EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)

CURSO 2023–2024

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (4)

Convocatoria:

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)

b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)

c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)

b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)

c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)

b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)

c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}t^2+3t+1 & t\le 4 \\ \frac{t+111}{5t+3} & t>4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)

b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)

c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=-x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)

b) Calcula el área. (1 punto)

c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)

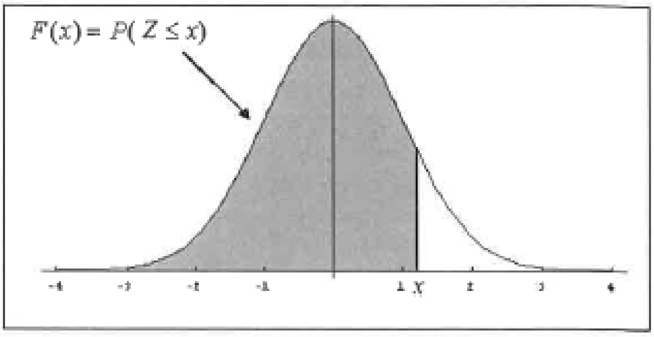
b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)

b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

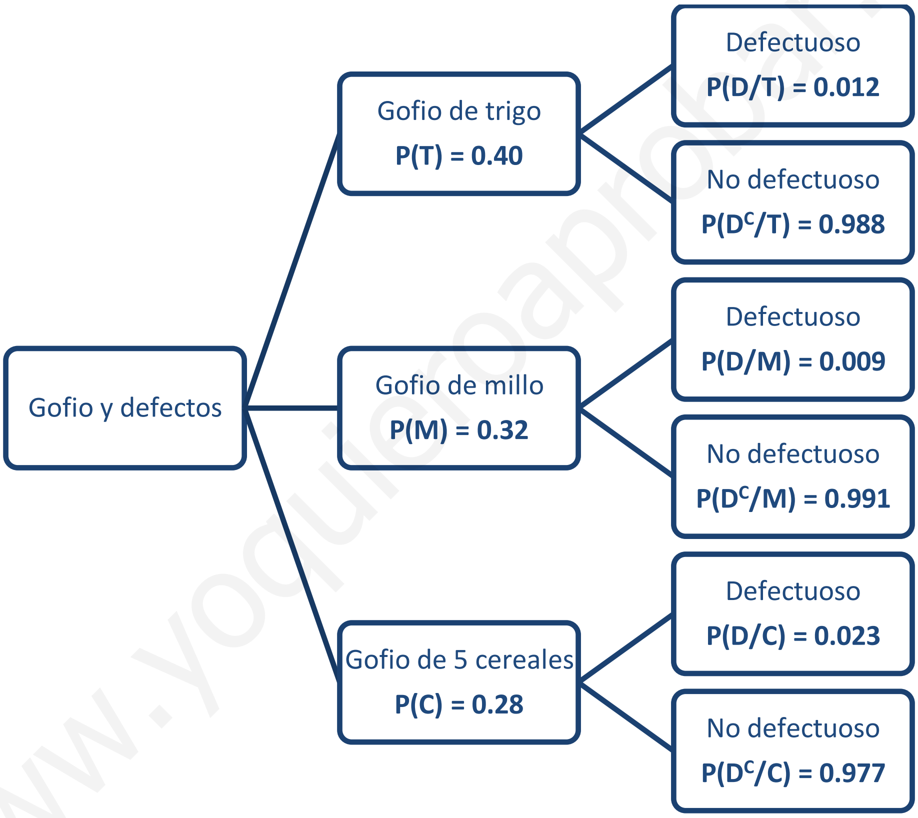


	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.
a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)
b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)
c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

a) Llamamos T al suceso "el gofio es de trigo", M al suceso "el gofio es de millo", C al suceso "el gofio es de cinco cereales" y D al suceso "el paquete presenta un defecto".



b) Nos piden calcular $P\left(D^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^C\right)=P(T)P\left(D^C/T\right)+P(T)P\left(D^C/T\right)+P(T)P\left(D^C/T\right)=$$

$$=0.4\cdot 0.988+0.32\cdot 0.991+0.28\cdot 0.977=\boxed{0.98588}$$

La probabilidad de que un paquete no presente defectos es de 0.98588.

c) Nos piden calcular $P(M/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/D)=\frac{P(M\cap D)}{P(D)}=\frac{P(M)P(D/M)}{1-P\left(D^C\right)}=\frac{0.32\cdot 0.009}{1-0.98588}=\boxed{\frac{72}{353}\cong 0.204}$$

Si el paquete presenta algún defecto la probabilidad de que el gofio sea de millo tiene un valor aproximado de 0.204.

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)

b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)

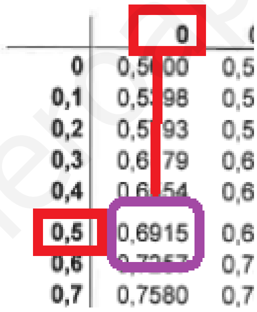
c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

a) Llamamos X a la variable aleatoria que nos da el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones. X = N(725, 50)

Nos piden calcular $P(X \le 700)$.

$$P(X \le 700) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{700-725}{50}\right) = P(Z \le -0.5) =$$

$$= P(Z \ge 0.5) = 1 - P(Z \le 0.5) = \left\{\begin{matrix} Buscamos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$



La probabilidad de que el precio de alquiler mensual no supere los 700 euros es de 0.3085.

b) La distribución de la media de los precios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (725 €) y con desviación típica $\sigma = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$ euros.

$\overline{X_{25}} = N(725,10)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{25}} > 730\right)$.

$$P\left(\overline{X_{25}} > 730\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{730-725}{10}\right) = P(Z > 0.5) =$$

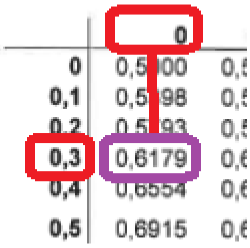
$$= 1 - P(Z \le 0.5) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

La probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros es de 0.3085.

c) Calculamos la probabilidad de que un piso cueste menos de 710 €: $P(X < 710)$.

$$P(X<710)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\le\frac{710-725}{50}\right)=P(Z\le -0.3)=$$

$$=P(Z\ge 0.3)=1-P(Z\le 0.3)=\left\{\begin{matrix}Buscamos\,en\,la\\ tabla\;N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.6179=\boxed{0.3821}$$



	0	
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6

Multiplicamos esta probabilidad por 25 y obtenemos **25 · 0.3821 = 9.5525.**
El número de pisos que se espera cuesten menos de 710 € cada mes de un grupo de 25 está entre 9 y 10 pisos.

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)

b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)

c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

a) Llamamos X = "la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular".
X es una variable normal de media 1200 km y desviación típica 230 km. X = N(1200, 230)
Debemos calcular $P(X > 1000)$.

$$P(X > 1000) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1000-1200}{230}\right) = P(Z > -0.87) =$$

$$= P(Z < 0.87) = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = \boxed{0.8078}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577

La probabilidad de que un coche recorra en un mes más de 1000 km es de 0.8078.

b) La distribución de la media de las distancias recorridas de muestras de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media (1200 km) y con desviación típica $\sigma = \frac{230}{\sqrt{36}} = \frac{115}{3} \simeq 38.33$ kilómetros. $\overline{X_{36}} = N(1200, 115/3)$.

Nos piden calcular $P(1150 \leq \overline{X_{36}} \leq 1250)$.

$$P(1150 \leq \overline{X_{36}} \leq 1250) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{1150-1200}{115/3} \leq Z \leq \frac{1250-1200}{115/3}\right) =$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 1.3) = P(Z \leq 1.3) - P(Z \leq -1.3) = P(Z \leq 1.3) - P(Z \geq 1.3) =$$

$$= P(Z \leq 1.3) - [1 - P(Z \leq 1.3)] = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{array}\right\} = 0.9032 - [1 - 0.9032] = \boxed{0.8064}$$

	0
0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192

La probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km es de 0.8064.

c) Calculamos la probabilidad de que un coche recorra más de 1300 km: $P(X > 1300)$.

$$P(X > 1300) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1300-1200}{230}\right) = P(Z > 0.43) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.43) = \left\{\begin{matrix} Buscamos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6664 = \boxed{0.3336}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0
0,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0

Multiplicamos esta probabilidad por 36 y obtenemos **36 · 0.3336 = 12.0096.**
El número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km es de 12.

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). X = N(μ, 4).

La muestra es de tamaño n = 200 pedidos, con una media muestral $\bar{x} = \frac{18.16++16.84}{2} = 17.5$ minutos.

a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza. Lo hemos obtenido y es de 17.5 minutos.

El error de la estimación es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{18.16-16.84}{2} = 0.66 \text{ minutos.}$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.66 = z_{\alpha/2} \frac{4}{\sqrt{200}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.66 \cdot \sqrt{200}}{4} \simeq 2.33$$

Buscamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 2.33 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9901 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1-0.9901 = 0.0099 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.0099 = 0.0198 \Rightarrow 1-\alpha = 1-0.0198 = \boxed{0.9802}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	[illegible]	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	[illegible]	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	[illegible]	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	[illegible]	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	[illegible]	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	[illegible]	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	[illegible]	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	[illegible]	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	[illegible]	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	[illegible]	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	[illegible]	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	[illegible]	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	[illegible]	0,
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	[illegible]	0,
2,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9901	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,

El nivel de confianza es del 98 %.

b) X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). X = N(17.5, 4). La muestra es de tamaño n = 425 pedidos. La distribución de la media muestral es una normal de la misma media (17.5 minutos) y desviación típica $\sigma = \frac{4}{\sqrt{425}} = \frac{4\sqrt{17}}{85} \simeq 0.194$ minutos.

$$\overline{X}_{425} = N\left(17.5,\ \frac{4\sqrt{17}}{85}\right).$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X}_{425} > 18\right)$.

$$P\left(\overline{X}_{425} > 18\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{18-17.5}{4\sqrt{17}/85}\right) = P\left(Z > 2.58\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le 2.58\right) = \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{Bmatrix} = 1 - 0.9951 = \boxed{0.0049}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5[illegible]19
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5[illegible]14
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6[illegible]03
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6[illegible]80
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6[illegible]44
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7[illegible]90
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7[illegible]17
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7[illegible]23
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8[illegible]06
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8[illegible]65
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8[illegible]99
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8[illegible]10
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8[illegible]97
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9[illegible]62
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9[illegible]06
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9[illegible]29
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9[illegible]35
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9[illegible]25
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9[illegible]99
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9[illegible]61
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9[illegible]12
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9[illegible]54
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9[illegible]87
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9[illegible]13
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9[illegible]34
2,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963

La probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos en una muestra de 425 pedidos es de 0.0049.

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}t^2+3t+1 & t\le 4 \\ \frac{t+111}{5t+3} & t>4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)

b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)

c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

a) La función en el intervalo $[0,4)$ es una función polinómica que es continua.

La función en el intervalo (4, +∞) es una función racional pero no se anula en el intervalo.

$$5t+3=0 \Rightarrow 5t=-3 \Rightarrow t=\frac{-3}{5}=-0.6 \notin (4,+\infty)$$

Estudiamos la continuidad en $t = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} R(4)=-\frac{1}{2}4^2+3\cdot 4+1=5 \\ \lim\limits_{t\to 4^-} R(t)=\lim\limits_{t\to 4^-} -\frac{1}{2}t^2+3t+1=5 \\ \lim\limits_{t\to 4^+} R(t)=\lim\limits_{t\to 4^+} \frac{t+111}{5t+3}=\frac{4+111}{5\cdot 4+3}=\frac{115}{23}=5 \end{array}\right\} \Rightarrow R(4)=\lim_{t\to 4^-} R(t)=\lim_{t\to 4^+} R(t)=5$$

La función es continua en $t = 4$ y por tanto, es continua en todo su dominio.

b) La función en los intervalos $[0,4)$ y (4, +∞) es derivable.

La derivada de la función en $[0,4)\cup(4,+\infty)$ tiene la expresión:

$$R'(t)=\begin{cases} -t+3 & t<4 \\ \frac{1\cdot(5t+3)-5(t+111)}{(5t+3)^2}=\frac{5t+3-5t-555}{(5t+3)^2}=\frac{-552}{(5t+3)^2} & t>4 \end{cases}$$

Buscamos los puntos críticos de la función *R(t)*.

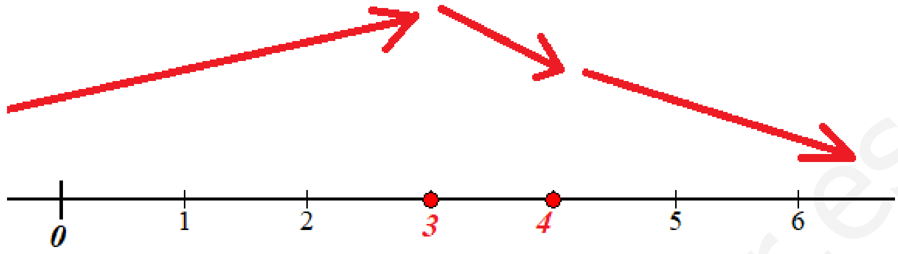
$$\left.\begin{array}{r} R'(t)=\begin{cases} -t+3 & t<4 \\ \frac{-552}{(5t+3)^2} & t>4 \end{cases} \\ R'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -t+3=0 \rightarrow t=3\in[0,4) \\ \frac{-552}{(5t+3)^2}=0 \rightarrow \text{¡Im } posible! \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $[0,3)$. Tomamos $t = 0$ y la derivada vale $R'(0)=-0+3=3>0$. La función crece en $[0,3)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(3,4)$. Tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale $R'(3.5) = -3.5+3 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(3,4)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo (4, +∞). Tomamos $t = 5$ y la derivada vale $R'(5) = \frac{-552}{(5\cdot 5+3)^2} = -0.7 < 0$. La función decrece en (4, +∞).

La función sigue el esquema siguiente.



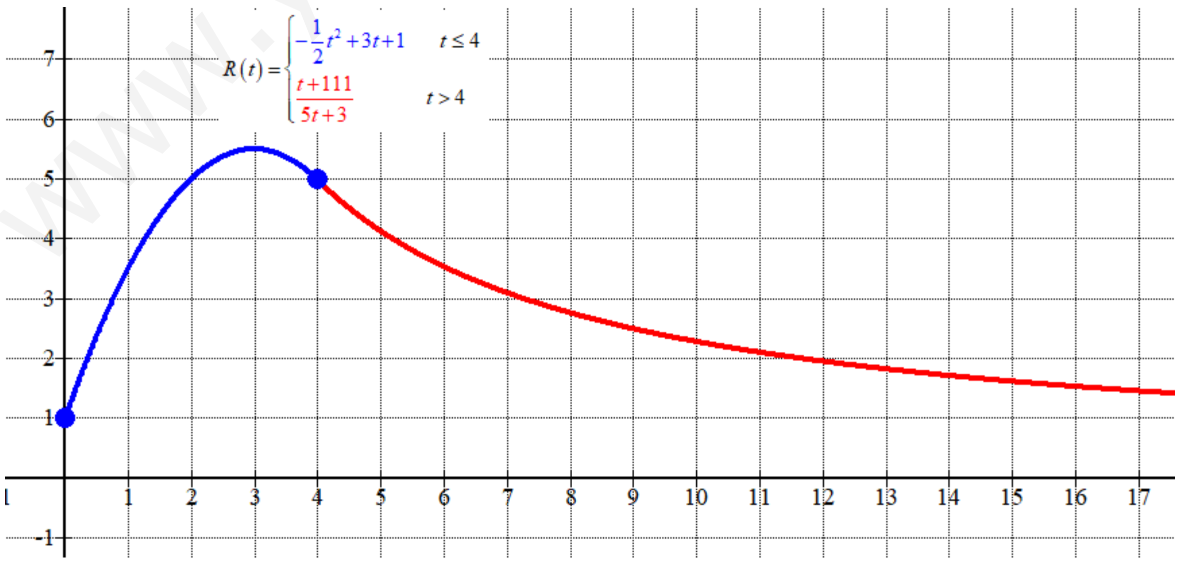
Como la función es continua podemos afirmar que la función crece de 0 a 3 años y decrece a partir del tercer año.

La rentabilidad máxima se alcanza en el tercer año. Como $R(3) = -\frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = 5.5$ la rentabilidad máxima es de 5.5 %.

Realizamos una tabla de valores y representamos la función.

t	$R(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$
0	1
1	3.5
2	5
3	5.5
4	5

t	$R(t) = \frac{t+111}{5t+3}$
5	4.14
6	3.54
7	3.1
8	2.7
10	2.28



c) Averiguamos el valor de la función para $t = 25$.

$$R(25) = \frac{25+111}{5\cdot 25+3} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

Para una inversión que dure 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625 %, superior al 0.2 %.
Hallamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} R(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+111}{5t+3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{t}{t}+\frac{111}{t}}{\frac{5t}{t}+\frac{3}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1+\frac{111}{t}}{5+\frac{3}{t}} = \frac{1+\frac{111}{\infty}}{5+\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

El rendimiento a los 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625%, el rendimiento decrece, pero no baja del 0.2%.
Es cierta la afirmación del ejercicio y se puede garantizar un retorno superior al 0.2 % a partir de 25 años e incluso antes.

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=-x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)
b) Calcula el área. (1 punto)
c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

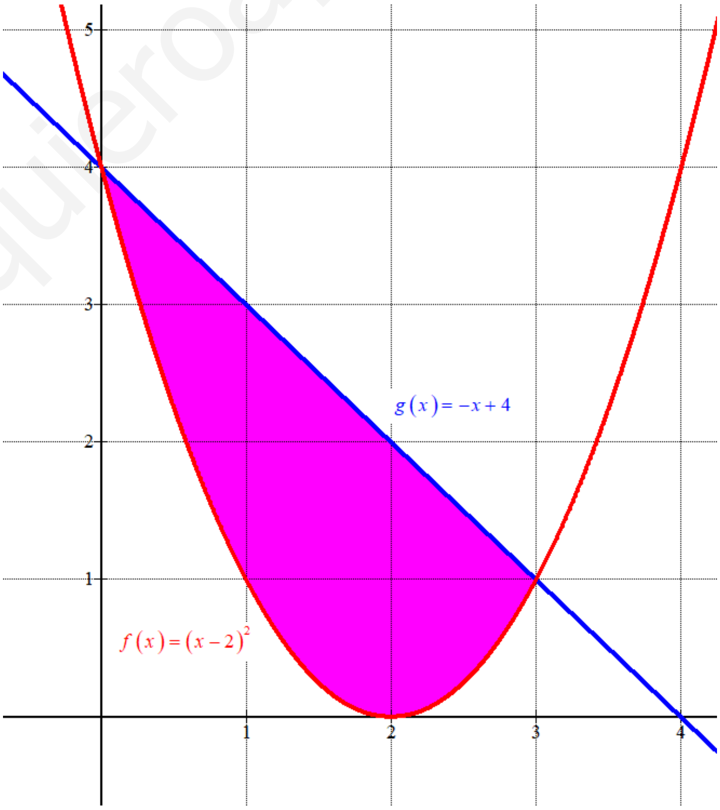
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-2)^2 \\ g(x)=-x+4 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2=-x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=-x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \to x=3 \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto encerrado entre ellas.

x	$f(x)=(x-2)^2$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

x	$g(x)=-x+4$
-1	5
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0



b) Hallamos el área de la región encerrada entre las dos gráficas como la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\int_0^3 g(x)-f(x)dx=\int_0^3 -x+4-(x-2)^2\,dx=\int_0^3 -x+4-(x^2+4-4x)dx=$$

$$=\int_0^3 -x+4-x^2-4+4xdx=\int_0^3 -x^2+3xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+3\frac{3^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}\right]=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}=\boxed{4.5\ u^2}$$

El área de la región encerrada entre las dos gráficas tiene un valor de 4.5 hectáreas.

c) Se producen 4.5 · 45000 = 202500 kg de plátanos. Se desecha el 1.5% por lo que se recibe subvención por el 98.5 % de la producción, es decir, 202500 · 0.985 = 199462.5 kg. Multiplicamos estos kilos subvencionados por 0.33 y tenemos la subvención.

$$199462.5 \cdot 0.33 = 65822.625\,€$$

La subvención que se recibe es de 65 822.625 €.

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.
a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)
b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

a) Llamamos x = número de teléfonos móviles, y = número de tablets y z = número de ordenadores portátiles vendidos.

"El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos" → $300x+400y+800z=28000$.
"El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas" → $x=2y$.
"Por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil" → $y=2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l}300x+400y+800z=28000\\ x=2y\\ y=2z\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x+4y+8z=280\\ x=2y\\ y=2z\end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y+8z=280\\ x=2y\\ y=2z\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x+4\cdot 2z+8z=280\\ x=2\cdot 2z\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x+8z+8z=280\\ x=4z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z+8z+8z=280 \Rightarrow 28z=280\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{280}{28}=10} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\boxed{x=4\cdot 10=40}\\ \boxed{y=2\cdot 10=20}\end{array}\right.$$

Se vendieron 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles.

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:
a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)
b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

a) Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Kilos de fruta	Kilos de verduras	Recaudación
Nº de lotes A (x)	2x	3x	18x
Nº de lotes B (y)	3y	3y	20y
TOTAL	$2x+3y$	$3x+3y$	$18x+20y$

La función que deseamos maximizar es la recaudación $R(x,y)=18x+20y$ sometida a las restricciones siguientes.

"Se dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras" → $2x+3y\leq 1500;\ 3x+3y\leq 1755$.
"Ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B" → $x\geq 150;\ y\geq 180$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y\leq 1500\\3x+3y\leq 1755\\x\geq 150\\y\geq 180\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y\leq 1500\\x+y\leq 585\\x\geq 150\\y\geq 180\end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+3y=1500$

x	$y=\dfrac{1500-2x}{3}$
0	500
150	400
750	0

$x+y=585$

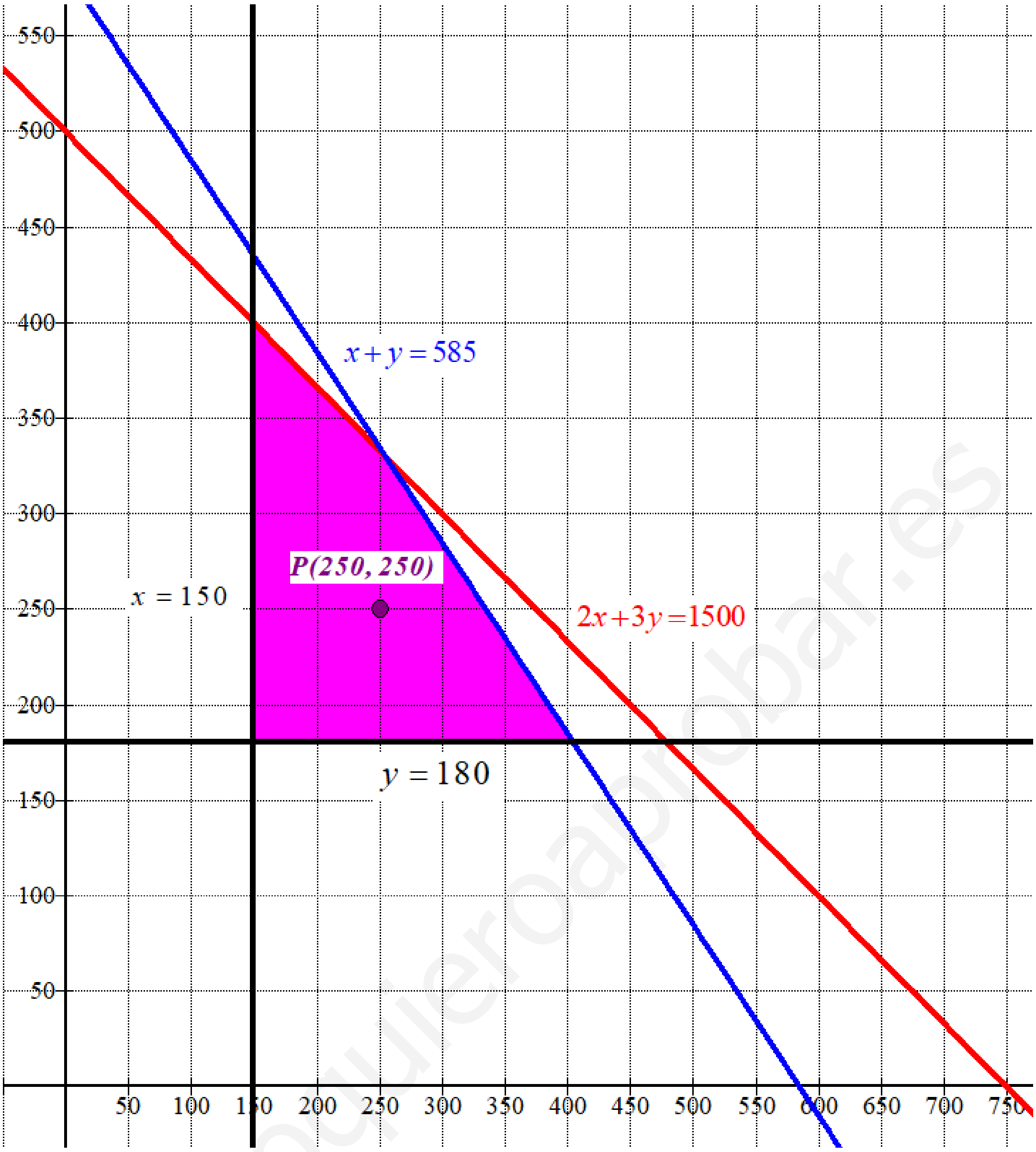
x	$y=585-x$
0	585
405	180
585	0

$x=150$

$x=150$	y
150	0
150	400

$y=180$

x	$y=180$
0	180
405	180

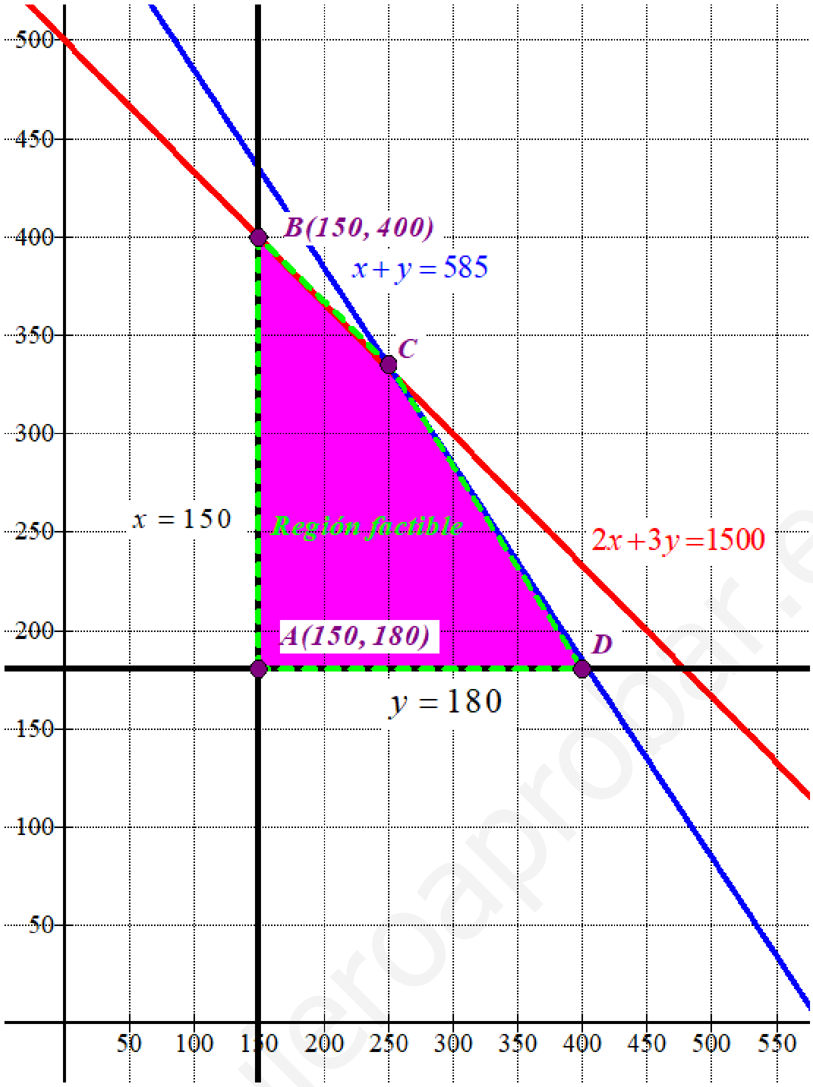


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\leq 1500 \\ x+y\leq 585 \\ x\geq 150 \\ y\geq 180 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, por encima de la recta horizontal y a la derecha de la recta vertical.

Comprobamos que el punto P(250, 250) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 250+3\cdot 250\leq 1500 \\ 250+250\leq 585 \\ 250\geq 150 \\ 250\geq 180 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas de los puntos C y D.

$$C \to \left.\begin{matrix} x+y=585 \\ 2x+3y=1500 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=585-x \\ 2x+3y=1500 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x+3(585-x)=1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+1755-3x=1500 \Rightarrow -x=-255 \Rightarrow x=255 \Rightarrow y=585-255=330 \Rightarrow C(255,330)$$

$$D \to \left.\begin{matrix} x+y=585 \\ y=180 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+180=585 \Rightarrow x=405 \Rightarrow D(405,180)$$

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(150, 180), B(150, 400), C(255, 330) y D(405, 180).

c) Valoramos la función recaudación $R(x,y)=18x+20y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(150, 180) → $R(150,180)=18\cdot150+20\cdot180=6300$
B(150, 400) → $R(150,400)=18\cdot150+20\cdot400=10700$
C(255, 330) → $R(255,330)=18\cdot255+20\cdot330=11190$ ¡Máximo!
D(405, 180) → $R(405,180)=18\cdot405+20\cdot180=10890$

La recaudación máxima es de 11190 € y se consigue en el vértice C(255, 330), que significa fabricar 255 lotes A y 330 lotes B.