Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/0 no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €… pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x? (3 pt)

b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (4 pt)

c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A? (3 pt)

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

P4.- Considera la función $f(x)=e^x-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$. (3 pt)

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p)=\begin{cases} 500, & para\ p=0, \\ 300-3p & para\ 0<p<100 \\ 0, & para\ p=100 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el dominio de g(p)? ¿Es esta función continua? (3 pt)

b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)

c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de “comprar A y no comprar B” es de un 6%, ¿son los sucesos “comprar A” y “comprar B” independientes? (5 pt)

b) Si los sucesos “comprar A” y “comprar B” fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de “no comprar A”; o la probabilidad de “no comprar A, sabiendo que se ha comprado B”? (5 pt)

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)

b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)

c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)

b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Modelo 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal N(0, 1)

SOLUCIONES

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €… pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

a) Llamamos *p* al número de pantalones vendidos y *c* al número de camisas vendidas.

Se han vendido un total de 100 unidades → $p+c=100$.
Hemos tenido unos ingresos totales de 5400 € → $60p+40c=5400$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} p+c=100 \\ 60p+40c=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p+c=100 \\ 3p+2c=270 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=100-c \\ 3p+2c=270 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(100-c)+2c=270 \Rightarrow 300-3c+2c=270 \Rightarrow -c=-30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=30} \Rightarrow \boxed{p=100-30=70}$$

Se han vendido 70 pantalones y 30 camisas.

b) Planteamos una nueva situación: 10 unidades más vendidas con unos ingresos de 1200 euros menos. Se deben haber vendido más camisas (más baratas) y menos pantalones. Planteamos el sistema con estos nuevos datos.

$$\left.\begin{array}{l} p+c=110 \\ 60p+40c=4200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p+c=110 \\ 3p+2c=210 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=110-c \\ 3p+2c=210 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(110-c)+2c=210 \Rightarrow 330-3c+2c=210 \Rightarrow -c=-120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=120} \Rightarrow \boxed{p=110-120=-10}$$

No es posible pues sale un número negativo de pantalones. Los datos son incorrectos.

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor *x* tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor *x*? (3 pt)

b) Para el valor *x* del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (4 pt)

c) ¿Existen algunos valores para *y*, *z* de manera que C sea la inversa de A? (3 pt)

a) Si B es la inversa de A se cumple que $AB=I$.
Planteamos esta igualdad y hallamos, si es posible, *x*.

$$AB=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-15&-6+6\\5x-40&-15+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-15&0\\5x-40&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x-15=1\rightarrow 2x=16\rightarrow \boxed{x=\frac{16}{2}=8}\\5x-40=0\rightarrow 5x=40\rightarrow \boxed{x=\frac{40}{5}=8}\end{cases}$$

El valor buscado es *x = 8*.

b) Para *x = 8* la matriz B es la inversa de A.

$$(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)=AB-AI+IB-I\cdot I+AB+AI-IB-I\cdot I=$$

$$=\left\{\begin{matrix}B\text{ es la inversa de }A\\AB=I\end{matrix}\right\}=\cancel{I}-\cancel{A}+B-\cancel{I}+\cancel{I}+\cancel{A}-B-\cancel{I}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

La expresión queda igual a la matriz nula $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

c) Hemos visto en el apartado a) que la matriz B es la inversa de A para *x = 8*.
La inversa de A es la matriz $B=\begin{pmatrix}8&-3\\-5&2\end{pmatrix}$.
Si C es la inversa de A debe cumplirse que $C=B$ con *x = 8*.

$$C=B\Rightarrow\begin{pmatrix}8&-3\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=8\\z=-3\\-5=7\\2=-1\end{cases},\ \text{¡Imposible!}$$

No existen valores de *y*, *z* de manera que C sea la inversa de A.

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

a) Llamamos x = número de aspiradoras que debe producir, y = número de baterías.
Hacemos una tabla.

	Horas de operarios	**Kg de materias primas**	**Beneficio**
Nº aspiradoras (x)	**5x**	**4x**	**100x**
Nº baterías (y)	**y**	**y**	**22y**
	$5x+y$	$4x+y$	$100x+22y$

La función a maximizar son los beneficios $B(x,y)=100x+22y$.

Las restricciones son:

"Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas" → $5x+y\le 110;\ 4x+y\le 100$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+y\le 110 \\ 4x+y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$5x+y=110$

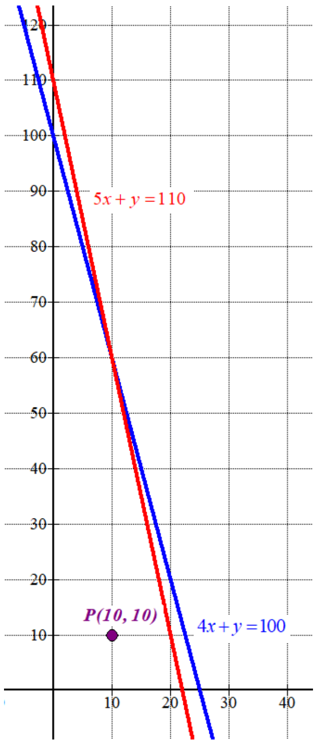
x	$y=110-5x$
0	110
22	0

$4x+y=100$

x	$y=100-4x$
0	100
25	0

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante

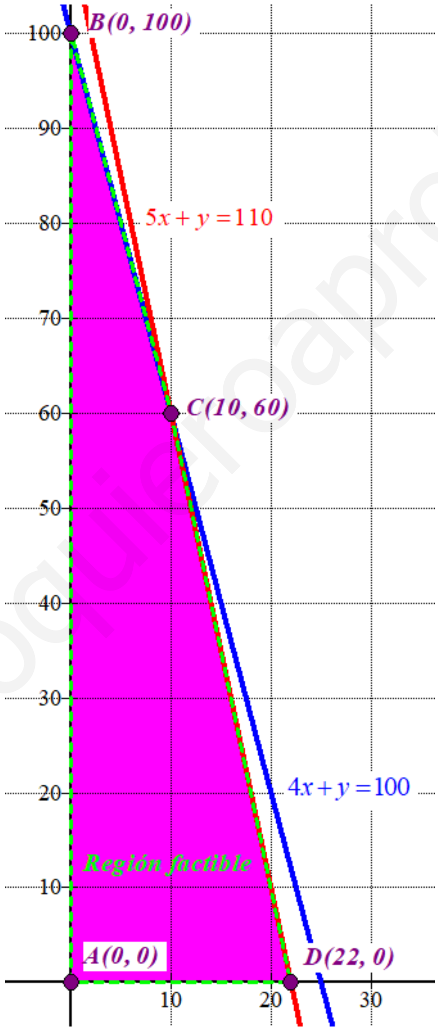


La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} 5x+y\leq 110 \\ 4x+y\leq 100 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50+10\leq 110 \\ 40+10\leq 100 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región es la indicada. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(0, 0), B(0, 100), C(10, 60) y D(22, 0).

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=100x+22y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 100) → $B(0,100)=100\cdot 0+22\cdot 100=2200$

C(10, 60) → $B(10,60)=100\cdot 10+22\cdot 60=2320$

D(22, 0) → $B(22,0)=100\cdot 22+22\cdot 0=2200$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo las restricciones es de 2320 € y se obtiene en el vértice C(10, 60), lo que significa producir 10 aspiradoras y 60 baterías.

b) Si el precio de la aspiradora es p la función beneficio es $B(x,y) = px + 22y$

Con esta nueva función obtenemos el beneficio en cada vértice:

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 100) → $B(0,100) = p\cdot 0 + 22\cdot 100 = 2200$

C(10, 60) → $B(10,60) = p\cdot 10 + 22\cdot 60 = 10p + 1320$

D(22, 0) → $B(22,0) = p\cdot 22 + 22\cdot 0 = 22p$

El valor máximo deseamos que se obtenga en el vértice B(0, 100) por lo que debe ser:

$$10p + 1320 < 2200 \Rightarrow 10p < 880 \Rightarrow p < 88$$

Con un precio de la aspiradora inferior a 88 € el valor máximo del beneficio es 2200 € que se consigue en el vértice B(0, 100) que supone producir solo 100 baterías.
En el vértice D se obtendría un beneficio inferior a 22 · 88 = 1936 €, menor de 2200 €.

P4.- Considera la función $f(x)=e^x-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)dx$. (3 pt)

a) El dominio de la función es $[0,+\infty)$.

En $x = 0$ la función vale $f(0)=e^0-e^{-0}=0$.

En $+\infty$ calculamos el límite de la función.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} e^x-\frac{1}{e^x}=e^{+\infty}-\frac{1}{e^{+\infty}}=+\infty-\frac{1}{\infty}=+\infty$$

b) Calculamos la expresión de la derivada primera y derivada segunda de la función.

$$f(x)=e^x-e^{-x}\Rightarrow f'(x)=e^x+e^{-x}\Rightarrow f''(x)=e^x-e^{-x}=f(x)$$

c) Calculamos primero la integral indefinida de *f(x)*.

$$\int f(x)dx=\int e^x-e^{-x}dx=e^x+e^{-x}+C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=\left[e^1+e^{-1}\right]-\left[e^0+e^{-0}\right]=e+\frac{1}{e}-2=\boxed{\frac{e^2-2e+1}{e}\simeq 1.086}$$

Hemos comprobado que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{e^2-2e+1}{e}\simeq 1.086$.

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p)=\begin{cases} 500, & para\ p=0, \\ 300-3p & para\ 0<p<100 \\ 0, & para\ p=100 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el dominio de g(p)? ¿Es esta función continua? (3 pt)

b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)

c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

a) El dominio de la función es $[0,100]$.

La función es continua en (0, 100), comprobamos si es continua en los extremos del intervalo.

¿En *p = 0* es continua?

- Existe $g(0)=500$.
- Existe $\lim_{p\to 0^+} g(p)=\lim_{p\to 0^+} 300-3p=300-3\cdot 0=300$
- ¿son iguales? $g(0)=500\neq 300=\lim_{p\to 0^+} g(p)$

La función no es continua en *p = 0.*

¿En *p = 100* es continua?

- Existe $g(100)=0$.
- Existe $\lim_{p\to 100^-} g(p)=\lim_{p\to 100^-} 300-3p=300-3\cdot 100=0$
- ¿son iguales? $g(100)=0=\lim_{p\to 100^-} g(p)$

La función es continua en *p = 100.*

La función es continua en $(0,100]$.

b) Averiguamos cuando la función vale 240.

$$g(p)=240\Rightarrow\begin{cases} 500=240\rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 300-3p=240\rightarrow 60=3p\rightarrow p=20\in(0,100) \\ 0=240\rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Cuando asisten 240 personas el precio de la entrada es de 20 €,

c) Obtenemos la expresión de los ingresos.

$$I(p)=g(p)\cdot p=\begin{cases} 500p=0, & para\ p=0, \\ (300-3p)p=300p-3p^2 & para\ 0<p<100 \\ 0\cdot p=0, & para\ p=100 \end{cases}$$

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$I(p) = 300p - 3p^2 \Rightarrow I'(p) = 300 - 6p$$

$$I'(p) = 0 \Rightarrow 300 - 6p = 0 \Rightarrow 300 = 6p \Rightarrow p = \frac{300}{6} = 50$$

Vemos el signo de la segunda derivada en el punto crítico *p = 50*.

$$I'(p) = 300 - 6p \Rightarrow I''(p) = -6 \Rightarrow I''(50) = -6 < 0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función ingresos tiene un máximo relativo que será máximo absoluto para un precio de la entrada de 50 €.

.

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.
a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (5 pt)
b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (5 pt)

a) Llamamos A al suceso "comprar A" y B a "comprar B".

Sabemos que $P(A)=0.07$, $P(B)=0.10$ y $P(A\cap\overline{B})=0.06$.

Como $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$ entonces tenemos que $0.07=P(A\cap B)+0.06$, por lo que $P(A\cap B)=0.01$.

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P(A)=0.07\\P(B)=0.10\end{array}\right\}\rightarrow P(A)P(B)=0.07\cdot 0.1=0.007\\P(A\cap B)=0.01\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.010\neq 0.007=P(A)P(B)$$

Los sucesos no son independientes.

b) Nos piden comparar los valores de $P(\overline{A})$ y de $P(\overline{A}/B)$.

Si los sucesos A y B son independientes se cumple $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.007$.

Calculamos las probabilidades de los dos sucesos planteados y comparamos sus valores.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.07=0.93$$

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1-0.007}{0.1}=0.93$$

Son igual de probables los dos sucesos.

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)

b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)

c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

a) El número total de hogares en las islas es:

118 000 + 124 000 + 93 000 + 119 000 = 454 000.

Como hay 1 210 000 habitantes en la isla tenemos que en los hogares con 4 o más convivientes viven $1210000-\left(1\cdot 118000+2\cdot 124000+3\cdot 93000\right)=565000$ personas.

El número medio de convivientes en hogares con 4 o más convivientes es $\frac{565}{119}\simeq 4.748$.

La media de convivientes en los hogares de las islas será:

$$\frac{1\cdot 118000+2\cdot 124000+3\cdot 93000+\frac{565}{119}\cdot 119000}{454000}\simeq 2.665$$

El número medio de convivientes por hogar es de 2.665 personas.

b) Hemos visto en el apartado anterior que en hogares de 4 o más convivientes viven 565 000 personas. La media de convivientes en estos hogares es de $\frac{565}{119}\simeq 4.748$.

c) Hay 118 000 personas que viven en hogares unipersonales de un total de 1 210 000 habitantes de las islas. Aplicamos la regla de Laplace.

$$\Pr obabilidad=\frac{118000}{1210000}=\frac{59}{605}\simeq 0.0975$$

La probabilidad de que al elegir un habitante al azar viva en un hogar unipersonal es de 0.0975.

d) El suceso contrario a “alguno de los dos vive en un hogar unipersonal” es el suceso “ninguno vive en un hogar unipersonal”. Calculamos la probabilidad usando el suceso contrario cuya probabilidad es más sencilla de calcular. La probabilidad de que una persona no viva en hogar unipersonal es de $1-\frac{59}{605}=\frac{546}{605}$.

$$P\left(\text{Alguno de los dos viva en un hogar unipersonal}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\text{Ninguno vive en hogar unipersonal}\right) = \left\{\text{Elecciones independientes}\right\} =$$

$$= 1 - P\left(\text{No vive en hogar unipersonal}\right) P\left(\text{No vive en hogar unipersonal}\right) =$$

$$= 1 - \frac{546}{605} \cdot \frac{546}{605} \simeq 0.1855$$

La probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal es de 0.1855.

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)

b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

X = La vida útil de un componente (en horas). X = N(μ , 150)

a) El tamaño de la muestra es n = 50. La media es $\bar{x} = 507$ horas.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 75 %

$$1-\alpha = 0.75 \to \alpha = 0.25 \to \frac{\alpha}{2} = 0.125 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.875 \to \left\{ \begin{matrix} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \end{matrix} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.15$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.15 \cdot \frac{150}{\sqrt{50}} \simeq 24.4$$

El intervalo de confianza para la vida útil de los componentes es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(507 - 24.4,\ 507 + 24.4\right) = \left(482.6,\ 531.4\right)$$

b) X = La vida útil de un componente (en horas). X = N(500, 150)

Tenemos que averiguar h tal que $P\left(X \leq h\right) = 0.10$.

$$P\left(X \leq h\right) = 0.10 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{h-500}{150}\right) = 0.1 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Probabilidad} < 0.5 \\ \dfrac{h-500}{150} < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{h-500}{150}\right) = 0.1 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{h-500}{150}\right) = 1-0.1 = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Miramos\,en\,la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\frac{h-500}{150} = 1.28 \Rightarrow -h+500 = 192 \Rightarrow \boxed{h = 308}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	[illegible]	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
$\boxed{1.2}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.8997}$	0.9015

Por debajo de 308 horas de vida útil están el 10 % de los componentes de menos vida útil.