Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Modelo 2

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/0 no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos (2 pt)

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

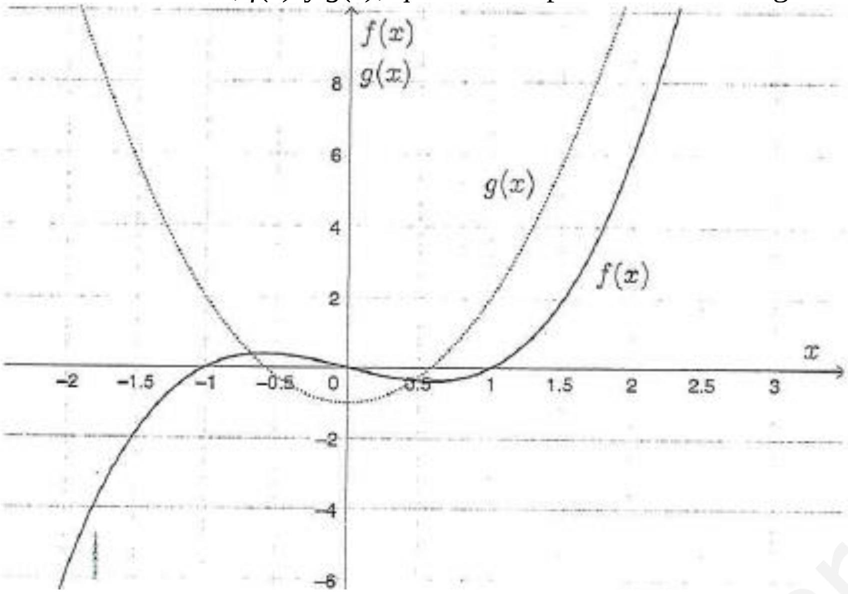
P3.- Considera la función $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Haz un gráfico esquemático de la función *f(x)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a *f(x)* en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

www.yoquieroaprobar.es

P4.- Considera dos funciones, *f(x)* y *g(x)*, que están representadas en la gráfica siguiente:



a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es *f(x)* y cuál es *g(x)*. Justifica la respuesta. (3 pt)

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x)=g'(x)$? ¿o bien es $g(x)=f'(x)$? (3 pt)

c) Calcula el área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x) = 0*. (4 pt)

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, *p* (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, *t* (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}, \text{ para } t\geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2},\ \int p(t)\,dt=20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ para cualquier constante } C\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)
b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)
c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)
c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

www.yoquieroaprobar.es

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.
Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula P(A) y P(B) (5 pt)
b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)
b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

www.yoquieroaprobar.es

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos (2 pt)

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

a) Calculamos el material necesario.

El armario A → 10 · 5 = 50 kg de metal

El armario B → 10 · 10 = 100 kg de metal y 10 · 10 = 100 kg de madera

El armario C → 10 · 15 = 150 kg de metal.

Se necesitan 100 kg de madera y 50 + 100 + 150 = 300 kg de metal.

b) Calculamos cuanto haría falta para fabricar "x" armarios del modelo A, "y" armarios B y "z" armarios C.

El armario A → 5x kilos de metal y 5x horas.

El armario B → 10y kg de metal, 10y kg de madera y 10y horas

El armario C → 15z kg de metal y 5z horas

Como disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios tendremos un sistema con las ecuaciones siguientes.

$$\left.\begin{array}{l} metal \to 5x+10y+15z=1550 \\ madera \to 10y=600 \\ horas \to 5x+10y+5z=1050 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+10y+15z=1550 \\ 10y=600 \to \boxed{y=\frac{600}{10}=60} \\ 5x+10y+5z=1050 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+600+15z=1550 \\ 5x+600+5z=1050 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+15z=950 \\ 5x+5z=450 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x+3z=190 \\ x+z=90 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x+3z=190 \\ x=90-z \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow 90-z+3z=190 \Rightarrow 2z=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{100}{2}=50} \Rightarrow \boxed{x=90-50=40}$$

Tenemos que fabricar 40 armarios modelo A, 60 del modelo B y 50 del modelo C para utilizar completamente todos los recursos.

c) El nuevo sistema de ecuaciones no tendría ecuación de la madera. Como solo podemos producir 125 unidades en total → $x+y+z=125$. Planteamos el nuevo sistema y lo resolvemos.

$$\begin{matrix} metal \to 5x+10y+15z=1550 \\ horas \to 5x+10y+5z=1050 \\ almacén \to x+y+z=125 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x+2y+3z=310 \\ x+2y+z=210 \\ x+y+z=125 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x+2y+3z=310 \\ x=210-2y-z \\ x+y+z=125 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 210-2y-z+2y+3z=310 \\ 210-2y-z+y+z=125 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} 2z=100 \\ -y=-85 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{z=\frac{100}{2}=50} \\ \boxed{y=85} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=210-2\cdot 85-50=-10}$$

Obtenemos una solución imposible pues el número de armarios del modelo A sale un resultado negativo. No es posible utilizar completamente el metal, las horas y el almacén.

www.yoquieroaprobar.es

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.
El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.
a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)
b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

a) Llamamos x = miles de euros en acciones, y = miles de euros en bonos.

La función a maximizar es el interés anual:

$I(x,y)=0.06x+0.02y$ con el resultado en miles de euros.

$I(x,y)=60x+20y$ con el resultado en euros.

Las restricciones son:

"Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 €" → $x+y\leq 10$
"El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos" → $x\geq y$
"El cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones" → $4\leq x\leq 6;\ 2\leq y\leq 8$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x\geq y \\ 4\leq x\leq 6 \\ 2\leq y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
10	0

$y=x$

x	$y=x$
0	0
10	10

$x=4$

$x=4$	y
4	0
4	10

$x=6$

$x=6$	y
6	0
6	10

$y=2$

x	$y=2$
0	2
10	2

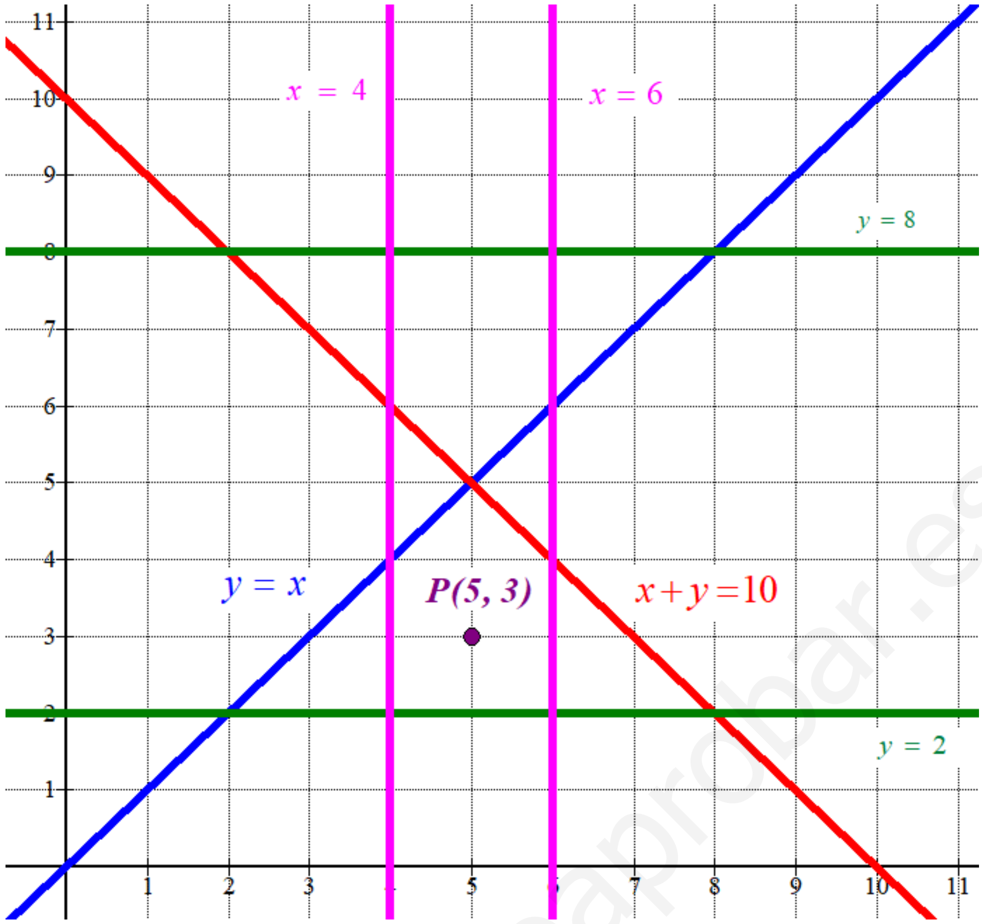
$y=8$

x	$y=8$
0	8
10	8

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

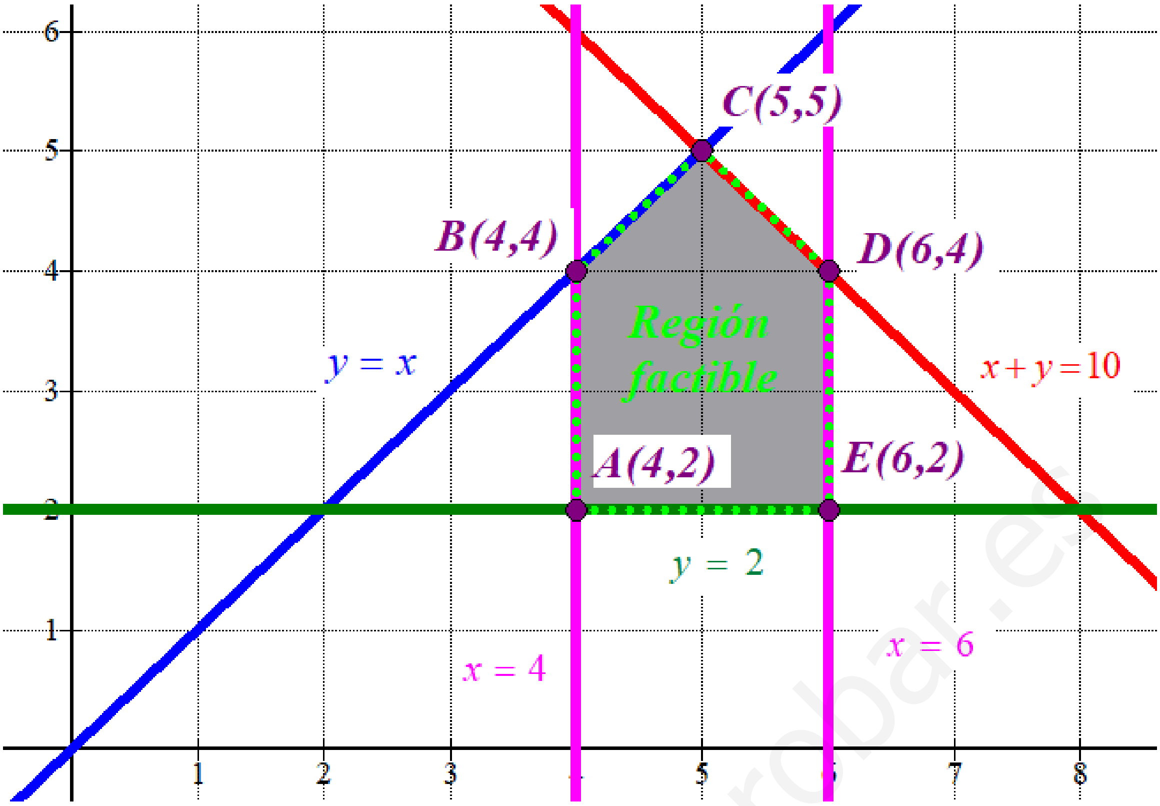
www.yoquieroaprobar.es



La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x\geq y \\ 4\leq x\leq 6 \\ 2\leq y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul, entre las rectas horizontales verdes y entre las rectas verticales rosas.
Comprobamos que el punto P(5, 3) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+3\leq 10 \\ 5\geq 3 \\ 4\leq 5\leq 6 \\ 2\leq 3\leq 8 \\ 5\geq 0;\ 3\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región es la indicada. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(4, 2), B(4, 4), C(5, 5), D(6, 4) y E(6, 2).

b) Valoramos la función interés anual $I(x,y)=60x+20y$ en cada uno de los vértices.

A(4, 2) → $I(4,2)=60\cdot 4+20\cdot 2=280$

B(4, 4) → $I(4,4)=60\cdot 4+20\cdot 4=320$

C(5, 5) → $I(5,5)=60\cdot 5+20\cdot 5=400$

D(6, 4) → $I(6,4)=60\cdot 6+20\cdot 4=440$ ¡Máximo!

E(6, 2) → $I(6,2)=60\cdot 6+20\cdot 2=400$

El interés anual máximo es de 440 € y se consigue en el vértice D(6, 4). Significa que hay que invertir 6000 € en acciones y 4000 € en bonos para conseguir un interés anual máximo de 440 € anuales.

www.yoquieroaprobar.es

P3.- Considera la función $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Haz un gráfico esquemático de la función *f(x)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta *x = 30*. (7 pt)
b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a *f(x)* en el punto *x = 25* e indica su pendiente. (3 pt)

a) La función existe para cualquier número real positivo o cero.
Dominio = $[0,+\infty)$
Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

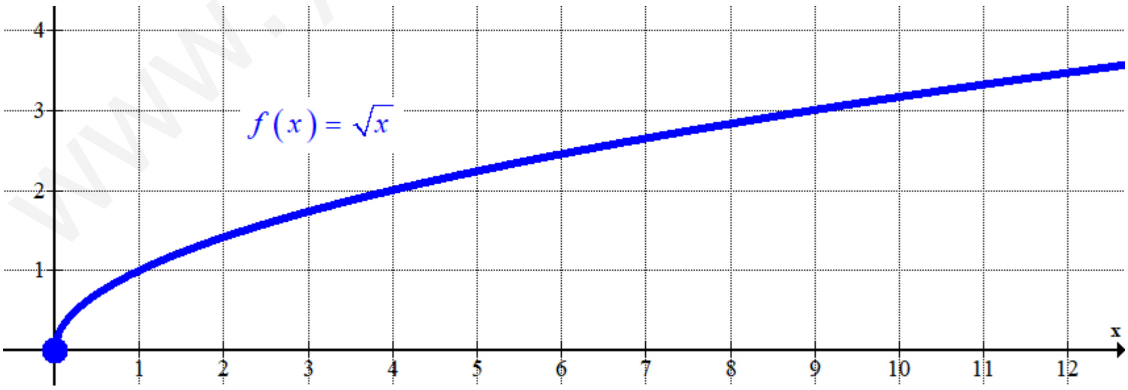
Esta expresión de la derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre crece y no tiene máximos ni mínimos locales.
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición.

$$f(0)=\sqrt{0}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Hacemos una tabla y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4



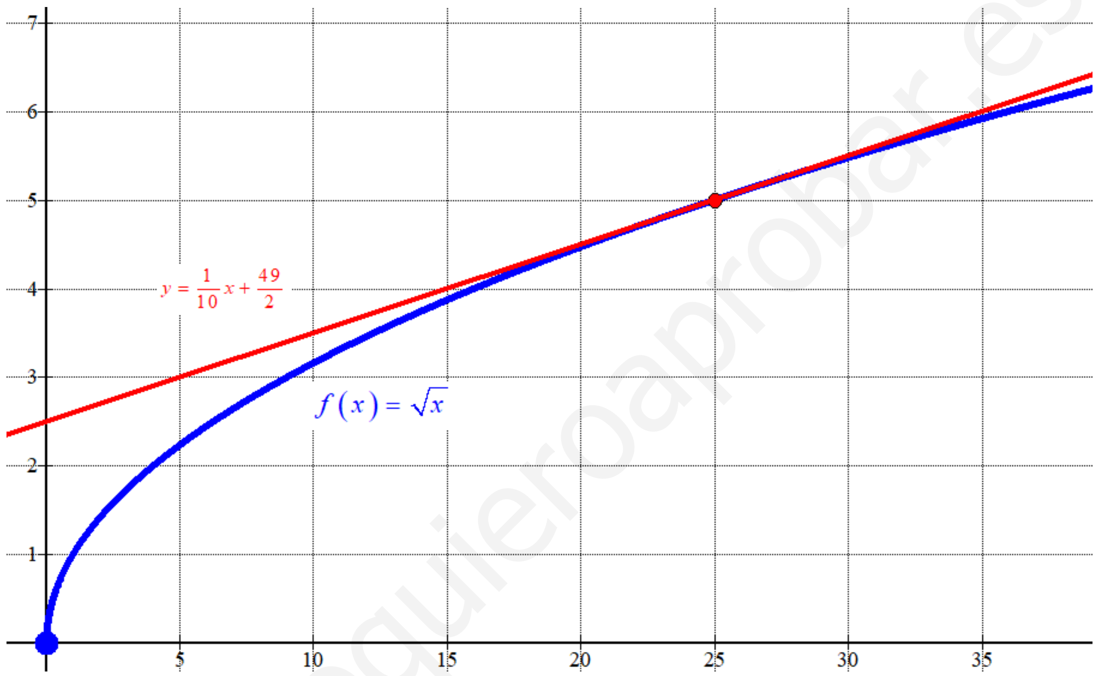
b) La recta tangente a *f(x)* en el punto *x = 25* tiene ecuación $y-f(25)=f'(25)(x-25)$.

www.yoquieroaprobar.es

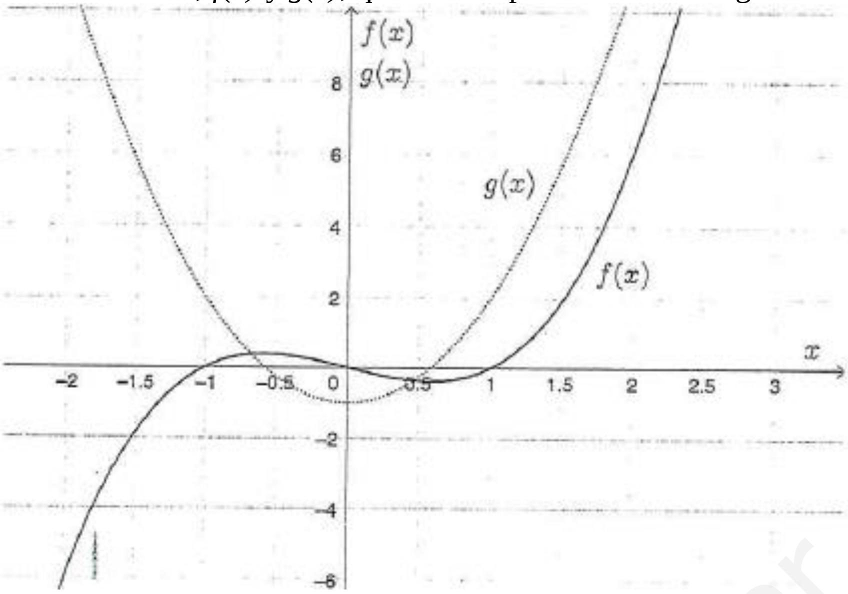
$$\left.\begin{array}{l} f(25)=\sqrt{25}=5 \\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(25)=\dfrac{1}{2\sqrt{25}}=\dfrac{1}{10} \\ y-f(25)=f'(25)(x-25) \end{array}\right\} \Rightarrow y-5=\frac{1}{10}(x-25) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{10}x+5-2.5 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{10}x+2.5}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=\dfrac{1}{10}x+2.5$. Esta recta tiene pendiente = 1/10.



P4.- Considera dos funciones, *f(x)* y *g(x)*, que están representadas en la gráfica siguiente:



a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es *f(x)* y cuál es *g(x)*. Justifica la respuesta. (3 pt)

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x)=g'(x)$? ¿o bien es $g(x)=f'(x)$? (3 pt)

c) Calcula el área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x) = 0.* (4 pt)

a) La gráfica de *f(x)* pasa por los puntos (–1, 0), (0, 0) y (1, 0). De las dos funciones la que pasa por esos puntos es $x(x-1)(x+1)$ → $f(x)=x(x-1)(x+1)$

La otra función es *g(x)* → $g(x)=\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$

b) La función *f(x)* es una función polinómica de grado 3 y la función *g(x)* es otra función polinómica de grado 2, como al derivar una función polinómica su derivada disminuye un grado debe ser $g(x)=f'(x)$.

Derivamos f(x) para comprobar que es cierta la igualdad.

$$f(x)=x(x-1)(x+1)=x\left(x^2-1\right)=x^3-x \Rightarrow f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow$$

$$f'(x)=3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3g(x)$$

Se cumple que $f'(x)=3g(x)$.

No es cierta la igualdad.

No se cumple ni $f(x)=g'(x)$, ni $g(x)=f'(x)$.

c) Averiguamos cuando *g(x) = 0.*

www.yoquieroaprobar.es

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right) \\ g(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ de *g(x)*.

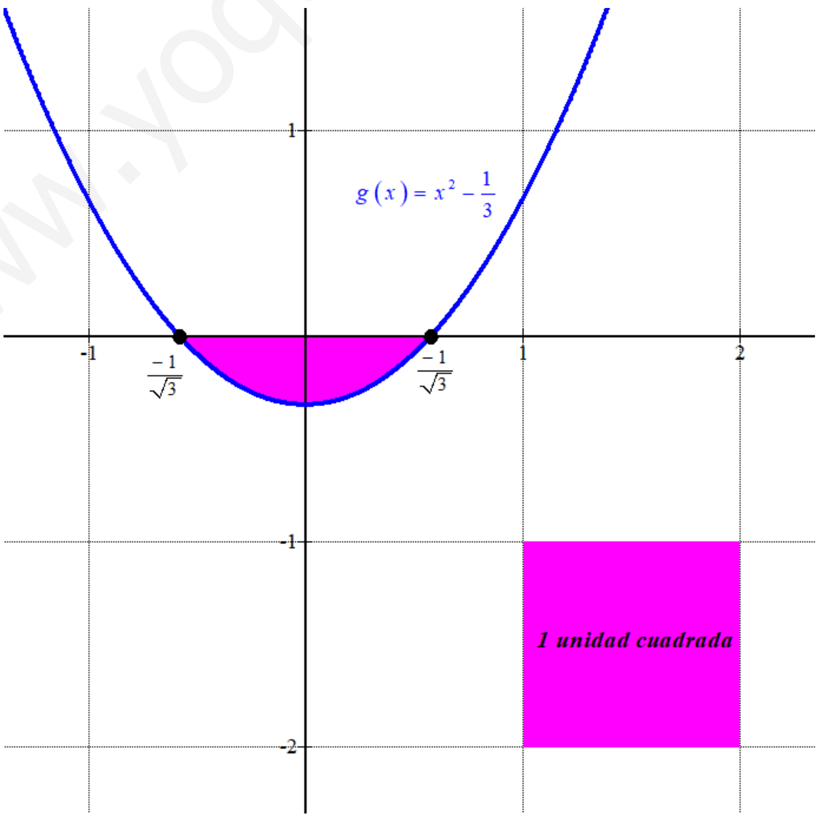
$$g(x)=\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)=x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=x^2-\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} g(x)\,dx=\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} x^2-\frac{1}{3}dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}x\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}=$$

$$=\left[\frac{\left(1/\sqrt{3}\right)^3}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]-\left[\frac{\left(-1/\sqrt{3}\right)^3}{3}-\frac{1}{3}\frac{-1}{\sqrt{3}}\right]=$$

$$=\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{9\sqrt{3}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{-4\sqrt{3}}{27}\simeq -0.25$$

El área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x) = 0* tiene un valor aproximado de 0.25 unidades cuadradas.
Representamos la región para comprobar la bondad de la solución.



www.yoquieroaprobar.es

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, *p* (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, *t* (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}\text{, para } t\geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p´(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2}\text{, } \int p(t)\,dt=20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C\text{, para cualquier constante } C\in\mathbb{R}\text{.}$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para *t = 0*)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)
b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)
c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

a) Al inicio del año 2000 (es decir, para *t = 0*) la población es *p(0)*.

$$p(0)=\frac{4}{1+3\cdot e^{0}}=1$$

La población al inicio del año 2000 es de 1 millón de habitantes.

¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes?

$$2=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}\Rightarrow 1=\frac{2}{1+3\cdot e^{-0,2t}}\Rightarrow 1+3\cdot e^{-0,2t}=2\Rightarrow 3\cdot e^{-0,2t}=1\Rightarrow e^{-0,2t}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{-0,2t}=\ln\frac{1}{3}\Rightarrow -0,2t=\ln 1-\ln 3\Rightarrow -0,2t=-\ln 3\Rightarrow \boxed{t=\frac{\ln 3}{0,2}\simeq 5.49}$$

Se tuvo 2 millones de habitantes durante el año 2005, pue se alcanzan los 2 millones durante el trascurso de ese año (entre *t = 5* y *t = 6*).

b) Utilizamos la derivada para averiguar cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{l} p´(t)=\dfrac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2} \\ p´(t)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2}=0\Rightarrow 2.4\cdot e^{-0.2t}=0\Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La derivada no se anula y es siempre positiva.

$$\left.\begin{array}{l} 2.4\cdot e^{-0.2t}>0 \\ \left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2>0 \end{array}\right\}\Rightarrow p´(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2}>0$$

La función siempre crece. Y nunca disminuye.

c) Calculamos el límite de la población *p(t)* cuando los años tienden a crecer.

www.yoquieroaprobar.es

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}} = \frac{4}{1+3\cdot e^{-\infty}} = \frac{4}{1+0} = 4$$

A largo plazo la población tiende a ser de 4 millones de habitantes.

Calculamos el límite de la derivada de la población $p´(t)$ cuando los años tienden a crecer.

$$\lim_{t\to+\infty} p´(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2} = \frac{2.4\cdot e^{-\infty}}{\left(1+3\cdot e^{-\infty}\right)^2} = \frac{4\cdot 0}{(1+0)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

El ritmo de crecimiento de la población tiende a ser nulo. Tiende a mantenerse estable.

www.yoquieroaprobar.es

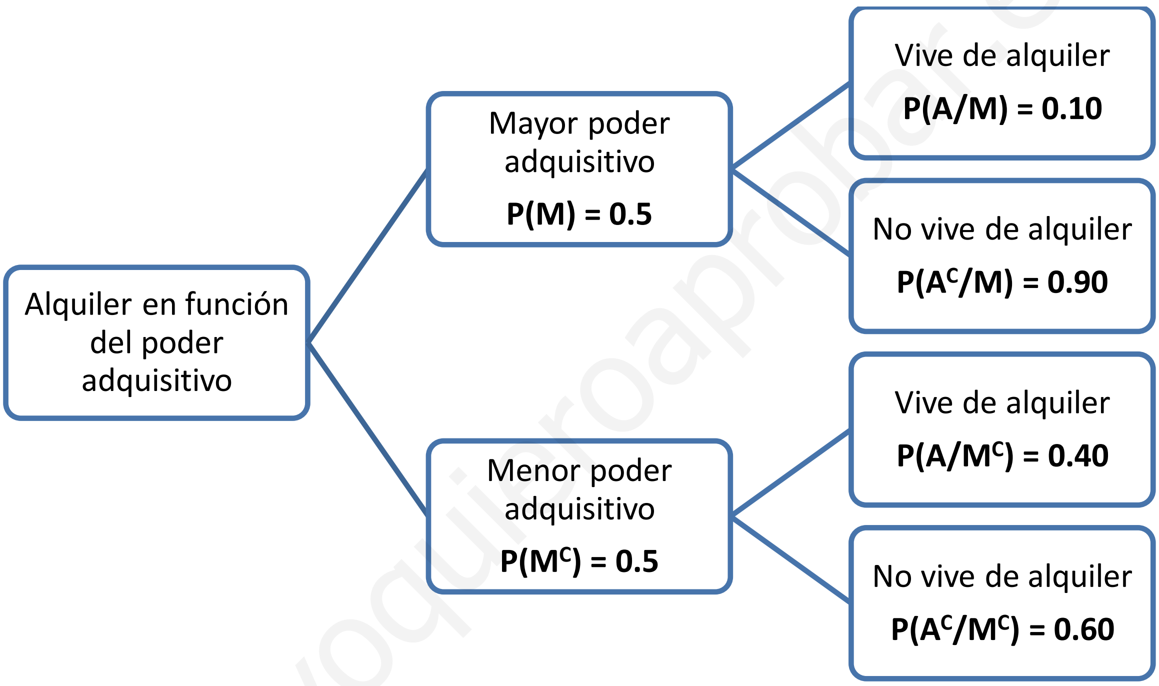
P6.- En una población,
- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

Llamamos M a “el habitante tiene mayor poder adquisitivo” y A a “vivir de alquiler”. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(M)P(A/M) + P(M^C)P(A/M^C) = 0.5\cdot 0.1 + 0.5\cdot 0.4 = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler es de 0.25.

b) Si se eligen de forma independiente la probabilidad pedida es el producto de las probabilidades de que cada uno de ellos viva de alquiler.

$$P(A1\cap A2\cap A3) = P(A1)\cdot P(A2)\cdot P(A3) = 0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = \boxed{\frac{1}{64} = 0.015625}$$

La probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler es de $\frac{1}{64}$.

www.yoquieroaprobar.es

c) La probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler es el suceso contrario de que ninguno viva de alquiler. Como es más fácil el cálculo de la probabilidad del suceso contrario lo calculamos primero.

$$P\left(\overline{A1}\cap\overline{A2}\cap\overline{A3}\right)=P\left(\overline{A1}\right)\cdot P\left(\overline{A2}\right)\cdot P\left(\overline{A3}\right)=(1-0.25)\cdot(1-0.25)\cdot(1-0.25)=0.75^3=\boxed{\frac{27}{64}}$$

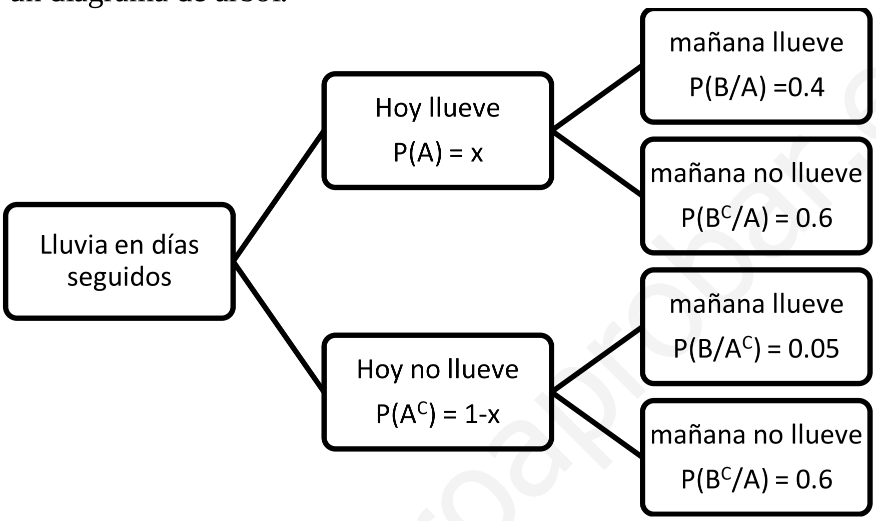
La probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler vale $1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}=0.578125$.

www.yoquieroaprobar.es

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.
Considera los sucesos siguientes:
- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula P(A) y P(B) (5 pt)
b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

a) La probabilidad de A y la de B es la misma por lo dicho al principio del ejercicio. Realizamos un diagrama de árbol.



La probabilidad de que mañana llueva según el diagrama de árbol vale:

$$P(B)=P(A)P(B/A)+P(A^C)P(B/A^C)=$$

$$=x\cdot 0.4+(1-x)\cdot 0.05=0.4x+0.05-0.05x=0.05+0.35x$$

Como debe ser $P(A)=P(B)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(B)=0.05+0.35x \\ P(A)=x \\ P(A)=P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow x=0.05+0.35x \Rightarrow 0.65x=0.05 \Rightarrow \boxed{x=\frac{0.05}{0.65}=\frac{1}{13}\simeq 0.0769}$$

Hemos visto que $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{13}$.

b) La probabilidad de que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy nos la da el enunciado del ejercicio y vale $P(B/A)=0.4$.

Calculamos $P(A/B)$.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}=\{P(A)=P(B)\}=P(B/A)$$

Los dos sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

www.yoquieroaprobar.es

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)

b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

X = El número de años que vivirá una persona nacida en el 2020.
X = N(**μ**, 10)

a) Reducimos la situación a los hombres. Sabemos la media es de 79.6 años.
X = N(79.6, 10)

Nos piden calcular $P(X > 60)$.

$$P(X > 60) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{60-79.6}{10} \right) = P(Z > -1.96) =$$

$$= P(Z < 1.96) = \left\{ \begin{array}{l} Miramos\,en\,la \\ tabla\; N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.975}$$

	0	1	2	3	4	5	6	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5[illegible]39	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5[illegible]36	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6[illegible]26	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6[illegible]06	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6[illegible]72	0.68
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7[illegible]23	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7[illegible]54	0.74
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7[illegible]64	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8[illegible]51	0.80
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8[illegible]15	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8[illegible]54	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8[illegible]70	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8[illegible]62	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9[illegible]31	0.91
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9[illegible]79	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9[illegible]06	0.94
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9[illegible]15	0.95
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9[illegible]08	0.96
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.96
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	[illegible]	0.98
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.98

La probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años es de 0.975.

También nos piden calcular $P(60 \leq X \leq 70)$.

$$P(60 \leq X \leq 70) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{60-79.6}{10} \leq Z \leq \frac{70-79.6}{10} \right) =$$

$$= P(-1.96 \leq Z \leq -0.96) = P(Z \leq -0.96) - P(Z \leq -1.96) =$$

$$= P(Z \geq 0.96) - P(Z \geq 1.96) = 1 - P(Z \leq 0.96) - (1 - P(Z \leq 1.96)) =$$

$$= P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq 0.96) = \left\{ \begin{matrix} Miramos\, en\, la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix} \right\} = 0.975 - 0.8315 = \boxed{0.1435}$$

	0	1	2	3	4	5	6	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8
0.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8315	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8

La probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva entre 60 y 70 años es de 0.1435.

b) Calculamos las dos probabilidades y las comparamos.
X = El número de años que vivirá un hombre nacido en el 2020.
X = N(79.6, 10)

$$P(X > 89.6) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix} \right\} = P\left(Z > \frac{89.6 - 79.6}{10} \right) = P(Z > 1)$$

Y = El número de años que vivirá una mujer nacida en el 2020.
Y = N(83.6, 10)

$$P(Y > 93.6) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma} \end{matrix} \right\} = P\left(Z > \frac{93.6 - 83.6}{10} \right) = P(Z > 1)$$

Como observamos la probabilidad es la misma: $P(X > 89.6) = P(Y > 93.6) = P(Z > 1)$.
Que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años es igual de probable que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años.

www.yoquieroaprobar.es