MATEMÁTICAS: EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

1. [3 puntos] Dado un parámetro real k, se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule, o explique por qué no es posible calcular, $C = A \cdot B$, $D = B \cdot A$, $E = A + B^t$, donde B^t es la traspuesta de B.

   b) Calcule, o explique por qué no es posible calcular, los determinantes de A, C y D.

   c) Para cada una de las matrices A, C y D, calcule para qué valores de k existe su inversa.

Solución:

a)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 2 \\ 2k-2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+4 & k^2+2 & -2 \\ 1 & k & 0 \\ 5 & 3k+1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & k+1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) No es posible calcular el determinante de A por no ser cuadrada. Para las otras, aplicamos la regla de Sarrus.

$$\det(C) = 6k - 4k + 4 = 2k + 4.$$

$$\det(D) = -k^2 - 4k - 6k - 2 + 10k + k^2 + 2 = 0.$$

c) La inversa de A nunca existe por no ser A cuadrada. La inversa de C existe si $k \neq -2$. La inversa de D no existe por tener determinante 0 para todo k.

2. *a*) [1 punto] Calcule la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A = (-2, -1)$ y $B = (3, 8)$.

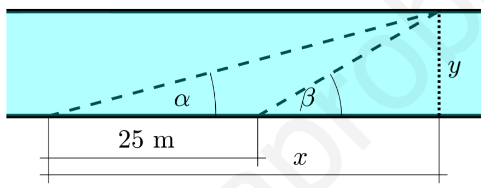
   b) [2 puntos] Desde la orilla sur de un río que corre de este a oeste, miramos hacia un punto de la otra orilla situado aguas arriba con un ángulo $\alpha = 15^{\circ}$. Caminamos 25 m por nuestra orilla en dirección este, y al alzar la mirada hacia el mismo punto, lo hacemos con un ángulo $\beta = 30^o$. ¿Cuál es la anchura del río?

Solución:

a) Hay varias formas de resolver el problema. Vamos a hacerlo con la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$\frac{y+1}{8+1} = \frac{x+2}{3+2} \iff y+1 = \frac{9}{5}x + \frac{18}{5} \iff y = \frac{9}{5}x + \frac{13}{5}.$$

b) Sea y la anchura del río medida en metros y sea x la distancia, en metros, desde donde nos encontramos al principio al punto de la orilla sur que está justo enfrente del punto de interés.



Con estos datos, tenemos que

$$\operatorname{tg} 15 = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{tg} 30 = \frac{y}{x-25}.$$

Resolvemos el sistema por igualación:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \operatorname{tg} 15, \\ y = (x-25)\operatorname{tg} 30 \end{array}\right\} \Rightarrow x \operatorname{tg} 15 = x \operatorname{tg} 30 - 25 \operatorname{tg} 30$$

$$x = 25\frac{\operatorname{tg} 30}{\operatorname{tg} 30 - \operatorname{tg} 15} \Rightarrow y = 25\frac{\operatorname{tg} 15 \operatorname{tg} 30}{\operatorname{tg} 30 - \operatorname{tg} 15} = 12.5.$$

El río tiene 12.5 m de ancho.

3. *a*) [2 puntos] De un cuadrado de cartón de lado 12 cm, cortamos de cada una de las esquinas un cuadrado de lado x cm $(0 < x < 6)$ y doblamos por las pestañas resultantes del corte con el objetivo de hacer una caja abierta por arriba. ¿Para que valor de x se maximiza el volumen de la caja?

   b) [2 punto] Calcule el área encerrada entre la curvas $y = x^3 - x$ e $y = x - x^3$.

Solución:

a) La caja resultante tendrá altura x y su base será un cuadrado de lado $(12 - 2x)$. Luego el volumen de la caja será, en función de x,

$$V(x) = x(12-2x)^2 = x(144 - 48x + 4x^2) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

Tenemos que calcular el máximo de $V(x)$ para $x \in (0, 6)$. Se tiene que

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12).$$

Igualando a cero y resolviendo se tiene

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \iff x = 2 \text{ ó } x = 6.$$

El punto $x = 6$ no pertenece al intervalo. Por otro lado

$$V''(x) = 24x - 96,$$

luego $V''(2) = -48$ y en $x = 2$ hay un máximo relativo. (Como $V(0^+) = 0$ y $V(6^-) = 0$, también es absoluto; no es imprescindible justificar esto).

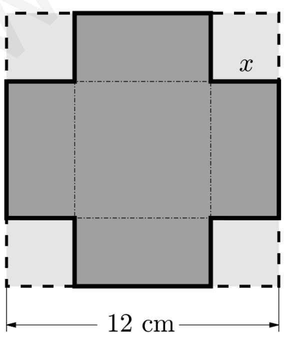
b) Calculemos los puntos de corte de las dos curvas:

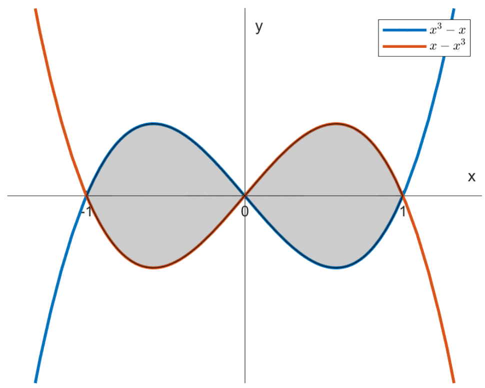
$$x^3 - x = x - x^3 \iff 2x^3 - 2x = 0 \iff 2x(x^2 - 1) = 0 \iff x = -1,\ x = 0,\ x = 1.$$

Si $x < -1$, $x^3 - x < x - x^3$, pero esta es una región no acotada. Si $-1 < x < 0$, $x - x^3 < x^3 - x$. Si $0 < x < 1$, $x^3 - x < x - x^3$. Si $x > 1$, $x - x^3 < x^3 - x$, pero esta región tampoco está acotada. Luego

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x - (x - x^3))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - x^3 - (x^3 - x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (2x^3 - 2x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (2x - 2x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=0} + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1 - \frac{1}{2} - 0 = 1.$$





Opción B

1. *a*) [1.5 puntos] Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule su determinante y su traspuesta. ¿Existe la inversa de A?

b) [1.5 puntos] Isabel compra 2 cuadernos, 5 bolígrafos y 1 lápiz y le cobran 17 euros. Carlos compra 3 cuadernos, 4 bolígrafos y 2 lápices y le cobran 19 euros. Felipe compra 5 cuadernos, 16 bolígrafos y 2 lápices y le cobran 51 euros. Plantee un sistema lineal para el cálculo del precio de cada uno de los productos y resuélvalo, si es posible, por el método de Gauss. Explique el resultado obtenido.

Solución:

a) Usando la regla de Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) =& 2\times 4\times 2+5\times 2\times 5+1\times 16\times 3-1\times 4\times 5-5\times 3\times 2-2\times 16\times 2 \\ =& 16+50+48-20-30-64=114-114=0 \end{aligned}$$

Como el determinante de A es cero, no existe la inversa de A. Por definición, la traspuesta de A es

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Sean respectivamente x, y, z los precios de cada cuaderno, cada bolígrafo y cada lápiz. Con los datos dados planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{cccccc} 2x & +5y & +z & = & 17, \\ 3x & +4y & +2z & = & 19, \\ 5x & +16y & +2z & = & 51. \end{array}$$

(Si nos damos cuenta de que la matriz de coeficientes del sistema es la matriz del apartado A, podemos saber desde este momento que el sistema no va a tener solución única).

Resolvemos, como nos piden, por el método de Gauss. Vamos a utilizar la matriz ampliada del sistema, pero se puede hacer también usando las ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 17 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \\ 5 & 16 & 2 & 51 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to 2F_3 - 5F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 18 \\ 0 & -7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & -1 & 17 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 18 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Como llegamos a la ecuación $0 = 4$, el sistema no tiene solución (es incompatible). A alguno de los tres le han cobrado mal, o han cambiado los precios de un cliente a otro.

2. *a*) [1 punto] Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ ambos distintos del vector nulo y que cumplen que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. ¿Forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ necesariamente una base de $\mathbb{R}^2$? En caso de que la respuesta sea afirmativa, justifíquese. En caso de que sea negativa, ponga un ejemplo de vectores que cumplan las condiciones dadas pero que no formen una base.

   b) [2 puntos] Se consideran las rectas

$$r : \frac{x-1}{4} + \frac{y-2}{3} = 0, \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Calcule el ángulo que forman y, si existe, el punto en que se cortan.

   El ángulo se puede expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los todos los cálculos.

Solución:

a) Sí, ambos vectores forman una base. Una posible justificación es la siguiente: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores perpendiculares, y por tanto no están alineados. Es decir, son linealmente independientes. Como la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, forman una base.

b) Un vector director r es $\vec{u} = (4, -3)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (5, 3)$. Se tiene que $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ y $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. Además $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$. Llamemos α al ángulo que forman ambas rectas (el menor de los dos ángulos, realmente). Se cumple que:

$$\cos\alpha = \frac{11}{5\sqrt{34}} \approx 0.3773 \Rightarrow \alpha = \arccos 0.3773 = 0.3773\,\mathrm{rad} = 67.8337^{\mathrm{o}} = 67^{\mathrm{o}}\ 50'\ 1.15''$$

Para calcular el punto de corte, introducimos en r las expresiones de x e y dadas en la recta s:

$$\frac{5t}{4} + \frac{3t-1}{3} = 0 \iff \frac{15t + 12t - 4}{12} = 0 \iff 27t = 4 \iff t = \frac{4}{27}.$$

Luego las rectas se cortan en el punto de coordenadas

$$x = 1 + 5t = 1 + 5\frac{4}{27} = \frac{47}{27} \approx 1.7407, \qquad y = 1 + 3t = 1 + 3\frac{4}{27} = \frac{13}{9} = 1.4444.$$

3. En este ejercicio, las funciones trigonométricas que aparecen tienen como argumentos los ángulos en radianes.

a) [1 punto] Calcule

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}(3x)}$$

b) [2 puntos] Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$. Indique su dominio y sus intervalos (abiertos) de crecimiento y decrecimiento. Utilice esa información para clasificar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ sin utilizar la derivada segunda.

c) [1 punto] Calcule

$$\int (x^2 + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$$

Solución:

a) Como $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$ y $\operatorname{tg}(3\pi) = 0$, el primer límite se puede hacer, por ejemplo, usando infinitésimos equivalentes o la regla de L'Hôpital. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}(3x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\cos(2x)}{3(1+\operatorname{tg}^2(3x))} = \frac{2\cos(2\pi)}{3(1+\operatorname{tg}^2(3\pi))} = \frac{2}{3}.$$

b) f es una función racional. Su denominador se anula para $x = 1$. Por lo tanto, el dominio de la función es $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

La derivada solo se anula para $x = 0$ y $x = 2$. Teniendo en cuenta que 1 no está en el dominio de f, tenemos que estudiar 4 intervalos.

- Si $x < 0$, $f'(x) < 0$, luego f es decreciente en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, luego f es creciente en $(0, 1)$.
- Si $1 < x < 2$, $f'(x) > 0$, luego f es creciente en $(1, 2)$.
- Si $2 < x$, $f'(x) < 0$, luego f es decreciente en $(2, +\infty)$.

Con esta información se puede asegurar que en $x = 0$ hay un mínimo relativo y en $x = 2$ hay un máximo relativo.

Notas:

- Como f' es continua en cada uno de los cuatro intervalos estudiados, para estudiar su signo es suficiente con estudiar qué ocurre en un punto del interior de cada intervalo. Por ejemplo, $f'(-1) = -0.75 < 0$, $f'(0.5) = 3 > 0$, $f'(1.5) = 3 > 0$ y $f'(3) = -0.75 < 0$.
- Escribir que f es creciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$ es incorrecto. Por ejemplo, $0.5 < 1.5$, pero $f(0.5) = 0.5 > f(1.5) = -4.5$. Los resultados sobre crecimiento y decrecimiento de funciones basados en el estudio de la derivada son válidos en intervalos, y $(0, 1) \cup (1, 2)$ no es un intervalo.

c) Aplicando las reglas de integración y llamando $C \in \mathbb{R}$ a la constante de integración,

$$\int (x^2 + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \cos x + C.$$

MATEMÁTICAS: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Opción A

1. [3 puntos] 1 punto cada apartado. Dentro de cada apartado, 1/3 de punto cada una de las 3 cuestiones que se plantean.

2. *a*) [1 punto] 1 punto por la ecuación de la recta.

   b) [2 puntos] 1 punto por el planteamiento + 1 punto por la resolución.

3. *a*) [2 puntos] 1 punto por el planteamiento + 1 punto por la resolución.

   b) [2 puntos] 1 punto por el planteamiento + 1 punto por la resolución.

Opción B

1. *a*) [1.5 puntos] 0.5 puntos por el determinante, 0.5 puntos por la traspuesta y 0.5 puntos por responder a la cuestión.

   b) [1.5 puntos] 0.5 puntos por plantear el problema + 0.5 puntos por la triangularización + 0.5 puntos por la respuesta final.

2. *a*) [1 punto] 1 punto por la justificación.

   b) [2 puntos] 1 punto por el ángulo + 1 punto por el punto de corte.

3. *a*) [1 punto] 1 punto por el límite.

   b) [2 punto] 0.5 puntos por el dominio + 1 punto por los cuatro intervalos de crecimiento y decrecimiento + 0.5 puntos por el máximo y el mínimo relativos.

   c) [1 punto] 1 punto por la integral.