DISTRIBUCION BINOMIAL CON APROXIMACIÓN A NORMAL Y CORRECCIÓN DE CONTINUIDAD

1. (Canarias 2021, Ordinaria) Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:
   a. Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?
   b. Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?
   c. ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

2. (Madrid 2021, Extraordinaria) Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.
   a. Exprese como calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
   b. Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

3. (País Vasco 2021, Ordinaria) En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:
   a. La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
   b. La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Dist. Binomial con Aproximación a Normal (P.T) y corrección de continuidad (YATES o medio punto)

$\boxed{1}$ ** X = "nº de pacientes en los que se cura el acné con un cierto medicamento" (V.A. discreta)

$n = 100$ pacientes (tomados al azar para la muestra)

p = prob. de curar acné con el medicamento $= 0'8$ = prob. de Éxito, es siempre constante

$q = 1 - p$ = prob. fracaso

los sucesos son indep.

sólo se contempla éxito ó fracaso

$\Rightarrow$ es una BINOMIAL $\quad X \in Bi(100, 0'8)$

$n = 100$
$p = 0'8$
$q = 0'2$

$$P(X > 75) = P(X = 76) + P(X = 77) + \dots + P(X = 100)$$

Es inviable pensar en hacer todas esas cuentas ni siquiera la calculadora puede gestionarlas

Tenemos que ver si podemos aproximar V.A. Binomial $\rightarrow$ V.A. Normal

Miramos si cumple las condiciones:

$n \cdot p = 100 \cdot 0'8 = 80 > 5$ sí
$n \cdot q = 100 \cdot 0'2 = 20 > 5$ sí
$\Rightarrow$ podemos aproximar

$$X \in Bi(100, 0'8) \rightsquigarrow Z \in N(\mu, \sigma)$$

donde $\mu = n \cdot p = \boxed{80}$ $\qquad Z \in N(80, 4)$

$\sigma^2 = npq = 16 \Rightarrow \boxed{\sigma = 4}$

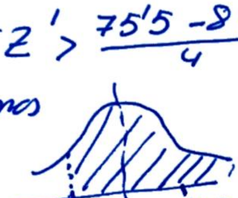
* Como estamos aproximando V.A. discreta $\rightarrow$ V.A. continua hay que aplicar la corrección de continuidad, o de medio pto o YATES

a) $P(X > 75) \simeq P(Z > 75'5) \underset{\uparrow}{=} P\left(Z' > \frac{75'5 - 80}{4}\right) =$

tipificamos

$\dots 74 \;\; 75 \;\; 76 \;\; 77 \dots$

$\rightarrow 75'5$



$= P(Z' > -1'125) = P(Z' < 1'125)$ f. par simétrica resp. eje Y

$P(Z' < 1'125) \simeq P(Z' < 1'13) \underset{\text{TABLA}}{=} \boxed{0'8708}$ P.2

Como en la TABLA de $N(0,1)$ sólo tenemos hasta las centésimas tenemos que aprox $1'125 \simeq 1'13$

Solución $\boxed{87'08\%}$

b) Cambia el tamaño de la muestra $\boxed{n = 225}$

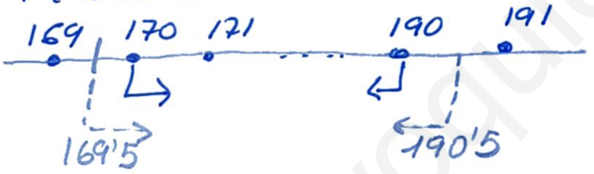
$Y \in Bi(225, 0'8)$

$n = 225$, $p = 0'8$ $\left\{ \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 225 \cdot 0'8 = \boxed{180} > 5 \text{ sí} \\ n \cdot q = 225 \cdot 0'2 = 45 > 5 \text{ sí} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ podemos

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{36} = \boxed{6}$

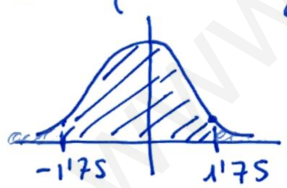
aproximar a una dis. Normal $Z \in N(180, 6)$ (hay que aplicar corrección de continuidad por pasar de V.A. discreta a continua)

$P(170 \leq Y \leq 190) \simeq P(169'5 < Z < 190'5) =$ tipificamos



$Z' = \dfrac{Z - 180}{6} \in N(0,1)$

$= P\left(\dfrac{169'5 - 180}{6} < Z' < \dfrac{190'5 - 180}{6}\right) = P(-1'75 < Z' < 1'75) =$



$= P(Z' < 1'75) - P(Z' < -1'75) =$

$= P(Z' < 1'75) - P(Z' > 1'75) =$

$= P(Z' < 1'75) - [1 - P(Z' < 1'75)] =$

$= 2\,P(Z' < 1'75) - 1 \underset{\text{TABLA}}{=} 2 \cdot 0'9599 - 1 = \boxed{0'9198} = \boxed{91'98\%}$

c) Pensemos al revés, ahora nos interesan los que NO se curan, éxito = que no se curen

$p = 0'2$
$q = 0'8$
$n = 500$

$Y =$ "nº pacientes que NO se curan con el medicamento" $\in Bi(500, 0'2)$

$\boxed{1}$ c) $\left.\begin{array}{l} n=500 \\ p=0'2 \\ q=0'8 \end{array}\right\} \; Y \in Bi(500, 0'2)$

El valor esperado, la esperanza, la media $\mu = n \cdot p =$

$= 500 \cdot 0'2 = \boxed{100}$ pacientes

Si 500 pacientes se toman el medicamento se espera que 100 NO se curen

— o —

$\boxed{2}$ $n = 100$ días (elegidos al azar de los últimos 50 años)

$p =$ Prob. que llueva $= 45\% = 0'45$

$q = 1 - 0'45 = 0'55$

$X =$ "nº días, de los 100 de la muestra, en que sí ha llovido"

- independientes
- probabilidad constante p
- sólo se contempla éxito ó fracaso

$\Rightarrow$ Binomial

$X \in Bi(100, 0'45)$

a) $P(X=40) = \boxed{\binom{100}{40} 0'45^{40} \cdot 0'55^{60}}$

Sólo nos piden expresarlo, no calcularlo, además es imposible hacerlo con una calculadora estándar

b) tenemos que hacer un cálculo aproximado

$X \in Bi(100, 0'45) \longrightarrow Z \in N(\mu, \sigma)$

DISCRETA — CONTINUA

$\left.\begin{array}{l} n=100 \\ p=0'45 \\ q=0'55 \end{array}\right\}$ $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0'45 = 45 > 5$ Sí,
$n \cdot q = 100 \cdot 0'55 = 55 > 5$ Sí

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{24'75} \simeq 4'9749 \simeq 5$

podemos aproximar a una dist. normal

pero hay que aplicar la corrección de continuidad

$Z \in N(45, 5)$

$P(X=40) = P(40 \le X \le 40) =$

39 40 41

$= P(39'5 < Z < 40'5)$

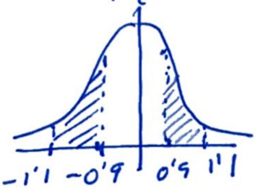
YATES

amplío el int. medio pto a izqda y drcha

$P(39'5 < Z < 40'5) \underset{\uparrow}{=} P\left(\frac{39'5-45}{5} < Z' < \frac{40'5-45}{5}\right)$ (p. 4)

tipificamos

$= P(-1'1 < Z' < -0'9) = P(0'9 < Z' < 1'1) =$



$= P(Z' < 1'1) - P(Z' < 0'9) \underset{\uparrow}{=}$

TABLA

$0'8643 - 0'8159 = \boxed{0'0484}$

$\simeq \boxed{4'84\ \%}$

por ser f. par
simet. con respecto
al eje Y

---

[3] $n = 3900$ personas al azar

la probabilidad de que cumplan años en 1 día en concreto (p. ejemplo el 25 de julio) es $\frac{1}{365} = p$

$p =$ prob. éxito $= \frac{1}{365}$

$X =$ "nº personas que están de cumpleaños el 25 de Julio"

$q = \frac{364}{365}$

Cada suceso es indep.
prob. constante
sólo contemplamos éxito ó fracaso

$\Rightarrow$ claramente es una Binomial

$X \in Bi\left(3900, \frac{1}{365}\right)$

V.A. DISCRETA

$n = 3900$

$p = \frac{1}{365}$

$q = \frac{364}{365}$

Veamos si se puede aproximar a una NORMAL

$\mu = n \cdot p = 3900 \cdot \frac{1}{365} = 10'6849 > 5$ sí

$n \cdot q = 3900\ \frac{364}{365} = 3889'3 > 5$ sí $\Big\} \Rightarrow$

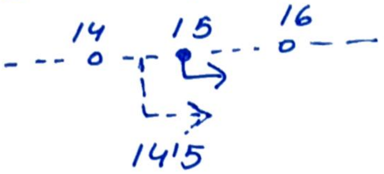
$\sigma = \sqrt{npq} \simeq 3'2643$;

$X \rightsquigarrow Z \in N(10'68, 3'26)$

V.A. continua

hay que aplicar la corrección de continuidad o YATES

a) $P(X \geq 15) \sim P(Z > 14'5) =$



tipificamos

$Z' = \frac{Z - \mu}{\sigma} \in N(0,1)$

$= P\left(Z' > \frac{14'5 - 10'68}{3'26}\right) = P(Z' > 1'1718) \simeq$

Como la tabla N(0,1) sólo la tenemos con aprox. a centésimas $1'1718 \simeq 1'17$

$\simeq P(Z' > 1'17) =$

$= 1 - P(Z' < 1'17) = 1 - 0'8790 =$

TABLA

$= \boxed{0'121} = \boxed{12'1\%}$

b) $P(5 \leq X \leq 15) \simeq P(4'5 < Z < 15'5) =$

YATES

$= P\left(\frac{4'5 - 10'68}{3'26} < Z' < \frac{15'5 - 10'68}{3'26}\right) = P(-1'9 < Z' < 1'48)$

tipificamos

$= P(Z' < 1'48) - P(Z' < -1'9) = P(Z' < 1'48) - P(Z' > 1'9)$

$= P(Z' < 1'48) - [1 - P(Z' < 1'9)] = P(Z' < 1'48) + P(Z' < 1'9) - 1 =$

$= 0'9306 + 0'9713 - 1 = \boxed{0'9019} = \boxed{90'19\%}$

TABLA