uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** **MATERIA**: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

---

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ a para los que exista la inversa de A.

b) Para $a = -2$, calcule A^{-1}.

2. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 2).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & si \quad x < 1 \\ ae^{2x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=a \\ x+ay+z=a+1 \\ x+y+az=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

8. (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:
a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
b) Le guste el techno pero no el pop.

9. (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.
a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90%.

10. (2 puntos) En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35%, el 20% y el 45% de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15% de los alevines criados en el tanque A, el 30% de los alevines criados en el tanque B y el 25% de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:
a) Mida más de 35 mm.
b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A=\begin{pmatrix}1-a & -2 & -1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -2 & a\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ a para los que exista la inversa de A.

b) Para $a = -2$, calcule A^{-1}.

a) Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & -2 & -1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -2 & a\end{vmatrix}=a^2(1-a)-4+2+2a+2a+2(1-a)=$$

$$=a^2-a^3-2+4a+2-2a=-a^3+a^2+2a=-a\left(a^2-a-2\right)$$

$$|A|=0\Rightarrow -a\left(a^2-a-2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\ a^2-a-2=0\rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{2}=\boxed{2=a}\\ \dfrac{1-3}{2}=\boxed{-1=a}\end{cases}\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de –1, 0 y 2.

b) Para $a = -2$ existe la inversa. La matriz queda $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=12-4+2-4-4+6=8\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -2\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6 & -2 & -4\\ 4 & -4 & -4\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/4 & -1/4 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1/4 & 1/4 & -1/2\end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Sea *f(x)* una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) Obtenga la expresión de la función *f(x)* sabiendo que pasa por el punto (0, 2).
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, clasificando sus extremos relativos, si procede.

a) La función *f(x)* es la primitiva de la derivada $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x^2 + x - 2dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Como la función pasa por el punto (0, 2) entonces $f(0) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 2}$$

La función *f(x)* tiene la expresión $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$.

b) Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x^2 + x - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1 = x} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos *x* = *–3* y la derivada vale $f'(-3) = (-3)^2 - 3 - 2 = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, 1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f'(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(-2, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$.
La función tiene un máximo relativo en *x* = *–2* y un mínimo relativo en *x* = *1*.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & si \quad x<1 \\ ae^{2x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que *f(x)* sea continua en todo su dominio.
b) Para *a = 1*, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas *x = 1* y *x = 2*.

a) La función es continua para *x < 1* y para $x\geq 1$ pues está definida como una función polinómica y una función exponencial. Para que sea continua debe serlo en *x = 1*. Para ello deben ser iguales el valor de la función en *x = 1* y los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=ae^2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-x+e^2=1^2-1+e^2=e^2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} ae^{2x}=ae^2 \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow ae^2=e^2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{e^2}{e^2}=1}$$

Para que la función sea continua debe ser *a = 1*.

b) Para *a = 1* la función es continua y su expresión es $f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & si \quad x<1 \\ e^{2x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$. En el intervalo (1, 2) donde está la región de la cual deseamos hallar el área la función es $f(x)=e^{2x}$
.
Como esta función no corta el eje de abscisas pues siempre es positiva el área de la región es la integral definida entre 1 y 2 de la función.

$$Área=\int_1^2 f(x)=\int_1^2 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2=\frac{e^4-e^2}{2}\simeq 23.6\ u^2$$

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas *x = 1* y *x = 2* tiene un valor aproximado de 23.6 unidades cuadradas.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-9}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa *x = 0*.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x-2}{x^2-9}=\frac{-3-2}{(-3)^2-9}=\frac{-5}{0}=\infty$$

$x=-3$ es asíntota vertical.

¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2-9}=\frac{3-2}{3^2-9}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2-9}=\{\text{Grado del numerador} < \text{grado del denominador}\}=0$$

$y=0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

b) La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-9} \Rightarrow f(0)=\frac{0-2}{0^2-9}=\frac{2}{9}$$

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-9} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-9)-2x(x-2)}{(x^2-9)^2}=\frac{x^2-9-2x^2+4x}{(x^2-9)^2}=\frac{-x^2+4x-9}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-0^2+4\cdot 0-9}{(0^2-9)^2}=\frac{-1}{9}$$

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow y-\frac{2}{9}=\frac{-1}{9}x \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$ es $y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{9}$.

5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Llamemos x = "número de tabletas de 4 gramos", y = "número de tabletas de 3 gramos".
Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=1.5x+y$.
Las restricciones del problema son:

"Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente" → $4x+3y\leq 60$
"Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos" → $x\geq 3$
"Se necesitan al menos ocho tabletas de 3 gramos" → $y\geq 8$
"Se necesitan al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos" → $y\geq 2x$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y\leq 60\\ x\geq 3\\ y\geq 8\\ y\geq 2x\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$4x+3y=60$

x	$y=\frac{60-4x}{3}$
0	20
3	16
6	12

$y=8$

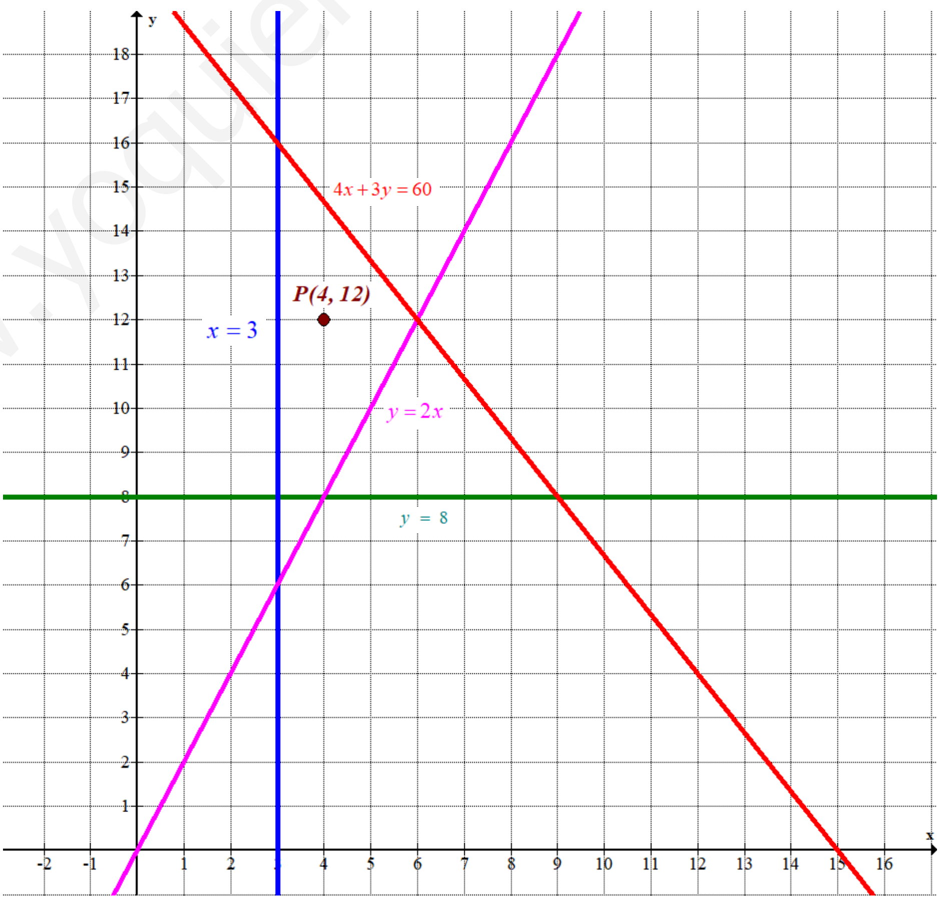
x	$y=8$
0	8
3	8
4	8

$x=3$

$x=3$	y
3	0
3	8
3	16

$y=2x$

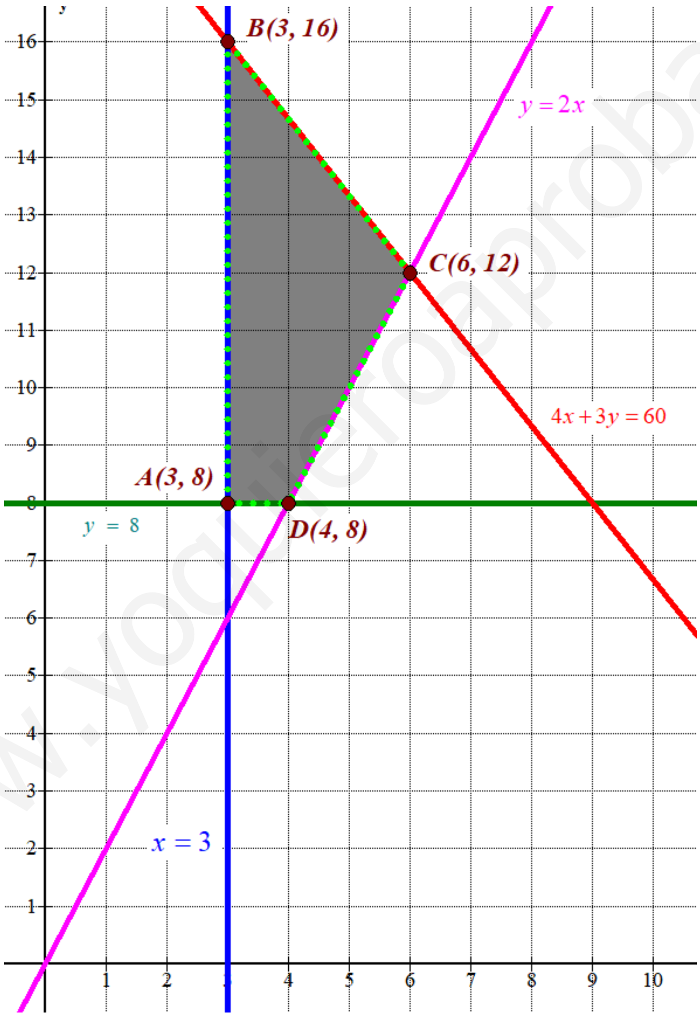
x	$y=2x$
0	0
4	8
6	12



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+3y\leq 60 \\ x\geq 3 \\ y\geq 8 \\ y\geq 2x \end{array}\right\}$ la región está en por encima de la recta horizontal verde, a la derecha de la recta vertical azul, por encima de la recta rosa y por debajo de la recta roja. Lo comprobamos probando si el punto P(4, 12) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 4+3\cdot 12\leq 60 \\ 4\geq 3 \\ 12\geq 8 \\ 12\geq 2\cdot 4 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=1.5x+y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(3, 8) → $B(3,8)=1.5\cdot 3+8=12.5$
B(3, 16) → $B(3,16)=1.5\cdot 3+16=20.5$
C(6, 12) → $B(6,12)=1.5\cdot 6+12=$ 21 ¡Máximo!
D(4, 8) → $B(4,8)=1.5\cdot 4+8=14$

El beneficio máximo es de 21 € y se consigue en el vértice C(6, 12), que significa fabricar 6 tabletas de 4 gramos y 12 de 3 gramos.

6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Llamamos "x" al número de entradas generales, "y" al número de entradas para estudiantes y "z" al número de entradas infantiles.

"El equipo ha conseguido vender 600 entradas" → $x+y+z=600$

"Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros" → $10x+8y+5z=4900$

"Ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles" → $x=2z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+y+z=600 \\ 10\cdot 2z+8y+5z=4900 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=600 \\ 8y+25z=4900 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=600-3z \\ 8y+25z=4900 \end{array}\right\} \Rightarrow 8(600-3z)+25z=4900 \Rightarrow 4800-24z+25z=4900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=100} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=200} \\ \boxed{y=600-300=300} \end{cases}$$

Se han vendido 200 entradas generales, 300 para estudiantes y 100 entradas infantiles.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=a \\ x+ay+z=a+1 \\ x+y+az=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para *a = 1*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2a^2+1+1-a-a-2=2a^2-2a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2-2a=0 \Rightarrow 2a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-1=0 \to \boxed{a=1} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,1^a - 2\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,1^a - 2\cdot Fila\,3^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -4 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a + Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -6 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&1&1&2\\1&1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&2\\-1&-1&-1&-2\\\hline 0&0&0&0\end{array}\to \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\cdot Fila\,2^a-Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}2&2&2&4\\-2&-1&-1&-1\\\hline 0&1&1&3\end{array}\to \text{Nueva Fila } 2^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}2&1&1&1\\0&1&1&3\\ \underbrace{0\quad 0\quad 0}_{A}&&&0\end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a\neq 0$ y $a\neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a=0$ es incompatible (sin solución) y para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Lo resolvemos para $a=1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 3)

$$\left.\begin{array}{r}2x+y+z=1\\x+y+z=2\\x+y+z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\{Ecuación\,2^a=Ecuación\,3^a\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+y+z=1\\x+y+z=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}z=1-2x-y\\x+y+z=2\end{array}\right\}\Rightarrow x+\cancel{y}+1-2x-\cancel{y}=2\Rightarrow -x=1\Rightarrow x=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=1-2(-1)-y\Rightarrow z=3-y\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=-1\\y=\lambda & ;\lambda\in\mathbb{R}\\z=3-\lambda\end{cases}}$$

Para $a=1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=-1\\y=\lambda & ;\lambda\in\mathbb{R}\\z=3-\lambda\end{cases}$.

8. (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno pero no el pop.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos que vienen implícitos en los datos proporcionados en el problema.

	Gusta el techno	**No le gusta el techno**	
Gusta el pop	**30**		**90**
No gusta el pop			
	70		**200**

Completamos la tabla.

	Gusta el techno	**No le gusta el techno**	
Gusta el pop	**30**	**60**	**90**
No gusta el pop	**40**	**70**	**110**
	70	**130**	**200**

Aplicamos la regla de Laplace y respondemos a las preguntas planteadas.

a) De los 200 asistentes sólo hay 70 personas a las que no les gusta ni el techno ni el pop, por lo que hay 200 – 70 = 130 que le gusta al menos uno de los dos géneros.

$$P(\text{Guste al menos uno de los géneros}) = \frac{130}{200} = \boxed{\frac{13}{20} = 0.65}$$

b) De los 200 asistentes hay 40 asistentes que les gusta el techno y no el pop.

$$P(\text{Guste el techno y no el pop}) = \frac{40}{200} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

9. (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90%.

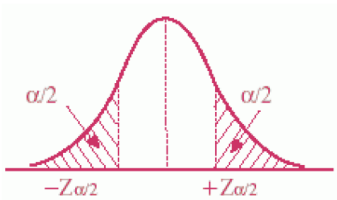
X = "La cantidad de agua absorbida en mililitros por un tipo particular de planta acuática"

X = N(μ, 8)

a) Tamaño de muestra es $n = 25$ y la media muestral es $\bar{x} = 120\,ml$

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} = 3.136\,ml$$

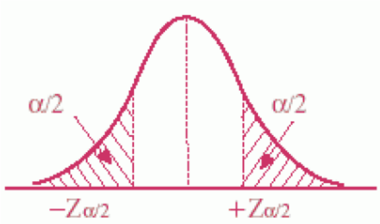
El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (120 - 3.136,\ 120 + 3.136) = (116.864,\ 123.136)$$

La cantidad de agua absorbida estará comprendida entre 116.864 ml y 123.136 ml, con una confianza del 95%.

b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Igualamos el error a 1 ml y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.645 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot 8 \Rightarrow n = (1.645 \cdot 8)^2 \Rightarrow \boxed{n = 173.19}$$

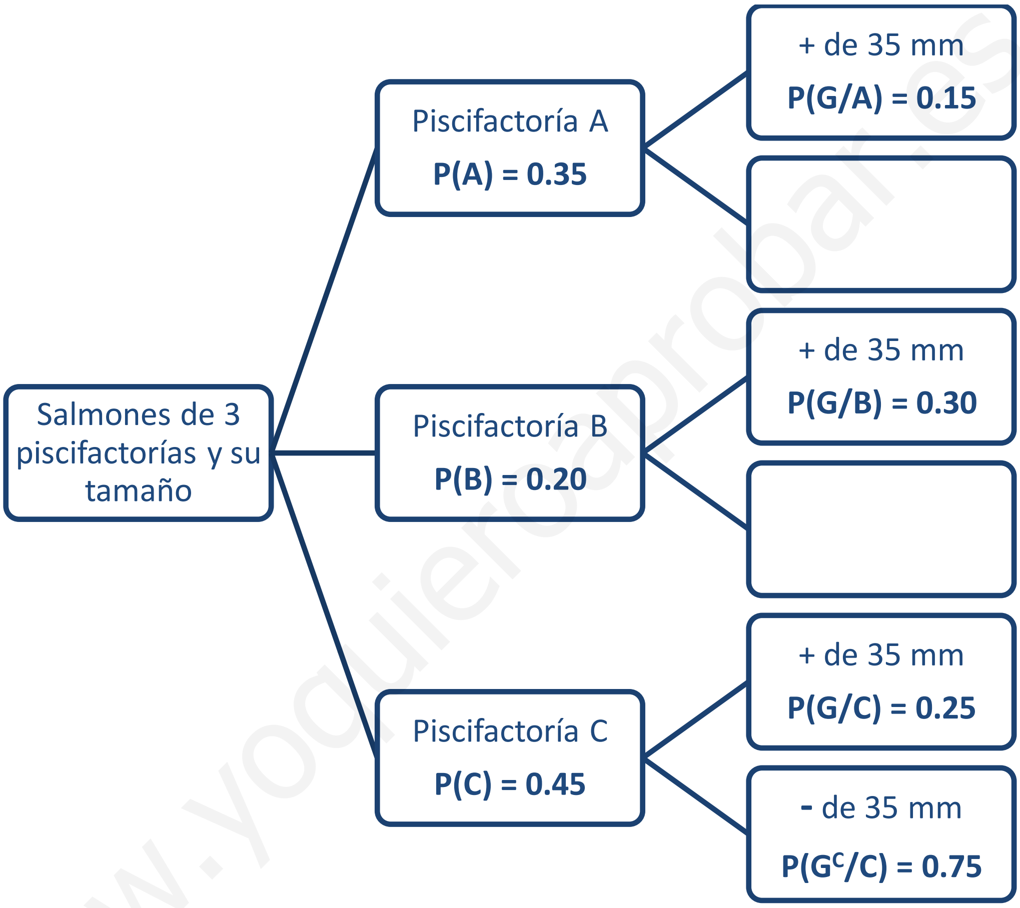
Para que el error cometido sea menor de 1 ml, con un nivel de confianza del 90%, el tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 174 plantas.

10. (2 puntos) En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35%, el 20% y el 45% de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15% de los alevines criados en el tanque A, el 30% de los alevines criados en el tanque B y el 25% de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Llamamos A, B y C al suceso "el alevín es criado en tanque A, B o C, respectivamente".
Llamamos G al suceso "el alevín mide más de 35 mm"
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)+P(C)P(G/C)=$$

$$=0.35\cdot 0.15+0.2\cdot 0.3+0.45\cdot 0.25=\boxed{0.225}$$

b) Nos piden calcular $P(C/\overline{G})$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{G})=\frac{P(C\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\frac{P(C)P(\overline{G}/C)}{1-P(G)}=\frac{0.45\cdot 0.75}{1-0.225}=\boxed{\frac{27}{62}\simeq 0.436}$$