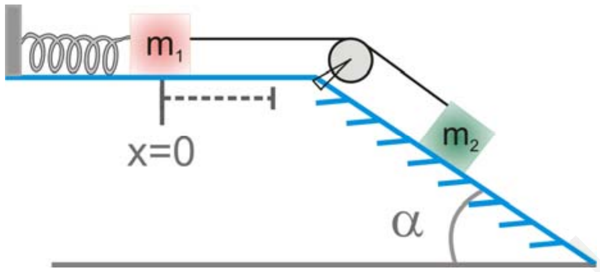
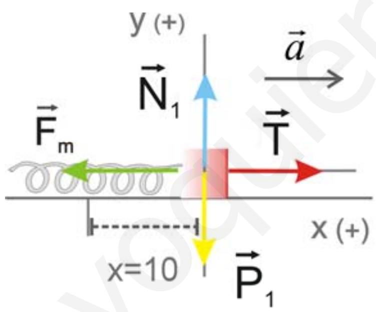
Los bloques de la figura (considerados sin dimensiones) tienen masas m_1 = 50 kg y m_2 = 300 kg y están unidos por una cuerda inextensible sin masa que pasa por una polea de masa despreciable. Inicialmente se encuentran en reposo y el muelle está en su longitud natural. La constante elástica del muelle es K = 100 N/m. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el plano inclinado un ángulo α = 30^o y m_2 es μ_d = 0.2. En el tramo horizontal no hay rozamiento.



a) Dibujar las fuerzas que actúan y expresar la Segunda Ley de Newton para cada bloque, en el momento en que m_1 se ha desplazado una distancia x = 10 cm.

- Sobre m_1



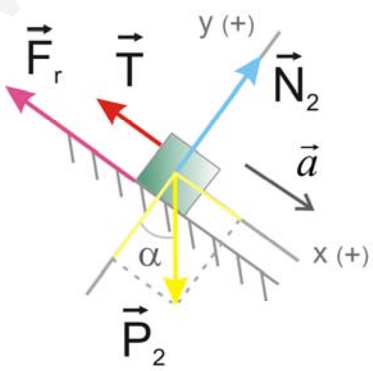
$$\vec{T} + \vec{F}_m + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}$$

$$x: \quad T - F_m = m_1 a$$

$$y: \quad N_1 - m_1 g = 0$$

$$T - K x = m_1 a \quad (1) \qquad x = 10\ cm$$

- Sobre m_2



$$\vec{T} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_r = m_2 \vec{a}$$

$$F_r = \mu_d N_2$$

$$x: m_2 g\, sen\alpha - T - F_r = m_2 a$$

$$y: N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos\alpha$$

$$m_2 g\, sen\alpha - T - \mu_d\, m_2 g \cos\alpha = m_2 a \quad (2)$$

b) Calcular el valor de la tensión de la cuerda y de la aceleración de los bloques en dicho instante.

Resolvemos el sistema sumando las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} \cancel{T} - K\,x = m_1 a & (1) \\ m_2 g\,sen\,\alpha - \cancel{T} - \mu_d\, m_2 g\,cos\,\alpha = m_2 a & (2) \end{cases}$$

$$m_2 g\,sen\,\alpha - K\,x - \mu_d\, m_2 g\,cos\,\alpha = (m_1 + m_2)\,a$$

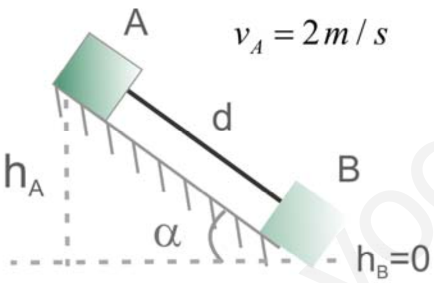
Despejando a y sustituyendo los datos:

$$\boxed{a = 2.77\ m/s^2}$$

Despejamos la T en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$(1)\quad T = Kx + m_1 a \qquad \boxed{T = 148.5\,N}$$

c) Cuando m_2 lleva una velocidad v = 2 m/s, se corta la cuerda. Utilizando razonamientos energéticos, determinar qué velocidad tendrá después de deslizarse una distancia d = 0.5 m a lo largo del plano inclinado.



$$v_A = 2\,m/s$$

$$\Delta E_T = W_r \qquad E_{TB} - E_{TA} = W_r$$

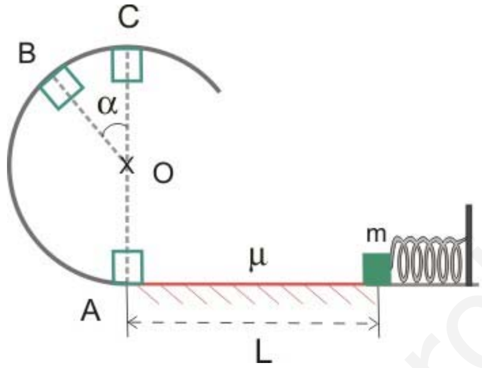
$$E_{TA} = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + m_2\, g\, h_A = 1350\ J$$

$$E_{TB} = \frac{1}{2} m_2\, v_B^2 = 150 v_B^2$$

$$h_A = d\,sen\,\alpha = 0.25\,m \qquad W_r = -F_r\, d = -\mu_d N_2\, d = -\mu_d\, m_2\, g\,cos\,\alpha\, d = -259.8\ J$$

$$150\, v_B^2 - 1350 = -259.8 \;\Rightarrow v_B = 2.69\ m/s$$

Un bloque de dimensiones despreciables de masa m se empuja contra un muelle de constante recuperadora K comprimiéndolo una longitud x. Cuando se libera el sistema, el bloque recorre una longitud L por una superficie horizontal con rozamiento (μ) hasta llegar al bucle de radio R por el que asciende sin rozamiento. La velocidad con la que el bloque llega al punto A es v_A = 15 m/s.
Datos: m = 0.3 kg;   K = 1200 N/m; μ = 0.4;   R = 0.6 m;   L = 3 m.
Tomar g = 10 m/s^2.



a) Calcular la compresión inicial x del muelle.

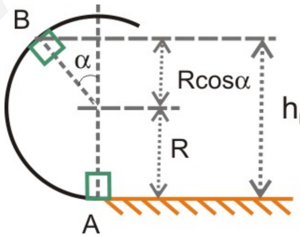
$$\Delta E_T = E_A - E_{inicial} = W_{roz}$$

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad E_A = \frac{1}{2}m v_A^2 \qquad W_{roz} = -\mu N L = -\mu\, mg\, L$$

$$\frac{1}{2}m v_A^2 - \frac{1}{2}Kx^2 = -\mu\, mg\, L$$

$$x = \left[\left(\frac{1}{2}m v_A^2 + \mu\, mg\, L\right)\frac{2}{K}\right]^{1/2} = 0.24 \text{ m}$$

b) Calcular la velocidad del bloque en el punto B (α = 60^o)



h_B= R+Rcosα = R(1+cosα)

$$\frac{1}{2}m v_A^2 = \frac{1}{2}m v_B^2 + m\, g\, h_B = \frac{1}{2}m v_B^2 + m\, g\, R(1+\cos\alpha)$$

$$v_B = \left[\left(\frac{v_A^2}{2} - g\, R(1+\cos\alpha)\right)2\right]^{1/2} = 14.4 \text{ m/s}$$

c) Calcular la velocidad del bloque en el punto C. ¿Es este valor suficiente para que el bloque continúe por el bucle circular?

$$E_A = E_C$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g 2R$$

$$v_C = \left[\left(\frac{v_A^2}{2} - g 2R\right) 2\right]^{1/2} = 14.2 \text{ m/s}$$

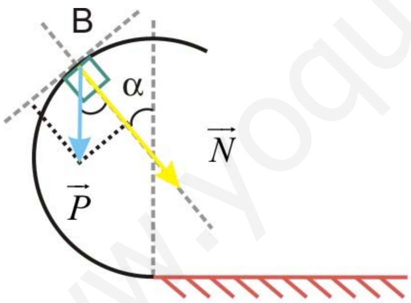
Ley de Newton en el punto C $\qquad \vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a}_N \quad a_N = m\dfrac{v^2}{R}$

Condición crítica para que deje de apoyar: $\vec{N} = 0$

$$m g = m \frac{v_{\text{mín}}^2}{R} \qquad v_{\text{mín}} = \sqrt{g R} = 2.45 \text{ m/s}$$

$v_C > v_{\text{mín}} \quad \Rightarrow \quad$ se mantiene sobre el bucle

d) Expresar la Segunda Ley de Newton en componentes intrínsecas en el punto B y calcular en ese punto el módulo de la aceleración normal y de la aceleración tangencial.



$$\vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a}$$

Descomponiendo según los ejes:

normal: $\quad m g \cos\alpha + N = m\, a_N = m \dfrac{v_B^2}{R}$

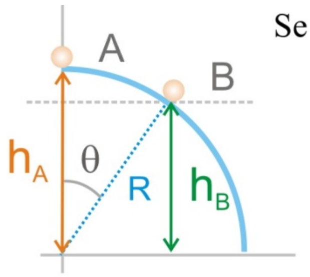
tangencial: $\quad m g \,\text{sen}\alpha = m a_T$

aceleración normal: $\quad a_N = \dfrac{v_B^2}{R} = \dfrac{14.4^2}{0.6} = 345.6 \text{ m/s}^2$

aceleración tangencial: $\quad a_T = g \,\text{sen}\alpha = 8.7 \text{ m/s}^2$

Una partícula puntual de masa m = 0.3 kg se desliza sin rozamiento por una pista que es un cuadrante de circunferencia de radio R = 0.7 m. La masa parte del reposo desde la posición A.

a) Utilizando razonamientos energéticos, determinar la velocidad de la masa y la aceleración normal en el punto B. Particularizar el resultado para θ = 30º



Se conserva la energía total (no hay rozamiento) $E_A = E_B$

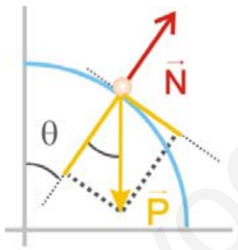
$$A: E_{Acin} = 0\,(v_A = 0) \quad E_{Apot} = mgh_A = mgR$$

$$B: E_{Bcin} = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad E_{Bpot} = mgh_B = mgR\cos\theta$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos\theta \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)} = 1.37 \text{ (m/s)}$$

$$a_n = \frac{v_B^2}{R} = 2g(1-\cos\theta) = 2.68 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

b) En función del ángulo θ, escribir la Segunda Ley de Newton en componentes intrínsecas y determinar el valor de la fuerza normal que ejerce la pista.



$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Eje tangente: $P\,sen\,\theta = m\,a_t$ (1)

Eje normal: $P\cos\theta - N = m\,a_n$ (2)

(1) $mg\,sen\,\theta = m\,a_t$

(2) $mg\cos\theta - N = m\,a_n$ del apartado (a) $a_n = 2g\,(1-\cos\theta)$

$$mg\cos\theta - N = 2m\,g\,(1-\cos\theta)$$

$$N = mg\cos\theta - 2m\,g + 2mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad N = m\,g\,(3\cos\theta - 2)$$

c) Determinar el valor del ángulo θ para el que la masa se despega de la pista, así como las componentes intrínsecas de la aceleración para dicho valor del ángulo.

Condición para que se despegue de la pista $N = 0$ $\qquad N = m\,g\,(3\cos\theta - 2) = 0$

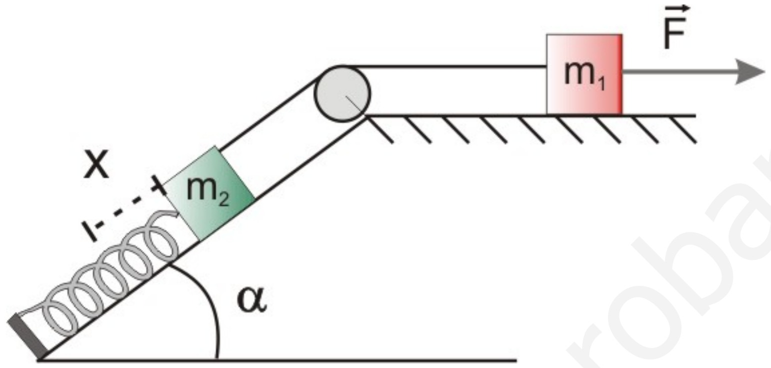
$$3\cos\theta - 2 = 0 \qquad \cos\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 48.18^o$$

Del apartado (b) y sustituyendo:

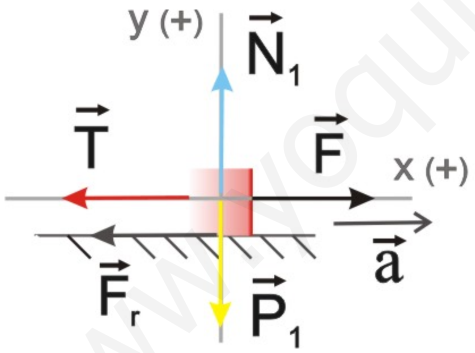
$$a_t = g\,sen\,\theta = 7.45 \text{ (m/s}^2\text{)} \qquad a_n = 2g\,(1-\cos\theta) = 6.66 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

En el sistema de la figura la masa m_2 está apoyada sin rozamiento sobre un plano inclinado un ángulo α y entre la masa m_1 y el plano horizontal el coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_c = 0.2$. Las dos masas están unidas entre sí por una cuerda inextensible y de masa despreciable que pasa por una polea sin masa. Sobre m_1 se aplica una $F = 20$ N de modo que el muelle de constante recuperadora k sufre una deformación x.

Datos: $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 0.5$ kg; $\mu_e = 0.15$; $\mu_c = 0.2$; $\alpha = 30^o$; $K = 150$ N/m^2. Tomar $g = 10$ m/s^2.



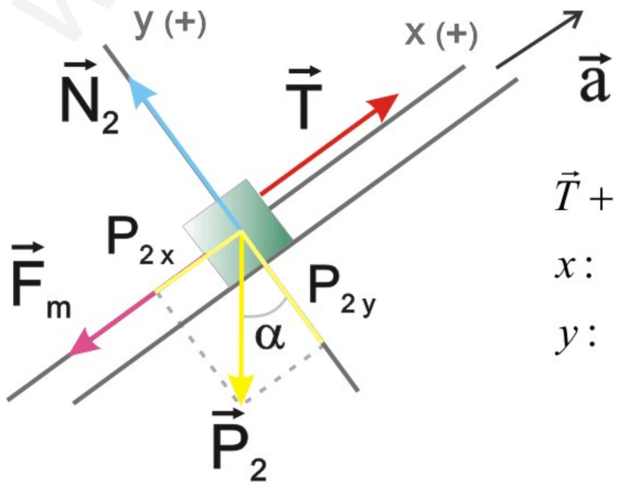
a) Hacer un diagrama de m_1 y m_2 por separado y dibujar las fuerzas que actúan sobre él. Descomponerlas según los ejes elegidos y expresar la segunda ley de Newton en cada eje.



$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_r + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 = m_1\vec{a}$$

$$x: \quad F - T - F_r = m_1 a$$

$$y: \quad N_1 - m_1 g = 0$$



$$\vec{T} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_m = m_2\vec{a}$$

$$x: \quad T - m_2 g\, sen\alpha - F_m = m_2 a$$

$$y: \quad N_2 - m_2 g\, cos\alpha = 0$$

b) Calcular la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda cuando el muelle se ha estirado una longitud x = 0.03m con respecto a su longitud de equilibrio.

Teniendo en cuenta que:

$$F_r = \mu_c N_1 = \mu_c m_1 g \quad \text{y} \quad F_m = k\,x$$

Resolvemos el sistema sumando las ecuaciones:

$$\begin{cases} T - m_2 g\, sen\alpha - k\,x = m_2 a \\ F - T - \mu_c m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

$$F - m_2 g\, sen\alpha - k\,x - \mu_c m_1 g = (m_1 + m_2)\,a$$

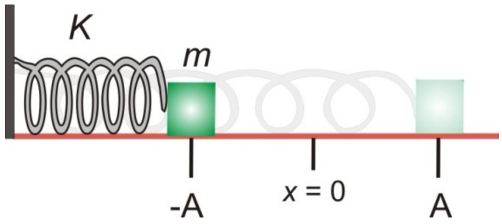
Despejando a y sustituyendo los datos:

$$\boxed{a = 3.6\, m/s^2}$$

Despejamos la T en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$T = F - \mu_c \mathrm{m_1} g - \mathrm{m_1 a} \qquad \boxed{T = 8.8\,N}$$

Un objeto se encuentra unido a un muelle de constante recuperadora K = 2000 N/m sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El objeto oscila según un movimiento armónico simple de amplitud A = 6 cm y la velocidad máxima que alcanza es $v_{máx}$ = 2.2 m/s.



a) Determinar la frecuencia ω del movimiento, la masa del objeto y la aceleración máxima a la que se ve sometido.

$$K = 2000\ Nm^{-1} \quad A = 6\ cm = 0.06\ m \quad v_{máx} = 2.2\ ms^{-1}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \Rightarrow v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = -A\omega\, sen(\omega t + \delta)$$

- $|v_{máx}| = A\omega \qquad \omega = \frac{v_{máx}}{A} = 36.67\ rad\, s^{-1}$
- $\omega^2 = \frac{K}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{K}{\omega^2} = \frac{2000}{36.67^2} = 1.49\ kg$
- $a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$

$$|a_{máx}| = \omega^2 A = 80.7\ ms^{-2}$$

b) Calcular la energía total del movimiento. Si en un instante dado la energía potencial elástica es 1.6 J, calcular la posición de la masa (x) y el módulo de la velocidad en dicho instante.

- Energía total $E_T = \frac{1}{2} K A^2 = 3.6\ J$
- Energía potencial elástica $E_p = 1.6\ J \quad x = ?$

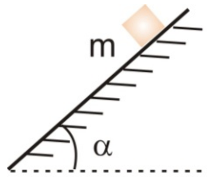
$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{2E_p}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\, 0.04\ m$$

Energía total $E_T = E_p + E_c \Rightarrow \quad E_c = E_T - E_p$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = E_T - E_p \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{2}{m}(E_T - E_p)\right)^{\frac{1}{2}} = \pm 1.64\ ms^{-1}$$

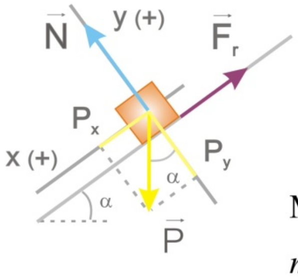
Se tiene una masa puntual m = 4 kg en un plano inclinado un ángulo α = 30º. Entre la masa y el plano existe rozamiento de coeficientes estático μ_s = 0.3 y dinámico μ_d = 0.12.

a) Razonar si la masa desliza por el plano. En caso afirmativo, calcular la aceleración con la que baja. Figura (a).



(a)

Fuerzas que actúan: peso ($\vec{P}$), normal ($\vec{N}$) y rozamiento ($\vec{F}_r$)



Para que deslice:

eje x : $P_x > F_{r\,máx} \;\Rightarrow\; m\,g\,sen\alpha > F_{r\,máx}$

eje y : $P_y + N = 0 \;\Rightarrow m\,g\,cos\,\alpha = N$

Máximo valor de F_r : $F_{r\,máx} = \mu_s\,N = \mu_s\,m\,g\,cos\alpha$

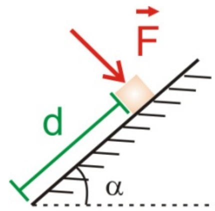
$m\,g\,sen\alpha > \mu_s m\,g\,cos\alpha \;\Rightarrow sen30 > 0.3\,cos\,30 \Rightarrow$ Desliza

En movimiento $F_r = \mu_d\,N$ $\qquad \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\,\vec{a}$

$$\left.\begin{array}{l} x:\; m\,g\,sen\alpha - F_r \;=\; m\,a \\ y:\;\; N - m\,g\,cos\alpha \;=0 \end{array}\right| \Rightarrow \cancel{m}\,g\,sen\alpha - \mu_d\,\cancel{m}\,g\,cos\alpha = \cancel{m}\,a \qquad a = 3.96\;(m/s^2)$$

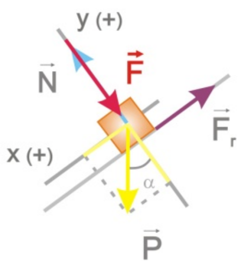
Se aplica ahora una fuerza **F** perpendicular al plano. Figura (b).

b) Calcular el módulo de **F** para que la masa baje con velocidad constante.



(b)

Fuerzas: peso ($\vec{P}$), normal ($\vec{N}$), fuerza ($\vec{F}$) y rozamiento ($\vec{F}_r$)



Velocidad constante $\Rightarrow \quad \vec{a} = 0$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F} = 0 \qquad F_r = \mu_d\,N$$

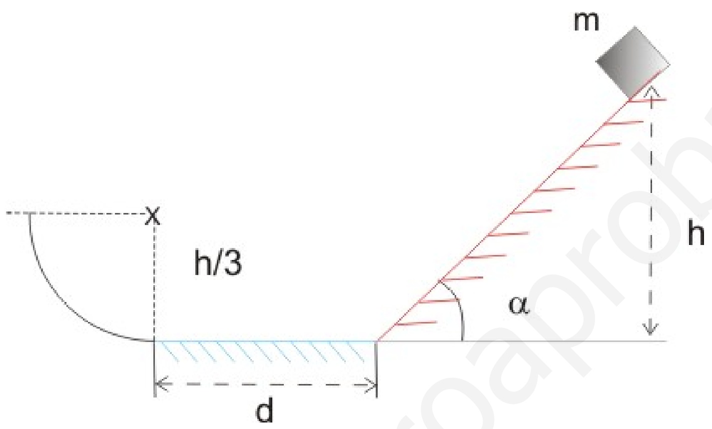
$x:\; m\,g\,sen\alpha - F_r \;= 0 \quad$ (1)

$y:\; N - F - m\,g\,cos\alpha \;= 0 \Rightarrow N = m\,g\,cos\,\alpha + F$

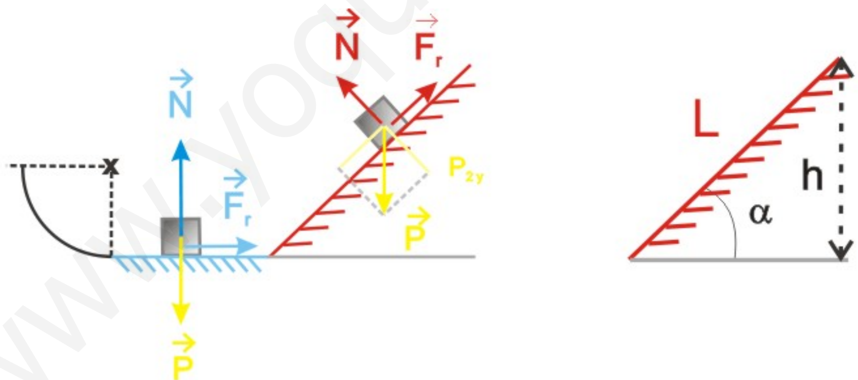
(1) $\quad m\,g\,sen\alpha - \mu_d\,(m\,g\,cos\alpha + F) = 0 \qquad F = \dfrac{m\,g\,sen\alpha - \mu_d\,m\,g\,cos\alpha}{\mu_d} = 132\;(N)$

2) La pista de la figura está formada por un tramo inclinado un ángulo α = 30^o, un tramo horizontal de longitud d = 0.2 m y un cuadrante circular de radio R = h/3. Una masa considerada puntual m = 3 kg se sitúa sin velocidad inicial a una altura h = 2 m sobre el plano inclinado y cae por la pista. Entre la masa y los dos tramos rectilíneos hay rozamiento con coeficiente μ = 0.2 y en el tramo curvo no hay rozamiento. Tomar g = 10 m/s^2

a) Calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento desde su situación inicial hasta que la masa llega al final de la pista.
b) Calcular la velocidad con la que sale despedida al llegar al final.



a)

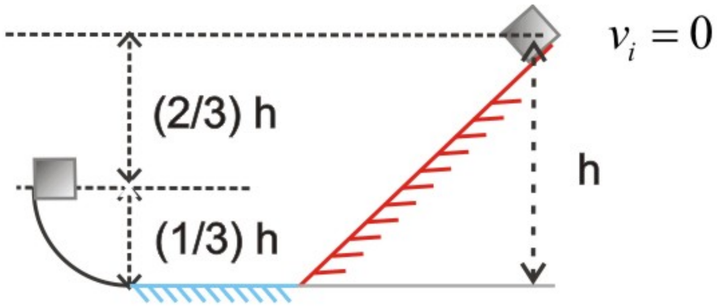


$$W_r = -F_r\,L = -\mu N \frac{h}{sen\alpha} = -\mu\, m\, g\, cos\alpha\, \frac{h}{sen\alpha} = -20.8\,J$$

$$W_r = -F_r\,d = -\mu N d = -\mu\, m\, g\, d = -1.2\,J$$

$$W_{r\,total} = W_r + W_r = -22\,J$$

b)



$\Delta E_c + \Delta E_p = W_r = -22 J$

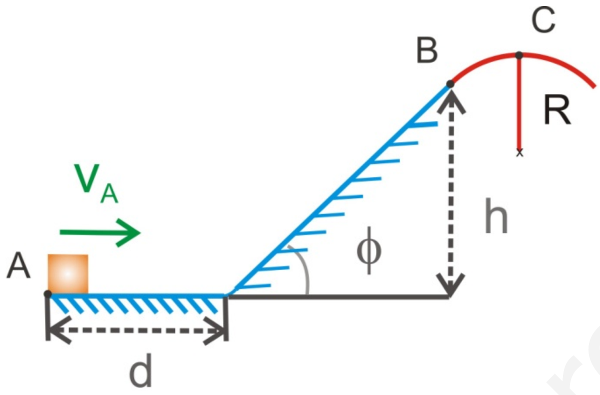
$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2$ gana esta E_c ; $\Delta E_p = -m g \frac{2}{3} h$ pierde esta E_p

$\frac{1}{2} m v^2 - m g \frac{2}{3} h = -22.$ Despejando v y sustituyendo:

$\boxed{v = 3.46\ m/s}$

Una masa puntual m = 0.5 kg se lanza desde el punto A con una velocidad v_A= 9 m/s por una pista formada por un tramo horizontal de longitud d = 1.5 m y uno inclinado un ángulo ϕ = 30º. El coeficiente de rozamiento dinámico es el mismo en los dos tramos y vale μ_d = 0.2. El tramo inclinado enlaza con una pista circular sin rozamiento de radio R = 1.75 m.

a) Calcular la aceleración de la masa mientras está subiendo por el plano inclinado y sus componentes intrínsecas.



Fuerzas: peso ($\vec{P}$), normal ($\vec{N}$) y rozamiento ($\vec{F}_r$)

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_r = m\vec{a} \qquad (F_r = \mu_d N)$$

$$x: \; -m\,g\,sen\phi - F_r = m\,a$$

$$y: \; N - m\,g\,cos\phi = 0$$

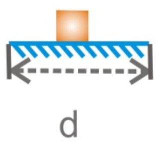
$$-\cancel{m}\,g\,sen\,\phi - \mu_d\,\cancel{m}\,g\,cos\,\phi = \cancel{m}\,a$$

$$a = -g\,(sen\,\phi + \mu_d\,cos\,\phi) = -6.73\,m/s^2$$

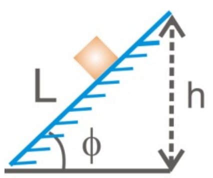
$$\text{Mov. rectilíneo} \Rightarrow a_n = 0 \quad a_t = a = -6.73\;\;m/s^2$$

b) Calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento desde el punto A al punto B, situado a una altura h = 2 m.

Igual que en el problema anterior: $W_r = W_{r_1} + W_{r_2}$



$$W_{r_1} = -F_{r_1}\,d = -\mu_d N_1 d = -\mu_d\,m\,g\,d = -1.5\,J$$



$$N_2 = m\,g\,cos\phi \qquad L = \frac{h}{sen\phi}$$

$$W_{r_2} = -F_{r_2}\,L = -\mu_d N_2 L = -3.46\,J$$

$$W_r = W_{r_1} + W_{r_2} = -1.5 - 3.46 \simeq -5\,J$$

c) Calcular la velocidad con la que llega a B.

$$\Delta E_T = W_r \qquad \Delta E_c + \Delta E_p = W_r = -5\,J$$

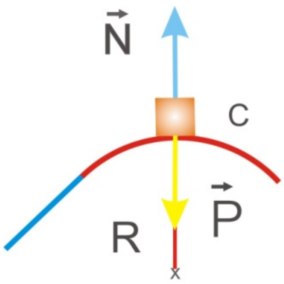
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_B{}^2 - \frac{1}{2} m v_A{}^2 \quad ; \quad \Delta E_p = m g h_B - \cancel{m g h_A}$$

$$\frac{1}{2} m v_B{}^2 - \frac{1}{2} m v_A{}^2 + m g h = -5$$

Despejando v_B y sustituyendo:

$$\boxed{v_B = 4.6\, m/s}$$

d) ¿Cuál es la velocidad mínima con la que debería llegar al punto C para seguir sobre la pista?



$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \qquad mg - N = m a_N$$

Condición para que se despegue de la pista $\quad N = 0$

$$m g = m a_N = m\,\frac{v_c^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_c = \sqrt{R g} = 4.18\ m/s$$