Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2023-2024

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ tiene inversa. (2 puntos)
ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, calcule la matriz inversa A^{-1}. (3 puntos)
iii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, despeje y calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica la ecuación $XA+I=B^t\cdot C$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad. (5 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.
Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$.
(5 puntos)

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x)=2x^2+4x+98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x. ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)

ii) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)

iii) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)

Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)

iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

EJERCICIO 6:

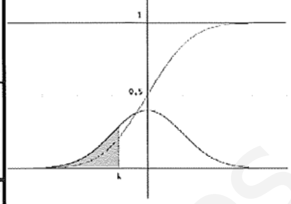
i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)

ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2} \, dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ tiene inversa. (2 puntos)
ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, calcule la matriz inversa A^{-1}. (3 puntos)
iii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, despeje y calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica la ecuación $XA+I=B^t\cdot C$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad. (5 puntos)

i) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-12-0-0-0+a=a^2+a-12$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2+a-12=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-12)}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{-1+7}{2}=3=a\\ \frac{-1-7}{2}=-4=a\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 3 y –4.

ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2 la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4-12+2=-6\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

iii)Para $\boldsymbol{a}$ = 2 la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA+I=B^t\cdot C\Rightarrow XA=B^t\cdot C-I\Rightarrow X=\left(B^t\cdot C-I\right)A^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$B^t\cdot C-I=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 10 & 2\\ 1 & -5 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 9 & 2\\ 1 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

$$X=\left(B^t\cdot C-I\right)A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 9 & 2\\ 1 & -5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & -4\\ 3 & 2 & -2\\ -6 & -10 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-3+0+0 & -4+0+0 & 4+0+0\\ -6+27-12 & -8+18-20 & 8-18+8\\ 3-15+12 & 4-10+20 & -4+10-8\end{pmatrix}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-3 & -4 & 4\\ 9 & -10 & -2\\ 0 & 14 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 2/3 & -2/3\\ -3/2 & 5/2 & 1/3\\ 0 & -7/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}1/2 & 2/3 & -2/3\\ -3/2 & 5/2 & 1/3\\ 0 & -7/3 & 1/3\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2:
Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.
Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "número de hectáreas para uva negra", y = "número de hectáreas para uva blanca".
Se desea maximizar el beneficio anual que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=10000x+7000y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"La parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas" → $10 \le x \le 25$

"La parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas" → $7 \le y \le 15$

"Se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca" → $x \le 2y$.

"No puede cultivar más de 30 hectáreas en total" → $x+y \le 30$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \le x \le 25 \\ 7 \le y \le 15 \\ x \le 2y \\ x+y \le 30 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x=2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
20	10
30	15

$x+y=30$

x	$y=30-x$
0	30
10	20
30	0

$x=10$

$x=10$	y
10	0
10	10
10	20

$x=25$

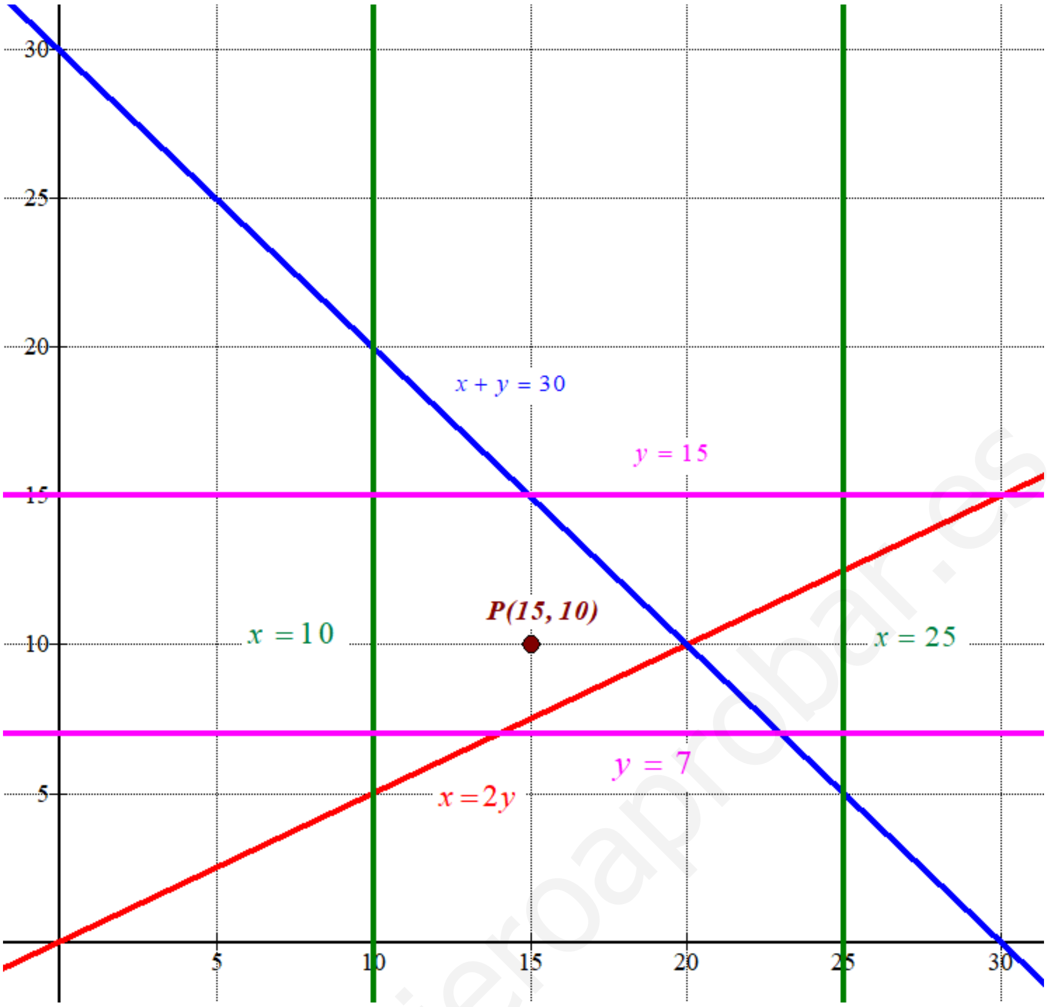
$x=25$	y
25	0
25	10
25	20

$y=7$

x	$y=7$
0	7
10	7
20	7

$y=15$

x	$y=15$
0	15
10	15
20	15

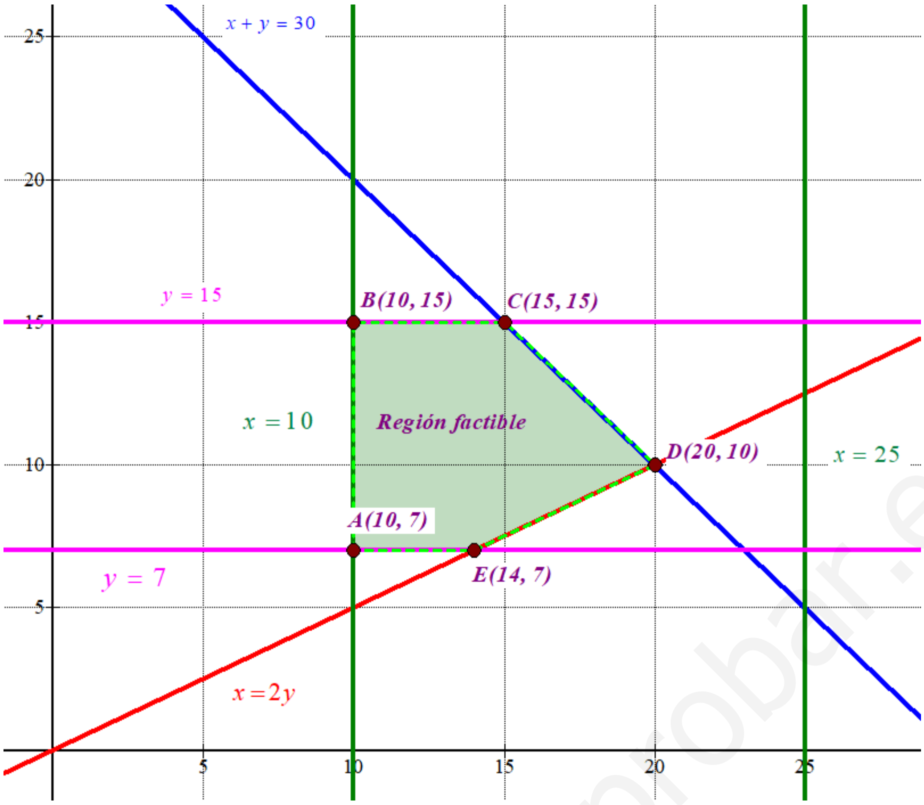


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x \leq 2y \\ x+y \leq 30 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada entre las rectas horizontales rosas, entre las rectas verticales verdes, por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja.

Comprobamos si el punto P(15,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \leq 15 \leq 25 \\ 7 \leq 10 \leq 15 \\ 15 \leq 2 \cdot 10 \\ 15+10 \leq 30 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.

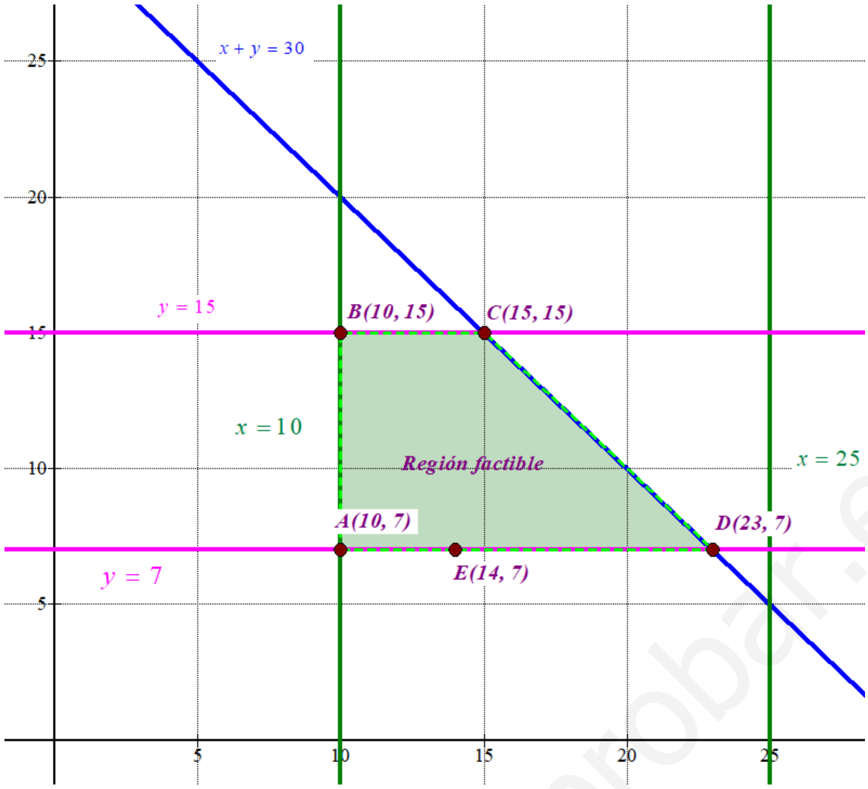


Valoramos el beneficio anual $B(x,y)=10000x+7000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo.

A(10,7) → $B(10,7)=100\,000+49\,000=149\,000$
B(10,15) → $B(10,15)=10000\cdot 10+7000\cdot 15=205\,000$
C(15,15) → $B(15,15)=10000\cdot 15+7000\cdot 15=255\,000$
D(20,10) → $B(20,10)=10000\cdot 20+7000\cdot 10=270\,000$ ¡Máximo!
E(14,7) → $B(14,7)=10000\cdot 14+7000\cdot 7=189\,000$

El beneficio máximo es de 270 000 € y se obtiene en el punto D(20, 10).
Dedicando 20 hectáreas a uva negra y 10 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 270 000 €.

iii) Las nuevas restricciones son $\left.\begin{array}{c} 10\le x\le 25 \\ 7\le y\le 15 \\ x+y\le 30 \end{array}\right\}$ y la región factible es:



Valoramos el beneficio anual $B(x,y)=10000x+7000y$ en cada uno de los vértices de la nueva región factible en busca de un valor máximo.

A(10,7) → $B(10,7)=149\,000$
B(10,15) → $B(10,15)=205\,000$
C(15,15) → $B(15,15)=255\,000$
D(23,7) → $B(23,10)=10000\cdot 23+7000\cdot 7=279\,000$ ¡Máximo!
E(14,7) → $B(14,7)=189\,000$

El beneficio máximo es de 279 000 € y se obtiene en el punto D(23, 7).
Dedicando 23 hectáreas a uva negra y 7 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 279 000 €.

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$.

(5 puntos)

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^-}=-\infty$$

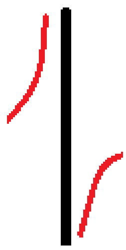
$x=-3$ es asíntota vertical.

¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^-}=-\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical

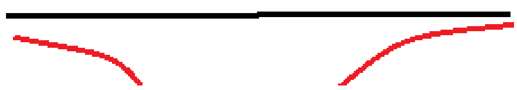


Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1}=\frac{3+\frac{1}{\infty}}{\frac{9}{\infty}-1}=\frac{3+0}{0-1}=-3$$

$$\left(x=100 \rightarrow \frac{3\cdot 100^2+1}{9-100^2}=-3.002<-3 \right)$$

$$\left(x=-100 \rightarrow \frac{3\cdot(-100)^2+1}{9-(-100)^2}=-3.002<-3 \right)$$



$y=-3$ es la asíntota horizontal. La gráfica se aproxima a la asíntota por debajo de ella.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

ii) Calculamos la integral indefinida de *f(x)*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{2x^3-3x+5}{x}dx=\int \frac{2x^3}{x}dx-\int \frac{3x}{x}dx+\int \frac{5}{x}dx=$$

$$=2\int x^2dx-3\int dx+5\int \frac{1}{x}dx=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+C$$

Determinamos el valor de C para que $F(1)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+C \\ F(1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow 1=2\frac{1^3}{3}-3+5\ln 1+C\Rightarrow 1=\frac{2}{3}-3+C\Rightarrow \boxed{C=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+\frac{10}{3}$.

EJERCICIO 4:
En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x)=2x^2+4x+98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:
i) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x. ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)
ii) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)
iii) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

i) Los ingresos son $I(x)=40x$.

Los beneficios son $B(x)=I(x)-C(x)=40x-(2x^2+4x+98)=-2x^2+36x-98$.

Nos piden calcular B(6).

$$B(6)=-2\cdot 6^2+36\cdot 6-98=46 \text{ €}$$

Produciendo 6 toneladas el beneficio es de 46 €.

ii) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x)=-2x^2+36x-98 \Rightarrow B'(x)=-4x+36$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow -4x+36=0 \Rightarrow -4x=-36 \Rightarrow \boxed{x=9}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$B'(x)=-4x+36 \Rightarrow B''(x)=-4 \Rightarrow B''(9)=-4<0$$

Como la segunda derivada es negativa el beneficio tiene un máximo relativo en $x = 9$.

Como $B(9)=-2\cdot 9^2+36\cdot 9-98=64$ el beneficio máximo es de 64 € y se obtiene con 9 toneladas de producto.

iii) Averiguamos cuando el beneficio es cero.

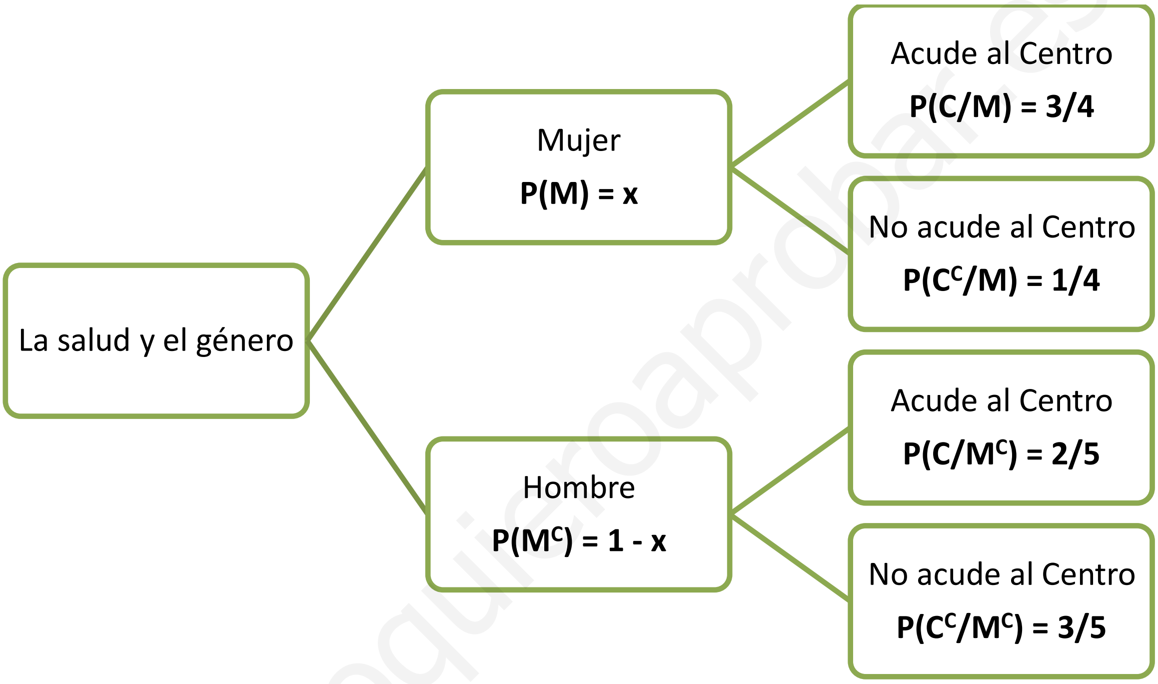
$$B(x)=0 \Rightarrow -2x^2+36x-98=0 \Rightarrow x^2-18x+49=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4(1)(49)}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{128}}{2}=\begin{cases}\dfrac{18+\sqrt{128}}{2}=9+4\sqrt{2}\simeq 14.65\\ \dfrac{18-\sqrt{128}}{2}=9-4\sqrt{2}\simeq 3.34\end{cases}$$

Como la función tiene un máximo en $x = 9$ entonces crece de 0 a 9 y decrece de 9 en adelante. Por ello el beneficio es negativo con una producción inferior a 3.34 toneladas y también con una producción superior a 14.65 toneladas.

EJERCICIO 5:
En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.
i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)
Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:
ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)
iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



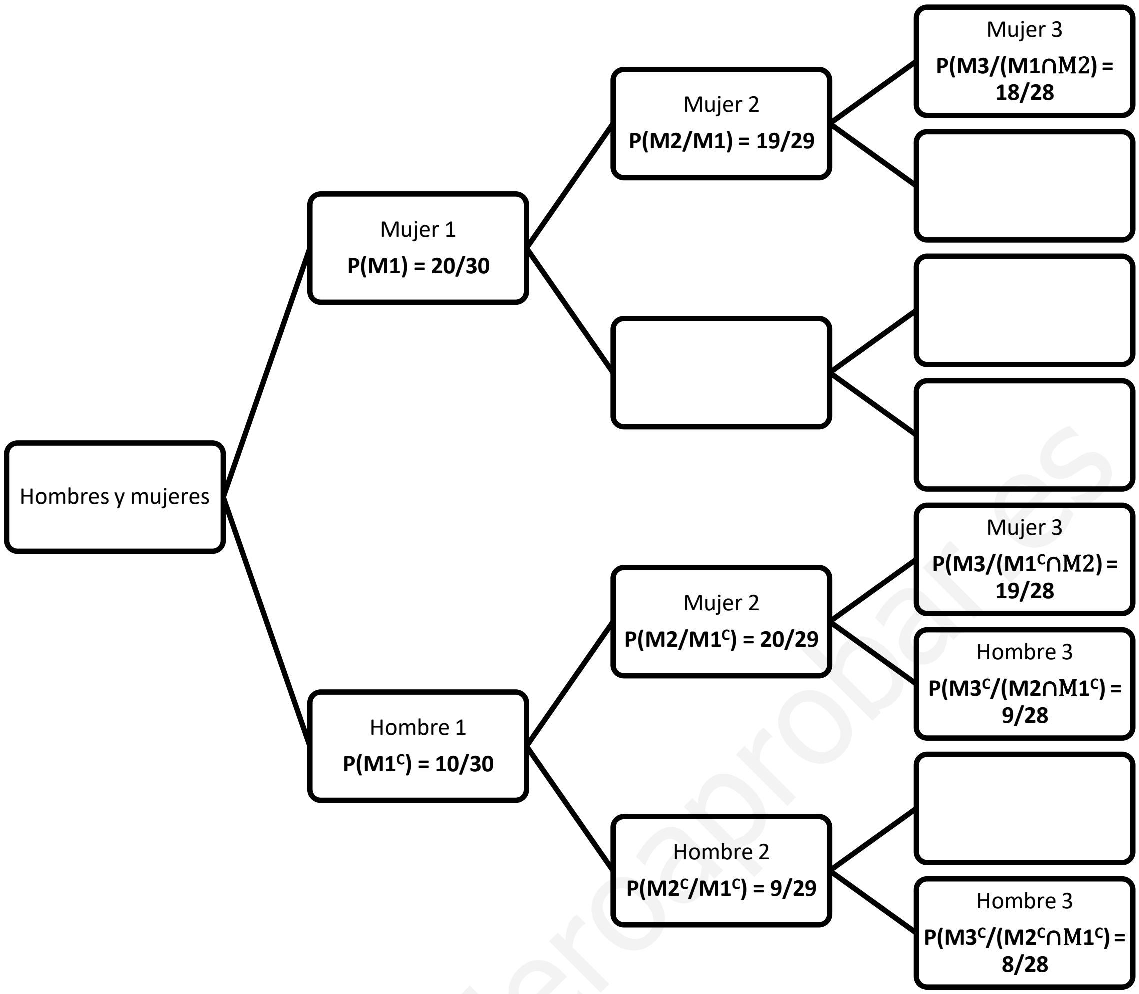
Respondemos a las preguntas planteadas.

i) Usamos el suceso contrario.
La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud es 1 menos la probabilidad de que ninguno haya acudido al centro de salud.

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{20}=0.85$$

La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud.es de 0.85.

Realizamos un diagrama de árbol del nuevo experimento aleatorio planteado.



ii) Con los datos del diagrama tenemos:

$$P\left(M1^C \cap M2^C \cap M3^C\right) = P\left(M1^C\right) \cdot P\left(M2^C / M1^C\right) \cdot P\left(M3^C / \left(M1^C \cap M2^C\right)\right) =$$

$$= \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} = \boxed{\frac{6}{203} \simeq 0.0296}$$

La probabilidad de que los tres elegidos sean hombres es de 0.0296.

iii)Hay varias formas de que solo haya una mujer.

$$P\left(M1 \cap M2^C \cap M3^C\right) + P\left(M1^C \cap M2 \cap M3^C\right) + P\left(M1^C \cap M2^C \cap M3\right) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} = 3 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} = \boxed{\frac{45}{203} \simeq 0.2217}$$

La probabilidad de que sólo haya una mujer entre los tres elegidos es de 0.2217.

EJERCICIO 6:

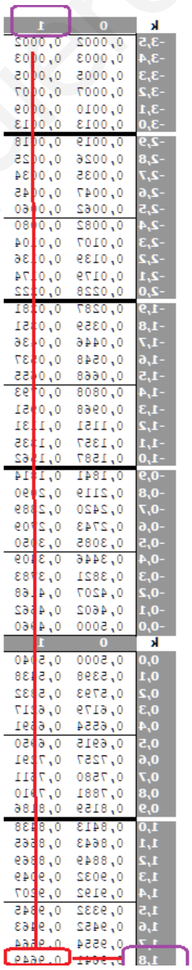
i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)

ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

i) De 175 + 150 = 325 personas no escuchan música clásica 100 + 0.8 · 150 = 220 personas, por lo que 325 – 220 = 105 personas escuchan música clásica. Eso es una proporción de $p_r = \frac{105}{325} = \frac{21}{65} \simeq 0.323$.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 93 %

$$1-\alpha = 0.93 \to \alpha = 0.07 \to \frac{\alpha}{2} = 0.035 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.965 \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.81$$



Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow Error = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{\frac{21}{65} \cdot \frac{44}{65}}{325}} \simeq 0.047$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que escuchan música clásica es:

$$\left(p_r - Error, p_r + Error\right) = \left(0.323 - 0.047,\ 0.323 + 0.047\right) = \left(0.276,\ 0.37\right)$$

La proporción de personas que escuchan música clásica se espera (con un nivel de confianza del 93%) que esté entre el 27.6 % y el 37 %.

ii) Si la varianza es 1225 la desviación típica es $\sqrt{1225} = 35\, puntos$.
El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\left[67.4050,\ 82.5950\right] \Rightarrow Error = \frac{82.5950 - 67.4050}{2} = 7.595\ \ puntos$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el tamaño de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7.595 = 2.17 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 35}{7.595} \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 35}{7.595}\right)^2 = 100$$

El tamaño de la muestra elegida para realizar el intervalo de confianza es de 100 estudiantes.