PROBLEMAS DISTRIBUCIONES BINOMIALES INTRESANTES

1. (Castilla-La Mancha 2021, Ordinaria) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.
    a. ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?
    b. Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?
    c. Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo. ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?
    d. Con dicho algoritmo ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

2. (Castilla-La Mancha 2021, Extraordinaria) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
    a. ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
    b. Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?
    c. En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.
    d. ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?
    e. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

3. (Canarias 2021, Extraordinaria) Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:
    a. Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20%
    b. Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?
    c. ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

Problemas Binomiales Interesantes

1 (Muy completo) Empieza con prob. y termina con binomial

Red social $\rightarrow$ los usuarios comparten fotos o nunca lo hacen $\rightarrow$ Pueden comentar fotos o nunca lo hacen

F = "alguna vez comparte foto"

$\overline{F}$ = "nunca comparte foto"

C = "alguna vez comenta fotos de sus contactos"

$\overline{C}$ = "nunca comentan fotos"

F 0'8
- C $\rightarrow$ 0'9 = $P(C/F)$
- $\overline{C}$ $\rightarrow$ 0'1 = $P(\overline{C}/F)$

$\overline{F}$ 0'2
- C $\rightarrow$ 0'5 = $P(C/\overline{F})$
- $\overline{C}$ $\rightarrow$ 0'5 = $P(\overline{C}/\overline{F})$

a) $P(C) \underset{\text{P. Totales}}{=} 0'5 \cdot 0'2 + 0'9 \cdot 0'8 = \boxed{0'82} = \boxed{82\%}$

b) $P(F/\overline{C}) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(F \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(\overline{C} \cap F)}{P(\overline{C})} \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(\overline{C}/F) \cdot P(F)}{P(\overline{C})} =$

$\underset{a)}{=} \dfrac{0'1 \cdot 0'8}{1 - 0'82} \simeq \boxed{0'4444} = \boxed{44'44\%}$

c) Algoritmo de reconocimiento facial

* $p = 0'8$ = prob. ident. correcta a las personas a partir de las fotografías.
  prob. constante
* Procesamos 4 fotografías $n = 4$
  (cada proceso es indep. de los otros)
* Consideramos solamente la prob. de éxito "persona ident. correcta" o fracaso "no ident. correctamente a la persona"

Claramente es una binomial

X = "nº de personas correctamente identificadas entre las 4 fotos procesadas" $\in Bi(4, 0'8)$

$$\left.\begin{array}{l} n = 4 \\ p = 0'8 \\ q = 0'2 \end{array}\right\}$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0'8^4 \cdot 0'2^0 = \boxed{0'4096} = \boxed{40'96\%}$$

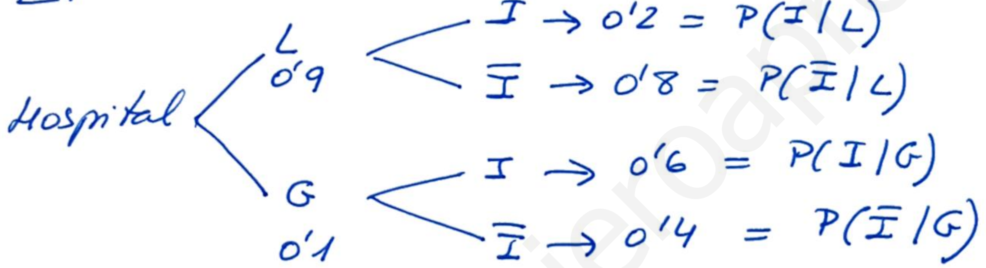
d) "al menos 1" $\to$ $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$= 1 - P(x=0) = 1 - \binom{4}{0} 0'8^0 \cdot 0'2^4 = \boxed{0'9984} = \boxed{99'84\%}$$

más corto
menos cuentas $\to$ lo contrario a no identificar a ninguna.

— o —

[2] Un completo de probabilidad con una binomial



a) $P(I) = 0'2 \cdot 0'9 + 0'6 \cdot 0'1 = \boxed{0'24} = \boxed{24\%}$

P. Totales

b) $P(L/I) = \dfrac{P(L \cap I)}{P(I)} = \dfrac{P(I \cap L)}{P(I)} = \dfrac{P(I/L) \cdot P(L)}{P(I)} =$

Bayes

Bayes

$$= \frac{0'2 \cdot 0'9}{0'24} = \boxed{0'75} = \boxed{75\%}$$

c) Aquí viene la binomial
llegan 8 pacientes ; $n = 8$
$p = P(L) = 0'9$ es constante ; $q = 1 - p = 0'1$
cada suceso es indep.
sólo contemplamos éxito = ser clasificado como LEVE
o fracaso = No ser clasificados como leves = ser clasificado como grave

Continuación $\boxed{2}$ $\Rightarrow$ pág. 3

X = "nº de pacientes clasificados como leves, entre los 8 pacientes recién llegados") $\in Bi(8,\ 0'9)$

$$P(X=4) = \binom{8}{4} 0'9^4 \cdot 0'1^4 \simeq \boxed{0'0046} = \boxed{0'46\%}$$

d) $P(X \leq 7) = 1 - P(X=8) = 1 - \binom{8}{8} 0'9^8 \cdot 0'1^0 =$

"como mucho 7"
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7
(así sería larguísimo)

$$\simeq \boxed{0'5695} = \boxed{56'95\%}$$

$\boxed{3}$ Lote de 20 arandelas ; $n=20$

X = "nº de defectuosas en el lote"
p(defectuosa) = 0,01 es constante
$q = 1 - 0{,}01 = 0'99$
Sólo consideramos éxito ó fracaso
los sucesos son independientes

$\Rightarrow X \in Bi(20,\ 0'01)$

a) $P(X=2) + P(X=1) = \binom{20}{2} 0'01^2 \cdot 0'99^{18} + \binom{20}{1} 0'01^1 \cdot 0'99^{19} =$

(1 ó 2 arandelas defectuosas)

$$\simeq \boxed{0'1811} = \boxed{18'11\%}$$

Obviamente 18'11% No es mayor que 20%

b) Un lote se rechaza si se encuentra, al menos, 1 arandela defectuosa P(rechazar lote)?

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=20) =$$

$$= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0} 0'01^0 \cdot 0'99^{20} \simeq \boxed{0'1821} = \boxed{18'21\%}$$

Así menos cuentas que hacer

prob. de rechazar el lote

c) Ahora cambiamos el pto. de vista un poco, ampliamos la muestra a 200

$n = 200$
$p = 0{,}99$
$q = 0{,}1$

Y = "nº arandelas sin defectos en el lote de 200" $\in Bi(200,\ 0'99)$

(Ahora el éxito es "sin defectos")

Esperanza, valor esperado, media $= \mu = np = 200 \cdot 0'99$
$= \boxed{198}$

En un lote de 200 esperamos que 198 no sean defectuosas