ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2012 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice y simplifique la fracción $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

b) (5 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x}{3+x^2}, \quad g(x)=x(\ln x-1).$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) La ecuación de segundo grado $x^2+px+7=0$ tiene la solución $x=-1$. Determine p y la otra solución de la ecuación.

b) (5 puntos) Sean A y B dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son $P(A)=0.25$ y $P(B)=0.35$.
Calcule $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A^C\cap B)$.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) Calcule $4^{-1}+\dfrac{3}{5}\left(2-\dfrac{5}{3}\right)$ y $\dfrac{3}{4}:\dfrac{9}{2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1}$.

b) (5 puntos) Determine el valor del parámetro a para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+3x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea continua en x=1. Para a=0, determine los vértices de cada una de las parábolas.

EJERCICIO 4

a) (5 puntos) Resuelva el sistema lineal $\begin{cases} 3(x-2)-5y=4 \\ 4x-3(y-2)=3x+8 \end{cases}$.

b) (5 puntos) Una persona coloca 20000 euros en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2% de interés compuesto durante 3 años. Determine los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.

EJERCICIO 5

En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos

Personas	1	2	3	4	5
Pisos	20	60	52	35	18

a) (2 puntos) ¿Cuántos pisos hay en la urbanización?

b) (4 puntos) Determine la media y la moda de la distribución.

c) (4 puntos) Determine la varianza y la desviación típica de la misma.

EJERCICIO 6

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.

a) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.

b) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2012

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice y simplifique la fracción** $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **.**

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right).$$

b) (5 puntos) **Calcule las derivadas de las siguientes funciones:**

$$f(x)=\frac{x}{3+x^2}, \qquad g(x)=x(\ln x-1).$$

$$f'(x)=\frac{1\left(3+x^2\right)-2x\cdot x}{\left(3+x^2\right)^2}=\frac{3+x^2-2x^2}{\left(3+x^2\right)^2}=\frac{3-x^2}{\left(3+x^2\right)^2}.$$

$$g'(x)=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **La ecuación de segundo grado** $x^2+px+7=0$ **tiene la solución** $x=-1.$ **Determine** ***p*** **y la otra solución de la ecuación.**

Por ser $x=-1$ solución de la ecuación ha de satisfacerla, es decir que si se sustituye x por -1 en la ecuación, ésta debe cumplirse

$$(-1)^2+p(-1)+7=0\rightarrow 1-p+7=0\rightarrow 8-p=0\rightarrow p=8$$

Por tanto la ecuación sería

$$x^2+8x+7=0$$

Ésta es una ecuación de 2º grado, cuyas soluciones serían

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-8\pm 6}{2} \qquad x_1=-1 \quad x_2=-7.$$

Por tanto: p = 8 y la otra solución es x= -7.

b) (5 puntos) **Sean *A* y *B* dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son** $P(A)=0.25$ y $P(B)=0.35$.

Calcule $P(A\cap B),\ P(A\cup B),\ P(A^C\cap B)$.

El enunciado nos dice que A y B son incompatibles, por tanto su intersección es el suceso imposible, cuya probabilidad es 0, es decir:

$$P(A\cap B)=P(\phi)=0$$

Sabemos que, en general,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.25+0.35-0=0.60.$$
$$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.35-0=0.35.$$

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **Calcule** $4^{-1}+\frac{3}{5}\left(2-\frac{5}{3}\right)$ y $\frac{3}{4}:\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$.

$$4^{-1}+\frac{3}{5}\left(2-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{4^1}+\frac{3}{5}\left(\frac{2\cdot 3-5}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{5\cdot 3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}.$$

$$\frac{3}{4}:\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 9}-\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^1}=\frac{6}{36}-\left(1:\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1\cdot 6}{1}=\frac{1}{6}-6=\frac{1-36}{6}=-\frac{35}{6}.$$

b) (5 puntos) **Determine el valor del parámetro *a* para que la función**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+3x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea continua en *x*=1. Para *a*=0, determine los vértices de cada una de las parábolas.

Para que la función sea continua debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

$$f(1)=(1)^2-1+a=a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=(1)^2-1+a=a$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-(1)^2+3\cdot 1+3=5\,.$$

Por tanto debe ser $a = 5$.

La primera parábola viene dada por la función $f(x) = x^2 - x$.

Su derivada, igualada a 0, nos daría la abscisa del vértice de la parábola:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la función $f(x) = x^2 - x,\ x = \frac{1}{2}$, obtendríamos la ordenada del vértice:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\ .$$

Por tanto el vértice de la primera parábola sería el punto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

En la segunda parábola, $f(x) = -x^2 + 3x + 3$, procediendo de forma análoga se obtendría como vértice el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$.

EJERCICIO 4

a) (5 puntos) **Resuelva el sistema lineal** $\begin{cases} 3(x-2) - 5y = 4 \\ 4x - 3(y-2) = 3x + 8 \end{cases}$.

Operando, el sistema dado se transforma en otros equivalentes:

$$\begin{cases} 3x - 6 - 5y = 4 \\ 4x - 3y + 6 = 3x + 8 \end{cases} \to \begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

despejando x en la 2ª ecuación $x = 3y + 2$ y sustituyendo en la 1ª:

$$3(3y+2) - 5y = 10 \to 9y + 6 - 5y = 10 \to 4y = 4 \to y = \frac{4}{4} = 1$$

y como $x = 3y + 2 \to x = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

b) (5 puntos) **Una persona coloca 20000 euros en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2% de interés compuesto durante 3 años. Determine los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.**

Al finalizar el 1º año:

$$i_1 = \frac{20000 \cdot 2}{100} = 400$$

Al finalizar el 2º año:

$$i_2 = \frac{20400 \cdot 2}{100} = 408$$

Al finalizar el 3º año:

$$i_3 = \frac{20808 \cdot 2}{100} = 416.16$$

Por lo tanto, el capital final sería: 20000+400+408+416.16= 21224.16 euros.

El cálculo directo del capital final, podríamos obtenerlo, también, utilizando la fórmula del interés compuesto:

$$C_F = C_I\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 20000\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 = 20000\cdot(1.02)^3 = 20000\cdot 1.061208 = 21224.16.$$

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos**

Personas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pisos	**20**	**60**	**52**	**35**	**18**

i) (2 puntos) **¿Cuántos pisos hay en la urbanización?**

Del enunciado se desprende que la variable estadística X que se está estudiando es el número de personas que habitan en cada uno de los pisos de un conjunto de pisos observados, en concreto el número de pisos observados es la suma de la segunda fila de la tabla: 20+60+52+35+18=185.

Esta variable estadística toma los valores 1 con frecuencia absoluta 20, 2 con frecuencia 60, 3 con frecuencia 52, 4 con frecuencia 35 y, por último, la frecuencia absoluta del valor 5 es 18.

ii) (4 puntos) **Determine la media y la moda de la distribución.**

Disponiendo la tabla en la forma clásica y con la notación tradicional, efectuamos los cálculos previos necesarios para contestar a éste y al siguiente apartado:

Nº personas: X	Frec. Absol. n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	20	20	20
2	60	120	240
3	52	156	468
4	35	140	560
5	18	90	450
Sumas $\rightarrow$	**185**	**526**	**1738**

La media aritmética, $\bar{x}$, de la variable X, viene dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{526}{185} \cong 2.84$$

El valor modal de esa variable estadística, el de mayor frecuencia, es 2.

iii) (4 puntos) **Determine la varianza y la desviación típica de la misma.**

La varianza, s^2, de la variable X, viene dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{1738}{185} - 2.84^2 \cong 9.39 - 8.06 = 1.33$$

La desviación típica, *s*, es la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{1.33} \cong 1.15$$

EJERCICIO 6

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.
a) (5 puntos) **Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.**

Sea X la variable aleatoria "duración de un tipo de pilas alcalinas".

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(55, 6)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 55 y desviación típica 6, la variable $Z = \frac{X-55}{6}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La pregunta formulada se puede expresar así:

$$P(X > 53) = P(\frac{X-55}{6} > \frac{53-55}{6}) = P(Z > -0.33) = 1 - P(Z > 0.33) = P(Z \leq 0.33) =$$
$$= 0.6293$$

b) (5 puntos) **Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(56 \leq X \leq 58) = P\left(\frac{56-55}{6} \leq \frac{X-55}{6} \leq \frac{58-55}{6}\right) = P(0.16 \leq Z \leq 0.5) =$$

$$= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq 0.16) = 0.6915 - 0.5636 = 0.1279.$$