Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- ***Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.*** ***De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.***
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de trasmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

eman ta zabal zazu

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

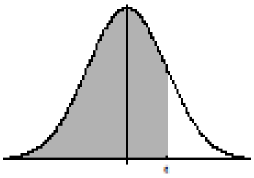
2024ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1 $[\![hasta\ 2,5\ \ puntos]\!]$

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

B.1 $[\![hasta\ 2\ ,5\ puntos]\!]$

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	**Nata**	**Azúcar**	**Precio**
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

c) $[\![2,2\ puntos]\!]$ ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?

d) $[\![0,3\ puntos]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ \ puntos}]\!]$

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

a) $[\![\ \boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0\ ,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.

b) $[\![\ \boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2$.

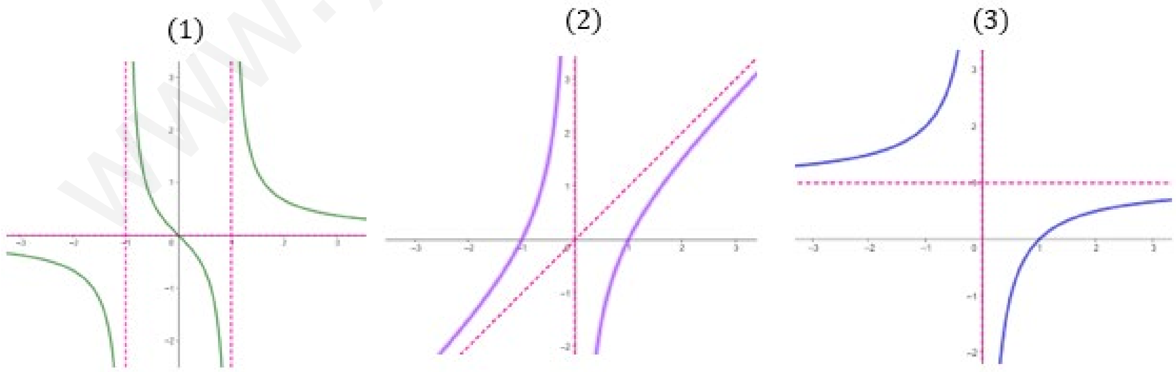
c) $[\![\ \boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ y el eje de abscisas.

B.2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

a) $[\![\ \boldsymbol{0,9\ puntos}]\!]$ Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A)\ \ f(x) = \frac{x-1}{x}\ \ ;\quad B)\ \ g(x) = \frac{x}{x^2-1}\ \ ;\quad C)\ \ h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) $[\![\ \boldsymbol{1,6\ puntos}\ ]\!]$ En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

a) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.

d) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

B.3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

a) $[\![\boldsymbol{0,8\ puntos}]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?

b) $[\![\boldsymbol{0,35\ puntos}]\!]$ Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?

c) $[\![\boldsymbol{0,35\ puntos}]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?

d) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”? Justifica tu respuesta.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

a) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) $[\![1\ punto]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos y el *Apto* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

B.4 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

a) $[\![1,25\ puntos]\!]$ Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) $[\![0,5\ puntos]\!]$ Interpreta los resultados obtenidos.

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios.
2. ***De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.***
3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.
6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, …, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1 *(hasta 2,5 puntos)*

- Planteamiento del problema, **1 punto.**
- Comprobar que se puede utilizar la regla de Cramer, **0,3 puntos**.
- Cálculo de las tres variables, 0,4 puntos cada variable, **1,2 puntos.**

Problema B.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 2,2 puntos.

- Concretar la función objetivo, **0,1 puntos.**
- Determinar las restricciones, **0,2 puntos.**
- Determinar y representar la región factible.
  - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,3 puntos.**
  - Determinar la región factible, **0,4 puntos.**
- Concretar los vértices de la región factible.
  - Vértice A, **0,1 puntos.**
  - Vértice B, **0,1 puntos.**
  - Vértice C, **0,2 puntos.**
  - Vértice D, **0,1 puntos.**
  - Vértice E, **0,1 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,5 puntos.**
- Determinar el máximo, **0,1 puntos.**

b. 0,3 puntos.

- Valorar la función en ese punto máximo, **0,3 puntos.**

BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto

- El punto (0, 0) es de la función, **0.25 puntos.**
- El punto (2, -4) es de la función, **0,25 puntos.**
- En el punto (2, -4) la función tiene un extremo,**0,5 puntos**.

b. 0,75 puntos

- Obtención de los máximos y mínimos, **0,5 puntos.**
- Obtención de los puntos de inflexión, **0,25 puntos.**

c. 0,75 puntos.

- Representación gráfica, **0,3 puntos.**
- Cálculo de la integral, **0,3 puntos.**
- Cálculo del área del recinto aplicando la Regla de Barrow, **0,15 puntos.**

Problema B.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,9 puntos.

- Unir la gráfica (A) con su función de modo razonado, **0,3 puntos.**
- Unir la gráfica (B) con su función de modo razonado, **0,3 puntos.**
- Unir la gráfica (C) con su función de modo razonado, **0,3 puntos.**

b. 1,6 puntos.

- Gráfica $A)\ f(x)$
  - **i.** Dominio de definición, **0,2 puntos.**
  - **ii.** Recorrido, **0,15 puntos.**
  - **iii.** Intervalo de crecimiento, **0,15 puntos.**
- Gráfica $B)\ g(x)$
  - **i.** Dominio de definición, **0,2 puntos.**
  - **ii.** Recorrido, **0,15 puntos.**
  - **iii.** Intervalo de decrecimiento**, 0,15 puntos.**
- Gráfica $C)\ h(x)$
  - **i.** Dominio de definición, **0,3 puntos.**
  - **ii.** Recorrido, **0,15 puntos.**
  - **iii.** Intervalo de crecimiento, **0,15 puntos.**

BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,5 puntos.
- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,25 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,25 puntos.**

b. 0,75 puntos.
- Determinar qué tiene que calcular, **0,25 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

c. 0,75 puntos.
- Determinar qué tiene que calcular, **0,15 puntos.**
- Indicar la probabilidad del suceso a calcular, **0,35 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,25 puntos.**

d. 0,5 puntos.
- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos.**
- Indicar la probabilidad a posteriori, el teorema de Bayes, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

Problema B.3 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,8 puntos.
- Hacer un diagrama de Venn, **0,4 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,4 puntos.**

b. 0,35 puntos.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,35 puntos.**

c. 0,35 puntos.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,35 puntos.**

d. 1 punto.
- Determinar en qué consiste que dos sucesos sean independientes, **0,6 puntos.**
- Cálculos, **0,2 puntos.**
- Concluir cómo son los sucesos, **0,2 puntos.**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,75 puntos.
- El planteamiento del problema, **0,2 puntos.**
- La tipificación de la variable, **0,2 puntos.**
- Concretar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,2 puntos.**
- Resolver la ecuación obteniendo σ, **0,15 puntos.**

b. 0,75 puntos.
- El planteamiento del problema, **0,2 puntos**.
- Concretar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,3 puntos.**
- Determinar el valor k pedido, **0,25 puntos.**

c. 1 punto.
- El planteamiento del problema, **0,3 puntos**.
- Concretar el valor de las probabilidades consultadas en la tabla, **0,3 puntos.**
- El porcentaje pedido, **0,4 puntos.**

Problema B.4 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,25 puntos.
- Indicar que sabe qué es la proporción muestral, **0,2 puntos.**
- Determinar la fórmula del intervalo de confianza para la proporción, **0,25 puntos.**
- Determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,3 puntos.**
- El intervalo de confianza pedido, **0,35 puntos.**
- Determinar el porcentaje pedido, **0,15 puntos.**

b. 0,75 puntos.
- Expresar qué es el error máximo admisible, **0,25 puntos.**
- Indicar la fórmula del error, **0,2 puntos.**
- Cálculo del error, **0,3 puntos.**

c. 0,5 puntos.
- Justifica razonadamente los resultados obtenidos, aunque éstos no sean numéricamente correctos **0,5 puntos.**

SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1 *Problema de traducción al lenguaje algebraico de una situación de la realidad social. Uso de la regla de Cramer.*

Definimos las variables:

$$\begin{cases} x = puntuación\ obtenida\ en\ el\ \ primer\ problema \\ y = puntuación\ obtenida\ en\ el\ segundo\ problema \\ z = puntuación\ obtenida\ en\ el\ tercer\ problema \end{cases}$$

En función de estas variables obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 7{,}2 \\ x = y + 0{,}4\, y \\ z = 2\,(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 72 \\ x = 1{,}4\, y \\ z = 2\,x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 36 \\ 10x - 14\,y = 0 \\ 2\,x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 36 \\ 5x - 7\,y = 0 \\ 2\,x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Comprobamos que podemos utilizar el método de Cramer, es decir, que el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\,(7 + 10 + 14 + 5) = 180 \neq 0$$

Por lo tanto, resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 5 & 5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{252}{180} = 1{,}4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 36 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{180}{180} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 36 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{180} = \frac{360 + 504}{180} = \frac{864}{180} = 4{,}8$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{x = puntuación\ obtenida\ en\ el\ primer\ problema = 1{,}4\ puntos}$$
$$\boldsymbol{y = puntuación\ obtenida\ en\ el\ segundo\ problema = 1\ punto}$$
$$\boldsymbol{z = puntuación\ obtenida\ en\ el\ tercer\ problema = 4{,}8\ puntos}$$

B.1 *Problema de traducción al lenguaje algebraico de una situación de la realidad social. Problema de programación lineal con dos variables.*

a) Número de trufas de cada tipo para obtener el máximo ingreso.

	Cacao	**Nata**	**Azúcar**	**Precio**	**Variables**
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €	x
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15gr	1,3 €	y
Disponibilidad	30.000 gr	8.000 gr	10.500 gr		

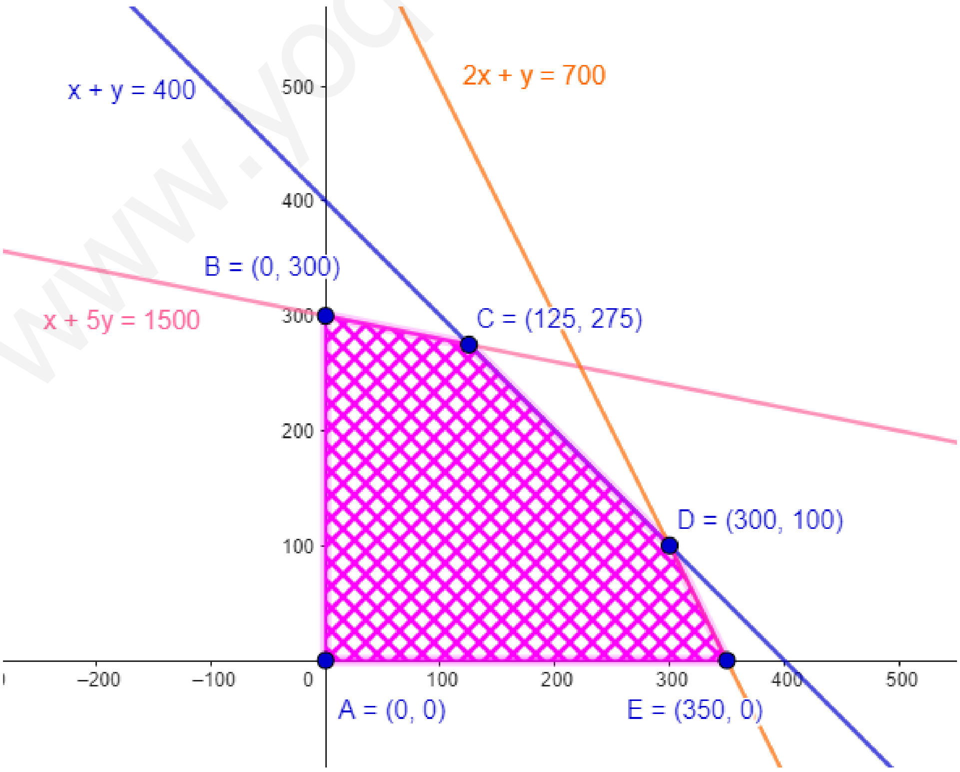
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = x + 1{,}3\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 100y \leq 30.000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30\,x + 15\,y \leq 10.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Cálculo del vértice C:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x+5y=1500 \end{cases} \Rightarrow x=400-y \Rightarrow 400-y+5y=1500 \Rightarrow \begin{matrix} x=125 \\ y=275 \end{matrix} \Rightarrow C(125,275)$$

- Cálculo del vértice D:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ 2x+y=700 \end{cases} \Rightarrow x=300 \Rightarrow y=100 \Rightarrow \begin{matrix} x=300 \\ y=100 \end{matrix} \Rightarrow D(300,100)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$$A(0,0)\,,\quad B(0,300),\quad C(125,275),\quad D(300,100),\quad E(350,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A)=f(\,0,0\,)=0$$

$$f(B)=f(0,300\,)=390$$

$$f(C)=f(125,275)=482{,}5$$

$$f(D)=f(300,100)=430$$

$$f(E)=f(350,0)=350$$

- El valor máximo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{C(125,\ 275)}$, por lo tanto, se tienen que producir **125 trufas dulces y 275 trufas amargas** para obtener el máximo ingreso.

b) El ingreso máximo.

$f(x,y)=f(C)=f(125,275)=482{,}5.$

De esta manera se obtendrá el ingreso máximo de **482,5 €**.

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2 *Cálculo de los parámetros de una función y sus máximos y mínimos relativos.*

a) Determina a, b, c siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- La función pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$

Por lo tanto, $\boldsymbol{f(x) = x^3 + ax^2 + bx}$

- La función pasa por el punto $(2\ ,-4) \Longrightarrow f(2) = -4 \Longrightarrow$

$$8 + 4a + 2b = -4 \quad \Longrightarrow \quad 2a + b = -6$$

- La función en $x = 2$ tiene un extremo relativo $\Longrightarrow f'(2) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f'(2) = 0 = 12 + 4a + b \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4a + b = -12$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} 2\,a + b = -6 \\ 4\,a + b = -12 \end{cases} \Longrightarrow a = -3 \text{ y } b = 0$$ **Esto es:** $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2}$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

- La condición de máximos y mínimos relativos es:

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow x_0 \ \textit{punto singular}$$

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \ \wedge \ \begin{cases} f''(x_0) < 0 \ \Rightarrow \ x_0 \ \textit{máximo relativo} \\ f''(x_0) > 0 \ \Rightarrow \ x_0 \ \textit{mínimo relativo} \end{cases}}$$

✓ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3\,x^2 - 6\,x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$ puntos singulares

✓ $f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow$

$f''(0) = -6 < 0 \Longrightarrow x = 0$ máximo, esto es, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ **Máximo relativo**

$f''(0) = -6 > 0 \Longrightarrow x = 2$ mínimo, esto es, $(\mathbf{2}, -\mathbf{4})$ **Mínimo relativo**

- La definición de un punto de inflexión es:

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \quad \boldsymbol{punto\ de\ inflexión}$$

✓ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$

✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$

Por lo tanto, en $x = 1$ hay un punto de inflexión, esto es,

$(\mathbf{1}, -\mathbf{2})$ **Punto de inflexión**

c) Calcula la superficie de la región finita delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas

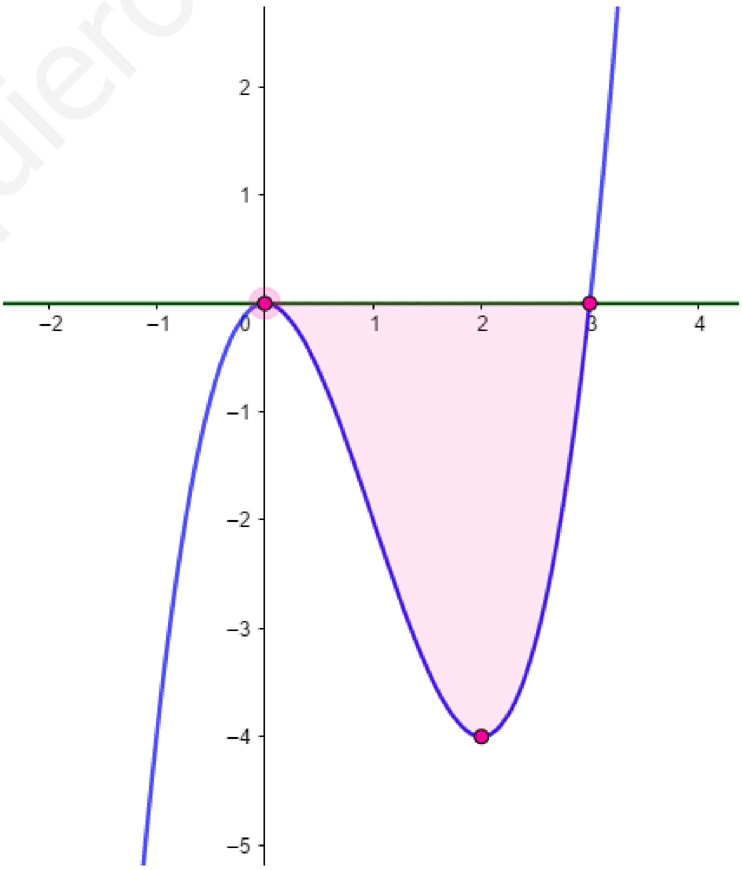
Para calcular el área determinamos y resolvemos la integral definida:

$$A = \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]\, dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{4}u^2$$



Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A = \frac{27}{4}u^2}$$

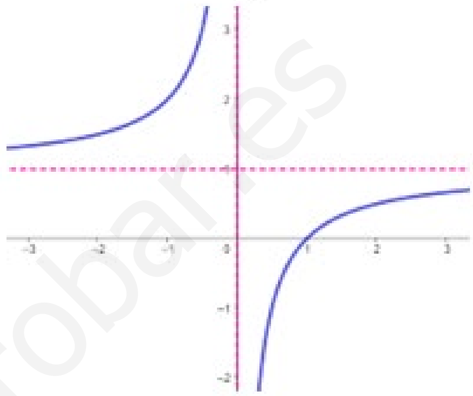
B.2 *Asociar funciones con representaciones gráficas. Identificar el dominio, el recorrido y el crecimiento de una función.*

a) Asocia, razonadamente, las funciones A), B) y C) con las gráficas (1), (2) y (3).

- Analizamos la función:

$$A)\ f(x) = \frac{x-1}{x}$$

(3)



- $f(x)$ no está definida en el punto $x = 0$.
- Pasa por los puntos $(-1,\ 2)$, $(1,\ 0)$.
- $f(x)$ tiene en $x = 0$ una asíntota vertical.
- $f(x)$ tiene en $y = 1$ asíntota horizontal.

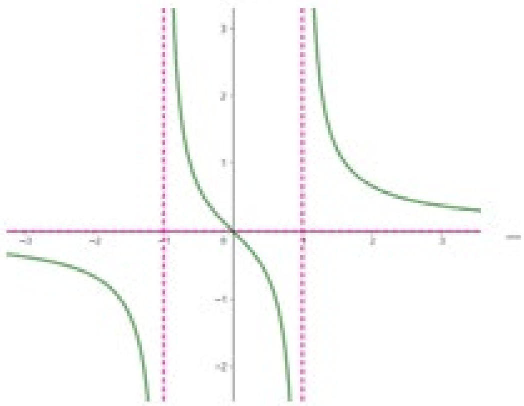
La única función con esas características es la (3).

Por lo tanto, **A) = (3).**

- Analizamos la función:

$$B)\ g(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

(1)



- $g(x)$ no está definida en los $x = -1$ y $x = 1$.
- Pasa por el punto $(0,\ 0)$.
- $g(x)$ tiene en $x = 1$ una asíntota vertical.
- $g(x)$ tiene en $x = -1$ otra asíntota vertical.
- $g(x)$ tiene en $y = 0$ asíntota horizontal.

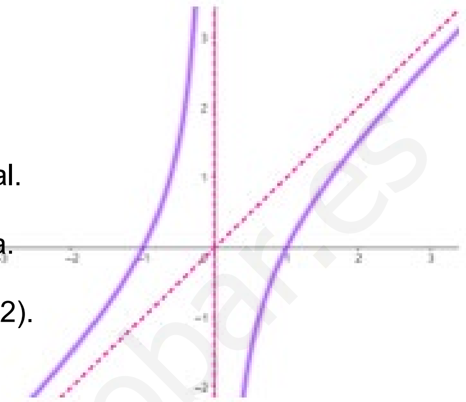
La única función con esas características es la (1).

Por lo tanto, **B) = (1)**

- Analizamos la función:

$$C)\ h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

(2)



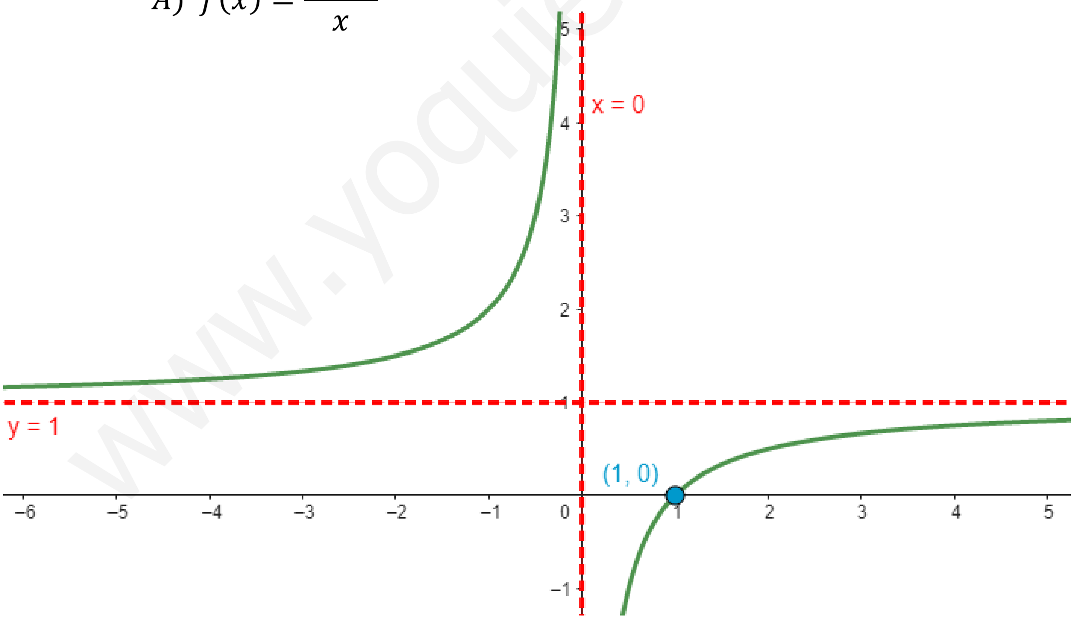
- $h(x)$ no está definida en el $x = 0$.
- Pasa por los puntos $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$.
- $h(x)$ tiene en $x = 0$ una asíntota vertical.
- $h(x)$ tiene en $y = x$ una asíntota oblicua.

La única función con esas características es la (2).

Por lo tanto, **C) = (2)**

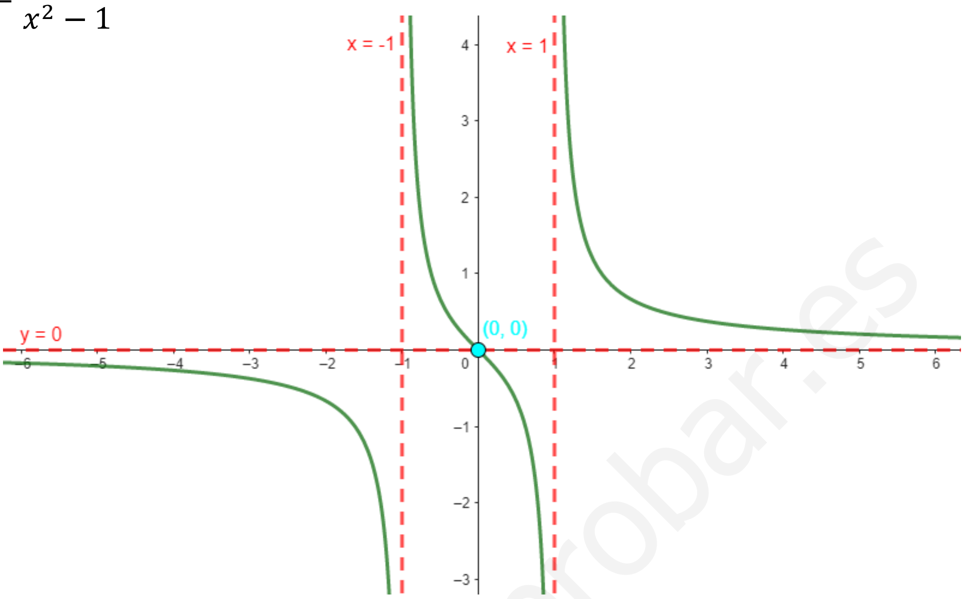
b) En cada caso, indicar el dominio, el recorrido y el crecimiento y decrecimiento de la función.

$$A)\ f(x) = \frac{x-1}{x}$$



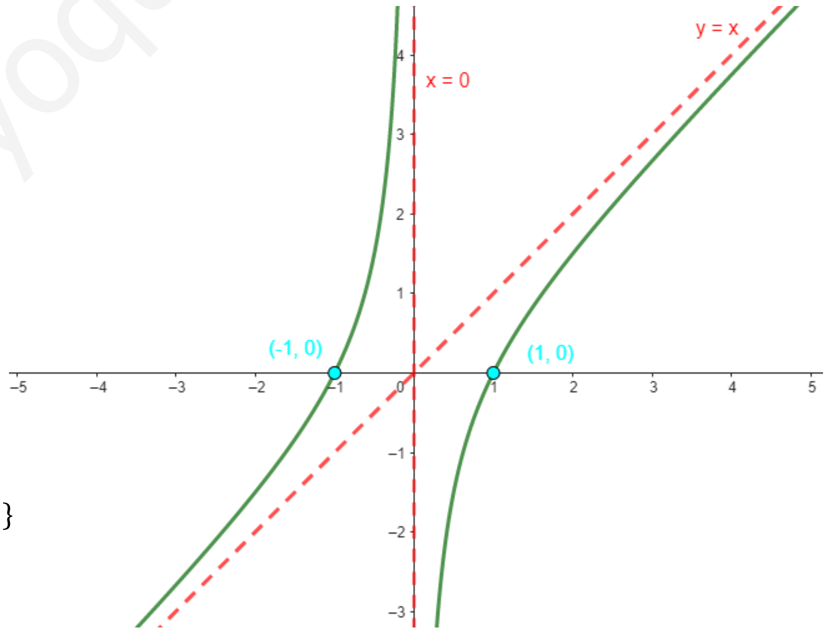
- $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $Recorrido\ f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0,\ \infty)$

$B)\ \ g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$



- $Dom\ g(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $Recorrido\ g(x) = \mathbb{R}$
- Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \infty)$

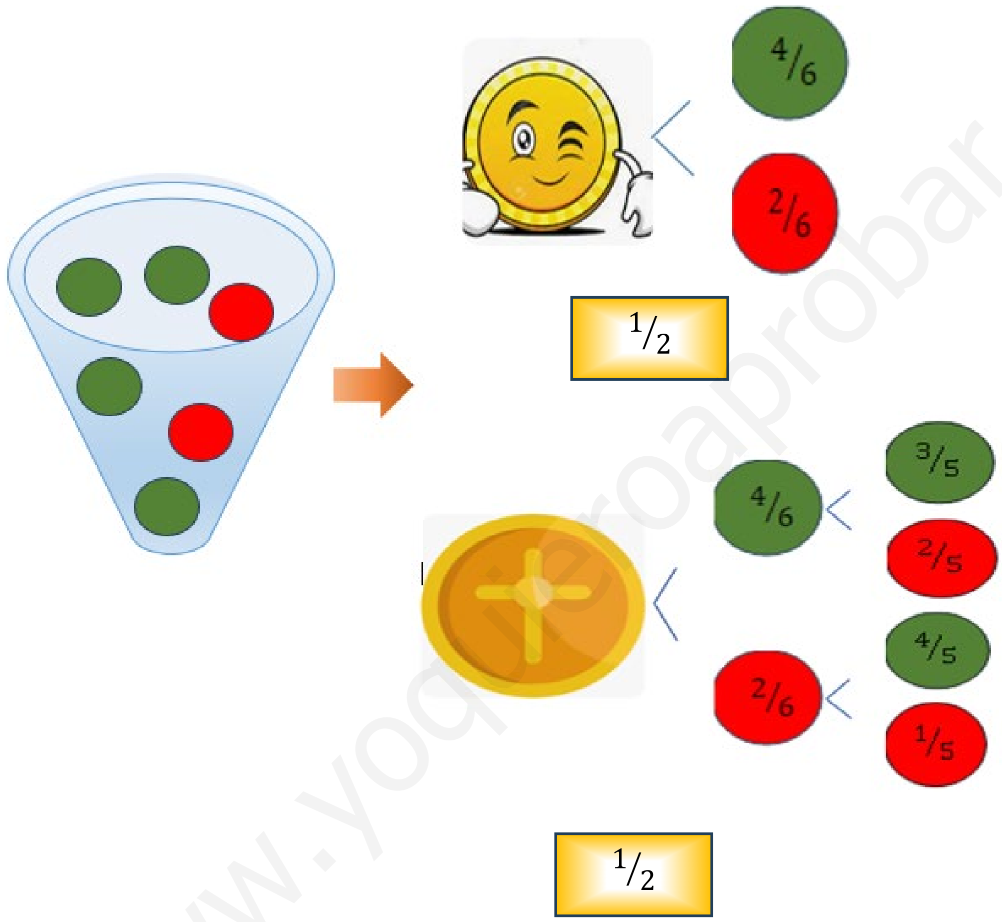
$C)\ \ h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$



- $Dom\ h(x) = \mathbb{R}\ - \{\ 0\ \}$
- $Recorrido\ h(x) = \mathbb{R}$
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0,\ \ \infty)$

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse***,** *a través de un diagrama de árbol o a través de la probabilidad total. Teorema de Bayes*



Sucesos:

$$V_1 = la\ primera\ bola\ verde \qquad V_2 = la\ segunda\ bola\ verde$$

$$R_1 = la\ primera\ bola\ roja \qquad R_2 = la\ segunda\ bola\ roja$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

$$P(\,R_1 \cap\, R_2\,) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30} \Rightarrow \boldsymbol{P(R_1 \cap\, R_2) = 0{,}03333\ = 3{,}33}\,\%$$

b) Probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

$$P(ninguna\ roja) = \ P(cara\ \cap\ V_1\,) + \ P(cruz\ \cap V_1 \cap\, V_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} = 0{,}5333 \Rightarrow \boldsymbol{P(ninguna\ roja) = 0{,}5333 = 53{,}33\ \%}$$

c) Calcula la probabilidad de que al menos haya extraído una bola verde.

$$P(al\ menos\ una\ verde) = 1 - P(\ ninguna\ verde) =$$

$$= 1 - \left(P(cara\ \cap\ R_1\ ) + P(cruz \cap R_1 \cap R_2)\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} =$$

$$= 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{P(al\ menos\ una\ verde) = 80\ \%}$$

Otra forma

$$P(al\ menos\ una\ verde) = P(una\ verde) + P(\ dos\ verdes) =$$

$$= \left(P(cara\ \cap\ V_1\ ) + P(cruz \cap V_1 \cap R_2) + P(cruz \cap R_1 \cap V_2)\right) + P(cruz \cap V_1 \cap V_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

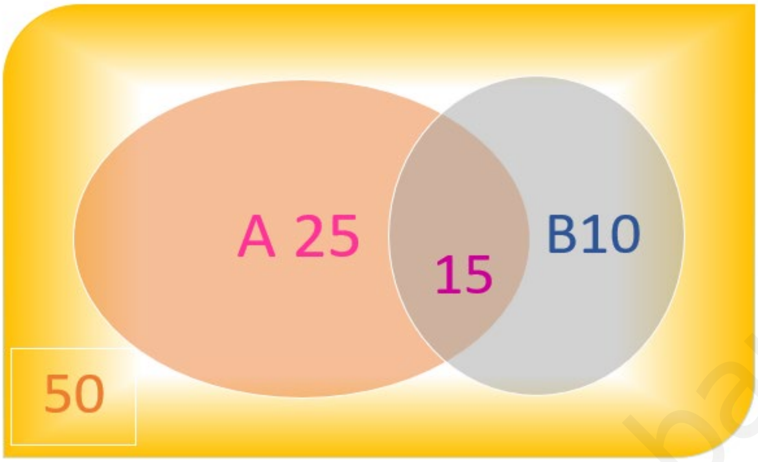
d) Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Haciendo uso del Teorema Bayes:

$$P(Cara \mid al\ menos\ una\ verde) = \frac{P(cara) \cdot P(al\ menos\ una\ verde \mid cara)}{P(al\ menos\ una\ verde)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12} = 0{,}4167 \Rightarrow \boldsymbol{P(Cara \mid al\ menos\ una\ verde) = 0{,}4167 = 41{,}67\ \%}$$

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*



a) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en A y no compre en B?

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25 \Longrightarrow \boldsymbol{P(A \cap B^c) = 25}\ \%$$

b) Si esta persona es cliente de A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de B?

$$P(\ B \mid A\ ) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375 \Longrightarrow \boldsymbol{P(\ B \mid A\ ) = 37{,}5}\ \%$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de A ni de B?

$$P(A^C \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P(A^C \cap B^c) = 50\%}$$

d) ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”?

“$ser\ cliente\ de\ A$” y “$ser\ cliente\ de\ B$” son sucesos independientes $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P(\ ser\ cliente\ de\ A\ | ser\ cliente\ de\ B) = P(ser\ cliente\ de\ A) \\ P(ser\ cliente\ de\ B\ | ser\ cliente\ de\ A\ ) = P(ser\ cliente\ de\ B) \end{cases}$$

- $P(\ ser\ cliente\ de\ A\ | ser\ cliente\ de\ B) = \frac{15}{25} = 0{,}6$
- $P(ser\ cliente\ de\ A) = 0{,}4$

$$\Rightarrow P(\ ser\ cliente\ de\ A\ | ser\ cliente\ de\ B) \neq P(ser\ cliente\ de\ A)$$

Por lo tanto, “$ser\ cliente\ de\ A$”y “$ser\ cliente\ de\ B$” **no son sucesos independientes: son dependientes.**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4 *Comprensión, utilización y cálculo de probabilidad de una distribución normal.*

La puntuación obtenida en el examen $X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ \sigma)$ tal que $P(X > 6{,}8) = 0{,}35$.

a) Cálculo de la desviación típica.

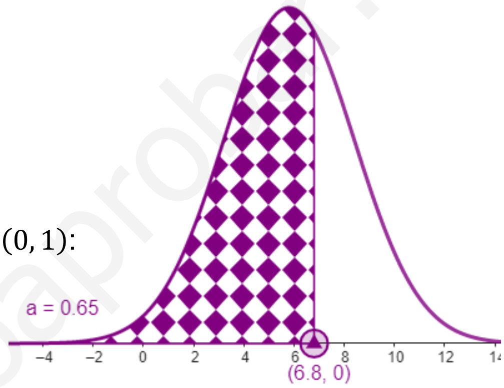
$$P(X > 6{,}8) = 0{,}35 \Rightarrow P(X \le 6{,}8) = 0{,}65 \implies$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{6{,}8-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{6{,}8-5{,}8}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$$

Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$$P\left(Z \le \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$$



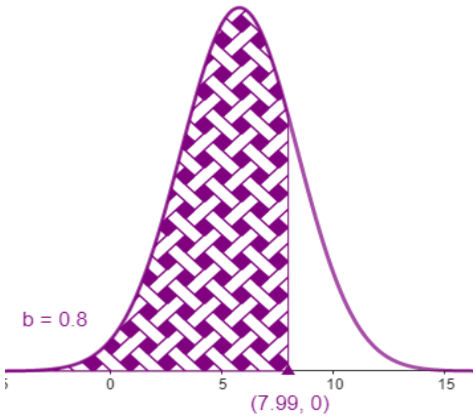
Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sigma} = 0{,}385 \implies \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{0{,}385} = \mathbf{2{,}597}$$

b) Si $\sigma = 2{,}6, \implies X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ 2{,}6)$. Calculamos el valor de k (puntuación) que solo supera el 20 % del alumnado $\implies P(X > k) = 0{,}2 \implies$

$$\implies P(X \le k) = 0{,}8 \implies P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \implies$$

$$\implies P\left(Z \le \frac{k-5{,}8}{2{,}6}\right) = 0{,}8$$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$$\frac{k-5{,}8}{2{,}6} = 0{,}845 \Rightarrow \boldsymbol{k = 5{,}8 + 0{,}845 \cdot 2{,}6 = 7{,}997}$$

Por lo tanto, **alrededor del 20% del alumnado obtiene una nota superior a 8 puntos.**

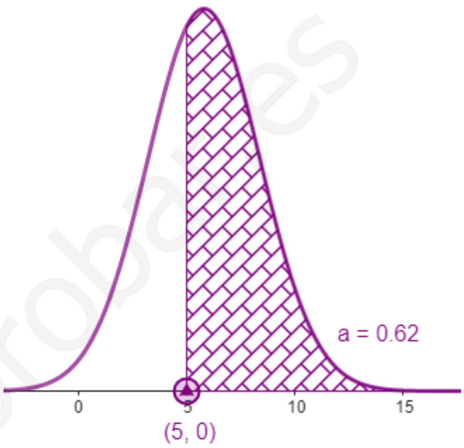
c) Si $\sigma = 2{,}6$, calculamos el porcentaje del alumnado que ha conseguido ser apto en el examen.

Dada:

$$X \equiv \mathcal{N}\,(5{,}8\,,\ 2{,}6\,)$$

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5-5{,}8}{2{,}6}\right) =$$

$$= P(Z \geq -0{,}31) = P(Z \leq 0{,}31)$$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$$\boldsymbol{P(Z \leq 0,31) = 0,6217 = 62,17\ \%}$$

Luego, alrededor del 62,17 % del alumnado ha conseguido un apto en el examen.

B.4 *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y error máximo admisible.*

a) Estimamos, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

- Si el tamaño de muestra n es grande, la distribución de las proporciones muestrales es:

$$\mathcal{N}\left(\mu = p,\ \ \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

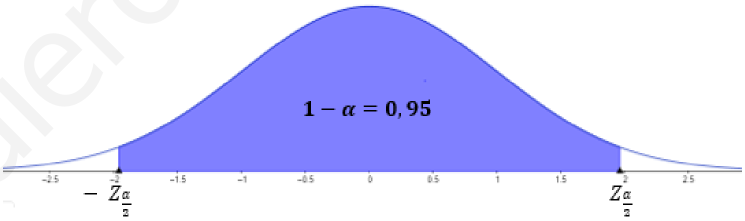
- En la muestra de 1000 jóvenes vascos, 860 viven con sus padres, entonces:

$$\boldsymbol{\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86}$$

es la proporción muestral de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

- El intervalo de confianza para la proporción de la población con un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\ \ ;\ \ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right)$$



- Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

  Nivel de confianza: $n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

- Calculamos $\hat{q}$

$$\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,14$$

- Luego:

$$\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{1000}} = 0,01097$$

- Por lo tanto, el intervalo de confianza para la proporción de población, con un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (0{,}86 - 1{,}96\cdot 0{,}01097;\ 0{,}86 + 1{,}96\cdot 0{,}01097) =$$

$$= (\mathbf{0{,}8385};\ \mathbf{0{,}8815})$$

Por lo tanto, el porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres está entre el 83,85 % y el 88,15 % con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

El error máximo admisible para la estimación de la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{e_m} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\cdot 0{,}01097 = \frac{0{,}8815 - 0{,}8385}{2} = \mathbf{0{,}0215} \Rightarrow \boldsymbol{e_m} = \mathbf{2{,}15}\ \%$$

c) Interpretar los resultados obtenidos.

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres es mayor que el 83,85 % y menor que el 88,15 %, lo que supone un error máximo del 2,15 %.