ANÁLISIS DE FUNCIONES Solucionario

1. Determina los **extremos relativos**, **crecimiento**, **curvatura** y puntos de **inflexión** de las siguientes funciones (estudia la **continuidad** y **asíntotas** de los ejercicios con **el asterisco ***):

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ e) $f(x) = sen(x)$ f) $f(x) = sen(x) + \cos(x)$

g)* $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ h)* $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ i)* $f(x) = e^{-x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ k) $f(x) = \dfrac{x}{Lnx}$ l)* $f(x) = x \cdot Lnx$

2. Obtén la ecuación de la **recta tangente** $f(x) = x^2 + 5x - 2$ en el punto $x = -2$.

3. Calcula los **extremos absolutos** de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ en el intervalo $\left[0,2\right]$.

DERIVABILIDAD DE FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS O EN INTERVALOS

4. Estudia si es posible encontrar valores para a, b y c para que función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x \le 1 \\ ax+b & si \quad 1 < x \le 2 \\ ax^2 - c & si \quad x > 2 \end{cases}$$

5. Averigua el valor que debe tener k para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x - 5 & si \quad x \le 0 \\ x^3 - 3x - 5 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

6. Averigua el valor de m y n para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} m \cdot x + 5 & si \quad x \le 2 \\ n \cdot x^2 + x - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

7. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Estudia para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable.

ANÁLISIS Y CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES

8. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{a}x^3-ax^2+5x+10$, $a\neq 0$ **.**

a) Obtener los valores de a para los que la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=1$.

b) Suponiendo que $a=3$, estudia los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

9. La gráfica de la función $f(x)=ax^3+bx+c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un extremo relativo en $(1,-1)$.

a) Calcula los coeficientes a, b y c.

b) ¿Qué tipo de extremo es, máximo o mínimo?

10. La ganancia producida por una máquina que duró 6 años se estima por la función:
$f(x)=ax^3+bx^2$, $0\le x\le 6$ donde $f(x)$ representa la ganancia (en miles de euros) a los x años de funcionamiento; a y b son constantes.

a) Determine los valores de a y b si se sabe que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(2,32)$.

b) Si $a=2$ y $b=12$, calcula el año en el que la máquina produjo una mayor ganancia. ¿Cuál fue el valor de dicha ganancia? Para estos valores, representa la gráfica de la función $f(x)$ en $[0,6]$
.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

11. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

12. Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.

13. Se lanza verticalmente una pelota. Su ecuación de movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ donde s(t) se expresa en centímetros y t en segundos.

a. Identifica, desde el punto de vista físico, qué representan los números 6 y 48.
b. ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?
c. ¿En qué instante la pelota empieza a descender?
d. ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?
e. ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?
f. ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes t = 3 s y t = 7 s ? ¿Por qué son de distinto signo?

14. Analiza en un movimiento de **tiro parabólico**, cuál es el **alcance** y la **altura máxima**. ¿Para qué **ángulo** de tiro es el **alcance máximo**?

15. Dispongo de 400 m de tela metálica para cercar un rectángulo de terreno. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que el **área** encerrada en la cerca sea la **máxima** posible?

16. Halla los valores de las constantes **a**, **b** y **c** para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1,20)$ y tenga un **mínimo** relativo en el punto $Q(3,12)$.

17. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el **volumen** sea **máximo**.

18. Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el **área mínima** posible?

19. Dado un cilindro de volumen 4 m^3, determinar sus dimensiones para que su **área** total sea **mínima**.

20. Una **lata cilíndrica** de refresco tiene un volumen de 333 cm^3. La chapa utilizada para las bases es el doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el **coste** de fabricación sea el **menor posible**.

21. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $P(0,2)$?

$\boxed{1a}$ $f(x) = -2x^2 + 8x$, Puntos de corte: $x=0 \Rightarrow y=0$, $y=0 \Rightarrow \begin{cases} -2x^2+8x=0 \\ 2x(4-x) \end{cases} < \begin{matrix} 0 & (0,0) \\ 4 & (4,0) \end{matrix}$

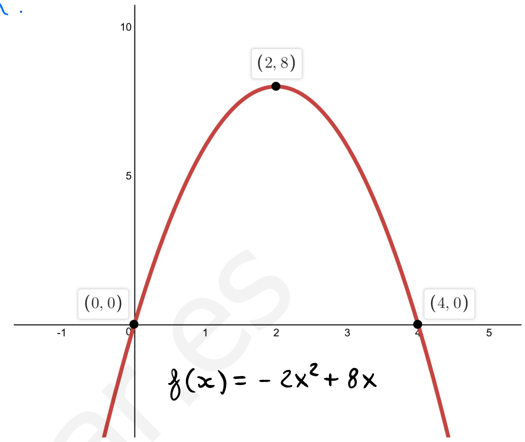
$f'(x) = -4x+8$; Extremos $f'(x)=0 \Rightarrow -4x+8=0 \Rightarrow x=2$, $f(2)=8$

$f''(x) = -4$; $f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow$ En $x=2$ hay un máximo.

$f'''(x) = 0$; $f''(x) \neq 0$ luego no hay puntos de inflexión.

$f'(2) = 0$; Extremo

$f''(2) = -4 < 0$, luego la curvatura es siempre cóncava.



$-\infty$		2		$+\infty$
f':	+	0	−	
f:	↗	Máx	↘	
f'':	−	−	−	
f:	∩	∩	∩	

2
Máx

Crece $(-\infty, 2)$
Decrece $(2, +\infty)$
∩ Cóncava en $\mathbb{R}$
Máximo $(2, 8)$

$\boxed{1b}$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $f''' = 6 \neq 0$

Extremos: $f'(x) = 0$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 3\cdot 9}}{2\cdot 3} = \frac{12 \pm 6}{6} < \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$f'(1) = 0$ $f''(1) = -6 < 0$ Máximo,
$f(1) = 2$ $(1, 2)$

$f'(3) = 0$ $f''(3) = 6 > 0$ Mínimo,
$f(3) = -2$ $(3, -2)$

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0$, $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 0$

como $f'''(2) = 6 \neq 0$

Punto de inflexión

$f(2) = 8 - 6\cdot 4 + 18 - 2 = 0$ P.I. $(2, 0)$

1 3
Máx Mín

1 2 3
Máx PI Mín

Crece $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
Decrece $(1, 3)$
∩ Cóncava en $(-\infty, 2)$
∪ Convexa en $(2, +\infty)$
Máximo $(1, 2)$
Mínimo $(3, -2)$
Punto de inflexión $(2, 0)$

Puntos de corte:

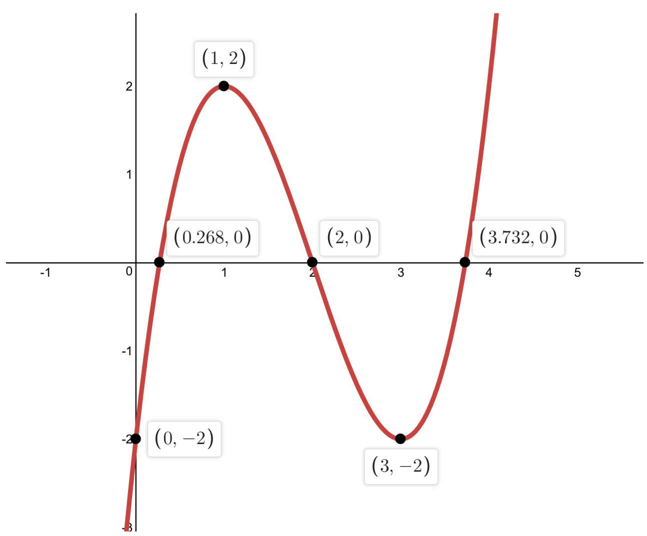
si $x=0$, $y=-2$, $(0,-2)$

Si $y = 0 \Rightarrow$

$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 9 & -2 \\ 2 & & 2 & -8 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$-\infty$		1	2	3		$+\infty$
f':	+	0	−	0	+	
f:	↗	Máx	↘	Mín	↗	
f'':	−	−	0	+	+	
f:	∩	∩	P.I.	∪	∪	



$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} < \begin{matrix} 0{,}268 & (0{,}268, 0) \\ 3{,}732 & (3{,}732, 0) \end{matrix}$

$\boxed{1c}$ $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$y' = 15x^4 - 15x^2$;

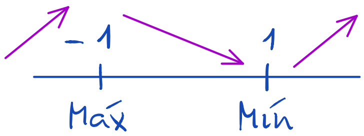
Si $f'(x) = 0$, hay extremos relativos , $15\underbrace{x^2}\,\underbrace{(x^2-1)} = 0$

(máximos o mínimos)

Soluciones : $x = 0$, $y(0) = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $y(1) = -2$, $y(-1) = 2$

$y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{d}{dx}(15x^4 - 15x^2)$



$y'' = 60x^3 - 30x$

$y''(-1) = -60 + 30 < 0$

Es un máximo local y la curva es cóncava .

$y''(+1) = +60 - 30 > 0$

Es un mínimo local y la curva es convexa .

$y''(0) = 0$. Podría ser un punto de inflexión.

$y''' = \dfrac{dy''}{dx} = \dfrac{d}{dx}(60x^3 - 30x) = 180x^2 - 30$

$y'''(0) = -30 \neq 0$ luego

en $x=0$ hay un punto de inflexión.

Más puntos de inflexión :

$y'' = 60x^3 - 30x = 0 \Rightarrow x(60x^2 - 30) = 0 \Rightarrow x = 0 , \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$, $y'''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0 \Rightarrow$

En $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay puntos de inflexión.

$y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}24$

$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1{,}24$

Crece $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrece $(-1, 1)$

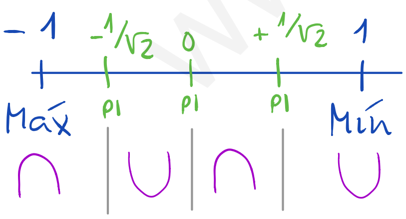
Cóncava $\cap$ $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Convexa $\cup$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

Máximo $(-1, 2)$

Mínimo $(1, -2)$

Puntos de inflexión $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1{,}24\right)$
$(0, 0)$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1{,}24\right)$



		-1	$-1/\sqrt{2}$		0		$+1/\sqrt{2}$	+1	
y'	>0	0	<0		0		<0	0	>0
y	↗	Máx	P.I.	↘	P.I.	↘	P.I.	Mín	↗
y''	<0	<0	0	>0	0	<0	0	>0	>0
y	$\cap$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	$\cup$

Puntos de corte :

$y = 3x^5 - 5x^3$

$x = 0, y = 0$.

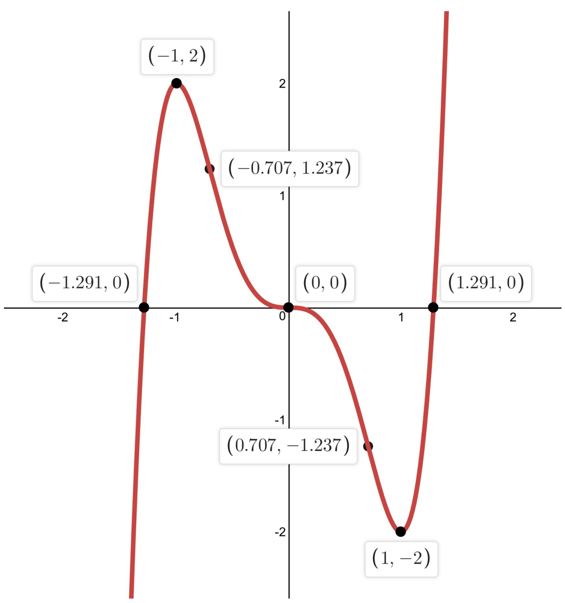
Si $y = 0$,

$3x^5 - 5x^3 = 0 \Rightarrow$

$x = 0$, $3x^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$x \simeq \pm 1{,}291$



$\boxed{1d}$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f'''(x) = 24x$

Extremos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Puntos de corte: Si $x=0, y=-3 \Rightarrow (0,-3)$

Si $y = 0 \Rightarrow x$

$y = x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, Cambio $t = x^2$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2} \left\langle \begin{array}{l} 3 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ -1 = x^2 \quad \nexists \end{array} \right.$

$x = \pm\sqrt{3}$ $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$f''(x) = 12x^2 - 4$ Los extremos son $x = 0, 1, -1$

$f''(0) < 0$; en $x=0$ hay un máximo. $f(0) = -3$; Máx $(0,-3)$

$f''(1) > 0$; en $x=1$ hay un mínimo. $f(1) = 1-2-3 = -4$; Mín $(1,-4)$

$f''(-1) > 0$; en $x=-1$ hay un mínimo. $f(-1) = 1-2-3 = -4$; Mín $(-1,-4)$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada:

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Comprobamos si son puntos de inflexión a través de la tercera derivada:

$f'''(x) = 24x \neq 0$ en ambos casos. $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{32}{9} = -3{,}56$

Los puntos de inflexión son: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right)$

Crece $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

Decrece $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

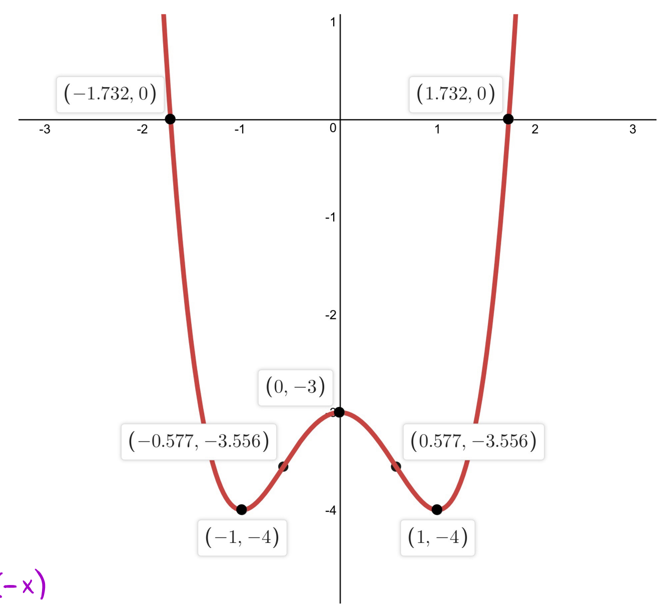
Cóncava $\cap$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Convexa $\cup$ $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Máximo $(0,-3)$

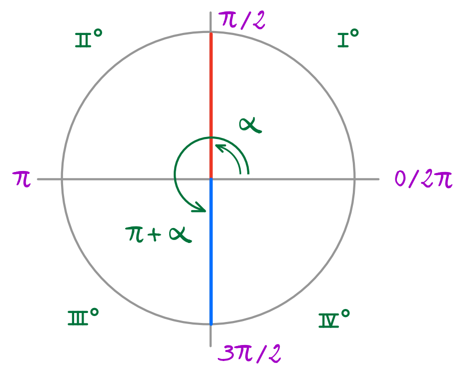
Mínimo $(1,-4)$, $(-1,-4)$

Puntos de inflexión $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{32}{9}\right)$



Simetría: $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \\ f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3 \end{array}\right\}$ $f(x) = f(-x)$ Simetría par

1e Estudia el dominio, monotonía y curvatura de $y = \operatorname{sen} x$



Esta función trigonométrica no tiene puntos críticos. $Df(x) = \mathbb{R}$

Monotonía $\boxed{y' = 0}$ Condición de extremo. $y' = \cos x = 0$

Tenemos 2 soluciones:

$$\cos x = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{Posibles extremos}$$

Vamos a utilizar la 2ª derivada para caracterizar los extremos. $y'' = -\operatorname{sen} x$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1 < 0 \quad \Rightarrow$$

$x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ son máximos locales

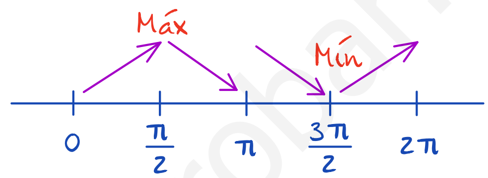
Coordenada $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

$$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = +1 > 0 \quad \Rightarrow$$

$x_1 = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$ son mínimos locales

Coordenada $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$

Como la función $y = \operatorname{sen} x$ es periódica de período 2π vamos a analizar el intervalo $[0, 2\pi]$.

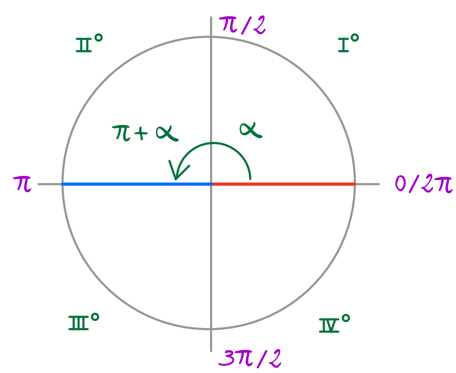


Monotonía en $[0, 2\pi]$

Crece $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Decrece $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
Máximos $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$
Mínimos $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$

, $k \in \mathbb{Z}$

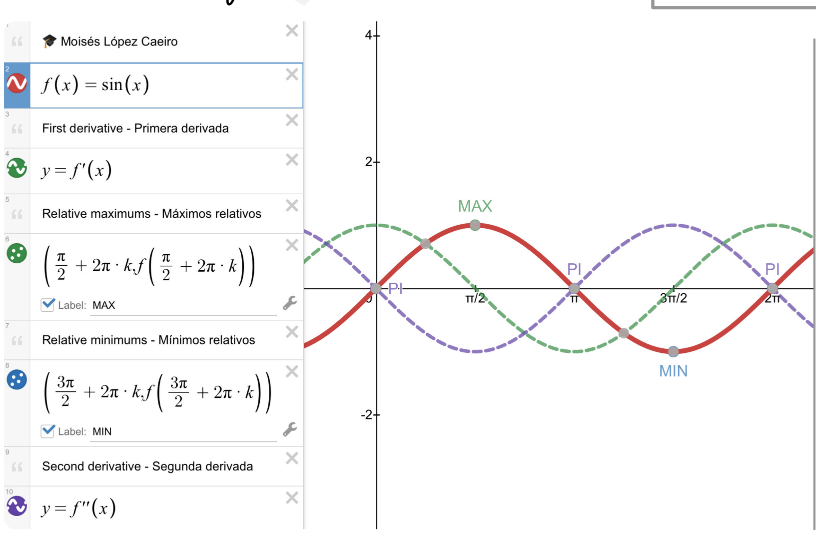
Curvatura $\boxed{y'' = 0}$ Condición de Punto de inflexión. $y'' = -\operatorname{sen} x = 0$



Se puede expresar en una solución $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ Posibles P.I.

La 3ª derivada $y''' = -\cos x$, siendo $y'''(\pi k) = \pm 1 \neq 0$ luego son P.I.

Coordenada $y(\pi k) = \operatorname{sen}(\pi k) = 0 \Rightarrow \boxed{(\pi k, 0) \text{ P.I.}}$, $k \in \mathbb{Z}$



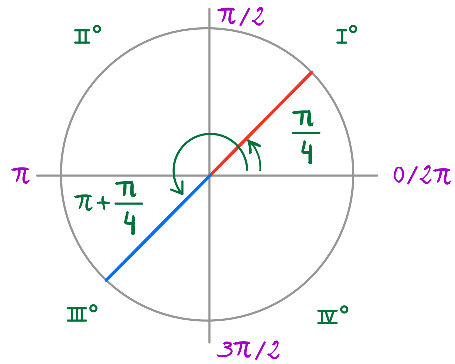
Si $x \in (0, \pi)$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1 < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Cóncava en } (0, \pi)}$

Si $x \in (\pi, 2\pi)$, $y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = +1 > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Convexa en } (\pi, 2\pi)}$

$\boxed{1f}$ Estudia el dominio, monotonía y curvatura de $y = \text{sen } x + \cos x$



Esta función trigonométrica no tiene puntos críticos. El dominio $Df(x) = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Monotonía}}$ $\boxed{y' = 0}$ Condición de extremo.

$y' = \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \cos x = \text{sen } x \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x = 1$

$x = \text{arctg } 1 \Rightarrow$ Tenemos 2 soluciones (1er y 3er cuadrante) $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{\pi}{4} + \pi$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \quad , \ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \quad , \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \text{Posibles extremos}$$

Los extremos relativos tienen la forma general: $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$

Vamos a utilizar la 2ª derivada para caracterizar los extremos. $y'' = -\text{sen } x - \cos x$

$y''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\text{sen } \dfrac{\pi}{4} - \cos \dfrac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ son máximos locales

Coordenada $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{4} \simeq 1{,}414$

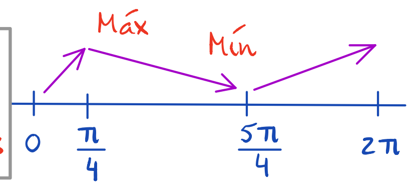
$y''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\text{sen } \dfrac{5\pi}{4} - \cos \dfrac{5\pi}{4} > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$ son mínimos locales

Coordenada $y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \text{sen } \dfrac{5\pi}{4} + \cos \dfrac{5\pi}{4} \simeq -1{,}414$

Como la función $y = \text{sen } x + \cos x$ es periódica de periodo 2π vamos a analizar el intervalo $[0, 2\pi]$.

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos



Monotonía en $[0, 2\pi]$

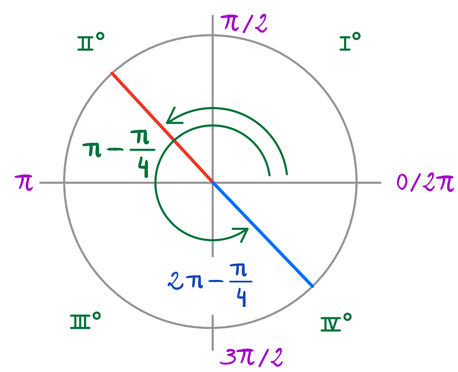
Crece $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

Decrece $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

Máximos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \ , \ 1{,}414\right)$

Mínimos $\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \ , \ -1{,}414\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Curvatura}}$ $\boxed{y'' = 0}$ Condición de Punto de inflexión.



$y'' = -\text{sen } x - \cos x = 0 \Rightarrow -\text{sen } x = \cos x \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x = -1$

$x = \text{arctg}(-1)$. Tenemos 2 soluciones (2º y 4º cuadrante), $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \in \text{I}°$

2º cuadrante: $\boxed{\alpha, \pi - \alpha}$ obtenemos el ángulo restando $\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

4º cuadrante: $\boxed{\alpha, 2\pi - \alpha}$ obtenemos el ángulo restando $2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$

Se puede expresar en una solución $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$ Posibles Puntos de inflexión P.I.

Entre 0 y 2π tenemos 2 posibles puntos de inflexión $\dfrac{3\pi}{4}$ y $\dfrac{7\pi}{4}$

$y'' = -\operatorname{sen} x - \cos x$

La 3^{a} derivada $y''' = -\cos x + \operatorname{sen} x$

Evaluamos los posibles Puntos de inflexión P.I. $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$,

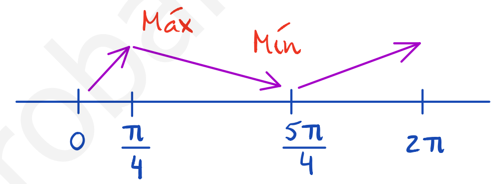
$y'''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \simeq 1{,}414 \neq 0$ luego son Puntos de inflexión P.I. confirmados.

Coordenada : siendo $y = \operatorname{sen} x + \cos x \Rightarrow y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0$

$\boxed{\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k , 0\right) \text{ P.I.}}$, $k \in \mathbb{Z}$; Podemos deducir los intervalos de curvatura porque ya sabemos dónde están los máximos y los mínimos, pero podemos también probarlo con la 2^{a} derivada.

Si $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = -1 < 0$

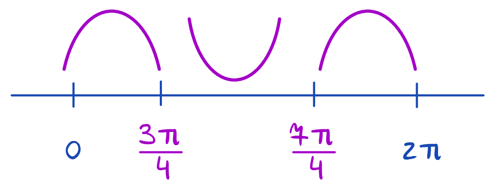
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Cóncava en } \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)}$ Coincide, como es lógico con la zona del máximo.



Si $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $y''(\pi) = -\operatorname{sen}\pi - \cos\pi = 1 > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Convexa en } \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)}$ Coincide, como es lógico con la zona del mínimo.

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos



Si $x \in \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$, $y''\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\operatorname{sen}\frac{9\pi}{5} - \cos\frac{9\pi}{5} = 1 < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Cóncava en } \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)}$

Para la representación gráfica sólo necesitaremos a mayores los puntos de corte (no hay asíntotas).

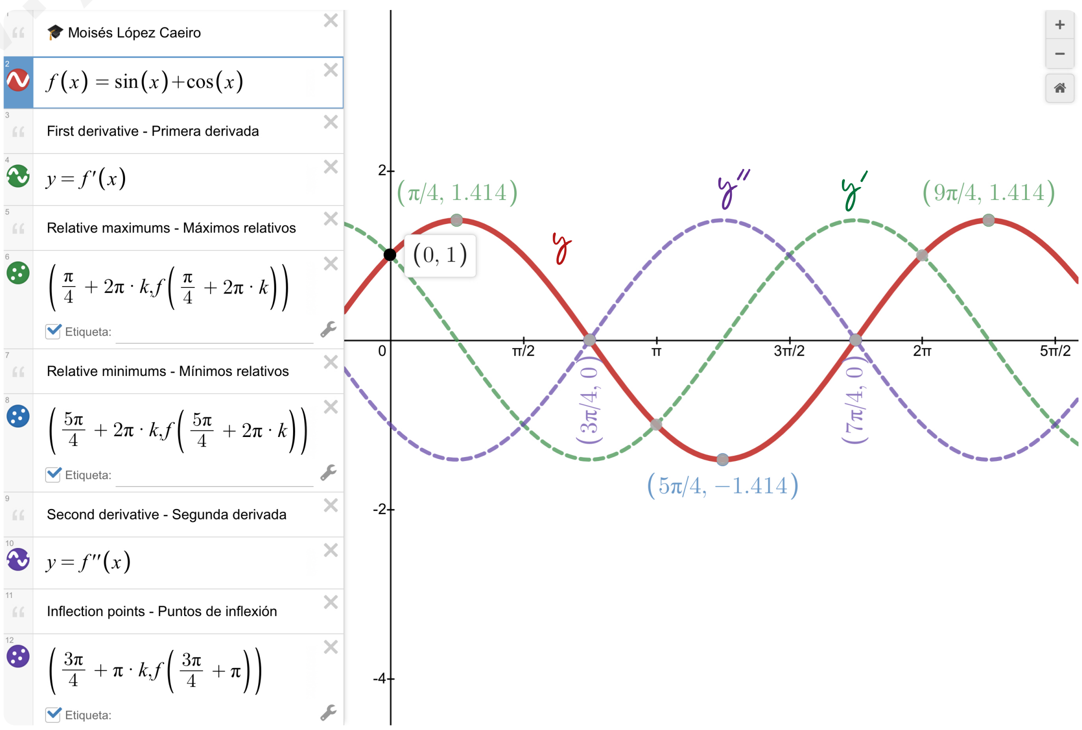
Los puntos de corte con el eje X ya los tenemos. Son los puntos de inflexión.

Con el eje Y, si $X = 0 \Rightarrow$

$y = \operatorname{sen} x + \cos x =$

$= \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1$

$\Rightarrow (0, 1)$



$\boxed{18}$ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Estudiamos el dominio y la continuidad.

$x = 2$ es un punto crítico.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$; $x = 2$ (asíntota vertical)

El dominio $D = \mathbb{R} - \{2\}$. Es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

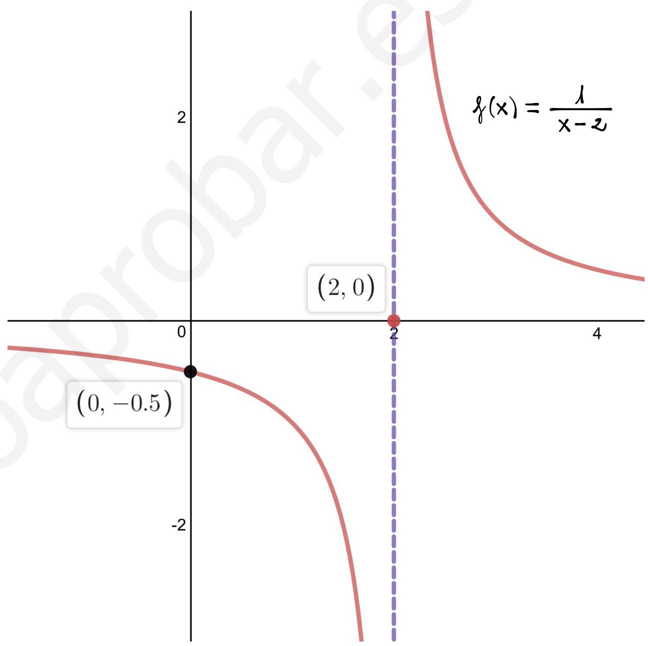
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$; $y = 0$ (asíntota horizontal)

$f(x) = \dfrac{1}{x-2} = (x-2)^{-1}$

$f'(x) = -(x-2)^{-1-1} = -\dfrac{1}{(x-2)^2} = -(x-2)^{-2}$

$f''(x) = +2(x-2)^{-2-1} = \dfrac{2}{(x-2)^3} = 2 \cdot (x-2)^{-3}$

$f'''(x) = -6(x-2)^{-3-1} = -\dfrac{6}{(x-2)^4} = -6(x-2)^{-4}$



Extremos: $f'(x) = 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x-2)^2} = 0$ $\nexists$ solución,

luego no hay extremos relativos.

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada:

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{(x-2)^3} = 0$ $\nexists$ solución, luego no hay puntos de inflexión.

Estudiamos el crecimiento y la curvatura a la izquierda y a la derecha del punto crítico.

1 2 3

$f'(1) = \dfrac{-1}{(1-2)^2} = -1 < 0$ $\searrow$ $f''(1) = \dfrac{2}{(1-2)^3} = -2 < 0$ $\cap$

$f'(3) = \dfrac{-1}{(3-2)^2} = -1 < 0$ $\searrow$ $f''(3) = \dfrac{2}{(3-2)^3} = +2 > 0$ $\cup$

Decrece en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$\cap$ Cóncavo $(-\infty, 2)$

$\cup$ Convexo $(2, +\infty)$

No hay extremos ni puntos de inflexión

$\boxed{1h}$ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ [Análisis completo: problema modelo]

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$, por tanto, el $\boxed{\text{dominio es } D=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$

$\lim\limits_{x\to\pm1} f(x)=\infty$; $f(x)$ presenta discontinuidades de salto infinito en estos puntos.

El entorno de continuidad es $\mathcal{C}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Asíntotas.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm1} f(x)=\infty \Rightarrow$ las rectas $\boxed{x=1 \text{ y } x=-1 \text{ son asíntotas verticales.}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal.

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty \end{array}}$$

Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x^2-1)\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+x}{x^2-1}=0 \end{cases}$$

La recta $y=mx+n$, es decir, $\boxed{y=x \text{ es asíntota oblicua.}}$

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}\ ;\quad f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Debe cumplirse la condición $f'(x)=0 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0$

$x=0$ y $x=\pm\sqrt{3}$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right]=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)-(x^4-3x^2)4x}{(x^2-1)^3}=\frac{\cancel{4x^5}-4x^3-6x^3+6x-\cancel{4x^5}+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$f''(0)=0$. Este punto $x=0$ es dudoso. Podría ser un punto de inflexión.

$f''(\sqrt{3})>0$, luego en $x=\sqrt{3}$ hay un mínimo. $f(\sqrt{3})=2{,}6$

$f''(-\sqrt{3})<0$, luego en $x=-\sqrt{3}$ hay un máximo. $f(-\sqrt{3})=-2{,}6$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Mínimo } (\sqrt{3},\ 2{,}6) \\ \text{Máximo } (-\sqrt{3},\ -2{,}6) \end{array}}$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada:

Hay dos extremos locales en $x=-\sqrt{3}$ (máximo) y $x=\sqrt{3}$ (mínimo).
Hay dos discontinuidades en $x=-1$ y $x=1$.
Debemos estudiar los intervalos: $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},-1)$, $(-1,1)$, $(1,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},+\infty)$

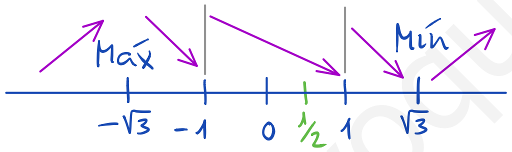
Como $x=-\sqrt{3}$ es un máximo $\begin{cases} \text{En } (-\infty,-\sqrt{3}) \text{ es creciente } \nearrow \\ \text{En } (-\sqrt{3},-1) \text{ es decreciente } \searrow \end{cases}$

Como $x=\sqrt{3}$ es un mínimo $\begin{cases} \text{En } (1,\sqrt{3}) \text{ es decreciente } \searrow \\ \text{En } (\sqrt{3},+\infty) \text{ es creciente } \nearrow \end{cases}$

Aún no sabemos qué ocurre en $(-1,1)$ porque $x=0$ es dudoso. Para averiguarlo, observamos el signo de la primera derivada en cualquier punto del intervalo, por ejemplo $x=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \text{Si } f'(x)>0\text{, } f \text{ es creciente en } x \\ \text{Si } f'(x)<0\text{, } f \text{ es decreciente en } x \end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1/16-3/4}{9/16}<0 \Rightarrow \text{En } (-1,1) \text{ es decreciente } \searrow$$



Crece $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$
Decrece $(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x)=0$

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0 \Rightarrow 2x^3+6x=0 \Rightarrow 2x\cdot(x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$$

$x^2+3=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

$x=0$ es un posible punto de inflexión.

$f''(x)=0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x)\neq 0$.

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}\right]=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)^3-(2x^3+6x)\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6}$$

$$f'''(x)=\frac{(6x^2+6)(x^2-1)-(2x^3+6x)\cdot 6x}{(x^2-1)^4} \Rightarrow f'''(0)=-6\neq 0$$, luego $x=0$ es un punto de inflexión

La imagen $f(0)=0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Punto de inflexión } (0,0)}$

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Tenemos un punto de inflexión en $x=0$ y dos discontinuidades en $x=-1$ y $x=1$. Debemos considerar los intervalos:

$(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$

Como hay un máximo en $x=-\sqrt{3} \in (-\infty,-1)$, en este intervalo la función es: $\cap$

Como hay un mínimo en $x=\sqrt{3} \in (1,+\infty)$, en este intervalo la función es: $\cup$

Para averiguar cómo es la función en $(-1,0)$ observamos el signo de la segunda derivada:

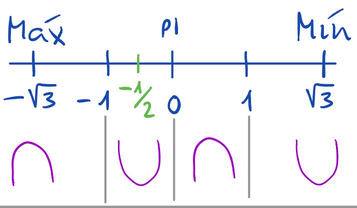
Si $f''(x) > 0$, entonces $f(x)$ es convexa $\cup$ (curvatura positiva)

Si $f''(x) < 0$, entonces $f(x)$ es cóncava $\cap$ (curvatura negativa)

$f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$; probamos con $x=-\frac{1}{2} \in (-1,0)$

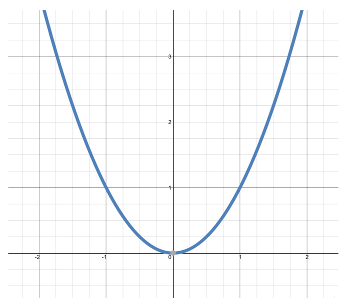
$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{-\frac{1}{4}-3}{-27/4^3} > 0$, luego en $x \in (-1,0)$, $f(x)$ es $\cup$

Como en $x=0$ hay un punto de inflexión, en $x \in (0,1)$, $f(x)$ es $\cap$



Cóncava $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

Convexa $(-1,0) \cup (1,+\infty)$



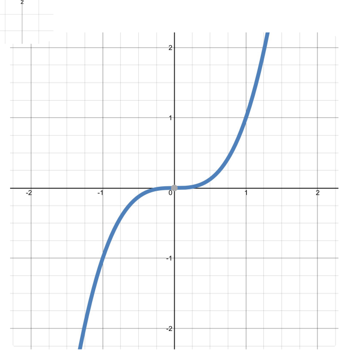
Simetría eje oy

$y = x^2$

Simetría

Si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas.

Si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.



Simetría en el origen

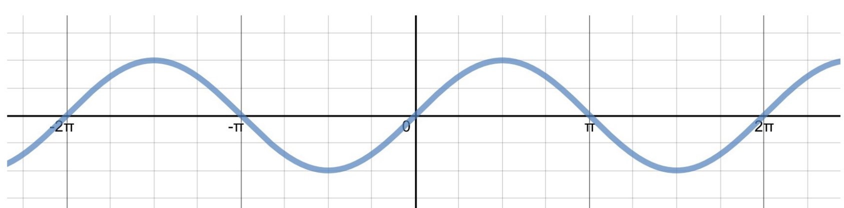
$y = x^3$

Periodicidad

Una función f es periódica cuando existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(x+p)$, $\forall x \in D$.

La función se repite de p en p.

El número p se llama período.



$\text{sen}(x) = \text{sen}(x+2\pi)$; el período $p = 2\pi$

Representación gráfica

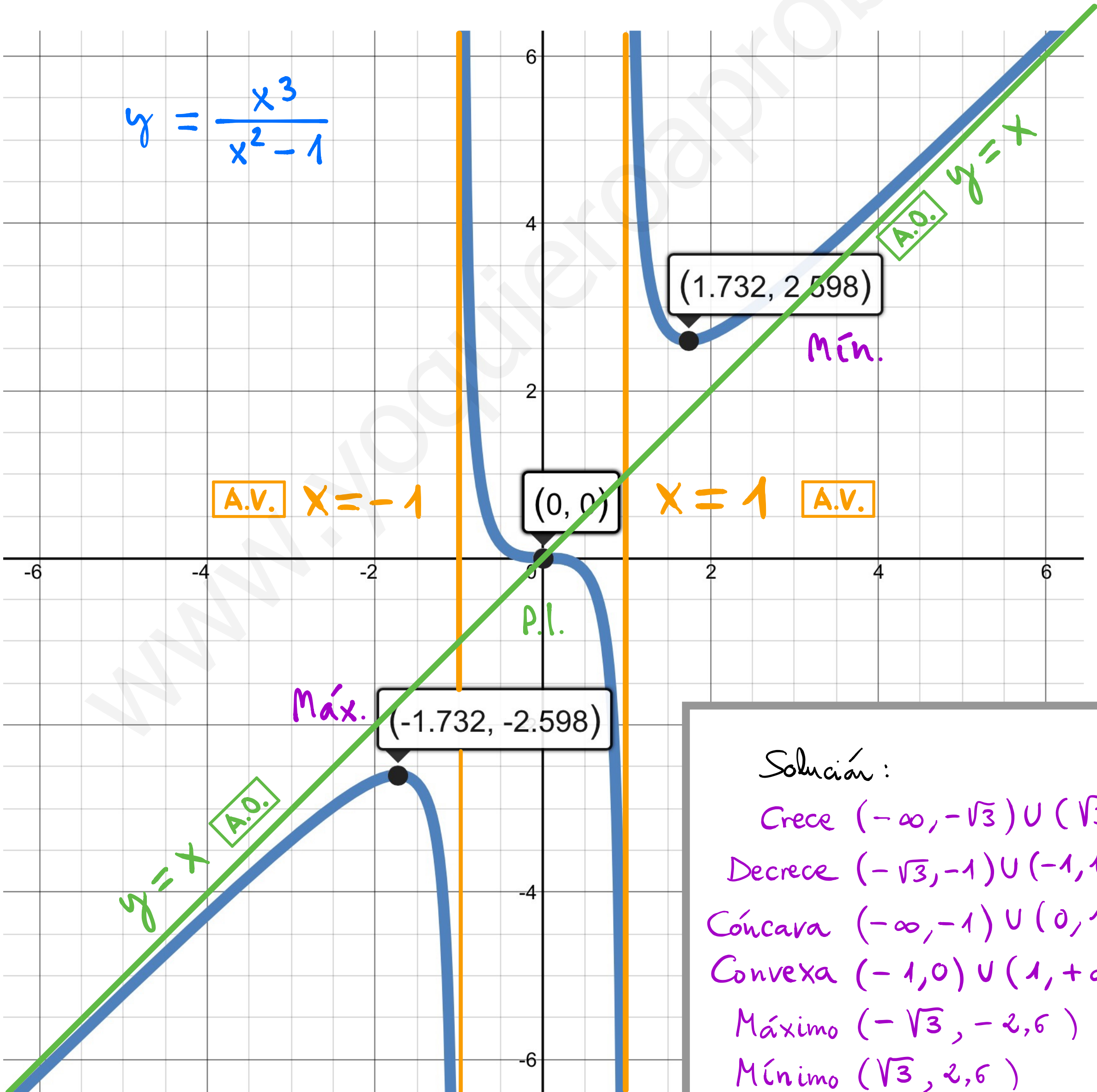
$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ no es periódica como una función trigonométrica.

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x)$ es impar.

$f(x)$ simétrica respecto del origen de coordenadas

Puntos de corte con los ejes

$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right\}$ $f(x)$ corta a los ejes en el punto $(0,0)$.



Solución:

Crece $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Decrece $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Cóncava $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Convexa $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Máximo $(-\sqrt{3}, -2{,}6)$

Mínimo $(\sqrt{3}, 2{,}6)$

Punto de inflexión $(0,0)$

$\boxed{1i}$ $f(x) = e^{-x^2}$

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

e^{-x^2} existe para todo x (positivo o negativo) $\exists\ \forall x \Rightarrow D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}$

Asíntotas.

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Rightarrow$ no hay asíntota vertical.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{0}{\infty} = 0 \Rightarrow$ No hay asíntota oblicua.

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

Debe cumplirse la condición $f'(x) = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

$f''(0) < 0$, luego en $x = 0$ hay un máximo.

$f(0) = e^{-0} = 1$ luego el máximo está en el punto $(0,1)$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$. Vemos que: $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} > 0$ (sea $x > 0$ o $x < 0$);

Si $x < 0$ $f'(x) > 0$, f es creciente en $x \in (-\infty, 0)$ $\nearrow$

Si $x > 0$ $f'(x) < 0$, f es decreciente en $x \in (0, +\infty)$ $\searrow$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x) = 0$

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ son posibles puntos de inflexión.

$f''(x) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) \Rightarrow f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx} e^{-x^2}(4x^2-2)$

$f'''(x) = -2x e^{-x^2}(4x^2-2) + 8x e^{-x^2} = e^{-x^2}(-8x^3+4x+8x) = e^{-x^2}(12x-8x^3)$

$f'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$ y $f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$, luego $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ son puntos de inflexión.

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x) = e^{-x^2}$. Tenemos puntos de inflexión en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Debemos considerar los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

Como hay un máximo en $x = 0 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,en este intervalo la función es: $\cap$

Para averiguar cómo es la función en los otros intervalos, nos basamos en que a la izquierda y a la derecha hay puntos de inflexión.

Como en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un punto de inflexión, en $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f(x)$ es $\cup$

Como en $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un punto de inflexión, en $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, $f(x)$ es $\cup$

Representación gráfica

$f(x) = e^{-x^2}$ no es periódica como una función trigonométrica.

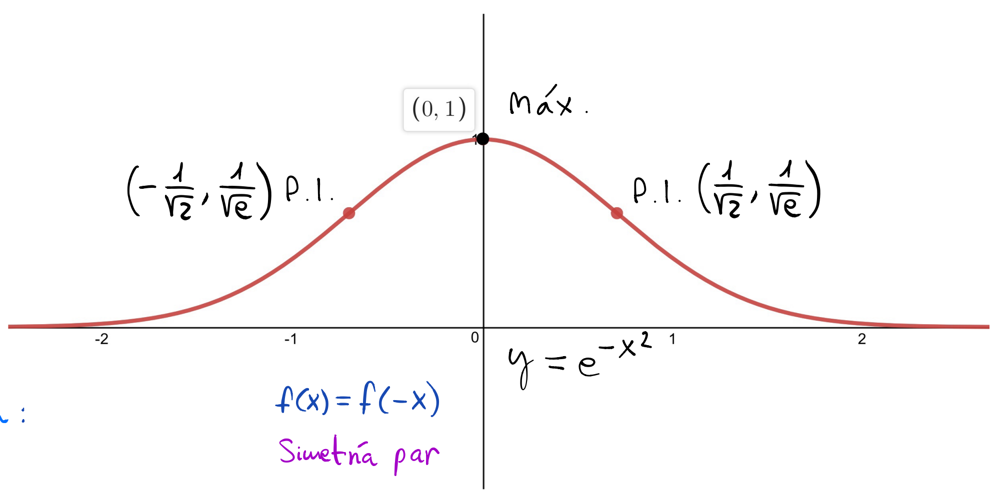
$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} \Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ es par.

$f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas.

Puntos de corte con los ejes

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = e^{-0} = 1 \\ y = 0 \Rightarrow \nexists x \end{array}\right\}$

$f(x)$ corta el eje OY en el punto $(0,1)$.



Ordenadas de los puntos de inflexión:

$f(x) = e^{-x^2}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\boxed{1j}$ $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

e^x existe para todo x (positivo o negativo), luego no hay puntos críticos que anulen el denominador: $f(x) \;\exists\; \forall x \Rightarrow D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}$

Asíntotas. En esta función, el cálculo de límites requiere de la regla de L'Hôpital que estudiaremos el próximo curso. Demostraremos en otra ocasión que tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x}\right) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{e^{\cancel{2}x}} = \frac{1-x}{e^x} = -\frac{x-1}{e^x}$$

Debe cumplirse la condición $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{e^x}\right) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x}$$

$f''(1) < 0$, luego en $x = 1$ hay un máximo.

$f(1) = \dfrac{1}{e} \simeq 0{,}368$ luego el máximo está en el punto $\left(1, \frac{1}{e}\right) = (1,\ 0{,}368)$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada:

Hay un extremo local en $x = 1$ (máximo).

No hay discontinuidades.

Debemos estudiar los intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$

Como $x = 1$ es un máximo $\begin{cases} \text{En } (-\infty, 1) \text{ es creciente } \nearrow \\ \text{En } (1, +\infty) \text{ es decreciente } \searrow \end{cases}$

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es un posible punto de inflexión.}$$

$f''(x) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} \Rightarrow f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{e^x}\right)$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{3-x}{e^x}$$

$f'''(2) = \frac{3-2}{e^2} \neq 0$, luego $x = 2$ es un punto de inflexión.

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x) = \frac{x}{e^x}$. Tenemos un punto de inflexión en $x = 2$.

Debemos considerar los intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$

Como hay un máximo en $x = 1 \in (-\infty, 2)$, en este intervalo la función es: $\cap$

Para averiguar cómo es la función en los otros intervalos, nos basamos en que a la izquierda y a la derecha hay puntos de inflexión.

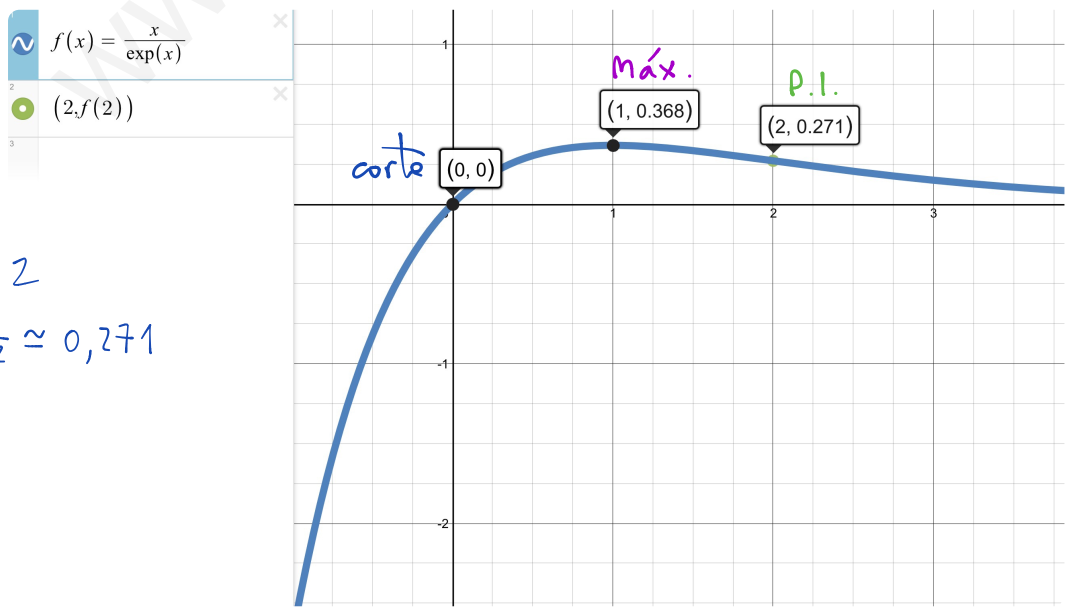
Como en $x = 2$ hay un punto de inflexión, en $x \in (2, +\infty)$, $f(x)$ es $\cup$

Representación gráfica

$f(x) = \frac{x}{e^x}$ no es periódica como una función trigonométrica.

$f(-x) = -\frac{x}{e^{-x}} = -xe^x$, $f(x) \neq f(-x) \neq -f(-x)$, No es simétrica.

Puntos de corte con los ejes $x = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$, corte en $(0,0)$



P.I. $x = 2$

$f(2) = \frac{2}{e^2} \simeq 0{,}271$

$\boxed{1K}$ $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

Dominio. Puntos de discontinuidad. Estudiamos los puntos críticos.

$\ln x \nexists$ para valores negativos de x.
$f(x) \nexists$ si $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Big\}\ D = (0,1) \cup (1,+\infty) = (0,+\infty) - \{1\}$

No está definida para $x=0$. $\mathcal{C} = D$.

Asíntotas.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

En esta función, el cálculo de límites requiere de la regla de L'Hôpital que estudiaremos el próximo curso.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x} \underset{\text{L'hôpital}}{=} \infty \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal.

Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot \ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{no hay asíntota oblicua.} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

Extremos locales. Calculamos los ceros de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1\cdot \ln x - \frac{x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Debe cumplirse la condición $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

Caracterizamos los extremos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1)\cdot 2\cdot \frac{\ln x}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

$f''(e) = \dfrac{2-1}{e\cdot 1^3} = \dfrac{1}{e} > 0$, luego en $x = e$ hay un mínimo.

$f(e) = \dfrac{e}{1} = e$, luego el mínimo está en el punto (e, e)

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos el signo de la primera derivada

Hay un extremo local en $x = e$ (mínimo). Hay una discontinuidad en $x = 1$.

Debemos estudiar los intervalos: $(0,1)$, $(1,e)$, $(e,+\infty)$

Como $x = e$ es un mínimo $\begin{cases} \text{En } (1,e) \text{ es decreciente } \searrow \\ \text{En } (e,+\infty) \text{ es creciente } \nearrow \end{cases}$

Aún no sabemos qué ocurre en $(0,1)$. Para averiguarlo, observamos el signo de la primera derivada en cualquier punto del intervalo, por ejemplo $x = \frac{1}{e}$.

$\begin{cases} \text{Si } f'(x) > 0 \text{, } f \text{ es creciente en } x \\ \text{Si } f'(x) < 0 \text{, } f \text{ es decreciente en } x \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \dfrac{\ln e^{-1} - 1}{(\ln e^{-1})^2} = \dfrac{-2}{1} < 0$, luego $f(x)$ es decreciente $\searrow$ en $(0,1)$.

Puntos de inflexión. Calculamos los ceros de la segunda derivada: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2.$$

$x = e^2$ es un posible punto de inflexión.

$f''(x) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente. Para confirmar que se trata de un punto de inflexión, debemos comprobar que $f'''(x) \neq 0$.

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}\right) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x \cdot (\ln x)^3 - (2 - \ln x) \cdot \left((\ln x)^3 + 3x\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}{x^2(\ln x)^6} =$$

$$= \frac{-\ln x - 2\ln x + (\ln x)^2 - 6 + 3\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)^2 - 6}{x^2(\ln x)^4} \;;$$

$f'''(e^2) = \dfrac{2^2 - 6}{e^4 \cdot 2^4} \neq 0$, luego $x = e^2$ es un punto de inflexión.

$f(e^2) = \dfrac{e^2}{\ln e^2} = \dfrac{e^2}{2}$; el punto de inflexión está en $\left(e^2, e^2/2\right)$.

Curvatura. Intervalos de concavidad y convexidad.

$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Tenemos un punto de inflexión en $x=e^2$ y discontinuidad en $x=1$.

Debemos considerar los intervalos: $(0,1)$, $(1,e^2)$, $(e^2,+\infty)$

Como hay un mínimo en $x=e \in (1,e^2)$, en este intervalo la función es: $\cup$

Para averiguar cómo es la función en los otros intervalos, nos basamos en que a la derecha hay un punto de inflexión.

Como en $x=e^2$ hay un punto de inflexión, en $x\in(e^2,+\infty)$, $f(x)$ es $\cap$

Para averiguar cómo es la función en $(0,1)$ observamos el signo de la segunda derivada:

$$\begin{cases} \text{Si } f''(x)>0, \text{ entonces } f(x) \text{ es convexa } \cup \text{ (curvatura positiva)} \\ \text{Si } f''(x)<0, \text{ entonces } f(x) \text{ es cóncava } \cap \text{ (curvatura negativa)} \end{cases}$$

$f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$; probamos con $x=\dfrac{1}{e}\in(0,1)$

$f''\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{2-(-1)}{\frac{1}{e}(-1)^3}=\dfrac{3}{-\frac{1}{e}}<0$, luego $f(x)$ es $\cap$ en $(0,1)$

Representación gráfica

$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ no es periódica.

$f(-x)=\dfrac{-x}{\ln(-x)}$ $\nexists$,

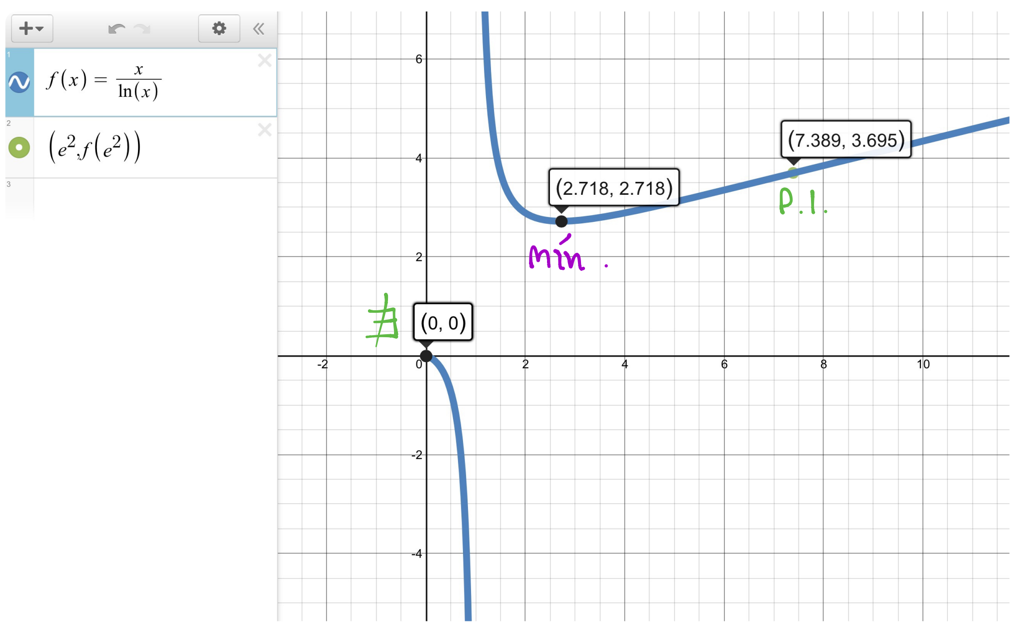
No es simétrica.

Puntos de corte con los ejes

$x=0 \Rightarrow$ La función no está definida

$y=0 \Rightarrow x=0$ $\nexists$

No hay puntos de corte con los ejes.



2. Obtén la ecuación de la **recta tangente** $f(x)=x^2+5x-2$ en el punto $x=-2$.

$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$ Ecuación de la tangente en el punto $P(a, f(a))$

$f(x) = x^2 + 5x - 2$

$a = -2 \quad f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) - 2 = 4 - 10 - 2 = -8$

$f'(x) = 2x + 5 \; ; \; f'(-2) = 2\cdot(-2) + 5 = 1$

$y + 8 = 1 \cdot (x+2) = x + 2$ ec. punto - pendiente

3. Calcula los **extremos absolutos** de $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ en el intervalo $[0,2]$.

En este problema la ligadura es $0 \leqslant x \leqslant 2$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \; ; \; f'(x) = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \notin [0,2] \\ 1 \in [0,2] \end{cases}$

$f(1) = \frac{1}{3} - 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ Mayor

$f(0) = 1$ Menor

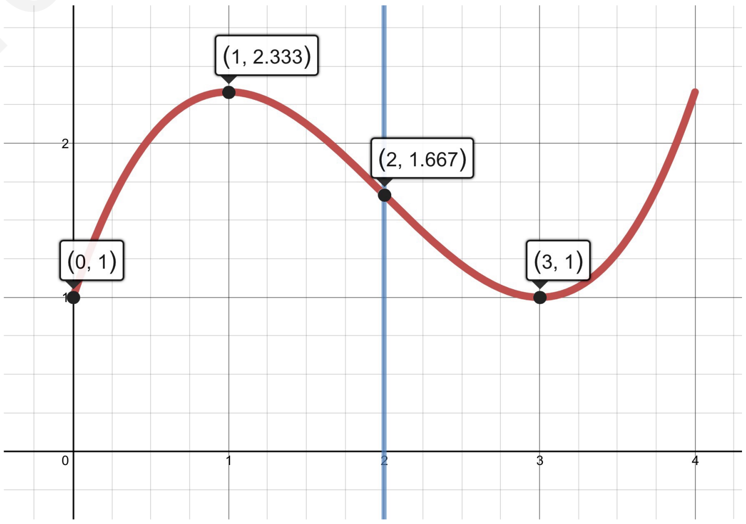
$f(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$

Mínimo $(0,1)$

Máximo $(1, 7/3)$

Compruebo $f''(x) = 2x - 4$

$f''(1) = -2 < 0$ Es máximo



Actividades de derivabilidad de funciones a trozos

4. Estudia si es posible encontrar valores para a, b y c para que función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad 1<x\le 2 \\ ax^2-c & si \quad x>2 \end{cases} \qquad D\,f(x) = \mathbb{R}$$

Calculamos la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\le 1 \\ a & si \quad 1<x\le 2 \\ 2ax & si \quad x>2 \end{cases}$$

Hay que comprobar

Sólo queda estudiar qué ocurre en los puntos críticos y de frontera, siendo en este caso $x=1$ y $x=2$. En el resto del dominio es derivable. Una condición necesaria (no suficiente) es que f sea continua en esos puntos, luego deben coincidir los límites laterales. La segunda condición que debe cumplir es que coincidan las derivadas por la izquierda y por la derecha: $f'(x^-)=f'(x^+)$.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 5 = a+b, \; f(1)=5$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 1 = a$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2a+b = 4a-c, \; f(2) = 2a+b$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow a = 4a$

$a=1 \Rightarrow b = 5-a = 4$

$a = 4a \Rightarrow a = 0$ (en contradicción)

El sistema no tiene solución. $\nexists\, a,b,c$ para que f sea derivable en 1 y 2.

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x<1 \\ a & si \quad 1<x<2 \\ 2ax & si \quad x>2 \end{cases}$$

$\mathcal{C} = \mathbb{R}-\{1,2\}$

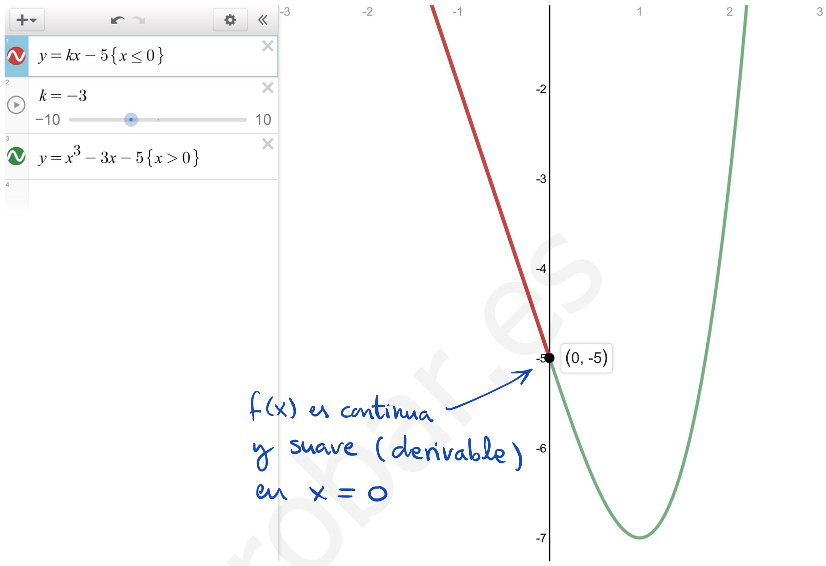
$D\,f(x) = \mathbb{R}-\{1,2\}$ (derivabilidad)

5. Averigua el valor que debe tener k para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases} k\cdot x-5 & si \quad x\le 0 \\ x^3-3x-5 & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ f'(a^-) = f'(a^+) \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (Kx-5) = -5 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} x^3-3x-5 = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ f(x) es continua en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} K & si \quad x\le 0 \\ 3x^2-3 & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = f'(0^+) \\ f'(x^-) = K \\ f'(x^+) = 3x^2-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K = 3\cdot 0^2-3 = -3 \\ K = -3 \end{array}$$

6. Averigua el valor de m y n para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=2$:

$$f(x)=\begin{cases} m\cdot x+5 & si \quad x\le 2 \\ n\cdot x^2+x-1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ f'(a^-) = f'(a^+) \end{array}}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} (mx+5) = \lim_{x\to 2^+} (nx^2+x-1)$$

$$2m+5 = 4n+2-1$$

$$2m+4 = 4n \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} m & si \quad x\le 2 \\ 2nx+1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$f'(x^-) = f'(x^+) \Rightarrow m = 2nx+1$$

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow m = 4n+1 \quad (2)$$

Resuelvo el sistema (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{l} 2m+4 = 4n \\ m = 4n+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2(4n+1)+4 = 4n \\ 8n+2+4 = 4n \\ 4n = -6 \\ n = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{array}$$

$$m = 4n+1 = 4\left(-\frac{3}{2}\right)+1$$

$$m = -6+1 = -5$$

7. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \quad (-\infty,0] \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 2 \quad (0,2] \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad x>2 \quad (2,\infty) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ f'(a^-)=f'(a^+) \end{matrix}}$$

Estudia para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable.

$\boxed{\text{Continuidad}}$ Vamos a estudiar los puntos críticos frontera, $x=0$ y $x=2$.

$\boxed{x=0}$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 0^-} x^2+2 = 2 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \end{matrix}\right\} \sqrt{b}=2 \Rightarrow b=4$$

$\boxed{x=2}$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 2^-} \sqrt{ax+b} = \sqrt{2a+b} = \sqrt{2a+4} = f(2) \\ \lim_{x\to 2^+} \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \sqrt{2a+4} = \sqrt{2} \Rightarrow 2a+4=2 \\ 2a=-2 \Rightarrow a=-1 \end{matrix}$$

$\boxed{\text{Si } b=4 \text{ la función } f(x) \text{ es continua en } x=0 \text{ y si } a=-1 \text{ es continua en } x=2.}$

Veamos si hay algún problema de dominio con $\sqrt{ax+b} = \sqrt{-x+4}$

$-x+4\ge 0 \Rightarrow 4\ge x \Rightarrow x\le 4$ y no hay problema porque el intervalo $(0,2]\le 4$

$\boxed{\text{Derivabilidad}}$

Vamos a calcular la derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ \dfrac{a}{2\cdot\sqrt{ax+b}} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$ $\boxed{f'(a^-)=f'(a^+)}$ Derivabilidad

$\boxed{x=0}$ $f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow 2x = \dfrac{a}{2\cdot\sqrt{ax+b}} \underset{x=0}{\Rightarrow} 0 = \dfrac{a}{2\cdot\sqrt{b}} \Rightarrow a=0 \neq -1$ | No coincide con el resultado anterior. No derivable

$\boxed{x=2}$ $f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow \dfrac{a}{\cancel{2}\cdot\sqrt{ax+b}} = \dfrac{-1}{\cancel{2}\sqrt{2}} \underset{x=2,\ b=4}{\Rightarrow} \dfrac{a}{\sqrt{a\cdot 2+4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, elevamos al cuadrado

$$\frac{a^2}{2a+4}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a^2=2a+4 \Rightarrow 2a^2-2a-4=0, \Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2\cdot(-4)}}{4}=\frac{2\pm 6}{4} \begin{cases} 2 \\ -1 \text{ Válida} \end{cases}$$

Si $b=4$ y si $a=-1$ $f(x)$ es continua y derivable en $x=2$.
Es continua, pero no derivable en $x=0$.

8. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{a}x^3-ax^2+5x+10$, $a\neq 0$.

a) Obtener los valores de a para los que la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=1$.

b) Suponiendo que $a=3$, estudia los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $f'(x)=\frac{1}{a}\cdot 3x^2-2ax+5=0$ en $x=1$ (condición de extremo).

$$\frac{1}{a}\cdot 3\cdot 1^2-2a\cdot 1+5=0 \Rightarrow \frac{3}{a}-2a+5=0 \Rightarrow 3-2a^2+5a=0$$

$$2a^2-5a-3=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 7}{4}\begin{cases}3\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Comprobación: $3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{c}{a}=\frac{-3}{2}$ ✓

Veamos si es máximo con la 2^{a} derivada. Tiene que verificar $f''(1)<0 \Rightarrow$ Máximo local.

$f''(x)=\frac{1}{a}\cdot 6x-2a$. Si $a=3$ $f''(1)=2\cdot 1-2\cdot 3<0 \Rightarrow$ Máximo local $a=3$ cumple

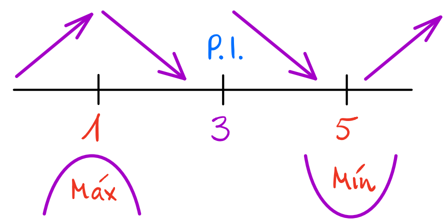
Si $a=-\frac{1}{2}$ $f''(1)=-6\cdot 1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow$ Máximo local $a=-\frac{1}{2}$ cumple

b) Si $a=3$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+10$

$$f'(x)=x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 1\cdot 5}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}\begin{cases}5\\ 1\end{cases}$$

$f''(x)=2x-6$, $f''(5)=2\cdot 5-6>0 \Rightarrow$ Mínimo local

Condición P.I. $f''(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$ ¿P.I.?



Es un punto de inflexión porque la curvatura cambia. $x=3$

Crece $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$, Decrece $(1,5)$

Veamos las coordenadas.

$f(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1+10=\frac{37}{3}$

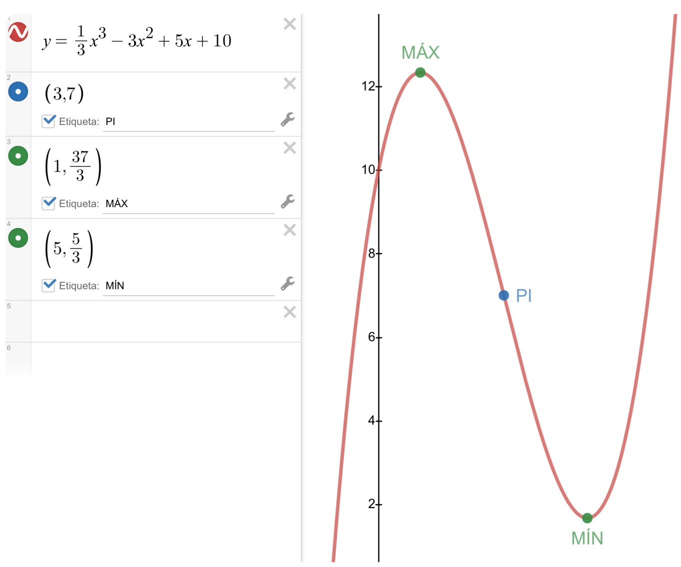
$f(5)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5+10=\frac{5}{3}$

$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3\cdot 3^2+5\cdot 3+10=7$

Máximo local $\left(1,\frac{37}{3}\right)$

Mínimo local $\left(5,\frac{5}{3}\right)$

Punto de inflexión $(3,7)$



9. La gráfica de la función $f(x)=ax^3+bx+c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un extremo relativo en $(1,-1)$.

a) Calcula los coeficientes a, b y c.

b) ¿Qué tipo de extremo es, máximo o mínimo?

a) La función pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,-1)$ y cumple la condición de extremo $f'(1)=0$.

$f(x) = ax^3+bx+c$

$f(0) = a\cdot 0^3+b\cdot 0+c = 0 \Rightarrow c=0$

$f(1) = a\cdot 1^3+b\cdot 1+c=-1 \Rightarrow a+b+\underbrace{c}_{0}=-1 \Rightarrow a+b=-1 \quad [1]$

$f'(x) = 3ax^2+b$

$f'(1) = 3a\cdot 1^2+b=0 \Rightarrow 3a+b=0 \quad [2]$

Resolvemos el sistema formado por [1] y [2] $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a+b=0 \\ a+b=-1 \end{array}\right\} - \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$b=-1-a=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$

La forma final de la función es $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$

b) Tipo de extremo: $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$

$f''(x)=3x \Rightarrow f''(1)=3>0 \Rightarrow$ Mínimo local en $x=1$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Solucionario

11. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

12. Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.

13. Se lanza verticalmente una pelota. Su ecuación de movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ donde s(t) se expresa en centímetros y t en segundos.

a. Identifica, desde el punto de vista físico, qué representan los números 6 y 48.
b. ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?
c. ¿En qué instante la pelota empieza a descender?
d. ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?
e. ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?
f. ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes t = 3 s y t = 7 s ? ¿Por qué son de distinto signo?

14. Analiza en un movimiento de **tiro parabólico**, cuál es el **alcance** y la **altura máxima**. ¿Para qué **ángulo** de tiro es el **alcance máximo**?

15. Dispongo de 400 m de tela metálica para cercar un rectángulo de terreno. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que el **área** encerrada en la cerca sea la **máxima** posible?

16. Halla los valores de las constantes **a**, **b** y **c** para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1,20)$ y tenga un **mínimo** relativo en el punto $Q(3,12)$.

17. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el **volumen** sea **máximo**.

18. Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el **área mínima** posible?

19. Dado un cilindro de volumen 4 m^3, determinar sus dimensiones para que su **área** total sea **mínima**.

20. Una **lata cilíndrica** de refresco tiene un volumen de 333 cm^3. La chapa utilizada para las bases es el doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el **coste** de fabricación sea el **menor posible**.

21. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $P(0,2)$?

11. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

Sean x e y los números.

$x + y = 20$ es la ligadura o restricción.

Supongamos que $0 \leqslant x \leqslant y$ (x es el menor).

Calculo dónde $x=y$; $2x = 20 \Rightarrow x = 10$ es el valor máximo de x

El valor mínimo de x es $x = 0$. Luego debo hallar los extremos absolutos en el intervalo $[0,10]$

La función objetivo que queremos maximizar es $S = y^2 + (2x)^2 = y^2 + 4x^2$

Sustituimos la ligadura en la función:

$$y = 20 - x \Rightarrow S = (20-x)^2 + 4x^2 = 400 - 40x + x^2 + 4x^2$$

$$S = 5x^2 - 40x + 400$$

Para encontrar los extremos, hallamos los ceros de la primera derivada:

$$S'(x) = \frac{d}{dx} S(x) = 10x - 40 \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{10} = 4$$

Comprobamos el valor de y: $y = 20 - 4 = 16$

Efectivamente: $y > x$ (y es mayor)

La suma es $S(4) = 5 \cdot 4^2 - 40 \cdot 4 + 400 = 320$

La derivada segunda me permite comprobar si es un mínimo.

$S''(x) = 10 > 0$, luego la suma es un mínimo relativo.

Tenemos que comprobar la función en los extremos: $[0,10]$

$S = 5x^2 - 40x + 400$

$S(0) = 400$

$S(10) = 5 \cdot 100 - 40 \cdot 10 + 400 = 500$

$S(4) = 320$ (es el mínimo absoluto)

12. Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.

Sean x e y los números.

$x + y = 18$ es la ligadura o restricción.

La función objetivo que queremos maximizar es $P = x \cdot y$

Sustituimos la ligadura en la función:

$$y = 18 - x$$

$$P = x \cdot (18 - x) = 18x - x^2$$

Para encontrar los extremos, hallamos los ceros de la primera derivada:

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = \dfrac{d}{dx}P(x) = 18 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{18}{2} = 9 \\ y = 18 - x = 18 - 9 = 9 \end{array}\right\} P = 81$$

La derivada segunda $P''(x) = -2 < 0$, luego efectivamente es un máximo.

13. Se lanza verticalmente una pelota. Su ecuación de movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ donde s(t) se expresa en centímetros y t en segundos.

a. Identifica, desde el punto de vista físico, qué representan los números 6 y 48.
b. ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?
c. ¿En qué instante la pelota empieza a descender?
d. ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?
e. ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?
f. ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes t = 3 s y t = 7 s ? ¿Por qué son de distinto signo?

a) $s(t)$ es la ecuación de la trayectoria. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = -6t^2 + 48t$

$v_0 = 48$ cm/s . $\frac{1}{2} a = -6 \Rightarrow a = -12$ cm/s^2

b) La velocidad instantánea $v = \dfrac{ds}{dt} = -12t + 48 \Rightarrow v(0) = 48$ cm/s

c) Comienza a descender cuando $v = 0$

$v(t) = -12t + 48 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{48}{12} = 4$ s

d) $s(t) = -6t^2 + 48t$; $s(4) = -6 \cdot 4^2 + 48 \cdot 4 = 96$ cm

e) Tarda lo mismo en subir que en bajar: $t = 8$ s

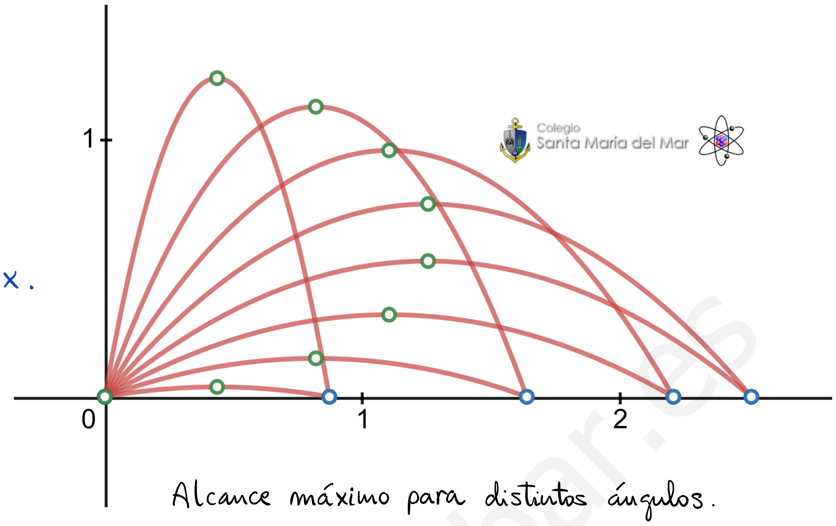
f) $v(3) = -12 \cdot 3 + 48 = 12$ cm/s
$v(7) = -12 \cdot 7 + 48 = -36$ cm/s

Nota: La aceleración $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-12t + 48) = -12$ cm/s^2

14. Analiza en un movimiento de **tiro parabólico**, cuál es el **alcance** y la **altura máxima**. ¿Para qué **ángulo** de tiro es el **alcance máximo**?

La ecuación para resolver el alcance máximo de un tiro parabólico en función del ángulo de lanzamiento α, viene de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array}\right\}$$



Alcance máximo para distintos ángulos.

Los ángulos complementarios tienen el mismo alcance.

Alcance máximo

Calculo t para $y = 0$ y sustituyo en x.

La solución es : Función objetivo

$$x_{máx}(\alpha) = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g},$$

siendo v_0 el módulo de la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad.

La función $x_{máx}(\alpha)$ depende del ángulo y será máxima cuando se cumpla la condición de extremo :

$$\frac{d}{d\alpha} x_{máx}(\alpha) = 0 \implies \frac{d}{d\alpha} \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 0 \implies \cos 2\alpha = 0$$

Luego $2\alpha = (2 \cdot n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N} \implies$ El valor mínimo que cumple la condición, $n = 0 \implies$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$ ó 45° ; Logramos un alcance máximo y óptimo con este ángulo.

La 2^a derivada en $\alpha = \frac{\pi}{4}$ es : $\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha\right] = -\frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

Evaluamos la 2^a derivada en $\alpha = \frac{\pi}{4} \implies -\frac{4v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{\pi}{4} < 0 \implies$ Es máximo. Q.E.D.

Altura máxima. $y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ Ecuación de la altura. Función objetivo

$y'(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha - g \cdot t$ (velocidad). La condición de extremo es $y'(t) = 0$

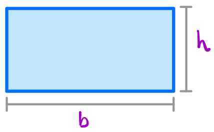
$\implies v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha - g \cdot t = 0 \implies t = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g}$; sustituimos en la ecuación de la altura.

$$y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2 \cdot g}$$

Para saber si es máximo calculamos la segunda derivada.

$y''(t) = \frac{dv}{dt} = -g < 0$ (aceleración) $\implies$ Es un máximo. $y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2 \cdot g}$

15. Dispongo de 400 m de tela metálica para cercar un rectángulo de terreno. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que el **área** encerrada en la cerca sea la **máxima** posible?



El perímetro $L = 2b + 2h = 2(b+h)$ ec. ligadura

El área $A = b \cdot h$ función objetivo que deseamos maximizar

Despejo una variable de la ecuación de ligadura: $b = \frac{L-2h}{2}$ y la sustituyo en la función a maximizar, es decir, el área:

$A = b \cdot h = \frac{L-2h}{2} \cdot h = \frac{L}{2} \cdot h - h^2$; Derivamos A con respecto de la variable h:

$A' = \frac{dA}{dh} = \frac{L}{2} - 2 \cdot h$; $A' = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow 2h = \frac{L}{2} \Rightarrow h = \frac{L}{4}$

Calculamos $b = \frac{L-2h}{2} = \frac{L - 2 \cdot \frac{L}{4}}{2} = \frac{L - \frac{L}{2}}{2} = \frac{2L-L}{4} = \frac{L}{4}$

Por tanto $h = b = \frac{L}{4}$; La solución óptima para un área máxima es un cuadrado.

Comprobamos si se trata de un máximo a través de la derivada segunda.

$A'' = \frac{d}{dh} A' = \frac{d^2}{dh^2} A$

$\frac{d}{dh}\left(\frac{L}{2} - 2 \cdot h\right) = -2 < 0$, por tanto, el valor del área es máximo.

En nuestro caso $L = 400\,m$, $b = h = \frac{L}{4} = 100\,m$

El área máxima $A = 100\,m \cdot 100\,m = 10^4\,m^2$

16. Halla los valores de las constantes **a**, **b** y **c** para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1,20)$ y tenga un **mínimo** relativo en el punto $Q(3,12)$.

$f(x)$ pasa por $P(-1,20) \Rightarrow f(-1) = a - b + c = 20$ (1)

Extremo en $Q(3,12) \Rightarrow$ En $x=3$ $f'(x) = 0$.

$f(3) = 12 \Rightarrow 9a + 3b + c = 12$ (2)

$f'(x) = 2ax + b = 0$; en $x = 3 \Rightarrow 6a + b = 0$ (3)

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 12 \\ 6a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 8a + 4b = -8 \\ 6a + b = 0 \end{array} \Big\} \times 4$$

$$16a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

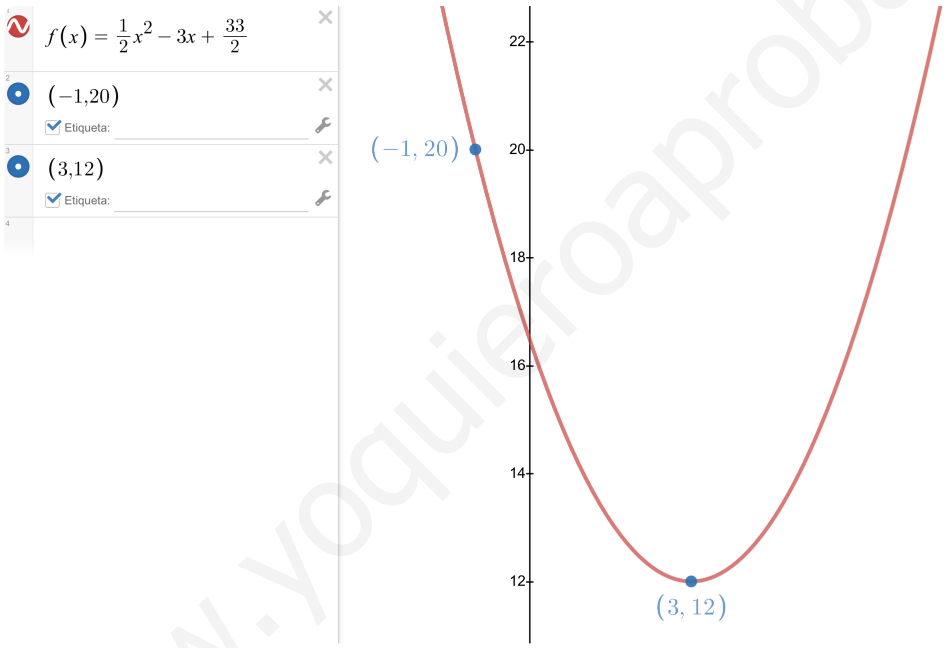
$$b = -6a = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

$$c = 20 - a + b = 20 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{40 - 1 - 6}{2} = \frac{33}{2}$$

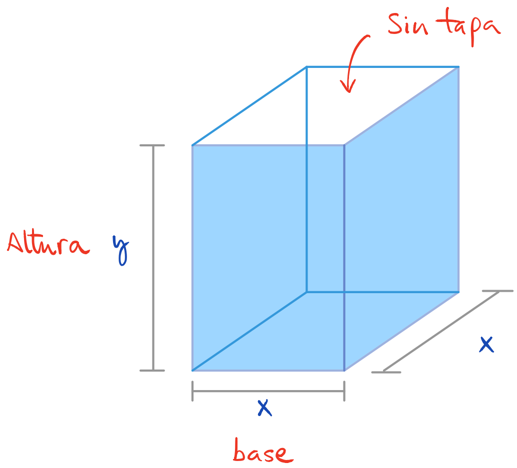
La condición de extremo es que $f'(x) = 0$ y $f''(x) \neq 0$ en $x = 3$.

$f''(x) = 2a = 2 \cdot \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ En $x = 3$ hay un mínimo.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{33}{2}$$



17. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el **volumen** sea **máximo**.



Ligadura o restricción

$A = x \cdot y \cdot 4 + x^2 = 192$ Área limitada

Función objetivo

$V = \text{base} \cdot \text{altura} = x^2 \cdot y$ Maximizar

$x \cdot y \cdot 4 + x^2 = 192$, en la ligadura, despejamos una variable en función de la otra.

$$y = \frac{192 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192x^2 - x^4}{4x} = \frac{192x - x^3}{4}$$, Derivamos para que sea extremal.

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dx} = \frac{1}{4} \cdot (192 - 3x^2) = 0$$ Condición de extremo

$$192 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{192}{3}} = 8 \text{ cm} \Rightarrow y = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4 \text{ cm}$$

$$V''(x) = \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{1}{4} \cdot (-6x) = -\frac{3}{2}x$$, Veamos si es máximo con la 2ª derivada.

$V''(8) = -\frac{3}{2} \cdot 8 < 0 \Rightarrow$ en $x = 8$ cm hay un máximo.

El volumen máximo $V(x, y) = x^2 \cdot y = 8^2 \cdot 4 = 256 \text{ cm}^3$

Para asegurarnos de que es un máximo absoluto, vamos a analizar los casos extremos:

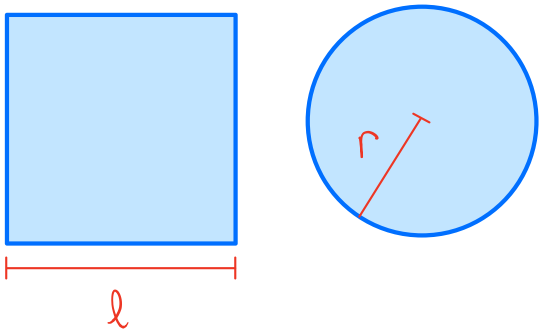
Si $y = 0$ entonces $\frac{192 - x^2}{4x} = 0 \Rightarrow 192 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{192} \simeq 13{,}86$ como máximo

$x \in [0, \sqrt{192}]$, Comprobamos los bordes del intervalo:

$$V = \frac{192x - x^3}{4} \Rightarrow V(0) = 0 \quad , \quad V(\sqrt{192}) = 0$$

Luego, el máximo absoluto se alcanza en $x = 8$ cm , $y = 4$ cm con un volumen $V = 256 \text{ cm}^3$.

18. Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el **área mínima** posible?



Ligadura o restricción

$4\ell + 2\pi r = 4\,m$

Casos extremos

$4\ell = 4$ | $0 \leqslant r \leqslant \frac{2}{\pi}$

$0 \leqslant \ell \leqslant 1$ | $2\pi r = 4$

Función objetivo : $A = \ell^2 + \pi \cdot r^2$

$$4\ell = 4 - 2\pi r \Rightarrow \ell = \frac{4 - 2\pi r}{4} = 1 - \frac{\pi r}{2}$$

$$A = \ell^2 + \pi \cdot r^2 = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi \cdot r^2 = 1 - \pi r + \frac{\pi^2 r^2}{4} + \pi \cdot r^2 \quad \text{Mínima.}$$

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 0 - \pi + \frac{\pi^2}{4} \cdot 2r + \pi \cdot 2r = -\pi + \frac{\pi^2}{2} \cdot r + \pi \cdot 2r = r \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} + 2\pi\right) - \pi = 0$$

$$r \cdot \left(\frac{\pi^{\cancel{2}}}{2} + 2\cancel{\pi}\right) = \cancel{\pi} \Rightarrow r \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2} = \frac{2}{\pi + 4} \simeq 0{,}28\,m$$

$$A''(r) = \frac{d^2A}{dr^2} = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0 \Rightarrow r = 0{,}28\,m \text{ hay un mínimo.}$$

$$\ell = 1 - \frac{\pi r}{2} = 0{,}56\,m \Rightarrow A = \ell^2 + \pi \cdot r^2 = 0{,}56^2 + \pi \cdot 0{,}28^2 = 0{,}56\,m^2$$

Para asegurarnos de que es un mínimo absoluto, vamos a analizar los casos extremos:

Si $\ell = 0$ entonces $1 - \frac{\pi r}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi r}{2} = 1 \Rightarrow r = \frac{2}{\pi}$ como máximo

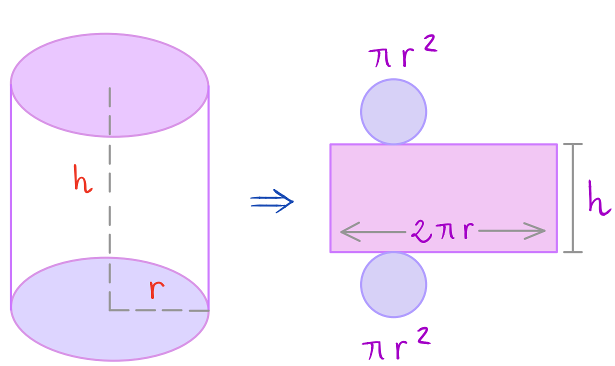
$r \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, Comprobamos los bordes del intervalo:

$$A = \ell^2 + \pi \cdot r^2 = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi \cdot r^2 \Rightarrow A(0) = 1\,m^2,\ A\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0 + \pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi} \simeq 1{,}27\,m^2$$

Luego, el mínimo absoluto se alcanza en $\ell = 0{,}56\,m$, $r = 0{,}28\,m$ con un $A = 0{,}56\,m^2$.

19. Dado un cilindro de volumen 4 m^3, determinar sus dimensiones para que su **área** total sea **mínima**.

El área del cilindro consiste en dos caras circulares y el lateral rectangular.



$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ Función objetivo que queremos minimizar

$r, h > 0$ (positivos)

Los casos extremos $r=0$ ó $h=0$ son absurdos.

El volumen $V = \pi r^2 h = 4\,m^3$ Ligadura o restricción

Despejo la altura: $h = \dfrac{4}{\pi r^2}$; sustituimos en la función de Área:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{4}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{8}{r}$$

Derivamos para encontrar los extremos:

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{8}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{8}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \simeq 0{,}86\,m$$

Compruebo el tipo de extremo con la segunda derivada.

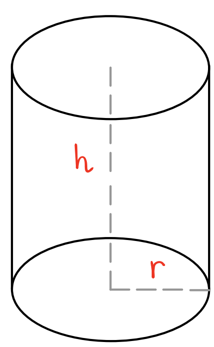
$$A''(r) = \frac{dA'}{dr} = 4\pi + \frac{16}{r^3} = \frac{4\pi r^3 + 16}{r^3} \Rightarrow A''(0{,}86) > 0\text{ , es mínimo.}$$

Sustituyendo valores $h = \dfrac{4}{\pi r^2} \simeq 1{,}72\,m$ coincide con el diámetro (doble del radio)

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\times\pi\times0.86^2+2\times\pi\times0.86\times1.72\approx13.94113\ m^2$$

20. Una **lata cilíndrica** de refresco tiene un volumen de 333 cm^3. La chapa utilizada para las bases es el doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el **coste** de fabricación sea el **menor posible**.

Área lateral: $2\pi r h$ Área base: πr^2 Volumen: $\pi r^2 h$



Coste: $C = 2\pi r h + \underbrace{4\pi r^2}$ Función objetivo que queremos minimizar

doble coste de la suma de las 2 caras

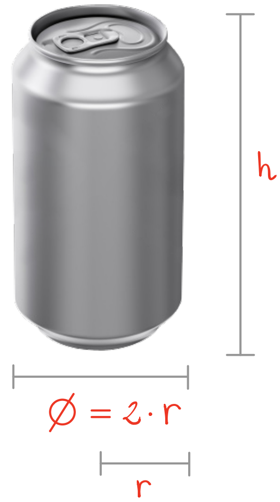
$\pi r^2 h = 333$ Ligadura o restricción

$$h = \frac{333}{\pi r^2} \Rightarrow C = 2\cancel{\pi} r \cdot \frac{333}{\cancel{\pi} r^2} + 4\pi r^2 = \frac{666}{r} + 4\pi r^2$$

Derivamos para encontrar los extremos: $C'(r) = \dfrac{dC(r)}{dr} = -\dfrac{666}{r^2} + 8\pi r = 0$

$$\Rightarrow \quad 8\pi r = \frac{666}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{666}{8\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{666}{8\pi}} \simeq 2{,}98 \text{ cm}$$

$h = \dfrac{333}{\pi r^2} \simeq 11{,}94 \text{ cm}$, El coste de fabricación de la lata es el mínimo con estas proporciones.



$C''(r) = \dfrac{2 \cdot 666}{r^3} + 8\pi > 0 \Rightarrow$ Mínimo ; Puede verificarse que una lata estándar lo verifica de forma aproximada (la función de coste real es parecida).

21. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $P(0,2)$?

Coordenadas de los puntos $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}$$

La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}$

En nuestro problema, vamos a calcular la función distancia entre P y cualquier punto (x,y) de la gráfica: $(x,y) - (0,2) = (x, y-2)$, siendo la distancia, el módulo:

$d(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ Función objetivo que deseamos minimizar.

$y = 4 - x^2$ Ligadura o restricción ; Ya tenemos despejada una variable en función de la otra.

Sustituimos y en la Función objetivo de modo que dependa de una sola variable.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

$d'(x) = \dfrac{4x^3 - 6x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0$, Condición de extremo. $4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (4x^2 - 6) = 0$

Tenemos posibles extremos en $x = 0$, $4x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

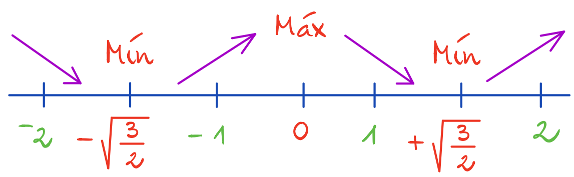
Evaluamos puntos al azar en cada intervalo y estudiamos la monotonía con el signo de la 1ª derivada.

$d'(-2) < 0 \Rightarrow \searrow$

$d'(-1) > 0 \Rightarrow \nearrow$

$d'(1) < 0 \Rightarrow \searrow$

$d'(2) > 0 \Rightarrow \nearrow$



$\Rightarrow$ Tenemos dos mínimos en $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$y = 4 - x^2 \Rightarrow y\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) =$

$= 4 - \left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2 = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

Los puntos más cercanos a $P(0,2)$ son:

$\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{5}{2}\right)$ y $\left(+\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{5}{2}\right)$