Matemáticas CCSS EvAU – junio 2024

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen. Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

   a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.
   b) Para $a = -2$, calcule A^{-1}

2. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

   a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,2)$.
   b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & si\ x < 1 \\ ae^{2x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
   b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas, y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

   a) Determine las asíntotas de esta función.
   b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

8. (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:
a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
b) b) Le guste el techno, pero no el pop.

9. (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8ml$.
a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

10. En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35%, el 20% y el 45% de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15% de los alevines criados en el tanque A, el 30% de los alevines criados en el tanque B y el 25% de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:
a) Mida más de 35 mm.
b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

SOLUCIÓN

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.

RESOLUCIÓN

Para comprobar para qué valores la matriz es invertible, se igualará el determinante de la matriz A a cero; y, seguidamente, se despejará el parámetro a:

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & -2 & -1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -2 & a\end{vmatrix}=-a^3+a^2+2a=0\rightarrow a(-a^2+a+2)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases} a=0\\ -a^2+a+2=0\rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(-1)(2)}}{2(-1)}=\dfrac{-1\pm3}{-2}=\begin{cases}a=2\\ a=-1\end{cases}\end{cases}$$

<u>Discusión:</u>

- Caso 1: si $a=-1$, $a=0$, y $a=2\rightarrow|A|=0\rightarrow\nexists A^{-1}$
- Caso 2: si $a\neq-1$, $a\neq0$, y $a\neq2\rightarrow|A|\neq0\rightarrow\exists A^{-1}$

CONCLUSIÓN

Para que la matriz pueda invertirse, el parámetro real a deberá ser diferente de -1, de 0, y de 2.

b) Para $\boldsymbol{a=-2}$, calcule $\boldsymbol{A^{-1}}$

RESOLUCIÓN

Para obtener la inversa de la matriz A para $a=-2$, se seguirá el siguiente procedimiento:

i) Reemplazar -2 en el determinante de la matriz:

$$\begin{cases}a=-2\\ |A|=-a^3+a^2+2a\end{cases}\rightarrow|A|=-(-2)^3+(-2)^2+2(-2)\rightarrow|A|=8$$

ii) Reemplazar -2 en la matriz A, y obtener su adjunta:

$$\begin{cases}a=-2\\ A=\begin{pmatrix}1-a & -2 & -1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -2 & a\end{pmatrix}\end{cases}\rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ -2 & -4 & 2\\ -4 & -4 & -4\end{pmatrix}$$

iii) Transponer la matriz adjunta:

$$[Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}6 & -2 & -4\\ 4 & -4 & -4\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

iv) Reemplazar en la fórmula general, y simplificar:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

CONCLUSIÓN

Para $a = -2$, la matriz inversa de la matriz A será: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

2. **(2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:**

$$\boldsymbol{f'(x) = x^2 + x - 2}$$

a) **Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.**

RESOLUCIÓN

Para obtener la expresión de $f(x)$ debe cumplirse que pase por el punto $(0,2)$; o, lo que es lo mismo, $f(0) = 2$. Contando con esto, primeramente, es necesario obtener la integral de la función dada; para, seguidamente, resolver el cálculo antes mencionado; y, sobre eso, despejar el parámetro c que se obtendrá con el cálculo de la integral.

$$f(x) = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$f(0) = 2 \rightarrow \frac{0^3}{3} + \frac{(x)^2}{2} - 2(0) + c = 2 \rightarrow c = 2$$

CONCLUSIÓN

La expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,2)$ es $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$.

b) **Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.**

RESOLUCIÓN

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como sus posibles extremos relativos, se necesitan conocer previamente su dominio y sus puntos críticos.

Dado que la función $f(x)$ es una expresión polinómica, el dominio de la función son todos los números reales ($Dom\ f(x) = \mathbb{R}$). En cuanto a los puntos críticos, estos se obtienen tomando la derivada de la función, igualándola a cero, y despejando x:

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Obtenida esta información, se procede a crear intervalos considerando el dominio de la función, y realizando intervalos en el mismo. Estos intervalos se crean realizando cortes en el dominio, usando los valores de x antes obtenidos. A continuación, se tomará un valor dentro de los intervalos, y se reemplazará en la primera derivada. Si el signo de la misma en dichos valores es positivo, la función será creciente; y, en caso contrario, decreciente. Si, en un punto crítico, se observa que hay una alternancia de creciente a decreciente, se puede afirmar que se tratará de un máximo; y, en caso de que la alternancia pase de decreciente a creciente, podrá asegurarse de que será un mínimo.

Dominio	$(-\infty, -2)$	$(-2,1)$	$(1, \infty)$
Valor de x	-3	0	3
Signo de $f'(x)$	>0	< 0	>0
Monotonía	Crece	Decrece	Crece
Extremos relativos	Máximo	Mínimo	

CONCLUSIÓN

La función es creciente en los intervalos $(-\infty,-2) \cup (1,\infty)$; y, decreciente, en el intervalo $(-2{,}1)$. Presenta un máximo relativo en $x=-2$; y un mínimo relativo en $x=1$.

3. **(2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:**

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & si\ x<1 \\ ae^{2x} & si\ x\geq 1 \end{cases}}$$

a) **Halle el valor del parámetro $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$ para que $\boldsymbol{f(x)}$ sea continua en todo su dominio.**

RESOLUCIÓN

Para que la función se continua en todo su dominio, debe estudiarse la continuidad en cada uno de sus tramos, así como en el punto en el que se produce el salto de un tramo de función a otro.

En cuanto a la continuidad de cada uno de los tramos, el primero es una combinación de una función polinómica con una exponencial cuyo exponente es una constante; y, por tanto, es siempre continua. El segundo tramo es también una función exponencial un polinomio, por lo que también será continua.

Sobre esto, es necesario entonces revisar el punto en el que se produce el salto de un tramo a otro; es decir, $x=1$. Para que la función sea continua en dicho punto, se deberá cumplir la definición de continuidad.

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\to\begin{cases} f(1)=a\cdot e^{2\cdot 1}=a\cdot e^2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=(1)^2-1+e^2=e^2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=ae^{2\cdot 1}\to a\cdot e^2 \end{cases}\to a\cdot e^2=e^2\to a=1$$

CONCLUSIÓN

Para que la función se continua en todo su dominio, el parámetro a deberá valer 1.

b) **Para $\boldsymbol{a=1}$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas, y las rectas $\boldsymbol{x=1}$ y $\boldsymbol{x=2}$.**

RESOLUCIÓN

Para resolver el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función dada, el eje de abscisas, y las rectas $x=1$ y $x=2$, se necesitará identificar, primeramente, a cuál tramo se corresponde esa área. En este caso, se trataría del segundo tramo de función dado que se pide la integral en el intervalo [1,2], y el segundo tramo exige que $x\geq 1$.

Partiendo de esta idea, lo siguiente que debe comprobarse es si la función puede ser negativa en algún punto de ese intervalo; no obstante, como la función es exponencial, será siempre positiva.

Contando con toda esta información, para calcular el área se debería, primeramente, resolver la integral; y, seguidamente, aplicar la Regla de Barrow. Así las cosas, el cálculo del área será:

$$\int_1^2 e^{2x}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 e^{2x}\cdot 2\cdot dx=\left.\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2=\frac{e^{2(2)}}{2}-\frac{e^{2(1)}}{2}=\frac{e^4}{2}-\frac{e^2}{2}=\frac{e^4-e^2}{2}\cong 23'61u^2$$

CONCLUSIÓN

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas, y las rectas $x=1$ y $x=2$ es de 23'61 unidades cuadradas.

4. **(2 puntos) Se considera la siguiente función de variable real:**

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-2}{x^2-9}}$$

a) **Determine las asíntotas de esta función.**

RESOLUCIÓN

A la hora de estudiar las asíntotas, se deben valorar las asíntotas verticales, horizontales; y, en caso de que no existan estas últimas, oblicuas.

En cuanto a las asíntotas verticales, se debe conocer primeramente el dominio de la función. A continuación, se estudia la tendencia de la función cuando la misma se aproxima a la izquierda y a la derecha de aquellos números que anulen al dominio. Si el resultado obtenido es $-\infty$ o $+\infty$, entonces existirá asíntota vertical en dicho; y, en caso contrario, no:

$$x^2-9=0 \to x^2=9 \to x=\pm 3 \to Dom\, f(x)=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$$

$x=-3$		$x=3$	
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$
Asíntota Vertical en $x=-3$		Asíntota Vertical en $x=3$	

Con respecto a las asíntotas horizontales, se debe estudiar cuál es la tendencia de la función cuando x valores negativos y positivos que sean muy grandes. Si el resultado tiende a un número, entonces existirá asíntota horizontal; y, en caso contrario, no; y, por tanto, sería necesario comprobar si hubiera asíntotas oblicuas.

$x\to -\infty$	$x\to +\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$
Asíntota Horizontal en $y=0$	

CONCLUSIÓN

La función tiene una asíntota vertical en $x=-3$ y en $x=3$, y una asíntota horizontal en $y=0$. No tiene asíntotas oblicuas.

b) **Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $\boldsymbol{x=0}$.**

RESOLUCIÓN

Para obtener la ecuación de la recta tangente, se buscan los valores x_0, y_0 y m; para luego reemplazarlos en la ecuación general de la recta tipo $y-y_0=m(x-x_0)$:

- Para $x=0$, se cumple que $x_0=0$. Por tanto, los valores de y_0 y m serán:
- Valor de y_0: $y_0=f(x_0)=f(0)=\frac{0-2}{0^2-9}=\frac{2}{9} \to y_0=\frac{2}{9}$
- Valor de m: $\left.\begin{array}{c} m=f'(x_0) \\ f'(x)=\frac{-x^2+4x-9}{(x^2-9)^2} \\ x_0=0 \end{array}\right\} m=f'(0)=\frac{-(0)^2+4(0)-9}{((0)^2-9)^2} \to m=-\frac{1}{9}$
- Reemplazando en la ecuación general: $y-\frac{2}{9}=-\frac{1}{9}(x-0) \to y=-\frac{x}{9}+\frac{2}{9}$

CONCLUSIÓN

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ será: $y=-\frac{x}{9}+\frac{2}{9}$

5. **(2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?**

RESOLUCIÓN

Antes de empezar a resolver el ejercicio, es necesario definir cuáles son las variables del problema. En este caso, x se corresponderá con el número de tabletas de 4 gramos; e y, con el número de tabletas de 3 gramos.

En base a eso, se plantearán la función objetivo y las restricciones asociadas al problema:

- Función objetivo: $Max\ B(x,y) = 1'5x + y$
- Restricciones:
  - Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico: $4x + 3y \leq 60$
  - Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos: $x \geq 3$
  - Al menos ocho tabletas de 3 gramos: $y \geq 8$
  - Al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos: $y \geq 2x$
  - Restricciones implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$

Ya con el problema planteado, lo siguiente es representar las inecuaciones que conforman la región factible:

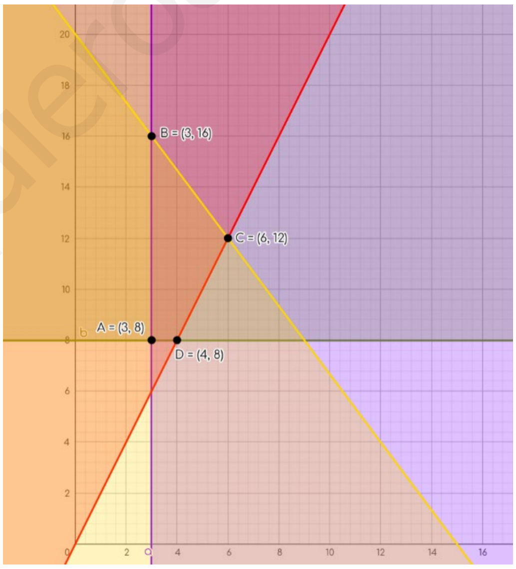
$$Max\ B(x,y) = 1'5x + y$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 60\ [1] \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \\ y \geq 2x\ [2] \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

[1]	
x	y
0	20
15	0

[2]	
x	y
0	0
10	20



Una vez representada la región factible, y obtenidas las coordenadas que la delimitan, se reemplaza cada coordenada en la función objetivo:

- $A = (3,8) \rightarrow B_A(3,8) = 1'5 \cdot 3 + 8 = 12'5€$
- $B = (3,16) \rightarrow B_B(3,16) = 1'5 \cdot 3 + 16 = 20'5€$
- $C = (6,12) \rightarrow B_C(6,12) = 1'5 \cdot 6 + 12 = 21€$
- $D = (4,8) \rightarrow B_D = 1'5 \cdot 4 + 8 = 14€$

CONCLUSIÓN

El máximo beneficio se alcanzará fabricando 6 tabletas de 4 gramos, y 12 tabletas de 3 gamos, dando un beneficio de 21€.

6. **(2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.**

RESOLUCIÓN

Antes de empezar a resolver el ejercicio, es necesario definir cuáles son las variables del problema. En este caso, x se corresponderá con el número de entradas generales; y, con el número de entradas para estudiantes; y z, con el número de entradas infantiles.

En base a eso, se plantearán las ecuaciones del problema:

$$\begin{cases} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x=2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

A continuación, se resolverá el ejercicio. En este caso, se utilizará el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x-2z=0 \end{cases} \rightarrow A^*= \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 10 & 8 & 5 & 4900 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3'=f_3-f_1]{f_2'=f_2-10f_1}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2' \\ f_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3''=2f_3'-f_2'} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2' \\ f_3'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \\ 0 & 0 & -1 & -100 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+z=600 \rightarrow x=600-300-100 \rightarrow x=200 \\ -2y-5z=-1100 \rightarrow y=\dfrac{-1100+5\cdot 100}{-2} \rightarrow y=300 \\ -z=-100 \rightarrow z=100 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN

Se vendieron 200 entradas generales, 300 entradas para estudiantes, y 100 entradas infantiles.

7. **(2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x+y+z=a} \\ \boldsymbol{x+ay+z=a+1} \\ \boldsymbol{x+y+az=2} \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$.

RESOLUCIÓN

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario transcribir las ecuaciones a matriz:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y+z=a \\ x+ay+z=a+1 \\ x+y+az=2 \end{array}\right. \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right)$$

<u>Discusión del sistema</u>

Para discutir el sistema, se hará el siguiente procedimiento:

i) Se calcula el determinante de la matriz A, se iguala a cero, y se despeja el parámetro a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2a = 0 \rightarrow 2a(a-1) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 0 \rightarrow a = 0 \\ a-1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{array}\right.$$

ii) Se discuten los posibles tipos de sistema, mediante casos:

<u>Caso 1:</u> $a \neq 0$ y $a \neq 1$

- $|A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$
- $|A^*| \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 3$

Interpretación

$Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ inc$

SCD

<u>Caso 2</u>: $a = 0$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- $|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$
- $|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \rightarrow Rg(A^*) = 3$

Interpretación

$Rg(A) \neq Rg(A^*)$

SI

<u>Caso 3</u>: $a = 1$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

- $|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$
- $|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A^*) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 2$

Interpretación

$Rg(A) = Rg(A^*) < Nº\ inc$

SCI

CONCLUSIÓN

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema tiene una única solución.
- Si $a = 0$, el sistema no tiene solución.
- Si $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $\boldsymbol{a = 1}$.

RESOLUCIÓN

Como se comprobó en el apartado anterior que, para cuando $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones, es necesario descartar una ecuación de las tres dadas (debido a que el rango de la matriz A es 2), y descartar una solución de las tres dadas (debido a que el rango de A^* es 2). En este caso, dado que la dependencia está entre las ecuaciones 2 y 3 ($Ec_2 = Ec_3$), se optará por descartar la tercera ecuación, y asignar a la variable z como el parámetro solución λ:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \rightarrow 2x + y = 1 - \lambda \\ x + y + z = 2 \rightarrow x + y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Se obtienen con esto dos ecuaciones dependientes ambas de x e y. Seguidamente pues, se resuelven las otras dos variables. En este caso, se optará por el método de reducción, restándole a la primera ecuación, la segunda:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 - \lambda \\ x + y = 2 - \lambda \end{cases} \rightarrow x = -1; y = 2 - \lambda - (-1) \rightarrow y - 2 - \lambda + 1 \rightarrow y = 3 - \lambda$$

CONCLUSIÓN

La solución para el sistema de ecuaciones será $x = -1; y = 3 - \lambda; z = \lambda$.

8. **(2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:**

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario definir los sucesos planteados en el ejercicio:

- Suceso $A = que\ le\ guste\ la\ música\ pop$: $P(A) = \frac{90}{200} = 0'45$
- Suceso $B = que\ le\ guste\ la\ música\ techno$: $P(B) = \frac{70}{200} = 0'35$
- Suceso $A \cap B = les\ gustan\ ambos\ géneros$: $P(A \cap B) = \frac{30}{200} = 0'15$

Con esta información, puede ya resolverse el ejercicio

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

RESOLUCIÓN

El suceso "$que\ le\ guste\ al\ menos\ uno\ de\ los\ dos\ géneros\ musicales$" se refiere a que le guste uno u otro género; o lo que es lo mismo, que le guste la música pop, o le guste la música techno:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = 0'45 + 0'35 - 0'15 = 0'65$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que le guste al menos uno de los dos géneros es de un 65%.

b) Le guste el techno, pero no el pop.

RESOLUCIÓN

El suceso "$que\ le\ guste\ el\ techno\ pero\ no\ el\ pop$" se plantearía de la siguiente manera:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0'35 - 0'15 = 0'2$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que le guste el techno, pero no el pop es de un 20%.

9. **(2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8ml$.**

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario identificar el tipo de distribución que se tiene. Dado que e indica que es una distribución normal, la variable se distribuiría de la siguiente manera:

$$N(\mu, 8)$$

a) **Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.**

RESOLUCIÓN

Para calcular el intervalo de confianza para la cantidad media de agua absorbida, se haré el siguiente procedimiento:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow IC(\bar{x})_{0,95} = \left(120 \pm 1'96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}\right) = (120 \pm 3'14) = (116'86; 123'14)$$

NOTA: Cálculo de $z\alpha/_2$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{1-0,95}{2} = 0'975 \rightarrow P\left(z\alpha/_2 = m\right) = 0'975 \rightarrow z\alpha/_2 = 1'96$

CONCLUSIÓN

La cantidad de agua absorbida estará comprendida entre 116'86 ml y 123'14 ml, con una confianza del 95%.

b) **Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90%.**

RESOLUCIÓN

a) <u>Cálculo del tamaño de la muestra:</u>

$$E = z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z\alpha/_2 \cdot \sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n = \left(\frac{1'645 \cdot 8}{1}\right)^2 = 173'19 \cong 174$$

NOTA: Cálculo de $z\alpha/_2$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{0,1}{2} = 0'95 \rightarrow z\alpha/_2 = 1'645$

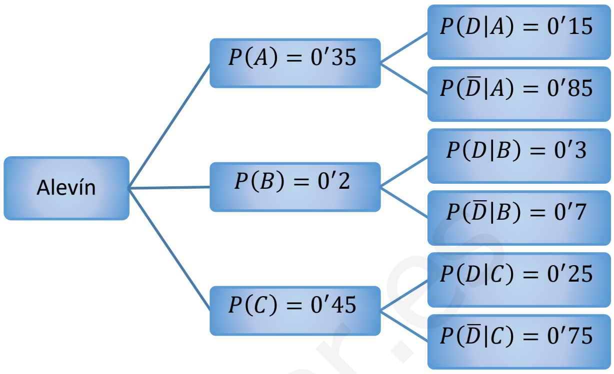
CONCLUSIÓN

Para que el error cometido sea menor de 1 ml, con un nivel de confianza del 90%, el tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 174 plantas.

10. En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35%, el 20% y el 45% de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15% de los alevines criados en el tanque A, el 30% de los alevines criados en el tanque B y el 25% de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

Antes de comenzar, es necesario definir los sucesos siguientes:

- $A =$ Piscifactoría A: $P(A) = 0'35$
- $B =$ Piscifactoría B: $P(B) = 0'2$
- $C =$Piscifactoría C: $P(C) = 0'45$
- $D|A =$ Probabilidad de que un alevín mida más de 35 mm siendo criado en el tanque A: $P(D|A) = 0'15$
- $D|B =$ Probabilidad de que un alevín mida más de 35 mm siendo criado en el tanque B: $P(D|B) = 0'3$
- $D|C =$ Probabilidad de que un alevín mida más de 35 mm siendo criado en el tanque C: $P(D|C) = 0'25$



Con todo esto, puede resolverse el ejercicio.

a) **Mida más de 35 mm.**

RESOLUCIÓN

Para calcular la probabilidad de que mida más de 35 mm, se aplicará el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(D) = 0'35 \cdot 0'15 + 0'2 \cdot 0'3 + 0'45 \cdot 0'25 = 0'225$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que un alevín mida más de 35 mm es de un 22'5%.

b) **Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.**

RESOLUCIÓN

Para calcular la probabilidad de, sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C, se resolverá mediante el Teorema de Bayes:

$$P(C|\overline{D}) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{D}|C)}{1 - P(D)} \rightarrow P(C|\overline{D}) = \frac{0'45 \cdot 0'75}{1 - 0'225} = 0'4355$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que, sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C, es de un 43'55%.