MATEMÁTICAS

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.
Los ángulos se pueden expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos.

Opción A

1. *a*) [2 puntos] Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 101 & -10 \\ -10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule, o indique por qué no es posible, $A+B$, AB, BA, AB^t.
(Nota: B^t denota la matriz traspuesta de B).

b) [1 punto] Calcule $\det(A)$. ¿Existe la inversa de A? ¿Es B la inversa de A?. ¿Por qué?

Solución:

a)
- No tiene sentido $A+B$ porque A y B tienen tamaños distintos.
- No tiene sentido AB porque el número de columnas de A (2) es distinto que el número de filas de B (3).
- $$BA = \begin{pmatrix} 101 & -10 \\ -10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ -10 & 101 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{vmatrix} = 1 \times 101 - 10 \times 10 = 1 \neq 0$, A es invertible, pero B no puede ser la inversa de A por no ser cuadrada.

2. *a*) [1.5 puntos] Justifique por qué el sistema formado por los vectores $\vec{u} = (1, 10),\ \vec{v} = (10, 101)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y encuentre las coordenadas del vector $\vec{e}_1 = (1, 0)$ en función de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

b) [0.5 puntos] ¿Son los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ del apartado anterior perpendiculares? Justifíquese.

c) [1 punto] Dibuje, o explique por qué no es posible dibujar, un ángulo α que cumpla que $\cos\alpha = 0.5$ y $\sin\alpha = 0.5$.

Solución:

a) Los vectores forman una base. Hay muchas formas distintas de justificar esto. Por ejemplo, el determinante de la matriz formada por las componentes de los vectores es 1, calculado en el ejercicio 1b). Como es distinto de cero, ambos vectores forman una base.

Escribimos $\vec{e}_1$ como combinación lineal de los vectores de la base: $\vec{e}_1 = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Igualando componente a componente tenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha + 10\beta &= 1 \\ 10\alpha + 101\beta &= 0. \end{cases}$$

Resolvemos, por ejemplo, por el método de Gauss:

$$\begin{cases} \alpha + 10\beta &= 1 \\ 10\alpha + 101\beta &= 0 \end{cases} \underset{E_2 \leftarrow E_2 - 10E_1}{\sim} \begin{cases} \alpha + 10\beta &= 1 \\ \beta &= -10 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos $\beta = -10$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación y despejando, tenemos $\alpha = 101$. Luego

$$\vec{e}_1 = 101\vec{u} - 10\vec{v}.$$

b) Se tiene que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 10 + 10 \times 101 = 1020 \neq 0$. Luego no son perpendiculares.

c) No existe tal ángulo, porque de existir tendríamos que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0.5^2 + 0.5^2 = 0.25 + 0.25 = 0.5$. Pero esa suma da 1 para cualquier ángulo.

3. *a*) [1.5 puntos] Calcule, o justifique la no existencia, de los siguientes límites.

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

b) [1 punto] Calcule la función derivada de $f(x) = x^3 + \operatorname{sen}^2(2\pi x)$. Como aplicación, escriba la ecuación explícita de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) [1.5 puntos] Calcule el área comprendida entre la gráfica de la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Solución:

a) (i) Se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada y aplicamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

(ii) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Podemos efectuar la división por la regla de Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 - 1) = 0.$$

También se podría haber aplicado la regla de L'Hôpital.

b) Aplicando la regla de la suma, la de las potencias, la de la cadena y la derivada del seno, tenemos que

$$f'(x) = 3x^2 + 4\pi \operatorname{sen}(2\pi x) \cos(2\pi x).$$

(Si además aplicamos la fórmula del ángulo doble tenemos $f'(x) = 3x^2 + 2\pi \operatorname{sen}(4\pi x)$).

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ es $m = f'(1) = 3$. Como $f(1) = 1$, usando la ecuación punto-pendiente obtenemos

$$y - 1 = 3(x - 1) \iff y = 3x - 2$$

c) Por un lado, $\operatorname{sen} x = 0$ para $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Además, $\operatorname{sen} x > 0$ en $(0, \pi)$ y $\operatorname{sen} x < 0$ en $(\pi, 2\pi)$. Luego

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x| \, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \\ &= (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - (-\cos x)\Big|_{x=\pi}^{x=2\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) - \big((-\cos 2\pi) - (-\cos\pi)\big) \\ &= -(-1) - (-1) - \big((-1) - 1\big) = 4 \end{aligned}$$

Opción B

1. *a*) [1.5 puntos] ¿Para qué valores del parámetro a es la siguiente matriz invertible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

b) [1.5 puntos] Considere el sistema de ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + 3z & = & 6 \\ 2x + 6y - z & = & -13 \\ -x + 4y - 2z & = & -15 \end{array} \right.$$

Resuélvalo por el método de Gauss (matricialmente o con ecuaciones, como prefiera).

Solución:

a) Calculamos el determinante de A mediante la regla de Sarrus.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 1 - a - 1 - a = a^2 - 2a + 1.$$

Como $\det(A) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$, el determinante solo se anula para $a = 1$, luego A es invertible si y solo si $a \neq 1$.

b) Resolvemos aplicando el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & -1 & -13 \\ -1 & 4 & -2 & -15 \end{array} \right) \underset{\substack{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 + E_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -7 & -25 \\ 0 & 6 & 1 & -9 \end{array} \right) \underset{E_3 \leftarrow E_3 - 3E_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -7 & -25 \\ 0 & 0 & 22 & 66 \end{array} \right)$$

Obtenemos el sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + 3z & = & 6 \\ 2y - 7z & = & -25 \\ 22z & = & 66 \end{array} \right.$$

Resolvemos mediante sustitución regresiva. De la tercera ecuación obtenemos $z = 3$. Sustituyendo el valor de z en la segunda ecuación y despejando la y tenemos

$$y = \frac{1}{2}(-25 + 7 \times 3) = -2.$$

Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos para y y z en la primera ecuación se tiene

$$x = 6 - 2 \times (-2) - 3 \times 3 = 1.$$

Luego la solución del sistema es $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$.

2. *a*) [2 puntos] Se consideran las rectas

$$r : \frac{x-68}{12} = \frac{y+1}{-5}, \qquad s : \begin{cases} x = & 2+3t \\ y = & -1-4t \end{cases}.$$

Calcule sus vectores directores, el ángulo que forman y el punto en que se cortan.

b) [1 punto] En un triángulo isósceles los dos lados iguales miden 5 metros cada uno y el tercer lado mide 6 metros. Calcule la altura correspondiente al lado desigual y el área del triángulo.

Solución:

a) Un vector director de r es $\vec{u} = (12, -5)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (3, -4)$. De la fórmula $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$ tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{12 \times 3 + (-5) \times (-4)}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{56}{13 \times 5} = \frac{56}{65} \approx 0.8615$$

Luego el ángulo es el arcocoseno de 0.8615 y se puede expresar de cualquiera de la siguientes maneras:

$$\alpha \approx \arccos 0.8615 = 0.5325\,\text{rad} = 30.5102^{\text{o}} = 30^{\text{o}}\,30'\,36.8547''.$$

Para calcular el punto en que se cortan, podemos usar las expresiones paramétricas para x e y de la recta s en la ecuación de la recta r:

$$\frac{2+3t-68}{12} = \frac{-1-4t+1}{-5} \iff -5(3t-66) = 12(-4t) \iff 33t = -5 \times 66 \iff t = -10.$$

Por lo tanto, $x = -28$ e $y = 39$.

b) La altura correspondiente al lado de 6m divide al triángulo en dos triángulos rectángulos iguales, cada uno de ellos con un cateto que mide 3m y la hipotenusa de 5m. Sea h la longitud de la altura medida en metros. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$3^2 + h^2 = 5^2.$$

Despejando, obtenemos $h = 4\text{m}$. Por lo tanto, el área A del triángulo es

$$A = \frac{6\text{m} \times 4\text{m}}{2} = 12\text{m}^2.$$

3. *a*) [3 puntos] Sea $f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

(i) Calcule su derivada y localice y clasifique sus máximos y mínimos relativos.
(ii) Calcule el dominio de f. Justifique que no tiene asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
(iii) Calcule sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(iv) Con la información obtenida, esboce una gráfica de $f(x)$.

b) [1 punto] Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\text{(i)} \quad \int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \quad \int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$$

Solución:

a) (i) Se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

Calculemos los puntos donde se anula la derivada:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x} \iff x = -x \iff x = 0.$$

Para clasificarlo, calculamos

$$f''(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}).$$

Como $f''(0) = 1 > 0$, por el criterio de la derivada segunda, en $x = 0$ hay un mínimo relativo.

(ii)
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ por ser suma de funciones elementales con dominio $\mathbb{R}$.
- Como $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ y f es continua, no hay asíntotas verticales.
- Estudiamos el comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}(+\infty + 0) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}(0 + \infty) = +\infty,$$

  y por tanto no hay asíntotas horizontales.
- Para estudiar las asíntotas oblicuas, calculamos los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

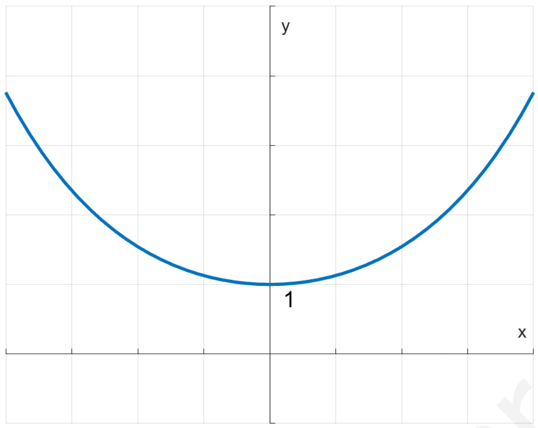
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}{x} \overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{1} = \frac{1}{2}(+\infty - 0) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}{x} \overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{1} = \frac{1}{2}(0 - \infty) = -\infty.$$

  y por tanto no hay asíntotas oblicuas.

(iii) Si $x < 0$, se tiene que $-x > x$, luego $\mathrm{e}^{-x} > \mathrm{e}^x$ y por tanto $f'(x) < 0$ y f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.
Si $x > 0$, se tiene que $x > -x$, luego $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{-x}$ y por tanto $f'(x) > 0$ y f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

(iv) Finalmente, con los datos obtenidos podemos trazar la siguiente gráfica.



b) (i) Escribimos $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ y aplicamos la regla de las potencias.

$$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{5/2} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

(ii) Aplicamos la fórmula de integración por partes tomando $u = x$, $\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$. Por tanto $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ y $v = -\cos x$.

$$\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$