SIMPLIFICACIÓN GRÁFICA MEDIANTE MAPAS DE KARNAUGH

NOMBRE		NOMBRE	

La efectividad de la simplificación algebraica depende en gran medida del conocimiento de las leyes, reglas y teoremas del álgebra de Boole, y de nuestra habilidad para aplicarlas. Para no tener que recurrir a ello, cuando el número de variables es pequeño (2-5) podemos usar los llamados **mapas de Karnaugh.** Éstos proporcionan un método de simplificación que **genera las expresiones suma de productos y producto de sumas lo más simples posibles**.

Herramientas TIC para la simplificación funciones lógicas Mapas de Karnaugh

Este método se basa en la obtención de una tabla, denominado **mapa de Karnaugh** a partir de la tabla de verdad o de las funciones. En estas nuevas tablas las celdas se disponen de modo que la simplificación de una determinada expresión consiste en agrupar correctamente las celdas adyacentes. El fundamento del método de Karnaugh consiste en reducir a un solo término grupos de 2, 4, 8... términos adyacentes de una función lógica; entendiendo por **términos adyacentes** aquellos que sólo se diferencian en el estado de una de sus variables.

¿QUÉ SON LOS MAPAS DE KARNAUGH?

El mapa de Karnaugh s**e construye colocando como entradas todas las posibles combinaciones de las variables de las que depende la función a simplificar**. Así para tres variables, el número de celdas necesarias es de $2^3=8$; para 4 variables es de $2^4=16$ celdas y para 5 variables $2^5=32$ celdas.

Es imprescindible, que al plantear las tablas de Karnaugh **al pasar de una columna o de fila a la contigua sólo cambie de valor una de las variables** (por aquello de los términos adyacentes).

Así, los mapas de Karnaugh para 2, 3 y 4 variables pueden ser los siguientes:

A \ B	0	1
0		
1		

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Vamos a fijarnos en la tabla para cuatro variables. El valor de una determinada celda es el valor binario de A y B en la columna de la izquierda combinado con los valores binarios de C y D en la fila superior del mapa.

Así por ejemplo, en el mapa para 4 variables (el de la derecha), la celda de la esquina inferior izquierda se corresponderá con las entradas 1000, y la celda superior derecha se corresponderá para las entradas 0010.

Como se comentó con anterioridad, **las celdas de un mapa de Karnaugh se colocan de modo que sólo cambia una única variable entre celdas adyacentes**; o lo que es lo mismo, las celdas que difieren en una única variable son adyacentes. Por ejemplo, en el mapa de 4 variables, la celda para la combinación de entradas 0110 es adyacente a la celda para la combinación 0111; mientras que la celda para la combinación de entrada 0011, no es adyacente a la celda 0000.

Físicamente, podemos pensar que el mapa de Karnaugh se dobla como un cilindro de manera que las filas superiores e inferiores, o las columnas de la derecha y de la izquierda se tocasen. Así:

1. **Cada celda es adyacente a las celdas que están situadas justo a su lado por cualquiera de sus cuatro lados.**
2. **Las celdas de las columna izquierda son adyacentes a las de la columna de la derecha.**
3. **Las celdas de la fila superior e inferior también son adyacentes.**

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

Vamos a estudiar únicamente la simplificación para generar suma de productos, siendo el proceso similar al de obtener producto de sumas. En este último caso, el mapa de Karnaugh se construirá con 0s en lugar de con 1s.

Para minimizar una función lógica a una suma de productos empleando mapas de Karnaugh debemos seguir los siguientes pasos:

1. **Obtener el mapa de Karnaugh**
2. **Agrupar los 1s**
3. **Hallar el término producto correspondiente a cada grupo.**
4. **Sumar los términos productos obtenidos**

Vamos a estudiar cada uno de los pasos con ejemplos:

Obtener los valores binarios de la expresión, lo cual podríamos hacer con una tabla de verdad (aunque no necesariamente, conviene siempre partir de la tabla de verdad).

Suponemos la función lógica:

$$\bar{B}\,\bar{C} + A\,\bar{B} + A\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,C\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D + A\,\bar{B}\,C\,D$$

En la tabla de la izquierda se muestran las combinaciones de las entradas (A, B, C y D) que producirían un 1 a la salida (S)

$\bar{B}\,\bar{C}$	$A\,\bar{B}$	$A\,B\,\bar{C}$	$A\,\bar{B}\,C\,\bar{D}$	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$	$A\,\bar{B}\,C\,D$
0000 0001 1000 1001	1000 1001 1010 1011	1100 1101	1010	0001	1011

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

A partir de la tabla de verdad o de la función, **trasladamos los 1s a la celda correspondiente en el mapa de Karnaugh**.

Es conveniente comprobar, que en el mapa de Karnaugh debe haber tantos 1s como en la tabla de verdad.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11	1	1		
10	1	1	1	1

Ejercicio 1: Obtén el mapa de Karnaugh para las siguientes tablas de verdad:

A	B	C	S1	S2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

S1

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

S2

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

A	B	C	D	S3	S4	S5	S6
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0

S3

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

S4

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

S5

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

S6

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Agrupamos los 1s del mapa de Karnaugh, rodeando las celdas adyacentes que contengan 1, buscando el maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de dichos grupos. Debemos tener en cuenta que:

- Los grupos tienen que contener 1,2,4,8 o 16 celdas.
- Cada celda de un grupo debe ser adyacente a una o más celdas del mismo grupo (no todas las celdas del grupo deben de ser adyacentes entre sí.
- Incluir en cada grupo el mayor número posible de 1s.
- Cada 1 del mapa debe estar incluido en al menos 1 grupo, pudiendo pertenecer a varios grupos.

Vemos algunos ejemplos más de agrupación para 2, 3 y 4 variables:

AB \ C	0	1
00	1	0
01	1	1
11	0	0
10	1	0

AB \ C	0	1
00	1	0
01	1	0
11	1	1
10	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10		1		

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11	1	1		
10	1	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11				
10		1	1	

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1		1	1

Ejercicio 2: Agrupa correctamente los 1s de los siguientes mapas de Karnaugh obtenidos en el ejercicio nº 1 de manera que se puedan obtener las expresiones lógicas más simples posibles:

S1

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

S2

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

S3

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

S4

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

S5

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

S6

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Una vez agrupados los 1s en un mapa de Karnaugh ya podemos **obtener la suma de productos mínimos**, para lo cual debemos seguir una serie de reglas o normas:

- Cada grupo de celdas que contienen 1s origina un término producto compuesto por todas las variables que aparecen en el grupo en sólo una forma.
- Determinamos la operación producto mínima para cada grupo, negando los 0 y teniendo en cuenta:

Mapa de 3 variables	Mapa de 4 variables
✔ 1 grupo de 1 celda origina un producto de 3 variables	✔ 1 grupo de 1 celda origina un producto un producto de 4 variables
✔ 1 grupo de 2 celdas da lugar a un producto de 2 variables	✔ 1 grupo de 2 celdas origina un producto de 3 variables
✔ 1 grupo de 4 celdas da lugar a un término de 1 variable	✔ 1 grupo de 4 celdas origina un producto de 2 variables
✔ 1 grupo de por 8 celdas origina una expresión que vales 1 (ya que todas las salidas valen 1).	✔ 1 grupo de 8 celdas origina un producto de 1 variable
	✔ 1 grupo de 16 celdas origina una expresión que vale 1 (ya que todas las salidas valen 1)

Como ejemplos vamos a emplear algunos de los agrupamientos realizados con anterioridad:

$\bar{C}$

AB \ C	0	1
00	1	0
01	1	0
11	1	1
10	1	1

A

En el mapa de la izquierda, hay 2 agrupamientos de 4 unos; por lo que cada agrupamiento dará lugar a un producto de una única variable:

➔ Del grupo formado por la columna izquierda podemos deducir que la salida será 1 independientemente del valor de A y B (A y B varían su valor); por lo que debemos descartar las variables A y B.

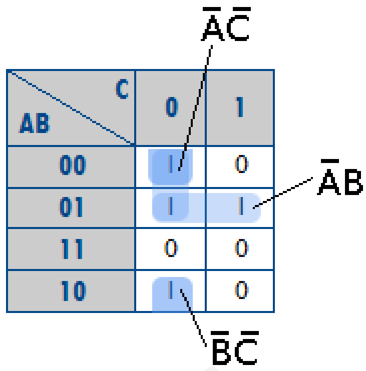
✔ Como C=0, debemos negar C. **El producto resultante será $\bar{C}$**

➔ Del grupo inferior podemos deducir, que tanto B como C varían, por lo que descartamos estas dos variables.

✔ Como A = 1, no negamos A. **El producto será A**

La suma de los términos resultantes nos dará, la función simplificada: **F= A+C**

Veremos otro ejemplo empleando el mapa de Karnaugh de la derecha. En este caso tenemos 3 agrupamientos de 2 unos, por lo que cada agrupamiento dará lugar a un producto de dos variables:



➔ En el agrupamiento horizontal la variable C cambia su valor, por lo que se elimina.

✔ Como A=0 y B=1, negaremos A.. **El producto resultante será $\overline{A}$ B**

➔ En el grupo inferior observamos que A es la que varía; descartándose.

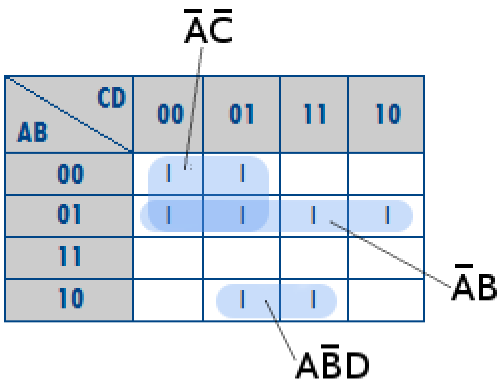
✔ Como B =0 y C=0, negamos ambas variables. **El producto será $\overline{B}$ $\overline{C}$.**

➔ En el último grupo podemos deducir, que es B la que cambia su valor; eliminándose.

✔ Como A =0 y C=0, negamos ambas. **El producto será $\overline{A}$ $\overline{C}$.**

La suma de los términos resultantes nos dará, la función simplificada: **F= $\overline{A}$ B+ $\overline{B}$ $\overline{C}$ + $\overline{A}$ $\overline{C}$**

Ahora veremos otros dos ejemplos, en este caso con mapas de Karnaugh de 4 variables.



En el mapa de Karnaugh de la izquierda se han realizado 2 agrupamientos de 4 unos y 1 agrupamiento de 2 unos. El resultado, por tanto, debe ser dos productos de 2 variables y un producto de 3 variables:

➔ En el agrupamiento de 2 es la variable C la que varía, por lo que se descarta.

✔ Como A=1, B=0 y D=1, **el producto resultante será $A\overline{B}D$.**

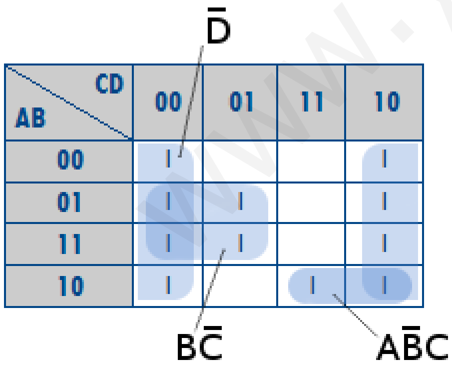
➔ En el agrupamiento de 4 superior observamos que B y D varían, por lo que descartamos dichas variables.

✔ Como A=0 y C=0, debemos negar ambas variables, y **el producto resultante será $\overline{A}$ C.**

✔ En el segundo agrupamiento de 4 podemos ver que C y D varían, (o que A y B permanecen constantes), descartándose C y D.

✔ Como A=1 y B=0, **el producto resultante será $\overline{A}$ B**

La suma de los términos producto derivados del mapa nos dará, la función simplificada: **F= $A\overline{B}D$ + $\overline{A}$ C + $\overline{A}$ B**



En este nuevo ejemplo tenemos un agrupamiento de 8 unos (recordar que las columnas de los extremos poseen términos adyacentes), un grupo de 4 y un grupo de 2 variables. Por consiguiente, el resultado debe ser 1 producto de 1 variable, otro 2 y uno de 3 variables, respectivamente.

➔ En el agrupamiento de 8 variables, A, B y C varían, siendo D la única variable que permanece constante.

✔ Como D=0 **el producto resultante será $\overline{D}$.**

➔ En el agrupamiento de 4 variables, A y D son las que varían, descartándose ambas.

✔ Como B=1 y C=0, negaremos C y **el producto resultante será B $\overline{C}$.**

➔ En el agrupamiento de 2, D es la única variable que cambia su valor, por lo que se elimina.

✔ Como A=1, B= 0 y C=1, negamos B y **el producto resultante será A $\overline{B}$ C.**

Como en casos anteriores la función simplificada será la suma de los productos obtenidos: **F =D + $B\overline{C}$ + $A\overline{B}C$**

Empleando estos ejemplos podemos ver la conveniencia de llevar a cabo la simplificación de la función lógica. Así, si consideramos el último ejemplo, vemos que la primera función canónica en su forma estándar debería poseer 11 productos de 4 variables cada uno (entrega 11 unos en su salida):

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}+\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D+\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}++A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D+\overline{A}\,B\,C\,D+A\,\overline{B}\,C\,D+A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}=$$

$$=\mathbf{D + B\overline{C} + A\overline{B}C}$$

Mientras que la función simplificada sólo emplea 3 productos. A la hora de implementar el circuito, esto supone gran ahorro de puertas lógicas, circuitaje, de rendimiento y de espacio.

Ejercicio 3: A partir de los agrupamientos mostrados, obtén la función simplificada como suma de productos:

a)

AB \ C	0	1
00	0	0
01	1	1
11	1	1
10	1	0

b)

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10		1		

c)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11	1	1		
10	1	1	1	1

Ejercicio 4: A raíz de lo aprendido, obtén la función lógica simplificada para las siguientes tablas de verdad, empleando mapas de Karnaugh:

A	B	C	F1	F2	F3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

A	B	C	D	F4	F5	F6
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1