PROBLEMAS DIFERENTES O INTERESANTES

1. (Galicia 2021, Modelo) El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcule las tres probabilidades siguientes:
    a. Que no tenga ni camelias ni rosas
    b. que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias
    c. que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

2. (Baleares 2021, Ordinaria) Se dispone de dos urnas: U1 y U2.En la urna U1 hay 4 bolas rojas y 5 bolas negras. En la urna U2 hay 6 bolas rojas y 3 bolas negras. Al azar se quita una bola de U1 y se introduce en U2, a continuación se extrae al azar una bola de U2. Calcula la probabilidad de que:
    a. salga una bola roja de U2
    b. la bola extraída de U1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U2 también ha sido negra.
    c. salga al menos una bola roja.

3. (Baleares 2021, Extraordinaria) En una urna hay 12 bolas rojas, 8 bolas blancas y 5 bolas azules. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución, en la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes acontecimientos:
    a. A="las dos bolas son rojas"
    b. B="las dos bolas son del mismo color"
    c. C="al menos una bola es roja"
    d. D="ninguna de las dos bolas es roja"

4. (Madrid 2021, Modelo) Una médico experto diagnostica posibles enfermos de una dolencia, fallando en reconocerla en el 5% de los casos que la padecen y diagnosticándola equivocadamente en el 10% de los sanos. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad es padecida por 50 de cada diez mil personas. Si una persona al azar se somete a reconocimiento, calcule la probabilidad de:u8io9
    a. Que sea diagnosticada como enferma.
    b. Que esté enferma si la diagnostican como tal.
    c. Que no esté enferma si la diagnostican sana.
    d. Que sea mal diagnosticada

5. (Madrid 2021, Ordinaria) Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
   c. ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO2” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

6. (Madrid 2021, Extraordinaria) En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

7. (Murcia 2021, Extraordinaria) Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:
   a. La probabilidad de que la bola sea blanca.
   b. La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.
   c. La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.
   d. La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con un número par.
   e. La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Ej: Probabilidad algo distintos

1 C = "cultivan CAMELIAS"
R = "cultivan ROSAS"

$P(C) = 0'4$

$P(R) = 0'35$

$0'75$ → No es el total (cultivarán otras cosas de las que no dice nada el problema)

$P(C\cap R) = 0'21$

(ya no puedo aplic. P. Totales) tampoco tabla de contingencia porque no tengo el total

a) $P(\overline{C}\cap\overline{R}) \underset{\text{Morgan}}{=} P(\overline{C\cup R}) =$

$= 1 - P(C\cup R) = 1 - (P(C) + P(R) - P(C\cap R)) =$

$= 1 - (0'4 + 0'35 - 0'21) = \boxed{0'46} = \boxed{46\%}$

b) $P(R/C) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(R\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0'21}{0'4} = \boxed{0'525} = \boxed{52'5\%}$

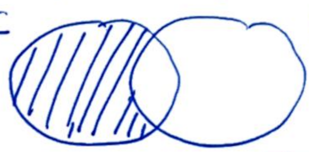
c) "Sólo rosas" = en realidad sabemos que cultiva otra especie (no suman el 100%) así que redactado de esa forma no podría hacerse.
Lo mismo para "sólo camelias"

Lo que sí puede hacerse es calcular
"que tenga rosas pero no camelias" $\underset{\text{disjunta}}{\cup}$ "que tenga camelias pero no rosas"

(El ejercicio estaba mal redactado)

"que tenga rosas pero no camelias" $= R - C = R\cap\overline{C}$
"que tenga camelias pero no rosas" $= C - R = C\cap\overline{R}$

C



R

$C - R = C\cap\overline{R}$

$C \underset{\text{unión disjunta}}{=} (C\cap\overline{R}) \cup (C\cap R)$

$P(C) = P(C\cap\overline{R}) + P(C\cap R)$

$P(C-R) = \boxed{P(C\cap\overline{R}) = P(C) - P(C\cap R)}$

utilizando esa propiedad:

P(tenga camelias pero no rosas $\cup$ tenga rosas pero no camelias)

$$= P[(C-R)\cup(R-C)] = P(C-R)+P(R-C) =$$

disjunta

$$= P(C) - P(C\cap R) + P(R) - P(R\cap C) = P(C)+P(R)-2P(C\cap R)$$

$$= 0'4 + 0'35 - 2\cdot 0'21 = \boxed{0'33} = \boxed{33\%}$$

2

U_1: 4R 5N $\xrightarrow{1^a \text{ extr.}}$ U_2: 6R 3N

1° se extrae 1 bola de U_1 y se mete en U_2

2° Se extrae 1 bola de U_2

U_1 = "bola de la urna 1"

U_2 = "bola de la urna 2"

R_1 = "sacar bola roja en la 1ª extracción"

N_1 = "sacar bola negra en la 2ª extracción"

R_2 = "sacar roja en la 2ª"

N_2 = "sacar negra en la 2ª"

$U_1 \longrightarrow$ Saco 1 bola y la meto en U_2

- R_1 $\frac{4}{9}$ → U_2: 7R 3N → Se extrae bola 2ª
  - $R_2 \to \frac{7}{10}$
  - $N_2 \to \frac{3}{10}$
- N_1 $\frac{5}{9}$ → U_2: 6R 4N → Se extrae bola 2ª
  - $R_2 \to \frac{6}{10}$
  - $N_2 \to \frac{4}{10}$

↓ Prob. CONDICIONADAS o a posteriori

$\frac{10}{10}\begin{cases} \frac{7}{10} = P(R_2/R_1) \\ \frac{3}{10} = P(N_2/R_1) \end{cases}$

$\frac{10}{10}\begin{cases} \frac{6}{10} = P(R_2/N_1) \\ \frac{4}{10} = P(N_2/N_1) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} P(R_1) = \frac{4}{9} \\ P(N_1) = \frac{5}{9} \end{array}\right\} \frac{9}{9}$

(Se puede utilizar. P. Totales)

Repito el esquema, más simplificado

- U_1
  - R_1 ($4/9$)
    - $R_2 \rightarrow \frac{7}{10}$
    - $N_2 \rightarrow \frac{3}{10}$
  - N_1 ($5/9$)
    - $R_2 \rightarrow \frac{6}{10}$
    - $N_2 \rightarrow \frac{4}{10}$

a) $P(R_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \simeq \boxed{0'6444} = \boxed{64'44\,\%}$

Pob totales

b) $P(N_1 | N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(N_2 \cap N_1)}{P(N_2)} = \frac{P(N_2 | N_1) \cdot P(N_1)}{P(N_2)} =$

$= \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}}{1 - 0'6444} \simeq \boxed{0'625} = \boxed{62'5\,\%}$

a)

---

3 U_1 [12R, 8B, 5A] Total 25

R_1 = "bola roja 1"
B_1 = "bola blanca 1"
A_1 = "bola azul 1"

$P(R_1) = \frac{12}{25}$

$P(B_1) = \frac{8}{25}$

$P(A_1) = \frac{5}{25}$

Se extraen (2) bolas sin devolución, lo pongo como si las sacara consecutivamente 1º una y luego 2º

- R_1 $12/25$
  - $R_2 \rightarrow \frac{11}{24} = P(R_2/R_1)$
  - $B_2 \rightarrow \frac{8}{24}$
  - $A_2 \rightarrow \frac{5}{24}$
- B_1 $8/25$
  - $R_2 \rightarrow \frac{12}{24}$
  - $B_2 \rightarrow \frac{7}{24}$
  - $A_2 \rightarrow \frac{5}{24}$
- A_1 $5/25$
  - $R_2 \rightarrow 12/24$
  - $B_2 \rightarrow \frac{8}{24}$
  - $A_2 \rightarrow \frac{4}{24} = P(A_2/A_1)$

Ext. 1ª Bola

Ext. 2ª bola → probabilidades a posteriori o condicionadas

a) $P(A) = P(R_1 \cap R_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} P(R_2|R_1)\, P(R_1)$

A = "las 2 bolas son ROJAS"

$$= \frac{11}{24} \cdot \frac{12}{25} = \frac{132}{600} \simeq \boxed{0'22} = \boxed{22\%}$$

b) llaman B = "las dos bolas son del mismo color" =

$$= \underbrace{(R_1 \cap R_2)}_{\text{2 rojas}} \underset{\text{disj.}}{\cup} \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\text{2 blancas}} \underset{\text{disj}}{\cup} \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\text{2 Azules}}$$

$$P(B) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(A_1 \cap A_2) \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{=} 22\% + \frac{7}{24}\frac{8}{25} + \frac{4}{24}\cdot\frac{5}{25}$$

$$\simeq \boxed{0'3467} = \boxed{34'67\%}$$

c) C = "al menos 1 ROJA" =

$$= \underbrace{(R_1 \cap R_2)}_{\text{2 rojas}} \underset{\text{disj.}}{\cup} \underbrace{(R_1 \cap B_2)}_{\substack{\text{1º roja} \\ \text{2º blanca}}} \cup (R_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap R_2) \cup (A_1 \cap R_2)$$

etc ... son todas uniones disjuntas

$$P(C) = 0'22 + \frac{8}{24}\frac{12}{25} + \frac{5}{24}\cdot\frac{12}{25} + \frac{12}{24}\cdot\frac{8}{25} + \frac{12}{24}\cdot\frac{5}{25} \simeq \boxed{0'74} = \boxed{74\%}$$

d) Ninguna es Roja $=: \overline{C}$

$$P(D) = P(\overline{C}) = 1 - 0'74 = \boxed{0'26} = \boxed{26\%}$$

$\boxed{4}$ El enunciado puede ser lioso

E = "estar enfermo si padece esa enfermedad" (puede que se la diagnostiquen o no.)

D = "le diagnostican esa enfermedad" (puede ser que la padezca o no)

- E — $0'005$
  - $D \rightarrow 0'95 = P(D/E)$
  - $\overline{D} \rightarrow 0'05 = P(\overline{D}/E)$
- $\overline{E}$ — $0'995$
  - $D \rightarrow 0'1 = P(D/\overline{E})$
  - $\overline{D} \rightarrow 0'9 = P(\overline{D}/\overline{E})$

a) $P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap \overline{E}) =$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{P. Totales}}}{=} 0'95 \cdot 0'005 + 0'1 \cdot 0'995 \simeq \boxed{0'1043} \simeq \boxed{10'43\%}$

b) Que esté enferma si la diagnostican enferma $= E/D$

$P(E/D) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \dfrac{P(E \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D \cap E)}{P(D)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \dfrac{P(D/E)\, P(E)}{P(D)} =$

$= \dfrac{0'95 \cdot 0'005}{0'10425} \simeq \boxed{0'04556} = \boxed{4'556\%}$

c) Que No esté enferma si la diagnostican sana =

= No enferma si No diagnostican la enfermedad

$P(\overline{E} / \overline{D}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tabla} \\ \text{y BAYES}}}{=} \dfrac{P(\overline{E} \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(\overline{D}/\overline{E}) \cdot P(\overline{E})}{P(\overline{D})} = \dfrac{0'9 \cdot 0'995}{1 - 0'10425} \simeq$

$\simeq \boxed{0'99972} \simeq \boxed{99'97\%}$

d) Mal diagnosticado = "Tener la enfermedad y que No te la diagnostiquen" $\overset{\text{disj.}}{\cup}$ "No tener la enf. y que sí te la diagnost"

$P(E \cap \overline{D}) + P(\overline{E} \cap D) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} P(\overline{D}/E) \cdot P(E) + P(D/\overline{E}) \cdot P(\overline{E}) =$

$= 0'05 \cdot 0'005 + 0'1 \cdot 0'995 = \boxed{0'09975} = \boxed{9'975\%}$

5 llamo N = "SUPERAR el nivel máx. de NO_2"

S = "SUPERAR el nivel de partículas en suspensión"

1º Mido nivel de NO_2 y luego el de partículas

Est. mete.

- N $0'16$
  - $S \rightarrow 0'33 = P(S/N)$
  - $\overline{S} \rightarrow 0'67 = P(\overline{S}/N)$
- $\overline{N}$ $0'84$
  - $S \rightarrow 0'08 = P(S/\overline{N})$
  - $\overline{S} \rightarrow 0'92 = P(\overline{S}/\overline{N})$

a) Superar los dos niveles permitidos $= P(S \cap N) \overset{\text{Bayes}}{=}$

$= P(S/N) \cdot P(N) = 0'33 \cdot 0'16 \simeq \boxed{0'0528} = \boxed{5'28\ \%}$

b) Superar, al menos, 1 de los dos niveles $=$

$=$ "superar los dos" $\cup$ "Superar NO_2 y no part" (disj.) $\cup$ "Superar Partíc. y no NO_2" (disj)

$P(S \cap N) + P(N \cap \overline{S}) + P(\overline{N} \cap S) =$

$\underset{\text{Bayes}}{=} P(S/N)\,P(N) + P(\overline{S}/N)\,P(N) + P(S/\overline{N}) \cdot P(\overline{N}) =$

$= 0'33 \cdot 0'16 + 0'67 \cdot 0'16 + 0'08 \cdot 0'84 =$

$\simeq \boxed{0'2272} \simeq \boxed{22'72\%}$

c) ¿Son independientes N y S?

$P(N) \cdot P(S) = 0'16 \cdot [P(S)]$

calculo $P(S) \underset{\text{Totales}}{=} 0'33 \cdot 0'16 + 0'08 \cdot 0'84 \simeq \boxed{0'12} = \boxed{12\%}$

$\Rightarrow P(N) \cdot P(S) = 0'16 \cdot 0'12 = \boxed{0'0192} \neq \boxed{0'0528} \underset{a)}{=} P(N \cap S)$

$\Rightarrow$ NO son indep.

d) $P(N/\overline{S}) = \dfrac{P(N \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{P(\overline{S}/N) \cdot P(N)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0'67 \cdot 0'16}{0'88} \simeq$

[c) $P(S) = 0'12$; $1 - P(S) = 0'88$]

$\simeq \boxed{0'1218} = \boxed{12'18\ \%}$

6 ¡Lioso!

2B 4N	$\longrightarrow$	B_1 : se devuelve y se AÑADE otra BLANCA, 2/6	3B 4N	$B_2 \to \frac{3}{7}$, $N_2 \to \frac{4}{7}$
	1ª extracción	N_1 : no se devuelve, 4/6	2B 3N	$B_2 \to \frac{2}{5}$, $N_2 \to \frac{3}{5}$

2ª ext.

B_1 = "sacar BLANCA 1º extracción"

B_2 = "sacar BLANCA 2º extracción" y así N_1 y N_2

Simplifico el esquema:

B_1 (2/6):
- $B_2 \to 3/7 = P(B_2/B_1)$
- $N_2 \to 4/7 = P(N_2/B_1)$

N_1 (4/6):
- $B_2 \to 2/5 = P(B_2/N_1)$
- $N_2 \to 3/5 = P(N_2/N_1)$

1ª Ext. 2ª Ext.

a) $\{2 \text{ bolas de} \neq \text{color}\} = \{B_1 \cap N_2 ,\ N_1 \cap B_2\}$ (disjuntos)

$P(2 \neq \text{color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) =$

$\underset{\text{Bayes}}{=} P(B_1) \cdot P(N_2/B_1) + P(B_2/N_1)P(N_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \simeq \boxed{0'4571} = \boxed{45'71\%}$

b) $P(N_1/B_2) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(B_2/N_1) \cdot P(N_1)}{P(B_2)} \underset{(*)}{=}$

(*) 1º tengo que calcular $P(B_2) \underset{\text{P. Totales}}{=} P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2/N_1) \cdot P(N_1) =$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \simeq \boxed{0'40952} \simeq \boxed{40'95\%}$

$= \dfrac{2/5 \cdot 4/6}{0'40952} \simeq \boxed{0'6512} \simeq \boxed{65'12\%}$

$\boxed{7}$ bolas numeradas y de colores

$\boxed{\begin{matrix}5N\\7B\end{matrix}}$ 5 bolas Negras = N_1, N_2, N_3, N_4, N_5

7 bolas Blancas = $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$

Se extrae una bola, 1º miro el color y luego miro el número

B $7/12$ miro el nº $\to$ B_1, B_2, ..., B_7 $\to$ todas tienen prob $\boxed{\frac{1}{7}}$ (hay 7) $\to P(B_7/B) = \frac{1}{7}$

N $5/12$ miro el nº $\to$ N_1, N_2, ..., N_5 todas tienen prob. $\frac{1}{5}$ (hay 5)
p. ejemplo $P(N_5/N) = \frac{1}{5}$

a) $P(B) \overset{\text{Laplace}}{=} \frac{7}{12}$

b) $P(\text{nº PAR}) = ?$ nº par $= \{B_2, B_4, B_6, N_2, N_4\}$ ~ 5 casos favorables
~ total de casos $7+5=12$

$= \frac{5}{12} = 0'41666\ldots$

$\simeq \boxed{0'4167} = \boxed{41'67\%}$

c) $P(PAR/B)$ bola con nº par si sabes que es Blanca
p. condicionada
Bayes

$= \frac{P(PAR \cap B)}{P(B)} \overset{\text{Laplace}}{\underset{a)}{=}} \frac{3/12}{7/12} =$

PAR y Blanca $= \{B_2, B_4, B_6\}$

Laplace $\left\}\begin{matrix}\text{3 casos favorables}\\ \text{T. posibles 12}\end{matrix}\right.$

$= \frac{3}{7} \simeq 0'42857 \simeq$

$\simeq \boxed{0'4286} = \boxed{42'86\%}$

d) $P(PAR \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \boxed{0'25} = \boxed{25\%}$

lo calculé antes, para hacer el c)

e) $P(B/PAR) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(B \cap PAR)}{P(PAR)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5} = \boxed{0'6} = \boxed{60\%}$