PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2023–2024

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**

c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**

d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

e) **Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque.** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x) - a\,\mathrm{sen}(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\[2ex] b\cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Halla la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024}.

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 1 \\ (k-1)x & + & y & + & z & = & k \\ x & + & (k-1)y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de k.

b) **[0,75 puntos]** Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

a) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y + z & = 2 \\ y - z & = 1 \end{array} \right.$

b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

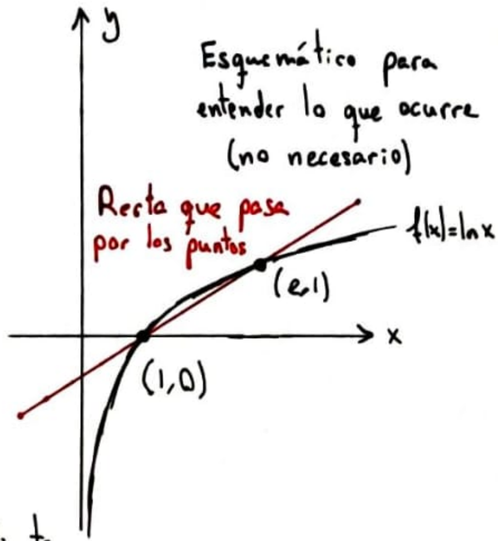
EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de r y s.

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

Bloque A



1

a) Para resolver este apartado sólo debemos calcular la pendiente de la recta secante que pasa por (1,0) y (e,1) y buscar el(los) punto(s) de la gráfica con igual pendiente.

- Recta que pasa por (1,0) y (e,1): $y-y_1=m(x-x_1)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{e-1}=\frac{1}{e-1}.$$

Así: $y-0=\frac{1}{e-1}(x-1) \rightarrow y=\frac{1}{e-1}(x-1)$ donde la pendiente es $m=\frac{1}{e-1}$.

- Derivamos $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

- Igualamos $f'(x)$ a m para hallar la abscisa x donde la recta tangente a $f(x)$ es paralela a $y=\frac{1}{e-1}(x-1)$:

$$f'(x)=m \rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{e-1} \rightarrow \boxed{x^*=e-1}$$

- Calculamos el punto de contacto entre $f(x)$ y la recta tangente pedida:

$$f(x^*)=\ln(e-1) \rightarrow \boxed{P(e-1, \ln(e-1))}$$

No pedido

(y la recta tangente sería $y-\ln(e-1)=\frac{1}{e-1}(x-(e-1))$)

b) Para hallar la ecuación de la recta normal a f en $A(1,0)$ usamos la ecuación de la recta normal:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), \text{ donde } x_0=1, y_0=0.$$

$$f'(x_0=1)=\frac{1}{1}=1$$

Así, la recta pedida es:

$$y-0=-1(x-1) \rightarrow \boxed{y=1-x}$$

②

Como f debe ser continua, debemos asegurar que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos(x) - a\,\text{sen}\,x}{x^3} = \frac{0-0}{0} \xrightarrow{L'H}$$

$\boxed{a=1}$ para seguir aplicando L'Hôpital

$$\to \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - x\,\text{sen}\,x - a\cos x}{3x^2} = \frac{1-0-a}{0} \overset{\downarrow}{=} \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H}$$

$$\to \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{\text{sen}\,x} - \text{sen}\,x - x\cos x + \cancel{\text{sen}\,x}}{6x} = \frac{-0-0}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H}$$

$$\to \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cos x - \cos x + x\,\text{sen}\,x}{6} = \frac{-1-1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} b\cos(x) - 1 = b - 1$$

Así:

$$b - 1 = -\frac{1}{3} \to b = \frac{2}{3}$$

Así: $\boxed{a=1}$ y $\boxed{b=\frac{2}{3}}$.

$\boxed{\text{Bloque B}}$

(3)

$$F(x) = \int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \circledast$$

Dividimos ambos polinomios $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x & x \\ \hline x+2 & \end{array}$$

Así: $\dfrac{x^3+2}{x^2-1} = x + \dfrac{x+2}{x^2-1}$

$$\circledast = \int x\,dx + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \overbrace{\int \frac{x}{x^2-1}\,dx}^{I_1} + \overbrace{\int \frac{2}{x^2-1}\,dx}^{I_2}$$

$$I_1 \rightarrow \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2-1 \\ du = 2x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(|u|) \overset{u=x^2-1}{=} \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|)$$

I_2 (Descomponemos en fracciones simples): $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} \rightarrow 2 = A(x+1) + B(x-1)$

Si $x=1 \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A=1$

Si $x=-1 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B=-1$

$$I_2 \rightarrow \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx = \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)$$

Así:

$$F(x) = \frac{\ln(|x^2-1|) + x^2}{2} + \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + C$$

Finalmente, calculamos C haciendo que F(x) pase por (0,1):

$$1 = \frac{\overset{0}{\cancel{\ln(1)}} + 0^2}{2} + \overset{0}{\cancel{\ln(1)}} - \overset{0}{\cancel{\ln(1)}} + C = C \rightarrow \boxed{C=1}$$

Por tanto:

$$F(x) = \frac{\ln(|x^2-1|) + x^2}{2} + \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + 1$$

④

Para resolver este ejercicio debemos integrar dos veces:

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int x\cos x\,dx = \underset{\text{(Por partes)}}{\left[\begin{array}{l} u = x \;;\; du = dx \\ dv = \cos x\,dx \;;\; v = \operatorname{sen} x \end{array}\right]} = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + C_1$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\operatorname{sen} x\,dx + \int \cos x\,dx + \int C_1\,dx = \overset{I_1}{\int x\operatorname{sen} x\,dx} + \operatorname{sen} x + C_1\cdot x + C_2$$

$$I_1 = \int x\operatorname{sen} x\,dx = \overset{\text{(Por partes)}}{\left[\begin{array}{l} u = x \;;\; du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \;;\; v = -\cos x\,dx \end{array}\right]} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$$

Así:

$$f(x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + C_1\cdot x + C_2 = 2\operatorname{sen} x - x\cos x + C_1\cdot x + C_2$$

Hacemos que pase por los puntos dados:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \frac{\pi}{2} = 2\cdot \overset{0}{\operatorname{sen}(0)} - 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \to \boxed{\frac{\pi}{2} = C_2} \;//$$

$$(\pi\; 2\pi) \to 2\pi = 2\,\overset{0}{\operatorname{sen}(\pi)} - \pi\,\overset{-1}{\cos(\pi)} + C_1\cdot\pi + \frac{\pi}{2} \to 2\pi = \pi + C_1\cdot\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\to C_1\cdot\pi = \frac{\pi}{2} \to \boxed{C_1 = \frac{1}{2}} \;//$$

Por tanto:

$$f(x) = 2\operatorname{sen} x - x\cos x + \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \;//$$

Bloque C

⑤

a) Vamos a intentar hallar un patrón:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A\cdot A\cdot A = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos, por tanto, que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así:

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

b)

$$A^2XA + I = 0 \rightarrow A^2XA = -I \rightarrow A^2X = -A^{-1} \rightarrow AX = -(A^{-1})^2 \rightarrow X = -(A^{-1})^3$$

Calculamos (si existe) A^{-1}:

$|A| = 1 \neq 0$ (por tanto, A es invertible)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/8 & 1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 - \frac{1}{8}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/8 & 1 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 - \frac{1}{8}f_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Así: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (sigue un patrón muy similar a A)

Por tanto: $$X = -(A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} //$$

⑥

a) El sistema dado en forma matricial es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ K-1 & 1 & 1 & K \\ 1 & K-1 & 1 & 0 \end{array}\right) = A^*$$
(with the first three columns labelled A)

- Si el rango de A es 3, el sistema será compatible determinado.

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow (K-1)^2 + \cancel{1} \cancel{-1} - (K-1) = 0 \rightarrow (K-1)^2 - (K-1) = 0 \rightarrow (K-1)\left[(K-1)-1\right] = 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} K-1=0 \rightarrow \boxed{K=1} \\ K-1-1=0 \rightarrow \boxed{K=2} \end{array}$$

Si $K \neq 1,2$, el sistema será compatible determinado.//

- Si $K=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

rango (A) = 2, ya que el menor $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0$.

Ahora buscamos un menor en A^* para ver si su rango es 3.

Escogemos $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$ (ya que dos columnas son linealmente dependientes)

Probamos $\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$ (es igual que A)

Por último $\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0$ (otra vez dos columnas linealmente dependientes)

Así, como $rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3$, el sistema es compatible indeterminado si $K=1$ con un parámetro libre.//

- Si $K=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

rango (A) = 2, ya que el menor $\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1 \neq 0$.

Ahora buscamos un menor en A^* para ver si su rango es 3.

Puede verse directamente que es incompatible, ya que nos dice que $x+y+z=2$ y $x+y+z=0$, lo que no tiene sentido.

Probamos

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 - 2 - 1 = -2 \neq 0$$

Por tanto, $rg(A) = 2 < rg(A) = 3$

Sistema incompatible si $K=2$//

Así, el sistema es un SCD $\forall K \neq 1,2$, es un SCI si $K=1$ y es un S.I. si $K=2$.

Si $k=1$:

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ x + z &= 9 \end{aligned}$$

Establecemos $y = \lambda$ como parámetro libre. Así:

$y = \lambda$

$y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - \lambda$

$x + z = 0 \Rightarrow x = \lambda - 1$

La solución, por tanto, es $(\lambda - 1, \lambda, 1 - \lambda)$. //

Si $\lambda = y = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1)$ //, que es la solución pedida. //

$\boxed{\text{Bloque D}}$

7

a) Para resolver este ejercicio debemos primero hallar el punto de la recta r de menor distancia a P. Para ello, hallamos el plano π perpendicular a r que contiene a P.

- Calculamos el vector director de la recta r con los vectores normales de los planos que la definen:

$$\begin{matrix} \vec{n}_1 = (1,-2,1) \\ \vec{n}_2 = (0,1,-1) \end{matrix} \Rightarrow \vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

- Hacemos que el plano $\pi \equiv x+y+z=D$ pase por $(2,2,1)$:

$$2+2+1=D \rightarrow D=5$$

- Calculamos el punto de corte de π y r:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=2 \\ y-z&=1 \\ x+y+z&=5 \end{aligned}\right\} \text{③}-\text{①} \rightarrow 3y=3 \rightarrow \boxed{y=1} \xrightarrow{\text{②}} \boxed{z=y-1=0} \rightarrow \boxed{x=5-y-z=4}$$

Así: $x=4,\ y=1,\ z=0$

$C(4,1,0)$

- Calculamos el vector $\vec{PC}$:

$$\vec{PC} = (4-2,\ 1-2,\ 0-1) = (2,-1,-1)$$

- Finalmente, el simétrico de P respecto de r será $P^* = P + 2\vec{PC}$

$$P^* = (2,2,1) + 2(2,-1,-1) = (6,0,-1) //$$

b) Para resolver este ejercicio operamos de manera similar al apartado anterior pero buscando la recta perpendicular a π que pasa por $Q(-1,-1,3)$

- Calculamos r: (vector director $\vec{d}_r = (1,-2,1)$)

$$r \equiv \begin{cases} x = A+\lambda \\ y = B-2\lambda \\ z = C+\lambda \end{cases} \quad \text{Como debe pasar por } (1,-1,-3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases}$$

- Obtenemos el corte de r y π:

$$x-2y+z+6=0 \xrightarrow{r} (1+\lambda)-2(-1-2\lambda)-3+\lambda+6=0 \rightarrow 1+\lambda+2+4\lambda-3+\lambda+6=0$$

$$\rightarrow 6\lambda+6=0 \rightarrow \lambda=-1 //$$

- Calculamos el punto de corte C de r y π sustituyendo $\lambda = -1$ en r:

  $C(0, 1, -4)$

- Obtenemos el vector $\vec{QC}$: $\vec{QC} = (0-1, 1+1, -4+3) = (-1, 2, -1)$

- Así, el simétrico de Q con respecto a π será $Q^* = Q + 2 \cdot \vec{QC}$

  $Q^* = (1, -1, -3) + 2(-1, 2, -1) = (-1, 3, -5)$ //

8

a) Para resolver este apartado sólo debemos recordar que la posición relativa de dos rectas se puede analizar con la matriz de los vectores de las rectas. Esto es:

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ AB_1 & AB_2 & AB_3 \end{pmatrix}, \text{ donde } \begin{array}{l} \vec{u} \equiv \text{Vector director de } r \\ \vec{v} \equiv \text{Vector director de } s \\ \vec{AB} \equiv \text{Vector que une dos puntos de las rectas.} \end{array}$$

- Calculamos el vector director de r:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, -2)$$

- Calculamos el vector director de s:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$$

- Cogemos dos puntos cualesquiera de r y s y calculemos el vector que los une:

$A(0,0,0)$
$B(0,-7,0)$ $\rightarrow \vec{AB} = (0,-7,0)$

- Calculamos el rango de M:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 + 14 + 0 - 0 - 0 - 0 = 14 \neq 0$

Como $\det(M) \neq 0$, $\text{rango}(M) = 3$.

Por tanto, s y r son rectas que <u>se cruzan</u> (no coincidentes, no paralelas y no secantes)

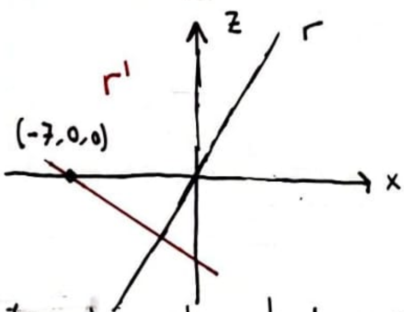
b) Tomamos los vectores directores de ambas rectas y calculamos π con el producto vectorial de ambos, que será su vector normal:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 1)$$

Así: $\pi \equiv -2x - 2y + z = D$

Para calcular D debemos buscar un punto P que equidiste de r y s. Para hacerlo basta darse cuenta de lo siguiente:

- r es una recta contenida en el plano XZ de ecuación $z = 2x$ y s corta al plano XZ en $C(-7,0,0)$.



- Calculamos r' que es perpendicular a r y pasa por (-7,0,0) y está contenida en XZ:

$$r' \equiv z - 0 = -\frac{1}{2}(x+7) \Rightarrow z = -\frac{x}{2} - \frac{7}{2}$$

- Hallamos el corte de r y r': $2x = -\frac{x}{2} - \frac{7}{2} \Rightarrow 4x = -x - 7 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{-7}{5}$

$C_2(-7/5, 0, \frac{-14}{5})$.

Por tanto, un punto equidistante entre ambas rectas sería el punto medio de $C(-7,0,0)$ y $C_2\left(-\frac{7}{5},0,-\frac{14}{5}\right)$.

$$m=\left(\frac{-7-7/5}{2},0,-\frac{7}{5}\right)=\left(-\frac{21}{5},0,-\frac{7}{5}\right)$$

Así, el plano π pedido es:

$$-2x-2y+z=D \Rightarrow -2\cdot\left(-\frac{21}{5}\right)-2\cdot 0+\left(\frac{-7}{5}\right)=D \rightarrow \boxed{D=7}$$

Por tanto:

$$\boxed{\pi \equiv -2x-2y+z=7}$$