1 Un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene componentes $(5,-2)$. Hallar las coordenadas de A si se conoce el extremo $\mathrm{B}=(12,-3)$.

Solución

Un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene componentes $(5,-2)$. Hallar las coordenadas de A si se conoce el extremo $\mathrm{B}=(12,-3)$.

1 Como no conocemos las coordenadas de A, las denotamos mediante

$$\mathrm{A}=(\mathrm{x}_A, y_A).$$

2 Sabemos que las coordenadas de un vector se obtienen a partir de restarle el punto inicial al punto final

$$\begin{aligned} B-A &= \overrightarrow{AB} \\ (12-x_A, -3-y_A) &= (5,-2) \end{aligned}$$

3 Obtenemos dos ecuaciones

$$12\text{-x}_A = 5, \qquad -3 - y_A = -2$$

4 Resolvemos las dos ecuaciones y obtenemos que las coordenadas de A son

$$\mathrm{A}=(7,\text{-}1)$$

2 Dado el vector $\vec{u} = (2, -1)$ y dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, determinar B y C sabiendo que $\mathrm{A}=(1,\text{-}3)$ y $\mathrm{D}=(2,0)$.

Solución

Dado el vector $\vec{u} = (2, -1)$ y dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, determinar B y C sabiendo que $\mathrm{A}=(1,\text{-}3)$ y $\mathrm{D}=(2,0)$.

1 Como $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ son equipolentes, entonces $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2 Como no conocemos las coordenadas de B, las denotamos mediante

$$\mathrm{A}=(\mathrm{x}_B, y_B).$$

3 Sabemos que las coordenadas de un vector se obtienen a partir de restarle el punto inicial al punto final

$$\begin{aligned} B - A &= \overrightarrow{AB} \\ B - A &= \overrightarrow{u} \\ (x_B - 1, y_B + 3) &= (2, -1) \end{aligned}$$

4 Obtenemos dos ecuaciones

$$x_B - 1 = 2, \qquad y_B + 3 = -1$$

5 Resolvemos las dos ecuaciones y obtenemos que las coordenadas de B son

$$B=(3,-4)$$

6 Resolviendo de la misma forma que para B, tenemos que $C=(0,1)$.

3 Calcular la distancia entre los puntos $A=(2,1)$ y $B=(-3,2)$.

Solución

Calcular la distancia entre los puntos $A=(2,1)$ y $B=(-3,2)$.

1 La fórmula para la distancia entre dos puntos es

$$d(AB)=\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2 Sustituimos los valores de A y B fórmula de distancia entre dos puntos y obtenemos

$$d(AB)=\sqrt{(-3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$$

4 Si $\vec{v}$ es un vector de componentes $(3,4)$, hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

Solución

Si $\vec{v}$ es un vector de componentes $(3,4)$, hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

1 La fórmula para que un vector sea unitario es

$$=\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

2 Calculamos la magnitud de $\vec{v}$

$$=\sqrt{(3)^2+(4)^2}=\sqrt{25}=5$$

3 Sustituimos en la fórmula para obtener un vector unitario

$$=\frac{1}{5}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

5 Hallar un vector unitario de la misma dirección que el vector $=(8,\text{-}6)$.

Solución

Hallar un vector unitario de la misma dirección que el vector $=(8,\text{-}6)$.

1 La fórmula para que un vector sea unitario es

$$=\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

2 Calculamos la magnitud de $\vec{v}$

$$=\sqrt{(8)^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$$

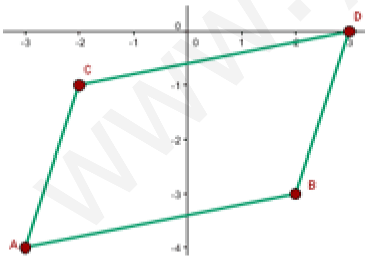
3 Sustituimos en la fórmula para obtener un vector unitario

$$=\frac{1}{10}(8,-6)=\left(\frac{10}{8},\frac{-6}{10}\right)=\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$$

6 Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices $\mathrm{A}=(-1,-2)$, $\mathrm{B}=(4,-1)$, $\mathrm{C}=(5,2)$ y D sea un paralelogramo.

Solución

Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices $\mathrm{A}=(-1,-2)$, $\mathrm{B}=(4,-1)$, $\mathrm{C}=(5,2)$ y D sea un paralelogramo.



1 Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales en magnitud y dirección, entonces tenemos

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

2 Como no conocemos las coordenadas de D, las denotamos mediante

$D=(x_D, y_D)$.

3 Sustituimos los valores de los vértices del paralelogramo en la igualdad de vectores

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\ (4+1, -1+2) &= (5-x_D, 2-y_D) \end{aligned}$$

4 Obtenemos dos ecuaciones

$$5=5-x_D, \qquad 1=2-y_D$$

5 Resolviendo las ecuaciones obtenemos las coordenadas buscadas

$$D=(0,1)$$

7 Hallar las coordenadas del punto medio del segmento AB, de extremos $A=(3,9)$ y $B=(-1,5)$.

Solución

Hallar las coordenadas del punto medio del segmento AB, de extremos $A=(3,9)$ y $B=(-1,5)$.

1 Las fórmulas para las coordenadas del punto medio son

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2 Sustituimos los valores de A y B en las dos fórmulas anteriores

$$x_m = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$y_m = \frac{9+5}{2} = 7$$

3 El punto medio es $P_m = (1,7)$.

8 Hallar las coordenadas del punto C, sabiendo que $B=(2,-2)$ es el punto medio de AC, donde $A=(-3,1)$.

Solución

Hallar las coordenadas del punto C, sabiendo que $\mathrm{B}=(2,\text{-}2)$ es el punto medio de AC, donde $\mathrm{A}=(\text{-}3,1)$.

1 Las fórmulas para las coordenadas del punto medio son

$$\mathrm{x}_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2 Sustituimos los valores de A y B en las dos fórmulas anteriores y calculamos la primera coordenada de C

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{-3 + x_C}{2} \\ 4 &= -3 + x_C \\ 7 &= x_C \end{aligned}$$

3 La segunda coordenada de C es

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{1 + y_C}{2} \\ -4 &= 1 + y_C \\ -5 &= y_C \end{aligned}$$

4 Finalmente $\mathrm{C}=(7,\text{-}5)$ es

9 Averiguar si están alineados los puntos $A=(-2,-3)$, $B=(1,0)$ y $C=(6,5)$.

Solución

Averiguar si están alineados los puntos $A=(-2,-3)$, $B=(1,0)$ y $C=(6,5)$.

1 Los puntos A, B, C son colineales si las pendientes de los segmentos AB y BC son iguales.

$$m_{AB}=\frac{0-(-3)}{1-(-2)}=1, \qquad m_{BC}=\frac{5-0}{6-1}=1$$

2 Como ambas pendientes son iguales, entonces los tres puntos si están alineados.

10 Calcular el valor de a para que los puntos $A=(2,1)$, $B=(4,2)$, $C=(6,a)$ estén alineados.

Solución

Calcular el valor de a para que los puntos $A=(2,1)$, $B=(4,2)$, $C=(6,a)$ estén alineados.

1 Los puntos $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ son colineales si las pendientes de los segmentos AB y BC son iguales.

$$\mathrm{m}_{AB} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}, \qquad m_{BC} = \frac{a-2}{6-4} = \frac{a-2}{2}$$

2 Como ambas pendientes son iguales, igualamos ambas expresiones y despejamos a

$$\begin{aligned} \frac{a-2}{2} &= \frac{1}{2} \\ a-2 &= 1 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

11 Dados los puntos $\mathrm{A}=(3,2)$ y $\mathrm{B}=(5,4)$, hallar un punto C alineado con A y B, de manera que se obtenga $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$.

Solución

Dados los puntos $\mathrm{A}=(3,2)$ y $\mathrm{B}=(5,4)$, hallar un punto $\mathrm{C}=(\mathrm{x},\mathrm{y})$ alineado con A y B, de manera que se obtenga $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2}$.

1 Partimos de la condición dada y obtenemos una igualdad

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} &= \frac{3}{2} \\ \overrightarrow{CA} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \\ (3-x, 2-y) &= \frac{3}{2}(5-x, 4-y)\end{aligned}$$

2 Igualamos ambas expresiones coordenada a coordenada y obtenemos

$$3\text{-x}=\frac{3}{2}(5-x) \qquad 2-y=\frac{3}{2}(4-y)$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones para obtener las coordenadas de C

$$\begin{aligned}3-x &= \frac{3}{2}(5-x) \\ 2(3-x) &= 3(5-x) \\ 6-2x &= 15-3x \\ 3x-2x &= 15-6 \\ x &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-y &= \frac{3}{2}(4-y) \\ 2(2-y) &= 3(4-y) \\ 4-2y &= 12-3y \\ 3y-2y &= 12-4 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

12 Dado un triángulo con vértices $A=(1{,}2)$, $B=(-3{,}4)$ y $C=(-1{,}6)$, hallar las coordenadas del baricentro.

Solución

Dado un triángulo con vértices $A=(1{,}2)$, $B=(-3{,}4)$ y $C=(-1{,}6)$, hallar las coordenadas del baricentro.

1 La fórmula para encontrar el baricentro es

$$G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

2 Sustituyendo los valores de los vértices del triángulo obtenemos

$$G=\left(\frac{1-3-1}{3},\frac{2+4+6}{3}\right)=(-1,4)$$

13 Dado un triángulo con dos de sus vértices $A=(2,1),\ B=(1,0)$ y el baricentro $G=(2/3,0)$, calcular el tercer vértice.

Solución

Dado un triángulo con dos de sus vértices $A=(2,1),\ B=(1,0)$ y el baricentro $G=(2/3,0)$, calcular el tercer vértice.

1 La fórmula para encontrar el baricentro es

$$G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

2 Sustituyendo los valores del baricentro y los vértices del triángulo obtenemos dos ecuaciones

$$\frac{2}{3}=\frac{2+1+x}{3}, \qquad 0=\frac{1+0+y}{3}$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos el tercer vértice $(-1,-1)$.

14 Hallar el simétrico del punto $A=(4,-2)$ respecto de $M=(2,6)$.

Solución

Hallar el simétrico del punto $A=(4,-2)$ respecto de $M=(2,6)$.

1 Denotamos por $B=(x,y)$ al simétrico de A, luego se cumple que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

2 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

$$-2=x-2, \qquad 8=y-6$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos $B=(0,14)$.

15 Hallar el simétrico del punto $A=(3,-2)$ respecto de $M=(-2,5)$.

Solución

Hallar el simétrico del punto $A=(3,-2)$ respecto de $M=(-2,5)$.

1 Denotamos por $B=(x,y)$ al simétrico de A, luego se cumple que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

2 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

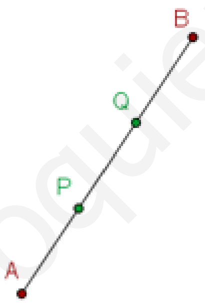
$$-5=x+2, \qquad 7=y-5$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos $B=(-7,12)$.

16 ¿Qué puntos P y Q dividen al segmento de extremos $A=(-1,-3)$ y $B=(5,6)$ en tres partes iguales?

Solución

¿Qué puntos P y Q dividen al segmento de extremos $A=(-1,-3)$ y $B=(5,6)$



en tres partes iguales?

1 En notación vectorial tenemos

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

2 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

$$x_P + 1 = 2, \qquad y_P + 3 = 3$$

3 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos $P=(1,0)$.

4 Para encontrar las coordenadas de Q utilizamos la condición

$$\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$$

5 Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores

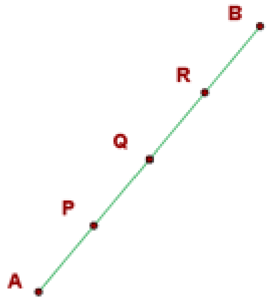
$$x_P + 1 = 4, \qquad y_P + 3 = 6$$

6 Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos $P=(3,3)$.

17 Si el segmento AB de extremos $A=(1,3)$, $B=(7,5)$ se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

Solución

Si el segmento AB de extremos $A=(1,3),\ B=(7,5)$ se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?



1 Notamos que Q es el punto medio del segmento AB

$$Q=\left(\frac{1+7}{2},\frac{3+5}{2}\right)=(4,4)$$

2 P es el punto medio del segmento AQ

$$P=\left(\frac{1+4}{2},\frac{3+4}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$$

3 R es el punto medio del segmento QB

$$R=\left(\frac{4+7}{2},\frac{4+5}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$$