, no es necesario calcularla).

Solución:

a)
- No es posible calcular $A+B$ porque las matrices son de distinto tamaño.
- $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$A + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

b)
$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$$

Como $\det(C) \neq 0$, existe la inversa de C.

2. *a*) [1 punto] De un triángulo rectángulo, sabemos que su hipotenusa mide $\sqrt{5}$ cm y uno de sus catetos mide 1 cm. Calcule el otro cateto y los dos ángulos agudos del triángulo (Notas: los ángulos se pueden expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos).

   b) [1 punto] En el plano se consideran los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (2, 1)$. Calcule la ecuación explícita de la recta que pasa por ambos puntos.

   c) [1 punto] Sea r la recta de ecuación paramétrica

$$r : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -2 + 3t \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

   Calcule la ecuación paramétrica de la recta s perpendicular a r que pasa por el punto $(4, 5)$.

Solución:

a) Sea b la longitud del cateto a calcular. Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que $b^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2$, luego $b^2 = 5 - 1 = 4$ y $b = 2$ cm.

Sea α al ángulo opuesto al cateto de longitud 1. Por la definición de seno, se tiene que $\operatorname{sen} \alpha = 1/\sqrt{5}$, luego $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(1/\sqrt{5}) = 26{,}5651^{\text{o}}$.

El otro ángulo agudo β cumple que $\alpha + \beta + 90^{\text{o}} = 180^{\text{o}}$, luego $\beta = 90^{\text{o}} - 26{,}5651^{\text{o}} = 63{,}4349^{\text{o}}$.

b) Primero usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x-1}{2-1}$$

Simplificando, se obtiene

$$\frac{y-2}{-1} = \frac{x-1}{1} \iff y - 2 = -(x-1) \iff y = -x + 3.$$

c) Un vector director de r es $\vec{v} = (2, 3)$, luego un vector director de cualquier recta perpendicular a r será $\vec{u} = (-3, 2)$. Una posible ecuación paramétrica de la recta pedida es

$$s : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4 - 3t \\ y & = & 5 + 2t \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

3. *a*) [1 punto] Estudie el dominio de las siguientes funciones

$$\text{(i)} \quad f(x) = \ell n\,(1 + x^2), \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

(ℓn denota logaritmo neperiano).

b) [1 punto] Localice y clasifique los extremos relativos de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ en $(0, +\infty)$.

c) [2 puntos] Calcule el área comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^4$ e $y = x^3$.

Solución:

a)
- El dominio de f está formado por los puntos en los que $1 + x^2 > 0$, es decir, todo $\mathbb{R}$.
- El dominio de g está formado por los puntos donde $1 - x^2 \geq 0$. Resolvemos la inecuación:

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Luego $\mathrm{Dom} g = [-1, 1]$.

b) Calculamos la derivada de f, que es $f'(x) = 1 - 1/x^2$. Resolviendo $1 - 1/x^2 = 0$ tenemos $x = \pm 1$. Como nos piden soluciones positivas, tomamos $x = 1$.
Para clasificar el extremos, calculamos $f''(x) = 2/x^3$. Se tiene que $f''(1) = 2 > 0$, luego en $x = 1$ hay un mínimo relativo.

c) Calculamos los puntos de intersección de ambas curvas resolviendo la ecuación $x^4 = x^3$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. Entre 0 y 1, se tiene que $x^3 \geq x^4$, luego el área pedida es

$$A = \int_0^1 (x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - (0 - 0) = 0{,}05\mathrm{u}^2,$$

donde u es la unidad de longitud usada.

Opción B

1. *a*) [1.5 puntos] Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, en función de x, el determinante de A. ¿Para qué valores de x existe A^{-1}? (No hay que calcular la inversa).

b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y + z & = & 5 \\ 2x - 2y + z & = & -6 \\ -x + y + 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

Solución:

a) Calculamos el determinante por la regla de Sarrus.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + x \cdot 1 \cdot x - x \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot x \cdot 1 = x^2 - x - 2.$$

La matriz inversa de A existe si y solo si $\det(A) \neq 0$. Resolviendo la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ tenemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{r} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

Luego A es invertible si y solo si $x \neq 2$ y $x \neq -1$.

b) Escribimos la matriz ampliada del sistema y efectuamos operaciones elementales para triangularizar el sistema.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 + F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & -16 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{array} \right) \underset{F_3 \leftarrow 2F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

Resolvemos el sistema triangular superior resultante:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y + z & = & 5 \\ -8y - z & = & -16 \\ 5z & = & 0 \end{array} \right.$$

De la tercera ecuación obtenemos $z = 0$. La segunda ecuación queda como $-8y - 0 = -16$, por lo que $y = 2$. Finalmente, la primera ecuación queda $x + 3 \cdot 2 + 0 = 5$, y despejando la x obtenemos $x = -1$. El sistema tiene una única solución, que es

$$x = -1, \ y = 2, \ z = 0.$$

2. *a*) [2 punto] Sean $\vec{u} = (3,4)$ y $\vec{v} = (0,4)$. Calcule $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $|\vec{u}|$, y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (Notas: el ángulo se puede expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos)

   b) [1 punto] Sea α el ángulo del primer cuadrante tal que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}28$. Calcule de forma razonada, y sin calcular el ángulo α, $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$. (Nota: use al menos 4 decimales en los cálculos).

Solución:

a)
- $\vec{u}+\vec{v} = (3,8)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 0 + 4\cdot 4 = 16$.
- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
- Denotemos α el ángulo formado por ambos vectores. De la fórmula $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, usando los resultados de los apartados anteriores y que $|\vec{v}| = 4$, tenemos

$$\cos\alpha = \frac{16}{5\cdot 4} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 36{,}8699^{\mathrm{o}}.$$

b) De la relación $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se tiene $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}28^2 = 0{,}9216$. Como α está en el primer cuadrante, su coseno es positivo, luego $\cos\alpha = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$, y por tanto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}28}{0{,}96} \approx 0{,}2917.$$

3. *a*) [1 punto] Determine para qué valor o valores de a, la siguiente función es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ \ell n\, x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

b) [1 punto] Calcule la ecuación explícita de la recta tangente a la curva $y = \mathrm{e}^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

c) [1 punto] Calcule

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 + x) - 1}{x}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ell n\, x}$$

(ℓn denota logaritmo neperiano).

d) [1 punto] Calcule

$$\text{(i)} \quad \int \sqrt{x}\, \mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x$$

Solución:

a) Por un lado se tiene que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x + a = 1 + a.$$

Por el otro

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ell n\, x = \ell n\, 1 = 0.$$

Luego para que f sea continua, se tiene que cumplir que $1 + a = 0$, y por tanto $a = -1$. En este caso, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$ y f es continua en a.

Si $x < 1$, f es continua en x por ser una función polinómica. Si $x > 1$, f es continua en x por que el logaritmo neperiano es una función continua en su dominio.

b) Se tiene que $y'(x) = \mathrm{e}^x$, luego la pendiente de la recta tangente es $m = y'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$. Aplicando la ecuación punto-pendiente, y usando que $y(0) = 1$, se tiene

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1.$$

c) (i) El límite presenta una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi/2 + x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi/2 + x)}{1} = \cos(\pi/2 + 0) = 0.$$

(ii) El límite presenta una indeterminación del tipo ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ell n\, x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

También se puede hacer por el orden los infinitos que aparecen en la expresión.

d) (i) Obtenemos una primitiva escribiendo $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y aplicando la regla de las potencias:

$$\int \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \int x^{1/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} x^{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

(ii) Obtenemos la integral definida aplicando la regla de Barrow, y usando que una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$