Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 € en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 €, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 € siendo el beneficio de 30 €. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. El precio, P(x) (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días (x ≡ días) viene expresado por la función

$$P(x)=\begin{cases} 18x^2-100x+162 & si \;\; 0\le x\le c \\ -x^3+18x^2-96x+162 & si \;\; c<x<10 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$? (0.5 puntos)

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día? (0.5 puntos)

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$ encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto (0, 3) y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto (1, 8) es $y=2x+6$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un taller el 10% de las reparaciones se realizan a motos, el 70% a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20% de las reparaciones a motos, un 60% de las reparaciones a coches y un 85% de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto? (0.75 puntos)

4. Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas^2. Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido 6.5, 8.4, 9.6, 7.4, 7.1, 6.8, 8.8, 8.3, 8.0, 7.1, 7.8 y 9.0 horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95.96%. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96.52 %? (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor. (1 punto)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 70% de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el 20% ve documentales y el 12% ve series y documentales.

a) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales? (0.75 puntos)

b) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales? (0.75 puntos)

6. En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 280$ llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 días proporcionando una media de 486 llamadas de clientes al día.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %? Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

<u>Bloque 2</u>

5. En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, R(x) (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, *x* (en años), desde su lanzamiento viene expresado por la función

$$R(x)=\begin{cases} 2x+4 & si\ 0\le x\le 2 \\ (5+t)x-1 & si\ 2<x\le 5 \\ -(x+t)^2+(14+t)x-30 & si\ 5<x\le 11 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de *t* para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x=5$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t = 0$. (0.75 puntos)

6. El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t)=432t-t^3$ donde *t* es la hora del día entre las 8 de la mañana y las 8 de la tarde $(8\le t\le 20)$ y P(t) indica el número de visitantes.

a) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 € en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 €, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 € siendo el beneficio de 30 €. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

a) Llamamos "x" a los kilos de plancha de acero, "y" a los kilos de plancha de aluminio. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Horas de trabajo	Gasto de material	Beneficio
Nº kilos de acero (x)	4x	60x	45x
Nº kilos de aluminio (y)	7y	48y	30y
TOTALES	$4x+7y$	$60x+48y$	$45x+30y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=45x+30y$.

Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones del problema.

"La industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material" → $4x+7y\leq 200$; $60x+48y\leq 2088$.

"Está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio"→ $x\geq 15;\ y\geq 10$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r}4x+7y\leq 200\\ 60x+48y\leq 2088\\ x\geq 15;\ y\geq 10\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}4x+7y\leq 200\\ 5x+4y\leq 174\\ x\geq 15;\ y\geq 10\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$4x+7y=200$

x	$y=\dfrac{200-4x}{7}$
0	$200/7$
15	20
50	0

$5x+4y=174$

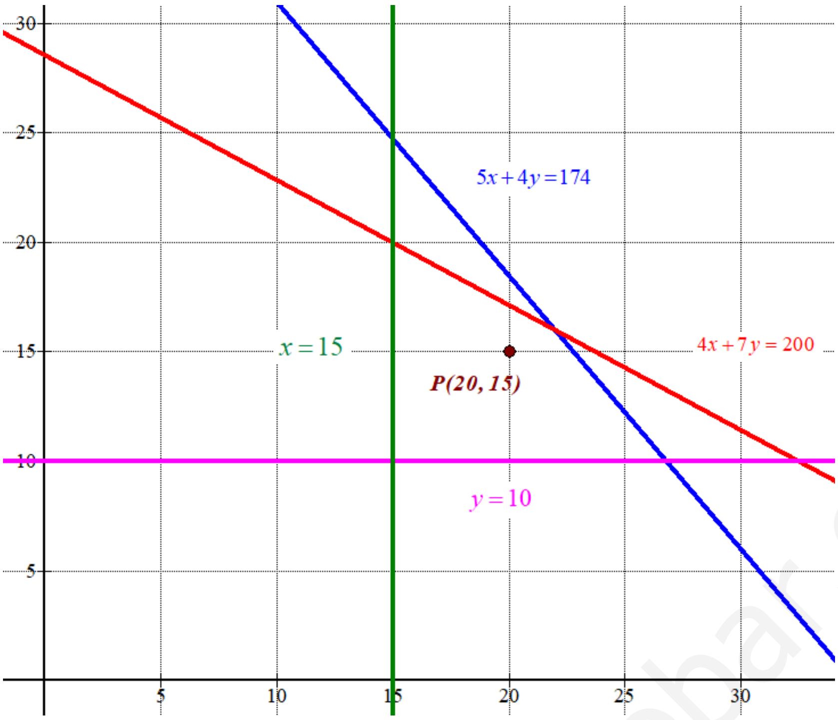
x	$y=\dfrac{174-5x}{4}$
0	$174/4$
30	6
34	1

$x=15$

$x=15$	y
15	10
15	20
15	50

$y=10$

x	$y=10$
0	10
15	10
50	10



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l}4x+7y\le 200\\5x+4y\le 174\\x\ge 15;\ y\ge 10\end{array}\right\}$ la región factible es la zona del plano situada por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal rosa y a la derecha de la recta vertical verde.

Comprobamos si el punto P(20, 15) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l}4\cdot 20+7\cdot 15\le 200\\5\cdot 20+4\cdot 15\le 174\\20\ge 15;\ 15\ge 10\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}80+105\le 200\\100+60\le 174\\20\ge 15;\ 15\ge 10\end{array}\right\}\text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color gris del dibujo inferior.

Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+7y=200 \\ 5x+4y=174 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -20x-35y=-1000 \\ 20x+16y=696 \end{array}\right\}$$

$$-19y=-304 \Rightarrow y=\frac{304}{19}=16 \Rightarrow 4x+112=200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x=88 \Rightarrow x=\frac{88}{4}=22 \Rightarrow C(22,16)$$

$$D \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=10 \\ 5x+4y=174 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x+40=174 \Rightarrow 5x=134 \Rightarrow x=\frac{134}{5}=26.8 \Rightarrow D(26.8,10)$$

b) Valoramos la función beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(15, 10) → $B(15,10)=45\cdot 15+30\cdot 10=975$

B(15, 20) → $B(15,20)=45\cdot 15+30\cdot 20=1275$

C(22, 16) → $B(22,16)=45\cdot 22+30\cdot 16=1470$

D(26.8, 10) → $B(15,10)=45\cdot 26.8+30\cdot 10=1506$ ¡Máximo!

El máximo se alcanza en el vértice D(26.8, 10) con un valor de 1506.
Se deben fabricar 26.8 kilos de plancha de acero y 10 kilos de plancha de aluminio para obtener un beneficio máximo de 1508 €.

2. Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.
a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al agua embalsada en el embalse de Torre de Abraham, "y" al agua embalsada en el embalse de Gasset y "z" al agua embalsada en el Azután.

"La cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3" → $x+y+z=156$

"El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset" → $z=2(x-y)$

"El embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután" → $y=\dfrac{z}{3}$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=156 \\ z=2(x-y) \\ y=\dfrac{z}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=156 \\ z=2x-2y \\ 3y=z \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=156 \\ z=2x-2y \\ 3y=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+3y=156 \\ 3y=2x-2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4y=156 \\ 5y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=156-4y \\ 5y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=2(156-4y) \Rightarrow 5y=312-8y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y=312 \Rightarrow \boxed{y=\frac{312}{13}=24} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=156-4\cdot 24=60} \\ \boxed{z=3\cdot 24=72} \end{cases}$$

En el embalse de Torre de Abraham hay 60 hm^3, en el de Gasset hay 24 hm^3 y en el de Azután hay 72 hm^3.

Bloque 2

1. El precio, P(x) (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días (x ≡ días) viene expresado por la función

$$P(x)=\begin{cases}18x^2-100x+162 & si\ \ 0\le x\le c\\ -x^3+18x^2-96x+162 & si\ \ c<x<10\end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$? (0.5 puntos)

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día? (0.5 puntos)

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día. (0.5 puntos)

a) Para que sea continua en $x=c$ deben coincidir los limites laterales y el valor de la función en $x=c$.

$$\left.\begin{array}{l}P(c)=18c^2-100c+162\\ \lim\limits_{x\to c^-}P(x)=\lim\limits_{x\to c^-}18x^2-100x+162=18c^2-100c+162\\ \lim\limits_{x\to c^+}P(x)=\lim\limits_{x\to c^+}-x^3+18x^2-96x+162=-c^3+18c^2-96c+162\\ P(c)=\lim\limits_{x\to c^-}P(x)=\lim\limits_{x\to c^+}P(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{18c^2}-100c+\cancel{162}=-c^3+\cancel{18c^2}-96c+\cancel{162}\Rightarrow c^3-4c=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\left(c^2-4\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{c=0}\\ c^2-4=0\to c^2=4\to\boxed{c=\sqrt{4}=2}\in[0,10)\end{cases}$$

La función es continua para c = *0* y para c = *2*.

b) Para $c = 2$ la función queda $P(x)=\begin{cases}18x^2-100x+162 & si\ \ 0\le x\le 2\\ -x^3+18x^2-96x+162 & si\ \ 2<x<10\end{cases}$.

La función a partir del segundo día tiene la expresión $P(x)=-x^3+18x^2-96x+162$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l}P'(x)=-3x^2+36x-96\\ P'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -3x^2+36x-96=0\Rightarrow x^2-12x+32=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(32)}}{2}=\frac{12\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{12+4}{2}=\boxed{8=x}\\ \dfrac{12-4}{2}=\boxed{4=x}\end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada para averiguar si son máximo o mínimo.

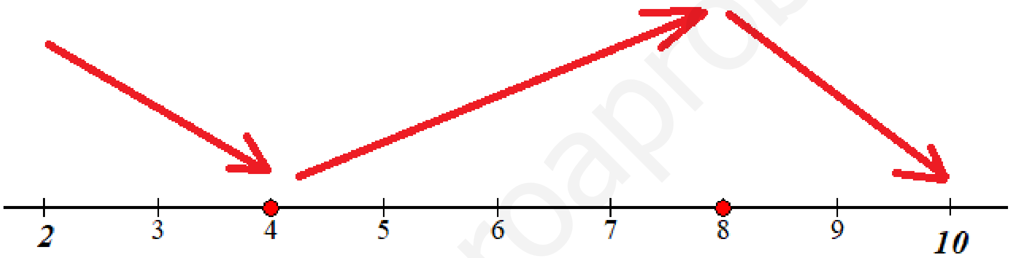
$$P''(x) = -6x + 36 \Rightarrow \begin{cases} P''(4) = -24 + 36 = 12 > 0 \rightarrow x = 4 \text{ es mínimo} \\ P''(8) = -48 + 32 = -16 < 0 \rightarrow x = 8 \text{ es máximo} \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $(2,10)$ y en estos dos puntos críticos.

$$\lim_{x \to 2^+} P(x) = -2^3 + 18 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 162 = 34$$
$$P(4) = -4^3 + 18 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 162 = 2$$
$$P(8) = -8^3 + 18 \cdot 8^2 - 96 \cdot 8 + 162 = 34$$
$$\lim_{x \to 10^-} P(x) = -10^3 + 18 \cdot 10^2 - 96 \cdot 10 + 162 = 2$$

El precio mínimo se tiene al cuarto día y el máximo al octavo día.

c) Para $c = 2$ a partir del segundo día la función es continua y tiene un mínimo en $x = 4$ y un máximo en $x = 8$. La función sigue el esquema siguiente.



El precio decrece del segundo día al cuarto, crece del cuarto al octavo y decrece del octavo al décimo.

2. Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$ encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto (0, 3) y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto (1, 8) es $y=2x+6$. (1.5 puntos)

Si la función pasa por el punto (0, 3) entonces *f(0) = 3*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ f(0)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c \Rightarrow \boxed{c=3}$$

La función queda $f(x)=ax^3+bx^2+3$.

Si la ecuación de la recta tangente a la función en el punto (1, 8) es $y=2x+6$ se cumple que $f(1)=8$ y que la pendiente de la recta tangente (2) es el valor de la derivada en $x = 1$ → $f'(1)=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx \\ f'(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1=2 \Rightarrow \boxed{3a+2b=2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+3 \\ f(1)=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 8=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+3 \Rightarrow \boxed{a+b=5}$$

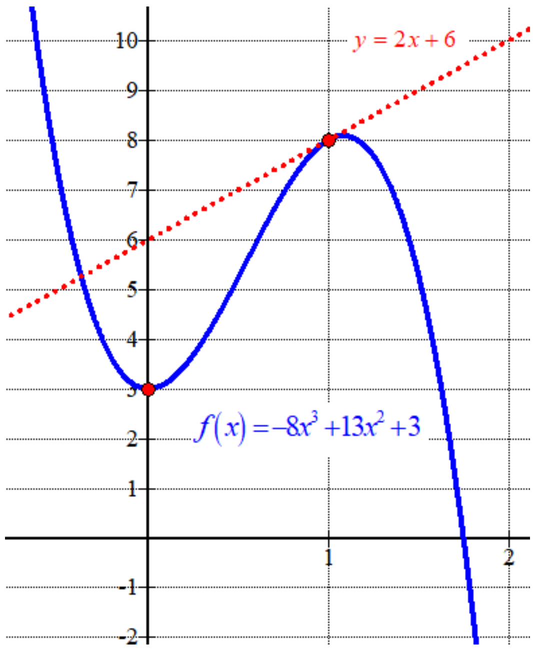
Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 3a+2b=2 \\ a+b=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a+2b=2 \\ b=5-a \end{array}\right\} \Rightarrow 3a+2(5-a)=2 \Rightarrow 3a+10-2a=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=-8} \Rightarrow \boxed{b=5-(-8)=13}$$

Los valores buscados son *a = –8, b = 13* y *c = 3.*

Lo comprobamos dibujando la gráfica de la función $f(x)=-8x^3+13x^2+3$.



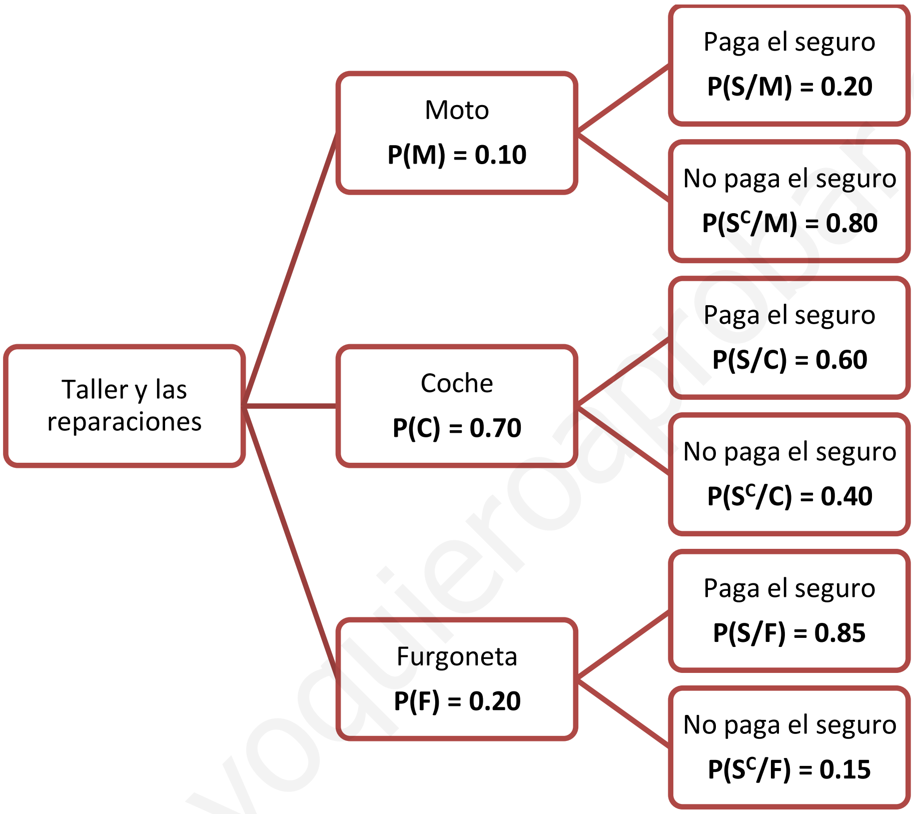
Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un taller el 10% de las reparaciones se realizan a motos, el 70% a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20% de las reparaciones a motos, un 60% de las reparaciones a coches y un 85% de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto? (0.75 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(S^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S^C) = P(M)P(S^C/M) + P(C)P(S^C/C) + P(F)P(S^C/F) =$$

$$= 0.1\cdot 0.8 + 0.7\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.15 = \boxed{0.39}$$

La probabilidad de que la reparación de un vehículo elegido al azar no la pague el seguro es de 0.39.

b) Nos piden calcular $P(M/S)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/S) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)P(S/M)}{1-P(S^C)} = \frac{0.1\cdot 0.2}{1-0.39} = \boxed{\frac{2}{61} \simeq 0.0328}$$

La probabilidad de que una reparación que paga el seguro sea de una moto es de 2/61.

4. Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas². Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido 6.5, 8.4, 9.6, 7.4, 7.1, 6.8, 8.8, 8.3, 8.0, 7.1, 7.8 y 9.0 horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95.96%. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96.52 %? (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = Las horas de sueño de la población adolescente española.

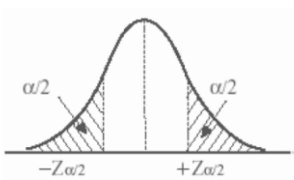
Desviación típica = σ = $\sqrt{4} = 2$ horas. X = N(μ, 2)

El tamaño de la muestra es n = 12 adolescentes.

La media muestral es $\bar{x} = \dfrac{6.5+8.4+9.6+7.4+7.1+6.8+8.8+8.3+8.0+7.1+7.8+9.0}{12} = 7.9$ horas.

a) Con un nivel de confianza del 95.96% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.9596 \to \alpha = 0.0404 \to \frac{\alpha}{2} = 0.0202 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9798 \to z_{\alpha/2} = 2.05$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842

Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}} \simeq 1.1836 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(7.9 - 1.1836, 7.9 + 1.1836\right) = \left(6.7164, 9.0836\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 96.52% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.9652 \to \alpha = 0.0348 \to \frac{\alpha}{2} = 0.0174 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9826 \to z_{\alpha/2} = 2.11$$

z	0.00	0.01	0.0
2.0	0.9772	0.9778	0.97
2.1	0.9821	0.9826	0.98

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.11 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.5275$$

El error máximo que se cometería es de 0.5275 horas.

Bloque 2

3. De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de bebés inscritos con el nombre de Alba, "y" al número de bebés con nombre Pablo y "z" al número de bebés inscritos con el nombre David.

"72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David" → $x+y+z=72$

"El número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba" → $z=y-x$

"Se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo" → $x=z+\frac{y}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=72 \\ z=y-x \\ x=z+\frac{y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=72 \\ x+z=y \\ 3x=3z+y \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=72 \\ x+z=y \\ 3x=3z+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+x+z+z=72 \\ 3x=3z+x+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2z=72 \\ 2x=4z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=36 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z+z=36 \Rightarrow 3z=36 \Rightarrow \boxed{z=\frac{36}{3}=12} \Rightarrow \boxed{x=2\cdot 12=24} \Rightarrow \boxed{y=12+24=36}$$

Se han inscrito 24 bebés con el nombre de Alba, 36 con el nombre de Pablo y 12 con el nombre de David.

4. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2=2A-I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor. (1 punto)

a) Calculamos la expresión de ambos miembros de la igualdad.

$$A^2=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A-I=2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10-1 & -8 & 4 \\ 4 & -2-1 & 2 \\ -8 & 8 & -2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Como se observa en lo obtenido tenemos que $A^2=2A-I=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

b) Expresamos A^4 como $A^2\cdot A^2$.

$$A^4=A^2\cdot A^2=(2A-I)(2A-I)=4A^2-2A-2A+I^2=$$

$$=4A^2-4A+I=4\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 36-20+1 & -32+16 & 16-8 \\ 16-8 & -12+4+1 & 8-4 \\ -32+16 & 32-16 & -12+4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^4=\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 70% de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el 20% ve documentales y el 12% ve series y documentales.
a) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales? (0.75 puntos)
b) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales? (0.75 puntos)

Llamamos S a "ver series" y D a "ver documentales".
Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Ve series (S)	No ve series (S^C)	
Ve documentales (D)	12		20
No ve documentales (D^C)			
TOTALES	70		100

Completamos la tabla.

	Ve series (S)	No ve series (S^C)	
Ve documentales (D)	12	**8**	20
No ve documentales (D^C)	**58**	**22**	**80**
TOTALES	70	**30**	100

a) Nos piden calcular $P\left(\overline{S}\cap\overline{D}\right)$. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(\overline{S}\cap\overline{D}\right)=\frac{22}{100}=\boxed{0.22}$$

El 22 % de los usuarios de una plataforma de streaming ni ve series ni documentales.

b) Si suponemos 100 usuarios tenemos que 70 ven series y de estos hay 12 que ven documentales. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(D/S)=\frac{P(D\cap S)}{P(S)}=\frac{12}{70}=\boxed{\frac{6}{35}\simeq 0.1714}$$

La probabilidad de que un usuario elegido al azar vea documentales, sabiendo que ve series tiene un valor aproximado de 0.1714.

6. En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 280 llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 días proporcionando una media de 486 llamadas de clientes al día.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %? Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

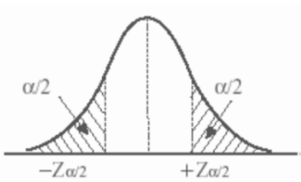
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones.
Desviación típica = σ = 280 llamadas. X = N(μ, 280)

Tamaño de la muestra = n = *100* días. La media muestral es $\bar{x} = 486$ llamadas.

a) Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	$\boxed{0.06}$
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
$\boxed{1.9}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9750}$

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{280}{\sqrt{100}} = 54.88 \text{ llamadas}$$

El intervalo de confianza para el número de llamadas diarias es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(486 - 54.88, 486 + 54.88\right) = \left(431.12, 540.88\right)$$

b) Si mantenemos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ es el mismo. La desviación típica también es la misma.

El error lo obtenemos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ por lo que si aumenta n disminuye el Error y esto implica que disminuye la amplitud del intervalo de confianza.

c) Con un nivel de confianza del 99 % hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} > 2$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 2 \cdot \frac{280}{\sqrt{100}} = 56 .$$

El error es mayor de 56 llamadas.
El intervalo de confianza tendrá más amplitud que

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(486 - 56, 486 + 56\right) = \left(430, 542\right)$$

La media de 500 llamadas pertenece a este intervalo de confianza y al que corresponde al nivel de confianza del 99% que será más amplio.

Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %.

Bloque 2

5. En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, R(x) (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, x (en años), desde su lanzamiento viene expresado por la función

$$R(x)=\begin{cases}2x+4 & si\ 0\le x\le 2\\ (5+t)x-1 & si\ 2<x\le 5\\ -(x+t)^2+(14+t)x-30 & si\ 5<x\le 11\end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de t para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x=5$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t = 0$. (0.75 puntos)

a) Para que la función $R(x)$ sea continua en $x = 5$ deben coincidir los limites laterales con el valor de la función en $x = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} R(5)=(5+t)5-1=25+5t-1=24+5t\\ \lim\limits_{x\to 5^-} R(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(5+t)x-1=24+5t\\ \lim\limits_{x\to 5^+} R(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}-(x+t)^2+(14+t)x-30=\\ \quad =-(5+t)^2+(14+t)5-30=-25-t^2-10t+70+5t-30=\\ \quad =-t^2-5t+15\\ \lim\limits_{x\to 5^-} R(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} R(x)=R(5)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2-5t+15=24+5t\Rightarrow -t^2-10t-9=0\Rightarrow t^2+10t+9=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4(1)(9)}}{2}=\frac{-10\pm 8}{2}=\begin{cases}\dfrac{-10+8}{2}=\boxed{-1=t}\\ \dfrac{-10-8}{2}=\boxed{-9=t}\end{cases}$$

Para $t = -1$ y $t = -9$ la función $R(x)$ es continua en $x = 5$.

b) Para el valor $t = 0$ la función no es continua en $x = 5$.

La función queda:

$$R(x)=\begin{cases}2x+4 & si\ 0\le x\le 2\\ 5x-1 & si\ 2<x\le 5\\ -x^2+14x-30 & si\ 5<x\le 11\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la función que es un trozo de recta creciente (entre 0 y 2), otro trozo de recta creciente (entre 2 y 5) y un trozo de parábola cóncava (entre 5 y 11).

Hallamos el vértice de la parábola.

$$5<x\le 11\rightarrow \left.\begin{array}{l}R'(x)=-2x+14\\ A'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2x+14=0\Rightarrow 2x=14\Rightarrow \boxed{x=\frac{14}{2}=7}\in(5,11]$$

$0 \le x \le 2$

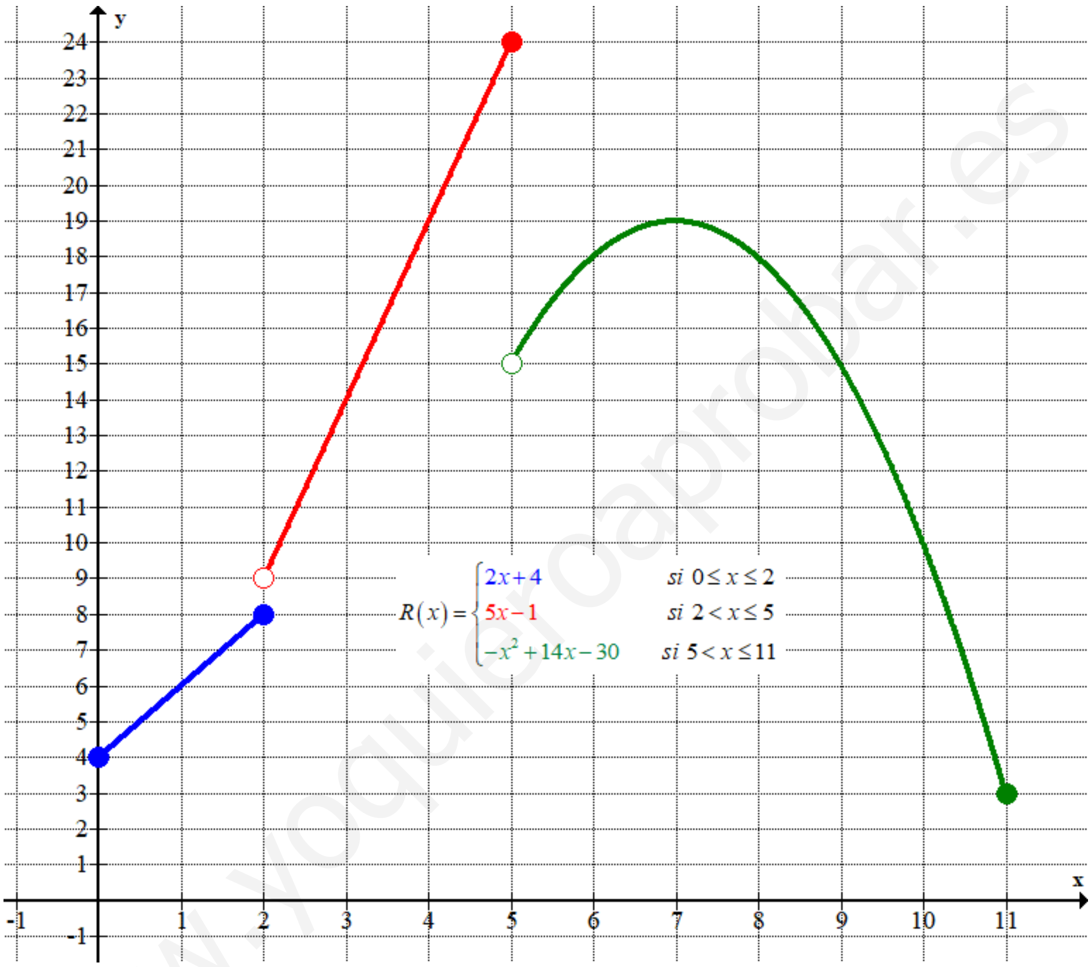
x	$y = 2x+4$
0	4
1	6
2	8

$2 < x \le 5$

x	$y = 2x+4$
2	8 No incluido
4	12
5	14

$5 < x \le 11$

x	$y = -x^2 + 14x - 30$
5	15 No incluido
7	19
9	15
11	3



6. El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t)=432t-t^3$ donde t es la hora del día entre las 8 de la mañana y las 8 de la tarde $(8\leq t\leq 20)$ y P(t) indica el número de visitantes.

a) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes? (0.75 puntos)

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$\left.\begin{array}{r} P(t)=432t-t^3 \Rightarrow P'(t)=432-3t^2 \\ P'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 432-3t^2=0 \Rightarrow 144-t^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2=144 \Rightarrow t=\sqrt{144}=12$$

Vemos como es el signo de la segunda derivada en $t = 12$.

$$P'(t)=432-3t^2 \Rightarrow P''(t)=-6t \Rightarrow P''(12)=-6\cdot 12=-72<0 \to t=12 \text{ es máximo}$$

Se alcanza la máxima afluencia de turistas a las 12 horas.
Como $P(12)=432\cdot 12-12^3=3456$ el número máximo de turistas es de 3456.

b) La función es continua y sólo tiene un máximo relativo en $t = 12$. La función crece entre las 8 y las 12 horas y decrece entre las 12 y las 20 horas.