Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2023-2024

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN
El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos**. **El estudiante ha de elegir 5 problemas.**
En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.
Observación importante: Se permitirá una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X-2I=B^t-A\cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A\cdot B^t+3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, t en meses, según la función:

$$C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4\\ Bt & 4\le t\le 12\end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función *C(t)* es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal, *P(x)* en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x)=2x^3-21x^2+60x+10 \qquad 0\le x\le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**

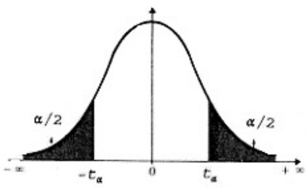
b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

PROBLEMA 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X-2I=B^t-A\cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3X-2I=B^t-A\cdot X \Rightarrow 3X+A\cdot X=B^t+2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3I+A)X=B^t+2I \Rightarrow X=(3I+A)^{-1}(B^t+2I)$$

Calculamos la inversa de la matriz $(3I+A)$.

$$3I+A=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|3I+A|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(3I+A)^{-1}=\frac{Adj\left((3I+A)^t\right)}{|3I+A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X=(3I+A)^{-1}(B^t+2I)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A\cdot B^t+3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

a) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t+3C$.

$$A\cdot B^t+3C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1+2\\ -2x & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3x & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ x & -1\end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left|A\cdot B^t+3C\right|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ x & -1\end{vmatrix}=-2-x$$

Vemos cuando se anula el determinante.

$$\left|A\cdot B^t+3C\right|=0\Rightarrow -2-x=0\Rightarrow \boxed{x=-2}$$

La matriz $A\cdot B^t+3C$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de –2.

b) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t$ para $x=1$.

$$x=1\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

Determinamos su inversa.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$$

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/6\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

La inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$ es la matriz $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/6\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

Llamamos "x" al tiempo de lavado, "y" al tiempo de aclarado y "z" al tiempo de centrifugado.

"El programa completo es de 90 minutos" → $x+y+z=90$.
"El tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado" → $y=2z$
"El tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado" → $y+z=\frac{x}{2}$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ y=2z \\ y+z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+z=90 \\ 2z+z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=90 \\ 3z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{x}{2}=90 \Rightarrow 2x+x=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=180 \Rightarrow \boxed{x=\frac{180}{3}=60} \Rightarrow 3z=\frac{60}{2} \Rightarrow 3z=30 \Rightarrow \boxed{z=\frac{30}{3}=10} \Rightarrow \boxed{y=20}$$

El tiempo de lavado es de 60 minutos, 20 minutos de aclarado y 10 de centrifugado.

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

Llamamos "x" al número de litros de aceite de oliva virgen extra e "y" al número de litros de orujo.

"El virgen extra se vende a 10 euros el litro y el de orujo cada litro se vende a 7 euros" → Los ingresos son $I(x,y)=10x+7y$.

Las restricciones son:

"No puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos)" → $x+y\leq 3000$.

"No puede producir más de 2.000 litros de aceite de orujo" → $y\leq 2000$

"El aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo" → $x\leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 3000 \\ y\leq 2000 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=3000$

x	$y=3000-x$
0	3000
1000	2000

$y=2000$

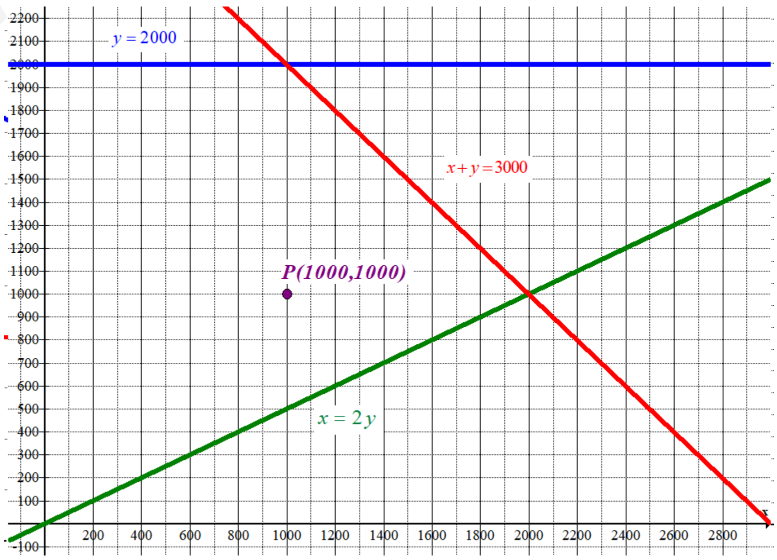
x	$y=2000$
0	2000
1000	2000

$x=2y$

x	$y=x/2$
0	0
200	100

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

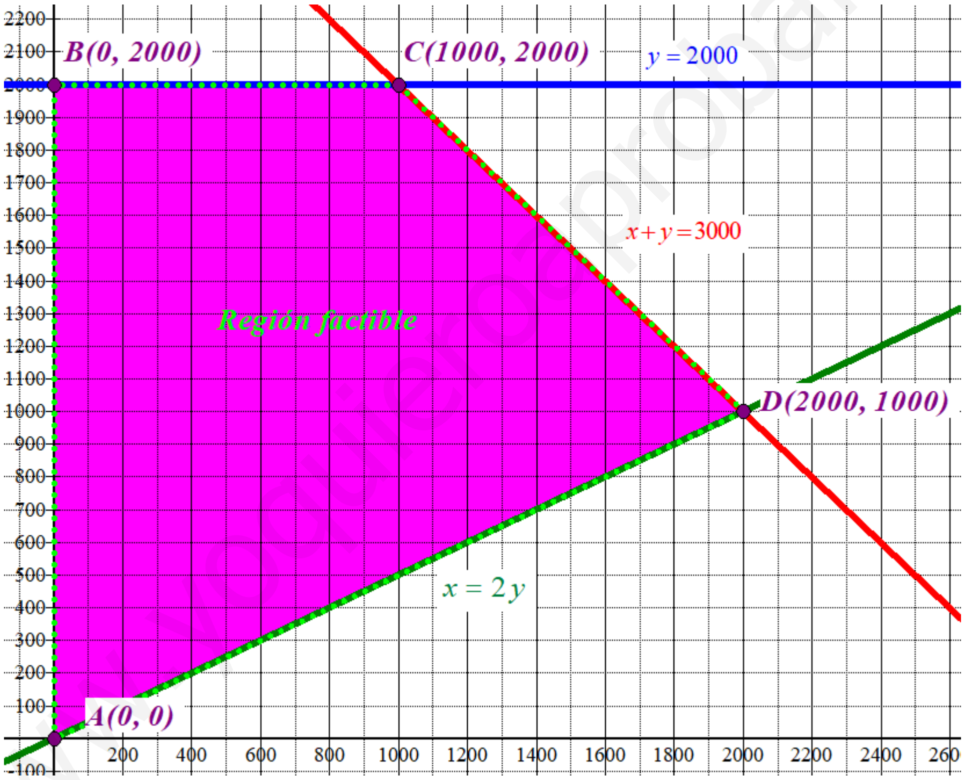


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 3000 \\ y\leq 2000 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto P(1000, 1000) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1000+1000\leq 3000 \\ 1000\leq 2000 \\ 1000\leq 2000 \\ 1000\geq 0;\ 1000\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Ingresos $I(x,y)=10x+7y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 2000) → $I(0,2000)=10\cdot 0+7\cdot 2000=14000$

C(1000, 2000) → $I(1000,2000)=10\cdot 1000+7\cdot 2000=24000$

D(2000, 1000) → $I(2000,1000)=10\cdot 2000+7\cdot 1000=27000$ ¡Máximo!

El valor máximo es 27000 y se obtiene en el vértice D(2000, 1000).

Los ingresos máximos se obtienen elaborando 2000 litros de aceite de oliva virgen y 1000 litros de aceite de orujo, siendo 27 000 € los ingresos máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)
El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte *C(t)*, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, *t* en meses, según la función:

$$C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4 \\ Bt & 4\le t\le 12 \end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función *C(t)* es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

La función es continua en *t = 4*, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 4^-} C(t)=\lim_{t\to 4^-} t^2-3Bt+2A=4^2-3B\cdot 4+2A=16-12B+2A \\ \lim_{t\to 4^+} C(t)=\lim_{t\to 4^+} Bt=4B \\ \lim_{t\to 4^-} C(t)=\lim_{t\to 4^+} C(t) \end{array}\right\} \Rightarrow 16-12B+2A=4B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16-16B+2A=0\Rightarrow 8-8B+A=0\Rightarrow \boxed{A-8B=-8}$$

El consumo en el mes 3 es de 7 mil litros por lo que C(3) = 7.

$$\left.\begin{array}{r} C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4 \\ Bt & 4\le t\le 12 \end{cases} \\ C(3)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow 7=3^2-3B\cdot 3+2A\Rightarrow \boxed{-2=-9B+2A}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} A-8B=-8 \\ 2A-9B=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=-8+8B \\ 2A-9B=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-8+8B)-9B=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16+16B-9B=-2\Rightarrow 7B=14\Rightarrow \boxed{B=\frac{14}{7}=2}\Rightarrow \boxed{A=-8+8\cdot 2=8}$$

Los valores buscados son *A = 8* y *B = 2*.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
La producción de un árbol frutal, *P(x)* en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, *x* en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \qquad 0 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:
a) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones. **(1.5 puntos)**
b) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego. **(0.5 puntos)**

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \\ P'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{7+3}{2} = \boxed{5 = x} \\ \dfrac{7-3}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos: $x = 2$ y $x = 5$.
Sustituimos estos valores en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo son.

$$P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \Rightarrow P''(x) = 12x - 42 \Rightarrow \begin{cases} P''(2) = 12 \cdot 2 - 42 = -18 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ P''(5) = 12 \cdot 5 - 42 = 18 > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

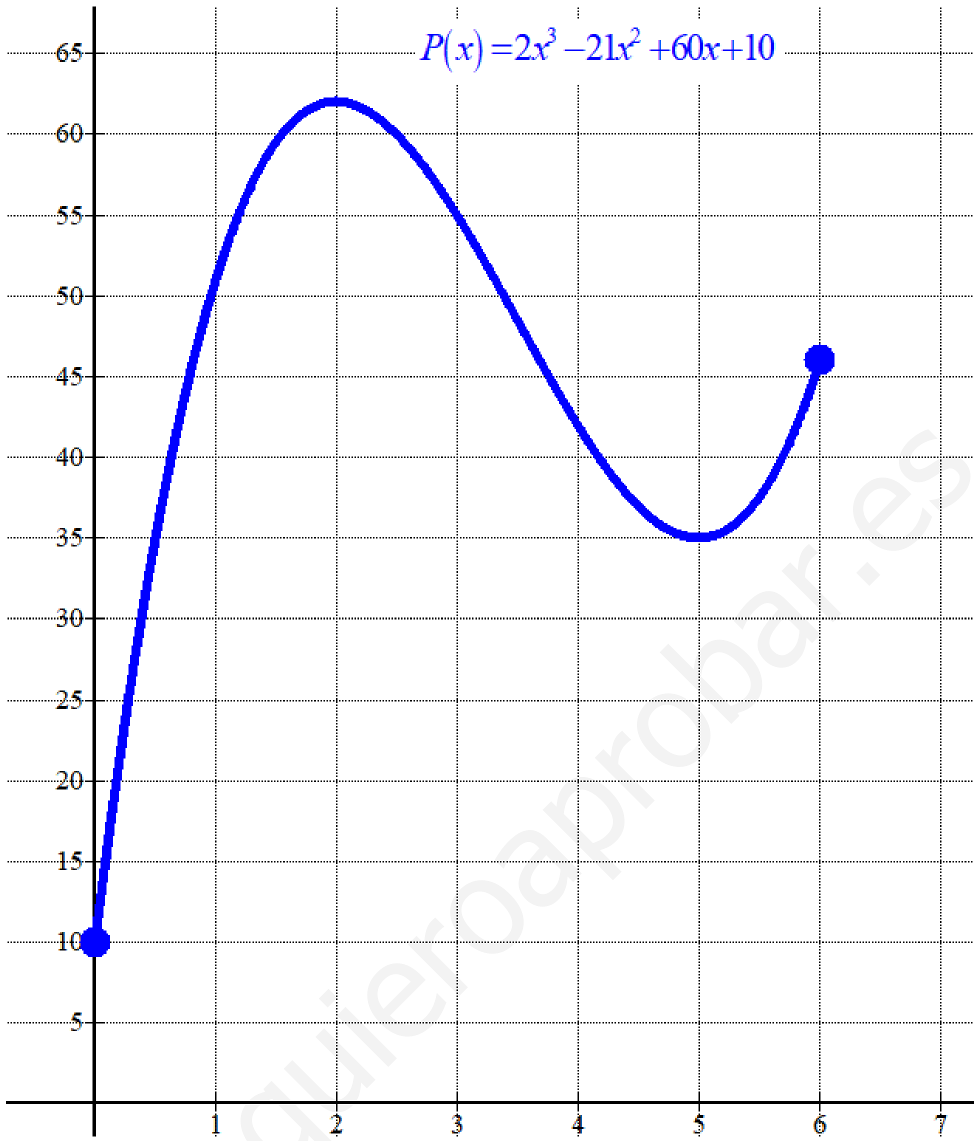
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si estos extremos relativos son absolutos.

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 10 = 10$$
$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 10 = 62$$
$$P(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 10 = 35$$
$$P(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 + 10 = 46$$

El mínimo absoluto de producción son 10 kg de fruta y se obtienen con 0 litros diarios de agua. La máxima producción se consigue con 2 litros diarios de agua y es de 62 kg de fruta.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la producción.

x	$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$
0	10
1	51
2	62
3	55
5	35
6	46


$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5
6
7

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}$$

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(6)}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{5-1}{2}=\boxed{2=x}\end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{2,3\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}=\frac{2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2}{2^2-5\cdot 2+6}=\frac{0}{0}=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x^2-3x+2\right)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)}{(x-3)}=\frac{2(2-1)}{-1}=-2$$

$x=2$ no es asíntota vertical.

¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}=\frac{3^3-3\cdot 3^2+2\cdot 3}{3^2-5\cdot 3+6}=\frac{6}{0}=\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-3\frac{x^2}{x^3}+2\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-5\frac{x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}=\frac{1-0+0}{0-0+0}=\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-5x^2+6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}=$$

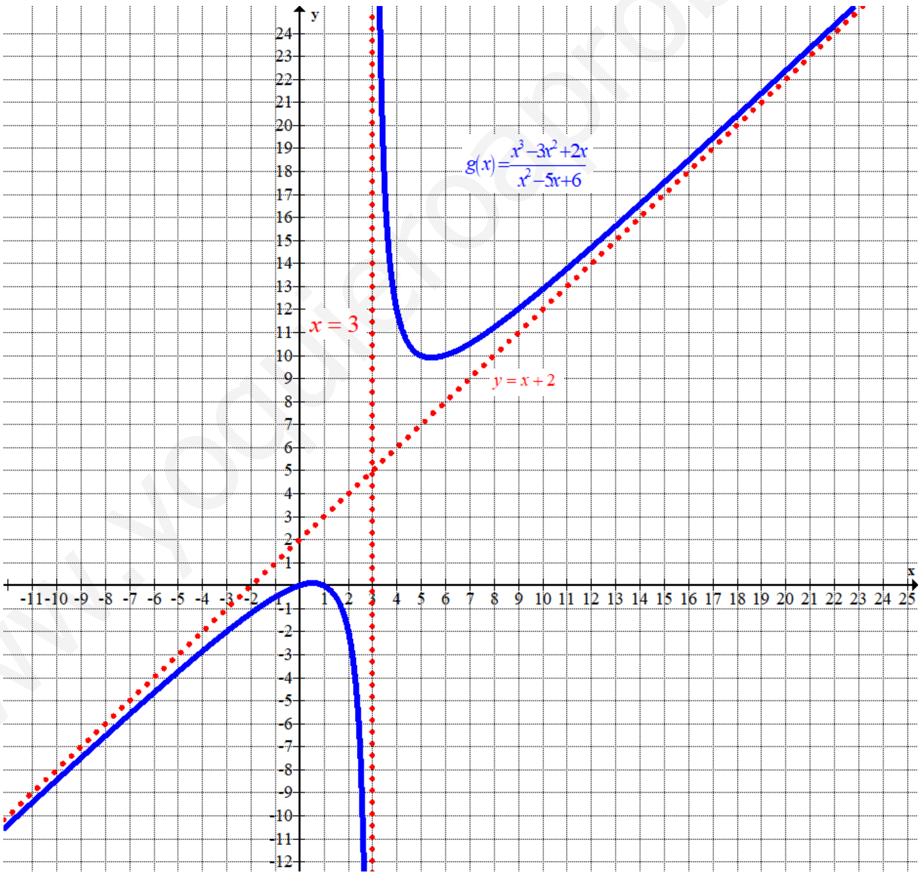
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{1-0+0}{1-0+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-3x^2+2x-\cancel{x^3}+5x^2-6x}{x^2-5x+6}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{2-0}{1-0+0}=2$$

La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=3$, no tiene asíntota horizontal y tiene una asíntota oblicua: $y=x+2$.

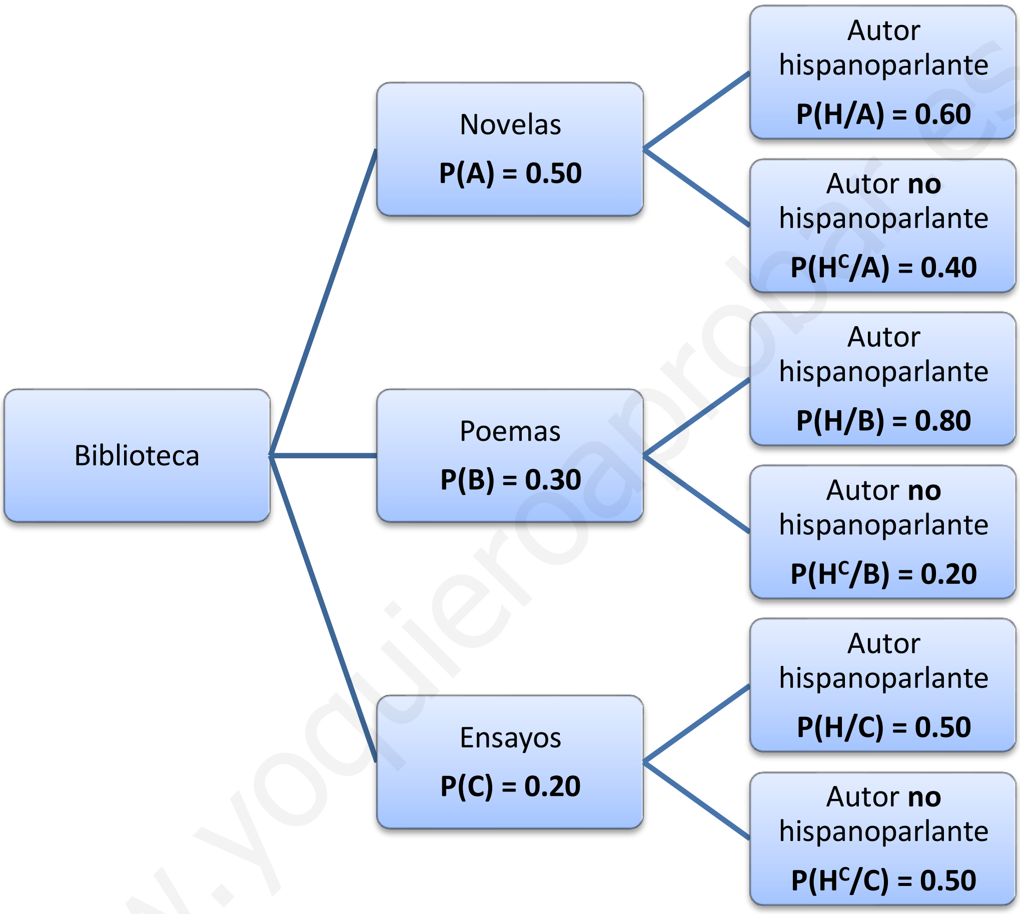


PROBLEMA 8 (2 puntos)
Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(A \cap H^C\right)$.

$$P\left(A \cap H^C\right) = P(A)P\left(H^C / A\right) = 0.5 \cdot 0.4 = \boxed{0.2}$$

La probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante es de 0.2.

b) Nos piden calcular $P(H)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(H) = P(A)P(H/A) + P(B)P(H/B) + P(C)P(H/C) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.64}$$

La probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante es de 0.64.

PROBLEMA 9 (2 puntos)
En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

Llamamos A al suceso "ser detectado por el radar A" y B al suceso "ser detectado por el radar B".

Los datos del problema nos dicen que $P(A)=0.80$ y $P(B)=0.85$.

También nos dan el dato $P(A\cup B)=0.95$.

a) Nos piden el valor de $P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.95 \\ P(A)=0.80 \\ P(B)=0.85 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.95=0.8+0.85-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.8+0.85-0.95=\boxed{0.7}$$

La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B es 0.7.

b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.7}{0.8}=\boxed{0.875}$$

La probabilidad de que un infractor que ha sido detectado por el radar A también lo detecte el radar B es de 0.875.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**

a) Hay un total de 4000 + 5000 + 1000 =10 000 personas y hay que elegir 500 la proporción es $\frac{500}{10000}=\frac{1}{20}$.

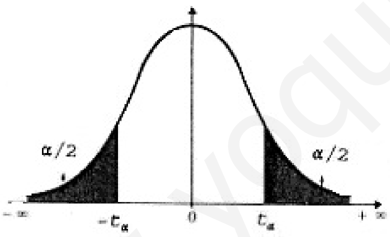
De las 4.000 personas entre 18 y 30 años debemos elegir $\frac{1}{20}4000=200$ personas.

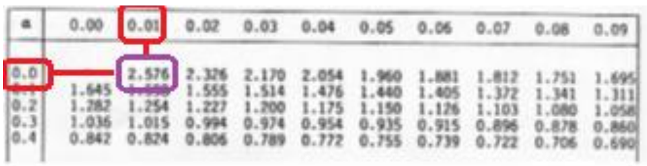
De las 5.000 personas entre 30 y 60 años debemos elegir $\frac{1}{20}5000=250$ personas.

De las 1.000 personas mayores de 60 años debemos elegir $\frac{1}{20}1000=50$ personas.

b) La proporción de personas favorables a participar en el festival de cine es $p_r=\frac{150}{250}=0.6$.

El nivel de confianza del 99% significa que 1 – ∝ = 0.99 → ∝ = 0.01 →





α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	[illegible]	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2.576**

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_r\cdot q_r}{n}}=2.576\cdot\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{250}}\simeq 0.0798$$

El intervalo de confianza es

$$\left(p_r-Error,\ p_r+Error\right)=\left(0.6-0.0798,0.6+0.0798\right)=\left(0.5202,\ 0.6798\right)$$

.