UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2023 - 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
Para contestar a algunas preguntas se puede usar la tabla de la distribución normal que se adjunta al final del cuestionario.
El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

[1.75 puntos]

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[2.5 puntos]

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.
Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.
Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Definimos la función

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio? **[0.25 puntos]**

www.yoquieroaprobar.es

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

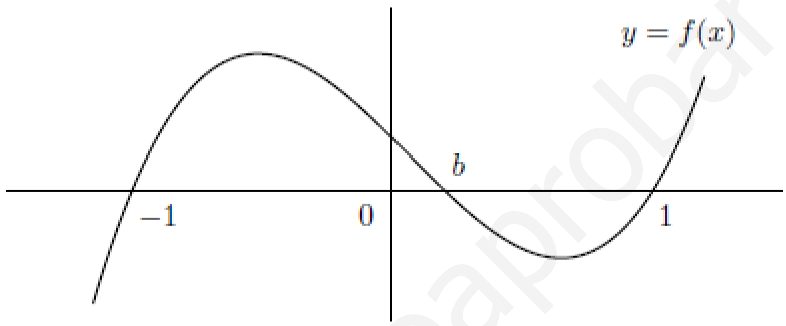
2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0), e y_0 es el máximo valor posible.
¿Cuánto valen a, x_0 e y_0? **[2.5 puntos]**

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - b) \text{ para cierto } b \text{ entre } -1 \text{ y } 1.$$



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b. **[2.25 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.
(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? **[1.25 puntos]**
(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso “Santi saca par"? ¿Y la de “gana Milena" condicionada a “Santi saca par"? ¿Cuál es entonces la probabilidad de “Santi saca par" condicionada a “gana Milena"? **[1.25 puntos]**

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**
Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.
Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**
¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

www.yoquieroaprobar.es

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases}$$

[1.75 puntos]

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a-2\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -3y & +z & =8 \\ -2x & -2y & -6z & =-8 \\ \hline & -5y & -5z & =0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Ecuación\,3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,1^a-3\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 3x & -y & -2z & =5 \\ -3x & -3y & -9z & =-12 \\ \hline & -4y & -11z & =-7 \end{array} \rightarrow Nueva\ Ecuación\,2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\cdot Ecuación\,3^a+Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 4y & +4z & = & 0 \\ -4y & -11z & = & -7 \\ \hline & -7z & = & -7 \end{array} \rightarrow Nueva\ Ecuación\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ -7z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ \boxed{z=\frac{7}{7}=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2=5 \\ -4y-11=-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y=7 \\ -4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=7 \\ \boxed{y=\frac{4}{-4}=-1} \end{cases} \Rightarrow 3x+1=7 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow \boxed{x=\frac{6}{3}=2}$$

La solución del sistema es $x=2;\ y=-1;\ z=1$

www.yoquieroaprobar.es

Consideramos el sistema $\begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases}$ y buscamos el valor de a que lo hace incompatible.

$$\begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Ecuación\,3^a - 2\cdot Ecuación\,2^a} \\ 2x & -3y & +z & =8 \\ -2x & -2y & -6z & =-8 \\ \hline & -5y & -5z & =0 \rightarrow Nueva\,Ecuación\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+z-2z=5 \\ x-z+3z=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax-z=5 \\ x+2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax-z=5 \\ x=4-2z \end{cases} \Rightarrow a(4-2z)-z=5 \Rightarrow 4a-2az-z=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2a-1)z=5-4a \Rightarrow \ldots$$

Para que sea incompatible debe ser $-2a-1=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$.

Para este valor de a la ecuación queda:

$$(-2a-1)z=5-4a \Rightarrow \left\{ a=\frac{-1}{2} \right\} \Rightarrow 0z=5+\frac{4}{2}=7 \Rightarrow 0=7 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Debemos sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación por $\frac{-1}{2}$ para que resulte un sistema sin soluciones.

www.yoquieroaprobar.es

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad
$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ **[2.5 puntos]**

La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2: $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=-1\\ ab+bd=0\\ ac+cd=0\\ bc+d^2=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=-1\\ b(a+d)=0\rightarrow\begin{cases}b=0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.}\\ a+d=0\end{cases}\\ c(a+d)=0\rightarrow\begin{cases}c=0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.}\\ a+d=0\end{cases}\\ bc+d^2=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=-1\\ a+d=0\rightarrow\boxed{a=-d}\\ bc+d^2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-d)^2+bc=-1\\ bc+d^2=-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{bc+d^2=-1}$$

Como nos piden encontrar una matriz elegimos un valor para *a* y *d*. A partir de estos valores determinamos los valores de *b* y *c*.

$$a=1;\ d=-1\Rightarrow bc+1=-1\Rightarrow bc=-2\Rightarrow Tomamos\ b=1;\ c=-2.$$

Comprobamos que con los valores *a = 1*, *b = 1*, *c = –2* y *d = –1* se cumple lo pedido.

Para estos valores la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. Calculamos A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 1-1\\ -2+2 & -2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Se cumple lo pedido y la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ es una de las matrices que cumple $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.
Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.
Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

a) Llamamos "x" al número de pasteles A e "y" al número de pasteles B.
Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Cuencos de masa	Cuencos de chocolate	Beneficio
Nº pasteles A (x)	2x	2x	5x
Nº pasteles B (y)	y	2y	4y
TOTAL	$2x+y$	$2x+2y$	$5x+4y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=5x+4y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B → $y \leq 30$

Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles → $2x+y \leq 60;\ 2x+2y \leq 80$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x+y \leq 60 \\ 2x+2y \leq 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x+y \leq 60 \\ x+y \leq 40 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x \geq 0;\ y \geq 0$ *El primer cuadrante*

$y = 30$

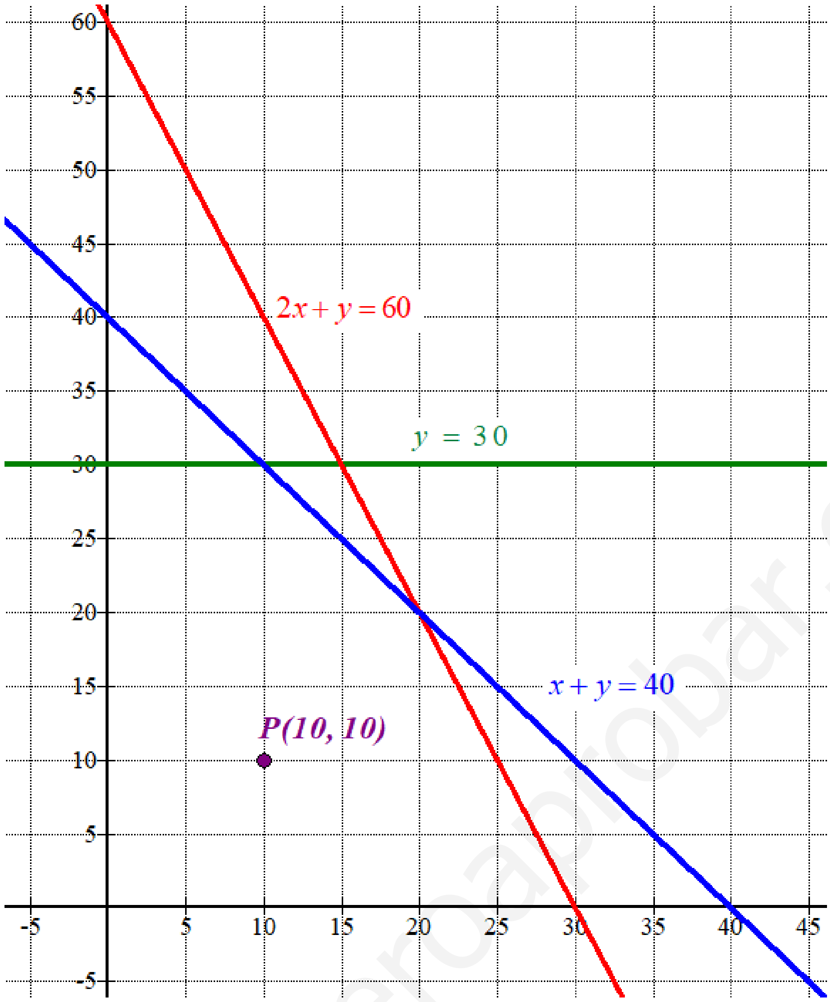
x	$y=30$
0	30
20	30
30	30

$2x+y=60$

x	$y=60-2x$
0	60
20	20
30	0

$x+y=40$

x	$y=40-x$
0	40
20	20
40	0



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\leq 30 \\ 2x+y\leq 60 \\ x+y\leq 40 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10\geq 0;\ 10\geq 0 \\ 10\leq 30 \\ 20+10\leq 60 \\ 10+10\leq 40 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.

www.yoquieroaprobar.es

Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 30) → $B(0,30)=5\cdot 0+4\cdot 30=120$
C(10, 30) → $B(10,30)=5\cdot 10+4\cdot 30=170$
D(20, 20) → $B(20,20)=5\cdot 20+4\cdot 20=180$ ¡Máximo!
E(30, 0) → $B(30,0)=5\cdot 30+4\cdot 0=150$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 180 € y se consigue en el punto D(20, 20).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue cocinando 20 pasteles de cada clase.

www.yoquieroaprobar.es

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Definimos la función

$$f(x)=\frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio? **[0.25 puntos]**
¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \to x=2 \end{cases}$$

Dominio = $\mathbb{R}-\{0,2\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{0(0-2)}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=0$.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{2(2-2)}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Hallamos los extremos relativos.

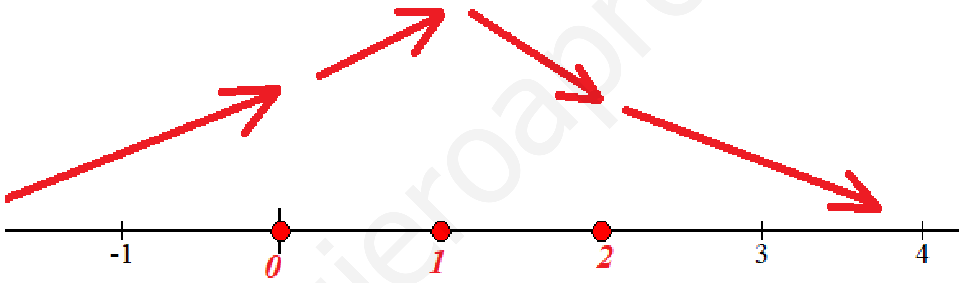
$$f(x)=\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{x^2-2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{0(x^2-2x)-(2x-2)\cdot 2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-4x+4}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4x+4}{(x^2-2x)^2}=0 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Tenemos un punto crítico: $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\dfrac{-4(-1)+4}{\left((-1)^2-2(-1)\right)^2}=\dfrac{8}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale
  $f'(0.5)=\dfrac{-4(0.5)+4}{\left((0.5)^2-2(0.5)\right)^2}=\dfrac{32}{9}>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale
  $f'(1.5)=\dfrac{-4(1.5)+4}{\left((1.5)^2-2(1.5)\right)^2}=\dfrac{-32}{9}<0$. La función decrece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale
  $f'(3)=\dfrac{-4(3)+4}{\left(3^2-2(3)\right)^2}=\dfrac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

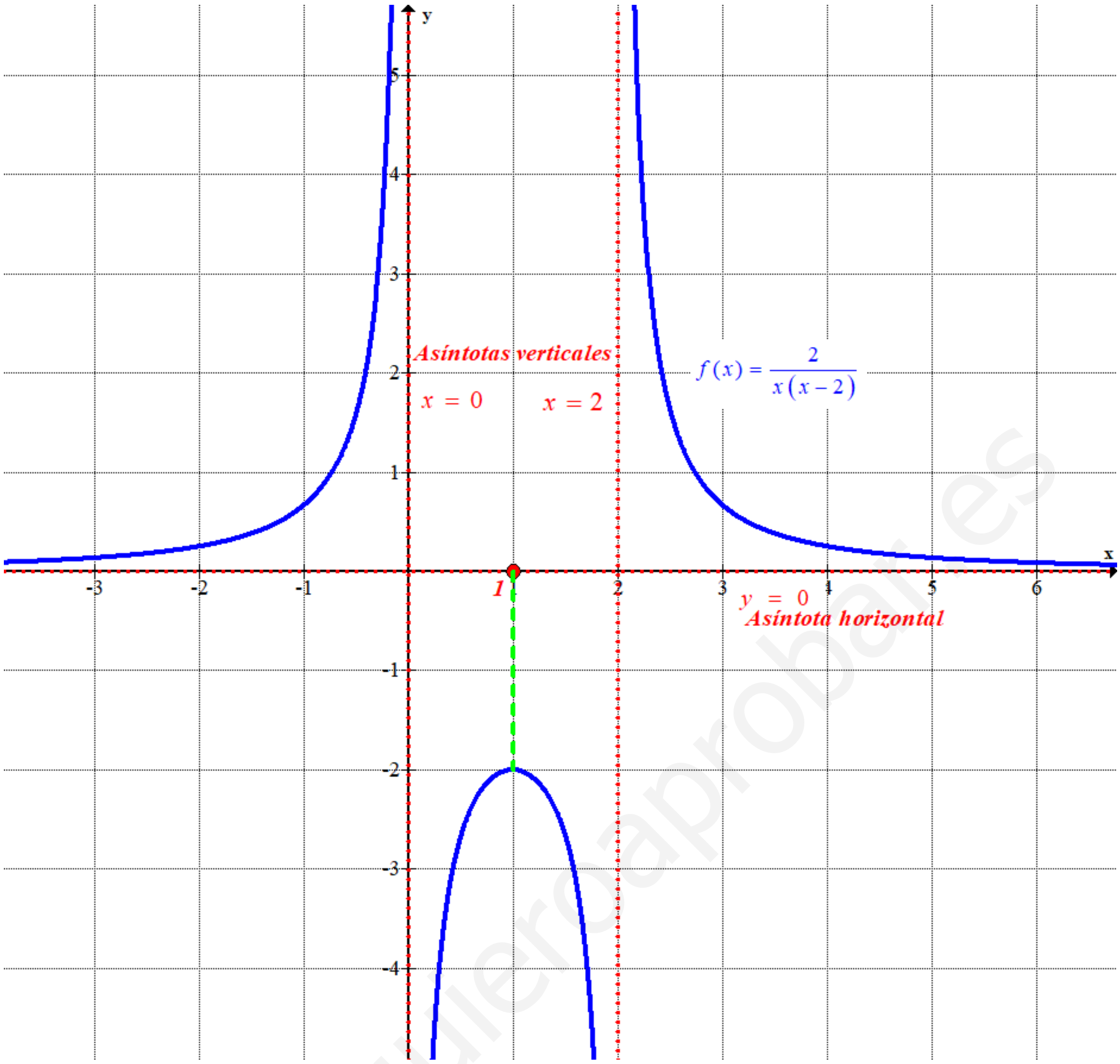
La función sigue el esquema siguiente.



Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\dfrac{2}{x(x-2)}$
-2	0.25
0.5	-2.66
1	-2 *máximo*
1.5	$-2,66$
3	0.66
4	0.25



www.yoquieroaprobar.es

2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0), e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a, x_0 e y_0? **[2.5 puntos]**

La recta es tangente a la parábola por lo que la pendiente de la recta debe ser igual a la derivada de la parábola en el punto de tangencia.

$$\left.\begin{array}{l} Parábola \to y' = 5 - 2x \\ Recta \to y' = a \end{array}\right\} \Rightarrow 5 - 2x_0 = a \Rightarrow -2x_0 = a - 5 \Rightarrow x_0 = \frac{5-a}{2}$$

La recta y la parábola coinciden en el punto (x_0, y_0).

$$\left.\begin{array}{l} Parábola \to y_0 = 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 \\ Recta \to y_0 = a\frac{5-a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 = a\frac{5-a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25-5a}{2} - \frac{25+a^2-10a}{4} - 4 = \frac{5a-a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(25-5a) - (25+a^2-10a) - 16 = 2(5a-a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 - \cancel{10a} - 25 - a^2 + \cancel{10a} - 16 = 10a - 2a^2 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10-8}{2} = \boxed{1 = a} \\ \frac{10+8}{2} = \boxed{9 = a} \end{cases}$$

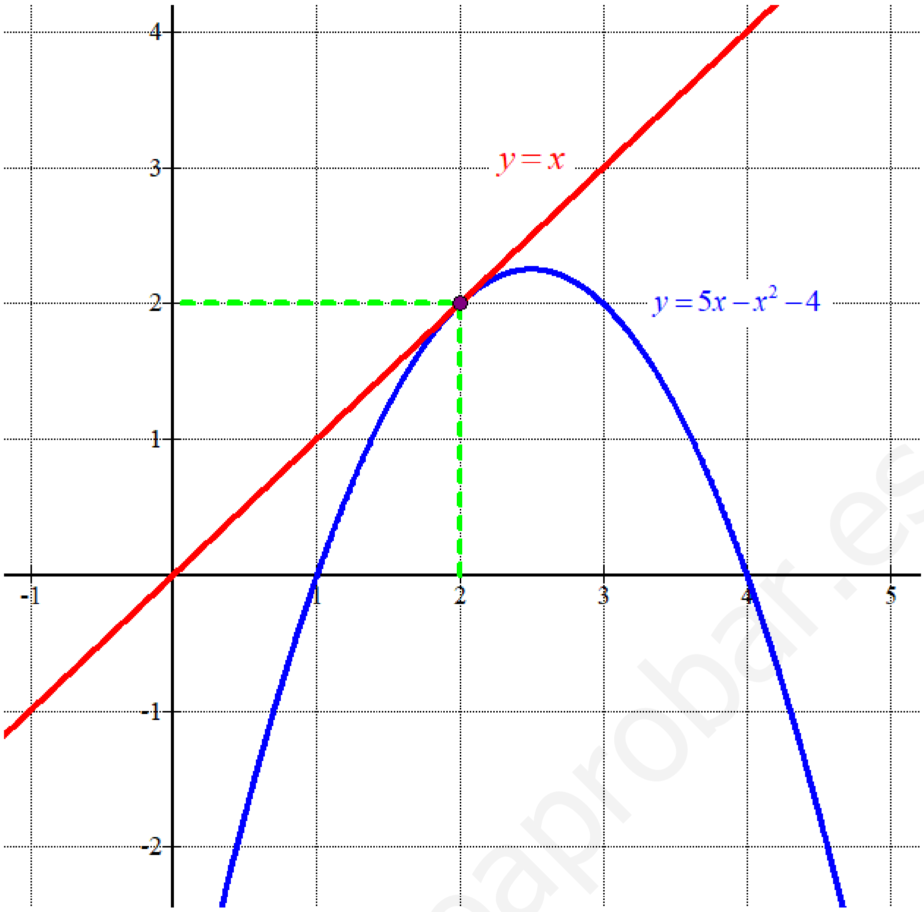
De los dos valores obtenidos elegimos el que nos dé un valor máximo de y_0.

Si $a = 1$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot 2 = 4$.

Si $a = 9$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-9}{2} = -2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot (-2) = -4$.

Como el valor máximo de y_0 es 4, podemos decir que los valores buscados son $a = 1$, $x_0 = 2$ e $y_0 = 4$.

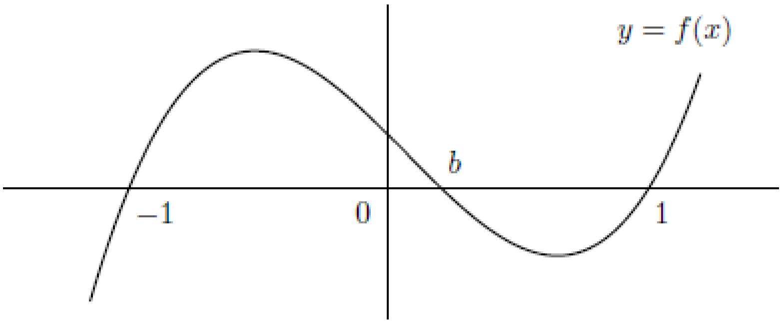
Dibujamos las gráficas y comprobamos la solución obtenida.



www.yoquieroaprobar.es

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$f(x) = (x^2 - 1)(x - b)$ para cierto b entre -1 y 1.



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b. **[2.25 puntos]**

Como la función es positiva en el intervalo $(-1, b)$ la integral definida $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ es positiva.

Como la función es negativa en el intervalo $(b, 1)$ la integral definida $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$ es negativa.

Calculamos la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)(x-b)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 - bx^2 - x + b\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} - \frac{b\cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + b\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{b\cdot(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + b(-1)\right] =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{b}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + b - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{b}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + b = 2b - \frac{2b}{3} = \frac{4b}{3}$$

Aplicamos la condición $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4b}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4}}$$

El valor buscado es $b = \frac{1}{4}$.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.
(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? **[1.25 puntos]**
(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "Santi saca par"? ¿Y la de "gana Milena" condicionada a "Santi saca par"? ¿Cuál es entonces la probabilidad de "Santi saca par" condicionada a "gana Milena"? **[1.25 puntos]**

(i) El experimento consiste en lanzar un dado Milena y otro Santi. Suponemos que el primero en lanzar es Milena. Los posibles resultados son:

$$\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),\end{array}$$

De los 36 posibles resultados del experimento marcamos los que hacen que gane Milena.

$$\begin{array}{l}\color{red}{(1,1)},(1,2),\color{red}{(1,3)},(1,4),\color{red}{(1,5)},(1,6),\\\color{red}{(2,1)},(2,2),\color{red}{(2,3)},(2,4),\color{red}{(2,5)},(2,6),\\\color{red}{(3,1)},(3,2),\color{red}{(3,3)},(3,4),\color{red}{(3,5)},(3,6),\\\color{red}{(4,1)},(4,2),\color{red}{(4,3)},(4,4),\color{red}{(4,5)},(4,6),\\\color{red}{(5,1)},(5,2),\color{red}{(5,3)},(5,4),\color{red}{(5,5)},(5,6),\\\color{red}{(6,1)},\color{red}{(6,2)},\color{red}{(6,3)},\color{red}{(6,4)},\color{red}{(6,5)},\color{red}{(6,6)},\end{array}$$

Milena gana en 21 de los 36 posibles resultados. Aplicando la regla de Laplace.

$$P(Gana\ Milena)=\frac{21}{36}=\boxed{\frac{7}{12}\simeq 0.5833}$$

Santi gana en los restantes 15 resultados.

$$P(Gane\ Santi)=\frac{15}{36}=\boxed{\frac{5}{12}\simeq 0.4167}$$

(ii) Santi saca par al lanzar el dado en la mitad de las ocasiones.

$$P(Santi\ saca\ par)=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

Santi saca par en 18 de los 36 posibles resultados. En esas 18 formas en las que Santi saca par están incluidos los resultados $(6,2),(6,4)$ y $(6,6)$ que son los resultados en los que gana Milena.

$$P(\text{Gane Milena / Santi saca par}) = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.1667}$$

Milena gana en 21 de los 36 resultados posibles. De esos resultados favorables a que gane Milena están los resultados $(6,2),(6,4)$ y $(6,6)$ en los que Santi saca par.

$$P(\text{Santi saca par / Gane Milena}) = \frac{3}{21} = \boxed{\frac{1}{7} \simeq 0.1429}$$

www.yoquieroaprobar.es

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**
Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

X = La estatura de las niñas de 3 años en España (en cm). X = N(95, σ)
Sabemos que $P(X<102)=0.97$.

$$P(X<102)=0.97 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-95}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z<\frac{102-95}{\sigma}\right)=0.97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{\sigma}=1.88 \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{7}{1.88}=3.72}$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	[illegible]
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	[illegible]
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	[illegible]
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	[illegible]
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	[illegible]
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	[illegible]
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	[illegible]
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	[illegible]
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	[illegible]
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	[illegible]
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	[illegible]
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	[illegible]
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	[illegible]
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	[illegible]
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	[illegible]
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	[illegible]
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	[illegible]
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	[illegible]
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.96995
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615

La desviación típica tiene un valor aproximado de 3.72 cm.

La distribución de las medias de estatura en muestras de tamaño 25 es una distribución normal con la misma media (95 cm) y con la desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{3.72}{\sqrt{25}}=0.744$ cm.

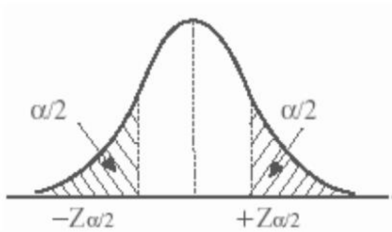
www.yoquieroaprobar.es

3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.
Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**
¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

X = Perímetro de un cráneo en centímetros. X = N(μ, 1.5)

Tenemos como dato que $\overline{x}=56.2\,cm$ y que el tamaño de la muestra es $n = 36$.
Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=0{,}05 \rightarrow \alpha/2=0'025 \rightarrow 1-\alpha/2=0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}=\mathbf{1.96}$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	[illegible]
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	[illegible]
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	[illegible]
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	[illegible]
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	[illegible]
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	[illegible]
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	[illegible]
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	[illegible]
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	[illegible]
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	[illegible]
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	[illegible]
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	[illegible]
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	[illegible]
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	[illegible]
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	[illegible]
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	[illegible]
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	[illegible]
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	[illegible]
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.97500
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\cdot\frac{1.5}{\sqrt{36}} = 0.49\ cm$$

El error es de 0.49 centímetros.

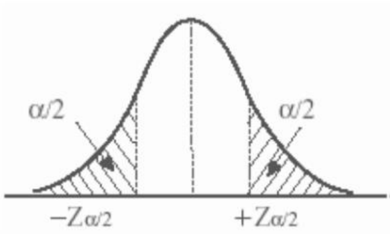
El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x}-Error,\ \overline{x}+Error\right)=\left(56.2-0.49,\ \ 56.2+0.49\right)=\left(55.71, 56.69\right)$$

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1-\alpha=0.90 \rightarrow \alpha=0.10 \rightarrow \alpha/2=0.05 \rightarrow 1-\alpha/2=0.95 \rightarrow z_{\alpha/2}=\mathbf{1.645}$$

www.yoquieroaprobar.es



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.5[illegible]595	0.5[illegible]994	0.
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.5[illegible]567	0.5[illegible]962	0.
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.5[illegible]483	0.5[illegible]871	0.
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.6[illegible]307	0.6[illegible]683	0.
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.6[illegible]003	0.6[illegible]364	0.
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7[illegible]540	0.7[illegible]884	0.
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.7[illegible]891	0.7[illegible]215	0.
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.7[illegible]035	0.7[illegible]337	0.
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.7[illegible]955	0.8[illegible]234	0.
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.8[illegible]639	0.8[illegible]894	0.
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.8[illegible]083	0.8[illegible]314	0.
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.8[illegible]286	0.8[illegible]493	0.
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.8[illegible]251	0.8[illegible]435	0.
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.9[illegible]988	0.9[illegible]149	0.
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.9[illegible]507	0.9[illegible]647	0.
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.9[illegible]822	0.9[illegible]943	0.
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.94950	0.95053	0.
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.

Como queremos obtener el mismo intervalo de confianza el error debe ser el mismo (0.49 cm).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.49 = 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \frac{0.49 \cdot 6}{1.645} = \sigma \Rightarrow \sigma \simeq 1.7872$$

La desviación típica debe tener un valor aproximado de 1.7872 cm.

www.yoquieroaprobar.es