UC | Universidad de Cantabria

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.

Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2, & si\ x\leq -1 \\ x^2-3x+5, & si\ -1<x\leq 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1}, & si\ x>3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.
A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.
B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos "x" al precio del kilo de tierra en el proveedor A, "y" al precio del kilo de piedras decorativas en el proveedor A y "z" al precio del kilo de semillas.

"El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €" → $300x+200y+100z=13000$

"El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A" → $300\frac{x}{3}+200\frac{y}{2}+100\frac{z}{5}=13000-8800$ → $100x+100y+20z=4200$.

"Para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas" → $z=2(x+y)$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo simplificamos.

$$\left.\begin{array}{l} 300x+200y+100z=13000 \\ 100x+100y+20z=4200 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ z=2x+2y \end{array}\right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ -2x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=15-4-10+10-10+6=7\neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y+z=130\\5x+5y+z=210\\z=2x+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2y+2x+2y=130\\5x+5y+2x+2y=210\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y=130\\7x+7y=210\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y=130\\x+y=30\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y=130\\y=30-x\end{array}\right\}\Rightarrow 5x+4(30-x)=130\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+120-4x=130\Rightarrow\boxed{x=10}\Rightarrow\boxed{y=30-10=20}\Rightarrow\boxed{z=20+40=60}$$

El precio de 1 kilo de tierra es 10 €, el kilo de piedras a 20 € y el de semillas a 60 €.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.
Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.
A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

.

A. Llamamos “x” = número de guías prácticas que publica la editorial e “y” = número de libros de cocina que publica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de papel reciclado	Gramos de papel de bambú	Beneficio
Nº guías prácticas (x)	*60x*	*20x*	*5x*
Nº libros de cocina (y)	*70y*	*10y*	*4y*
TOTAL	$60x+70y$	$20x+10y$	$5x+4y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=5x+4y$$

Las restricciones son:

“La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción” → $60x+70y\leq 4000$; $20x+10y\leq 800$

“La editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana” → $y\geq 10$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0$; $y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 60x+70y\leq 4000 \\ 20x+10y\leq 800 \\ y\geq 10 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+7y\leq 400 \\ 2x+y\leq 80 \\ y\geq 10 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 80$

x	$y = 80 - 2x$
0	80
20	40
35	10

$6x + 7y = 400$

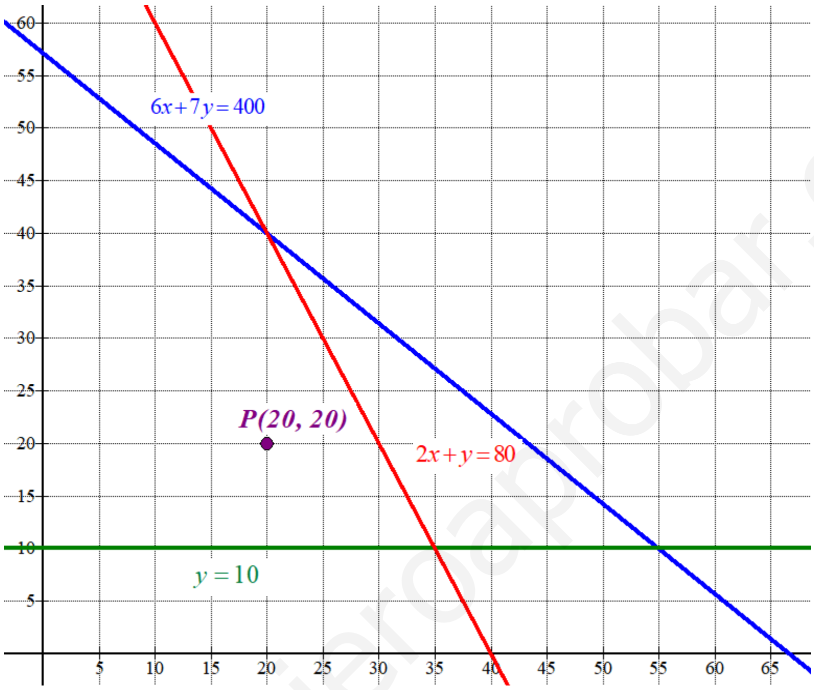
x	$y = \dfrac{400-6x}{7}$
0	400 / 7
20	40
60	40 / 7

$y = 10$

x	$y = 10$
0	10
35	10

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante

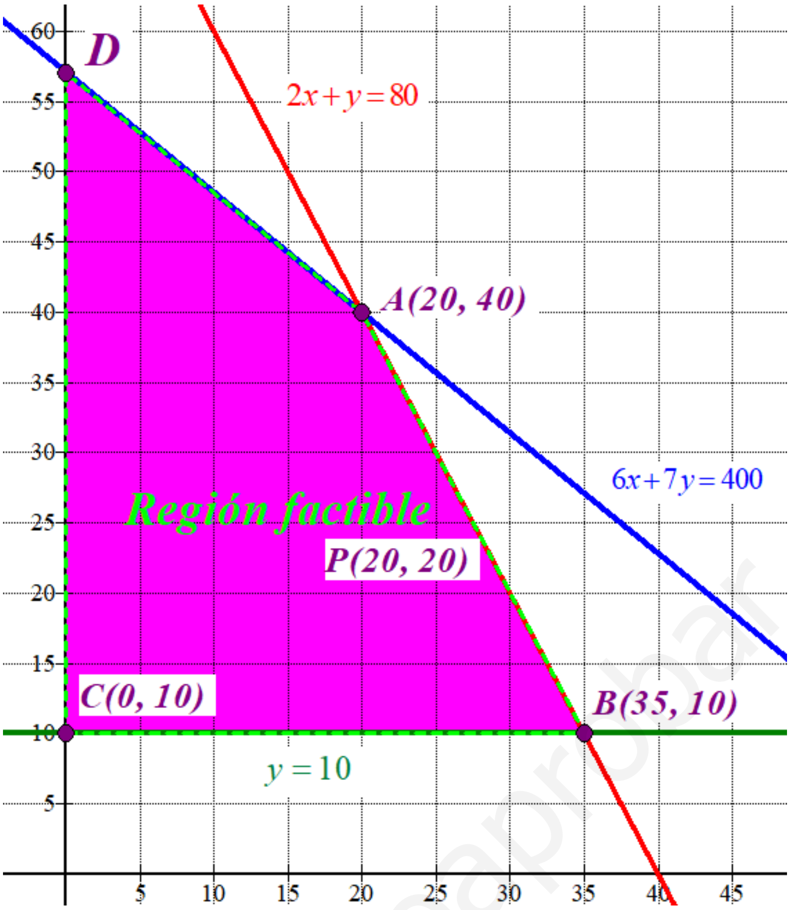


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} 6x+7y \leq 400 \\ 2x+y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde.

Comprobamos que el punto P(20, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6\cdot 20+7\cdot 20 \leq 400 \\ 2\cdot 20+20 \leq 80 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0;\ 20 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+7y=400 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 7y=400 \Rightarrow y=\frac{400}{7} \Rightarrow D\left(0,\frac{400}{7}\right)$$

Los vértices son A(20, 40); B(35, 10); C(0, 10) y $D\left(0,\frac{400}{7}\right)$.

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 40) → $B(20,40)=5\cdot 20+4\cdot 40=260$ ¡Máximo!

B(35, 10) → $B(35,10)=5\cdot 35+4\cdot 10=215$

C(0, 10) → $B(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=40$

$D\left(0,\frac{400}{7}\right) \to B\left(0,\frac{400}{7}\right)=5\cdot 0+4\cdot\frac{400}{7}=228.57$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice A(20, 40). Se deben publicar 20 guías y 40 libros de cocina para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 260 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2, & si\ x\le -1 \\ x^2-3x+5, & si\ -1<x\le 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1}, & si\ x>3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)dx$

A. La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-a+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+2=-a+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2-3x+5=(-1)^2-3(-1)+5=9 \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow -a+2=9\Rightarrow \boxed{-7=a}$$

La función debe ser continua en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^2-3\cdot 3+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-3x+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-b}{x^2+1}=\dfrac{3-b}{10} \\ f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3-b}{10}=5\Rightarrow 3-b=50\Rightarrow \boxed{-47=b}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = -7$ y $b = -47$.

B. En el intervalo [0, 2] la función es $f(x)=x^2-3x+5$.

Calculamos la integral definida pedida.

$$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2-3x+5dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+5\cdot 2\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{3\cdot 0^2}{2}+5\cdot 0\right]=\frac{8}{3}-6+10=\boxed{\frac{20}{3}\simeq 6.67}$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} \\ Eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x^2+4x+2}{x-2}=0 \Rightarrow 2x^2+4x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow A(-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} \\ Eje\,OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2\cdot 0^2+4\cdot 0+2}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1 \Rightarrow B(0,-1)$$

Los puntos de corte con los ejes OX y OY son A(–1,0) y B(0,–1).

B. Como $x = 2$ anula el denominador el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$,

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}=\frac{2\cdot 2^2+4\cdot 2+2}{2-2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+4x+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x+2}{x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{2x^2}+4x+2-\cancel{2x^2}+4x}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{8+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{8+0}{1-0}=8$$

$y=2x+8$ es asíntota oblicua de la función.

C. Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2+4x+2}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(4x+4)(x-2)-1\cdot\left(2x^2+4x+2\right)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-8x+\cancel{4x}-8-2x^2-\cancel{4x}-2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}=0\Rightarrow 2x^2-8x-10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{4+6}{2}=\boxed{5=x}\\ \frac{4-6}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos, incluyendo el valor excluido del dominio *x = 2*.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

$$f'(-2)=\frac{2(-2)^2-8(-2)-10}{(-2-2)^2}=\frac{7}{8}>0.$$ La función crece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,2)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale

$$f'(0)=\frac{2(0)^2-8(0)-10}{(0-2)^2}=\frac{-10}{4}<0.$$ La función decrece en $(-1,2)$.

- En el intervalo $(2,5)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale

$$f'(3)=\frac{2(3)^2-8(3)-10}{(3-2)^2}=-16<0.$$ La función decrece en $(2,5)$.

- En el intervalo $(5,+\infty)$ tomamos *x = 6* y la derivada vale

$$f'(6)=\frac{2(6)^2-8(6)-10}{(6-2)^2}=\frac{14}{16}>0.$$ La función crece en $(5,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ y decrece en $(-1,2)\cup(2,5)$.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]
Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

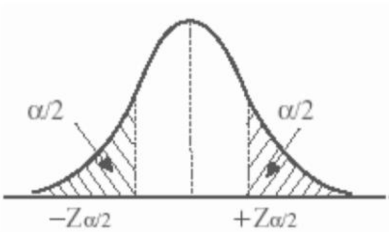
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

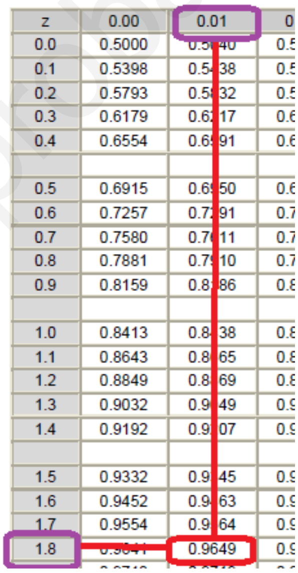
X = el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen (en minutos). X = N(**μ**, 10)

Tamaño de muestra = n = *100*. $\overline{x} = 90$ minutos.

A. Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$





z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	[illegible]	0.5
0.1	0.5398	0.5[illegible]38	0.5
0.2	0.5793	0.5[illegible]32	0.5
0.3	0.6179	0.6[illegible]17	0.6
0.4	0.6554	0.6[illegible]91	0.6
0.5	0.6915	0.6[illegible]50	0.6
0.6	0.7257	0.7[illegible]91	0.7
0.7	0.7580	0.7[illegible]11	0.7
0.8	0.7881	0.7[illegible]10	0.7
0.9	0.8159	0.8[illegible]86	0.8
1.0	0.8413	0.8[illegible]38	0.8
1.1	0.8643	0.8[illegible]65	0.8
1.2	0.8849	0.8[illegible]69	0.8
1.3	0.9032	0.9[illegible]49	0.9
1.4	0.9192	0.9[illegible]07	0.9
1.5	0.9332	0.9[illegible]45	0.9
1.6	0.9452	0.9[illegible]63	0.9
1.7	0.9554	0.9[illegible]64	0.9
1.8	[illegible]	0.9649	0.9

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.81 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = (90 - 1.81, 90 + 1.81) = (88.19, 91.81)$$

B. Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

Igualamos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 = 117.7225$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

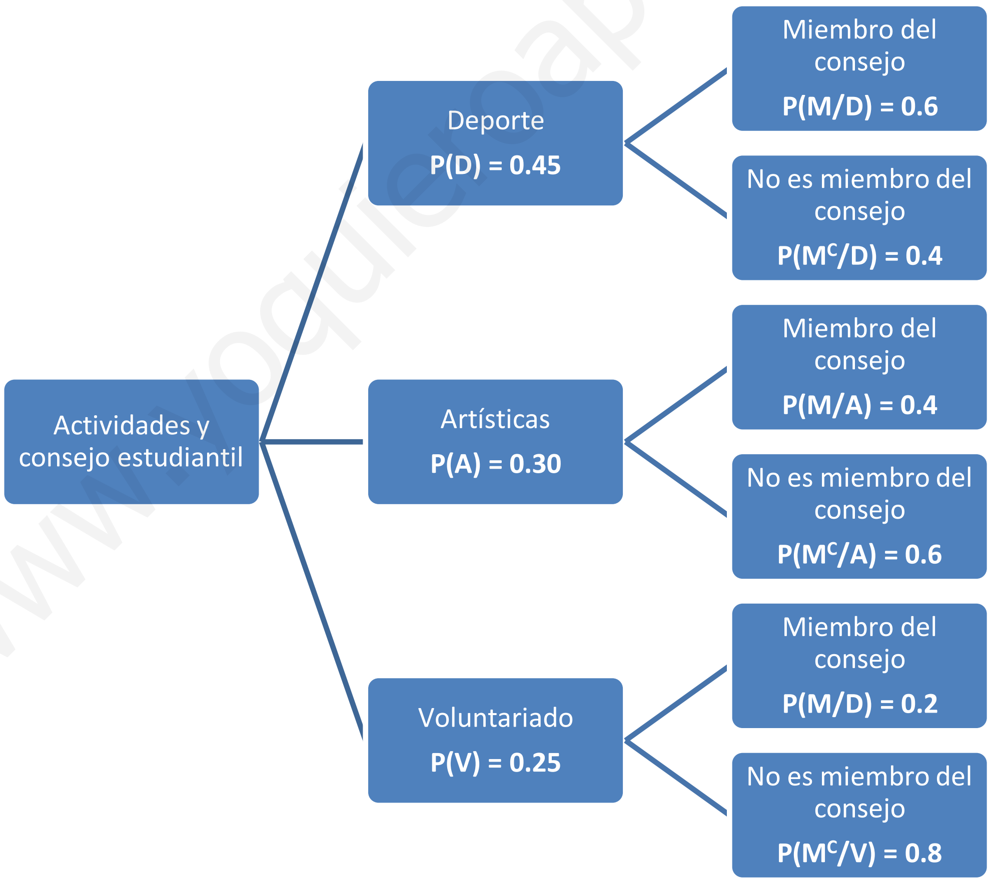
A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Llamamos D al suceso "el estudiante practica algún deporte, A al suceso "el estudiante participa en actividades artísticas", V al suceso "el estudiante participa en actividades de voluntariado" y M al suceso "el estudiante es miembro del consejo estudiantil".
Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



a) Nos piden calcular $P(D \cap M)$.

$$P(D \cap M) = P(D)P(M/D) = 0.45 \cdot 0.6 = \boxed{0.27}$$

La probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil es de 0.27.

b) Nos piden calcular $P\left(A \cap M^C\right)$.

$$P\left(A \cap M^C\right) = P(A)P\left(M^C / A\right) = 0.3 \cdot 0.6 = \boxed{0.18}$$

La probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil es de 0.18.

c) Nos piden calcular $P\left(V / M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(V / M^C\right) = \frac{P\left(V \cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{P(V)P\left(M^C / V\right)}{P(D)P\left(M^C / D\right) + P(A)P\left(M^C / A\right) + P(V)P\left(M^C / V\right)} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 0.8}{0.45 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.8} = \boxed{\frac{5}{14} \simeq 0.3571}$$