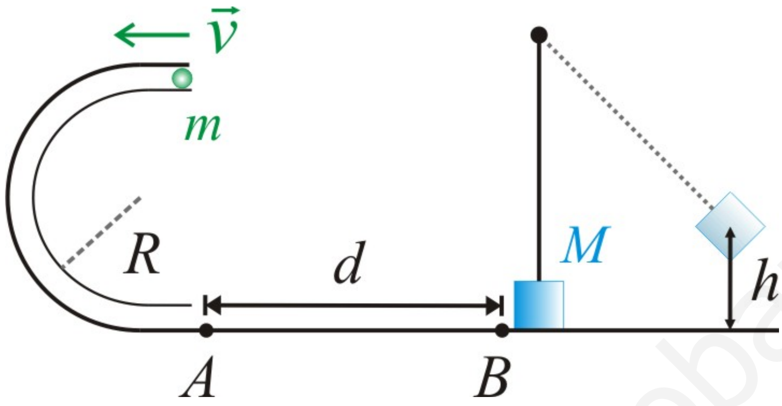
1.- Por el carril circular sin rozamiento de radio *R* de la figura se lanza una masa *m* de dimensiones despreciables con una velocidad **v**. En el tramo rectilíneo siguiente de longitud *d* el coeficiente de rozamiento cinético entre la masa y el suelo es μ. Suspendida de una cuerda y en reposo se encuentra una masa *M* = *2m*.

Datos: v = 10 m/s; μ = 0.6; *R* = 1 m; *d* = 4 m. Tomar g = 10 m/s^2



a) ¿Se conserva la energía mecánica de la masa *m* en el tramo circular de la pista? Determinar su velocidad cuando llega al final de dicho tramo circular.

Como en en tramo circular no hay rozamiento, se conserva la energía mecánica.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg2R = \frac{1}{2}mv_A^2$$

Despejando,

$$\boxed{v_A = 11.83\, m/s}$$

b) Determinar la velocidad de la masa *m* cuando ha recorrido el tramo horizontal de longitud *d*.

En el tramo recto hay rozamiento, por lo que:

$$\Delta E_C = W_R$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\mu Nd = -\mu mgd$$

$$\boxed{v_B = 9.6\, m/s}$$

c) Cuando la masa *m* llega a la posición donde se encuentra *M* choca elásticamente con ella. Determinar la velocidad de ambas masas después del choque.

Como el choque es elástico,

$$mv_B = mv' + MV' \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \qquad (2)$$

Operando:

$$m(v_B - v')(v_B + v') = MV'^2 \qquad (2)$$

$$m(v_B - v') = MV' \qquad (1)$$

Dividiendo:

$$v_B + v' = V' \qquad (3)$$

Usando las ec. (1) y (3) y sustituyendo:

$$mv_B = mv' + 2mV' \qquad (1)$$

$$v_B + v' = V' \qquad (3)$$

$$9.6 = v' + 2V'$$

$$9.6 + v' = V'$$

$$\boxed{V' = 6.4\,m/s} \qquad \boxed{v' = -3.2\,m/s;}$$

d) Cuando la masa *m* llega a la posición donde se encuentra *M* choca elásticamente con ella. Determinar la velocidad de ambas masas después del choque.

Después del choque la energía mecánica de M se conserva:

$$\frac{1}{2}MV'^2 = Mgh$$

$$\boxed{h = 2.05\,m}$$

La masa m se moverá hacia la izquierda, porque $v' < 0$.

2.- Un sistema que está formado por tres partículas de masas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ se ve sometido a la acción de una única fuerza externa conservativa **F**. La cantidad de movimiento total del sistema con respecto a O (origen de un sistema de referencia inercial) en función del tiempo viene dada por $\mathbf{p} = 3t^3\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j}$ en $kgms^{-1}$. Dato: m = 0.5 kg

a) ¿Se conserva la energía total del sistema? Expresar la velocidad y el vector posición del centro de masas del sistema en función del tiempo, suponiendo que la posición inicial del centro de masas es $\mathbf{r}_o = -\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ (m).

- Sí se conserva, ya que $\vec{F}$ es conservativa: $\Delta E_T = 0$

- La cantidad de movimiento total del sistema es:

$$\vec{p} = M\,\vec{v}_{CM} \qquad M = m_1 + m_2 + m_3 = 6m = 3\,kg$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}}{M} = \frac{3t^3\vec{i} - 6t\vec{j}}{3} = t^3\vec{i} - 2t\vec{j} \quad (m/s)$$

$$\vec{r}_{CM} = \int \vec{v}_{CM}\,dt = \int \left(t^3\vec{i} - 2t\vec{j}\right)dt = \frac{t^4}{4}\vec{i} + t^2\,\vec{j} + cte$$

Sustituyendo en $t = 0$; $\quad \vec{r}_{CM} = \vec{r}_0 \Rightarrow cte = -\vec{i} + 3\vec{j}$

$$\vec{r}_{CM} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{t^4}{4}\vec{i} + t^2\,\vec{j} = \left(\frac{t^4}{4} - 1\right)\vec{i} + \left(t^2 + 3\right)\vec{j} \quad (m)$$

b) Determinar la fuerza externa **F** y la aceleración del centro de masas del sistema en función del tiempo.

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t^3\,\vec{i} - 6t\,\vec{j}\right) = 9t^2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} \quad (N)$$

$$\vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} = \frac{9t^2\,\vec{i} - 6\,\vec{j}}{3} = 3t^2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} \quad (m/s^2)$$

c) Si la energía cinética total del sistema medida en t = 2 s con respecto a O vale 200 J, calcular la energía cinética orbital y la energía cinética interna del sistema en ese mismo instante.

$$E_c = E_{c_{int}} + E_{c_{orb}} \quad \text{en t = 2 s} \quad E_c = 200 \quad (J)$$

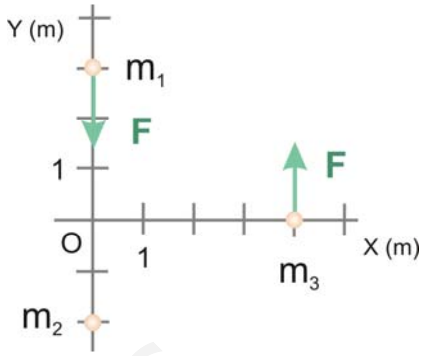
Sustituyendo t = 2 s en la expresión de $\vec{v}_{CM}$

$$\vec{v}_{CM} = 8\,\vec{i} - 4\vec{j} \qquad v_{CM}^2 = 8^2 + 4^2 = 80$$

$$E_{c_{orb}} = \frac{1}{2}M\,v_{CM}^2 = \frac{1}{2}\,3\cdot 80 = 120 \quad (J)$$

$$E_{c_{int}} = E_c - E_{c_{orb}} = 200 - 120 = 80 \quad (J)$$

4.- Se tiene un sistema de partículas formado por tres masas puntuales de valores $m_1 = m$, $m_2 = 3m$ y $m_3 = 2m$. La posición de las masas en el instante inicial y las fuerzas externas a las que se ven sometidas (de módulo constante F) son las que se muestran en la figura. El centro de masas (CM) se está trasladando con una velocidad $\mathbf{V}_{CM} = 3\,\mathbf{i}$ (m/s) con respecto a O.



a) ¿Puede el CM describir una trayectoria curva?. Calcular el momento lineal del sistema con respecto a O, ¿es contante?. ¿Se conserva el momento angular del sistema con respecto a O?.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = F(-\vec{j}) + F\,\vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

- El CM no puede describir una trayectoria curva (aceleración normal no nula) porque se mueve sin aceleración.

- Momento lineal $\vec{p} = M\,\vec{v}_{CM} \qquad M = m_1 + m_2 + m_3 = 6m \qquad \vec{v}_{CM} = 3\vec{i}$

$\vec{p} = 6m3\vec{i} = 18\,m\,\vec{i}\ (kg\,m/s) \qquad \vec{a}_{CM} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{v}_{CM}$ cte $\ \Rightarrow\ \vec{p}$ cte

- ¿Momento angular $\vec{L}$ cte? $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \cancel{F(-\vec{j})\times 3\vec{j}} + F\vec{j}\times 4\vec{i} \neq 0$

$\vec{L}$ no se conseva porque los momentos de las fuerzas externas no se cancelan.

b) Si en un instante dado las velocidades de las masas m_1 y m_2 son respectivamente $\mathbf{v}_1 = -12\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_2 = 6\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$ (en m/s), calcular la energía cinética interna del sistema en ese instante.

$$\boxed{E_c = E_{c_{\text{int}}} + E_{c_{orb}}} \qquad E_{c_{orb}} = \frac{1}{2} M\,v_{CM}^2 = 27m\,; \quad E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_1 = -12\vec{j} \qquad \vec{v}_2 = 6\vec{i} + 8\vec{j} \qquad v_1 = 12 \qquad v_2 = \sqrt{100} \qquad v_{CM} = 3$$

Calculamos $\vec{v}_3$ a partir de la definición de $\vec{v}_{CM}$ (cte)

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{6m} = \frac{\cancel{m}(-12\vec{j}) + 3\cancel{m}(6\vec{i} + 8\vec{j}) + 2\cancel{m}\vec{v}_3}{6\cancel{m}} = 3\vec{i}$$

$$-12\vec{j} + 18\vec{i} + 24\vec{j} + 2\vec{v}_3 = 18\vec{i} \quad \Rightarrow \quad 12\vec{j} + 2\vec{v}_3 = 0 \quad \Rightarrow \vec{v}_3 = -6\vec{j}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m 12^2 + \frac{1}{2} 3m100 + \frac{1}{2} 2m\,6^2 = 258m$$

$$E_{c_{\text{int}}} = E_c - E_{c_{orb}} = 258m - 27m = 231m \quad (J)$$

c) Calcular el vector posición del CM en función del tiempo.

$$\vec{r}_{CM} = \int \vec{v}_{CM}\,dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_{CM}\,t \quad \text{ya que } \vec{v}_{CM} \text{ es constante } \vec{v}_{CM} = 3\vec{i}\,.$$

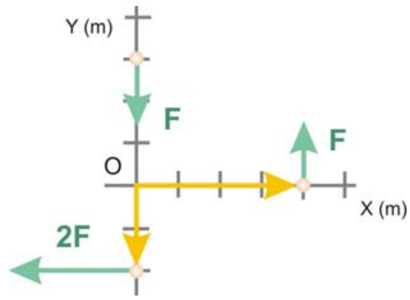
$\vec{r}_0$ vector posición del CM en $t = 0$

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1\vec{r}_{01} + m_2\vec{r}_{02} + m_3\vec{r}_{03}}{6m} = \frac{m3\vec{j} + 3m(-2\vec{j}) + 2m4\vec{i}}{6m} = \frac{8\vec{i} - 3\vec{j}}{6} = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + 3t\,\vec{i} = \left(\frac{4}{3} + 3t\right)\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \quad (m)$$

d) Si además actuáse sobre m_2 otra fuerza externa de valor **F**= - 2 F **i** calcular la aceleración del CM. Razonar si se conservan entonces el momento lineal y el momento angular del sistema.

- $\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \dfrac{\vec{F}_{ext}}{M} = \dfrac{-2F\vec{i}}{6m} = \dfrac{-F}{3m}\vec{i} \quad (m/s^2)$



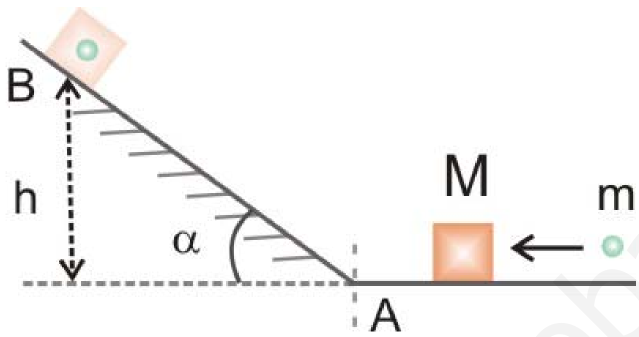
- $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}$ no se conserva

- $\sum \vec{\tau}_{ext} = 4\vec{i} \times F\vec{j} + \left(-2\vec{j} \times 2F(-\vec{i})\right) = 4F\,\vec{k} - 4F\,\vec{k} = 0$

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}$ sí se conserva

3.- Una bola de acero tiene una masa *m* y se mueve en línea recta con una velocidad de módulo *v* = 14 m/s. La bola impacta en el bloque de masa *M*, inicialmente en reposo en una superficie sin rozamiento, quedando incrustada en él. Tras el choque el conjunto se desplaza por el plano de la figura, donde el tramo inclinado AB es un tramo con rozamiento.

Datos: *m* = 1 kg , *M* = 3 kg , h = 0.4 m, $\alpha = 30^o$



a) Calcular la velocidad del sistema bola-bloque después de la colisión

Si las masas salen juntas: colisión perfectamente INELÁSTICA

$\Rightarrow$ Se conserva $\vec{P}$ del sistema pero no la energía cinética

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

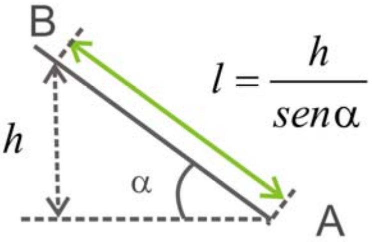
$P_i = P_m + P_M = mv$ antes del choque

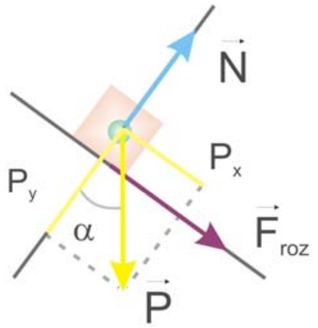
$P_f = P_m^{'} + P_M^{'} = (m+M)v'$ después del choque

$$mv = (m+M)v' \qquad v' = \frac{m}{m+M} = 3.5$$

velocidad de salida $\boxed{v' = 3.5 \quad ms^{-1}}$

b) Determinar el coeficiente de rozamiento en el tramo AB si el conjunto se para al llegar al punto B





$$\boxed{\Delta E_T = W_{roz}}$$

$$N = (m+M)\,g\cos\alpha$$

$$W_{roz} = -F_{roz}\,l = -\mu\,N\,l = -\mu\,(m+M)\,g\cos\alpha\,\frac{h}{sen\alpha} = -27.7\mu$$

$$\Delta E_T = E_B - E_A = (m+M)\,g\,h - \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 = -8.5$$

$$-8.5 = -27.7\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = 0.3}$$