MATEMÁTICAS II

NOMBRE Y APELLIDOS:..

1 (3 puntos)	2 (2 puntos)	3 (1.5 puntos)	4 (1.5 puntos)	5 (2 puntos)	Nota

1. a) Estudia la continuidad en todo R de la función $f(x)=\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

   b) Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones: $f(x)=16-x^2$ y $g(x)=(x+2)^2-4$.

   c)Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

2. a) a.i)Discute, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema : $\begin{cases} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{cases}$

   a.ii)Resuelve el sistema para a=0.

   b)Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Calcula los valores de x e y para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N.

3. Dada la recta $r:\frac{x-1}{-1}=y=\frac{z}{2}$ y el plano $\pi:\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$ a) Determina la posición relativa de la recta y el plano.

   b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r.

4. Dados los puntos A(1,2,-3), B(1,5,0), C(5,6,-1), D(4, -1,3)

   a)Calcula el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

   b) Calcula el área del triángulo definido por A, B, y C.

5. En un ciudad, el 35% de los censados vota al partido A; el 45%, al partido B y el 20% se abstiene. Sabemos que el 20% de los votantes de A y el 30% de los de B son mayores de 60 años. Y además, se abstienen y son mayores de 60 el 3%.Elegimos una persoa al azar:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?.

   b) Se es menor de 60 años, ¿qué probabilidad hay de que votara al partido B?.

Criterios xerais de avaliación

- As respostas deberán estar debidamente xustificadas. Se só se achega a solución, sen ningún tipo de explicación, a puntuación nese apartado será de cero puntos.

- Permitirase o uso de calculadoras científicas non programables, que non teñan capacidade gráfica, e non resolvan integrais.

- No desenvolvemento dos exercicios, valorarase:
  a. A utilización da linguaxe, notación e símbolos matemáticos adecuados.
  b. A utilización de argumentos, xustificacións e razoamentos coherentes.
  c. A precisión e rigor adecuados para a resolución dun problema.
  d. A interpretación da solución dos exercicios.

1) a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$

ESTUDAMOS O DOMINIO:

$x^2-1=0 \iff x=\pm 1 \Rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\} \Rightarrow$ A FUNCIÓN É CONTINUA EN $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ 0'2

CONTINUIDADE EN $x=1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x(2x^2-x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}(x+1/2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

$$2x^2-x-1=0 \iff x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}\begin{cases} x=1 \\ x=-1/2\end{cases}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x+1/2)}{x+1}=\frac{2\cdot(1+1/2)}{1+1}=3/2 \text{ 0'1} \Rightarrow \exists\lim_{x\to 1}f(x)$$

PERO $\nexists f(1)$ 0'1 $\Rightarrow$ A FUNCIÓN É DESCONTINUA EVITABLE EN $X=1$. 0'2

CONTINUIDADE EN $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\frac{-2-1+1}{0}=\frac{-2}{0}=-\infty \text{ 0'2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\frac{+}{-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\frac{+}{+}=-\infty$$

$\Rightarrow$ EN $x=-1$ É DESCONTINUA INEVITABLE DE SALTO INFINITO. 0'2

b) $f(x) = 16 - x^2$ ① vértice $x_v = 0$, $y_v = 16$ $\} \Rightarrow (0, 16)$ 0'1

② $x = 0 \Rightarrow y = 16$

$y = 0 \Rightarrow 0 = 16 - x^2 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow (4, 0), (-4, 0)$

③ $a = -1 < 0 \Rightarrow \cap$ cóncava

$g(x) = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x$ ① VÉRTICE $x_v = \frac{-4}{2} = -2$, $y_v = 4 - 8 = -4$ $\Rightarrow$

$(-2, -4)$ 0'1

② $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + 4x$

$0 = x(x+4) \Rightarrow$

$x = 0$, $x = -4$ $\Rightarrow$ $(0, 0)$, $(-4, 0)$

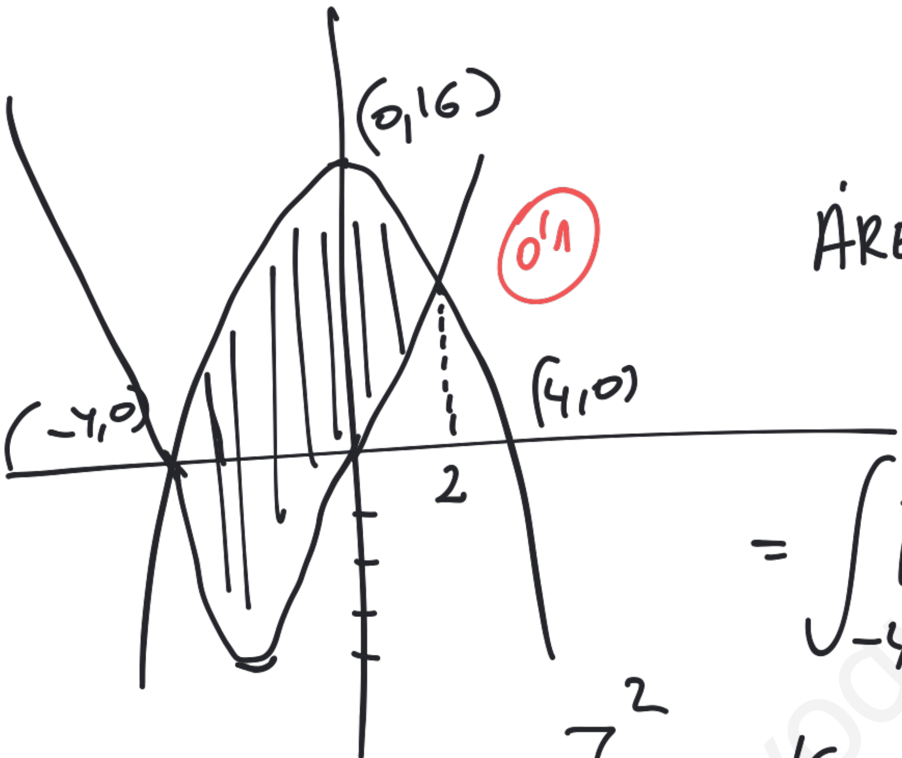
③ $a = 1 > 0$, $\cup$ CONVEXA

PUNTOS DE CORTE ENTRE $y = f(x)$, $y = g(x) \Rightarrow$ $16 - x^2 = x^2 + 4x$

$2x^2 + 4x - 16 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}$ $\begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$ 0'1



0'1

$\text{ÁREA}=\int_{-4}^{2}\left[(16-x^2)-(x^2+4x)\right]dx=$

0'2

$=\int_{-4}^{2}\left[16-x^2-x^2-4x\right]dx=\int_{-4}^{2}(-2x^2-4x+16)\,dx$

$=-\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+16x\Big]_{-4}^{2}=-\frac{16}{3}-2\cdot4+16\cdot2-\left(+\frac{2\cdot64}{3}-2\cdot16-64\right)=$

0'2

$=-\frac{16}{3}-8+\cancel{32}-\frac{128}{3}+\cancel{32}+64=\frac{-144}{3}+128-8=$

$=\frac{-144}{3}+120=-48+120=$

$=72$ unid^2 0'2

c) $\int \frac{-dx}{1+e^x} = \left[\begin{array}{l} e^x = t \Rightarrow \\ e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int -\frac{1}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} =$

$= \int \frac{-1}{(1+t)t} \, dt = \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{-1}{t} dt = \ln|1+t| - \ln|t| =$

$\downarrow$

$\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} \Rightarrow -1 = At + B(1+t)$

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow -1 = B$

$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow -1 = -A \Rightarrow A = 1$

$= \ln|1+e^x| - \ln|e^x| + C$.

2]

a.i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$ $|A| = 1 + a - 1 + a^2 = a^2 + a$

$|A| = 0 \iff a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0, \; a = -1$ (0'2)

1º] SE $a \neq \{0, -1\} \Rightarrow$ RANGO $A =$ RANGO $A^* \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (0'1) (SOLUCIÓN ÚNICA)

2º] SE $a = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ RANGO $A =$ RANGO $A^* = 2$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (INFINITAS SOLUCIÓNS) (0'1)

$C_1 = C_3, \; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

3º] SE $a = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ RANGO $A = 2 \neq$ RANGO $A^* = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 1 \neq 0$

SISTEMA INCOMPATIBLE (SEN SOLUCIÓN) (0'1)

a.ii) $\left.\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow$ SOLUCIÓNS $(1-\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ (0'5)

b) $AM = N^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = N^{-1} \Rightarrow AMN = I$$

$$\begin{pmatrix} x+x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2x-y-1 & -2x+y+2 \\ -x+y-1 & x-y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y-1 = 1 \\ -2x+y+2 = 0 \\ -x+y-1 = 0 \\ x-y+2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2x-y = 2 \\ -2x+y = -2 \\ -x+y = 1 \\ x-y = -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x-y = 2 \\ -x+y = 1 \\ \hline \boxed{x = 3} \end{array} \quad 0'5 \qquad \begin{array}{l} -x+y = 1 \\ -3+y = 1 \\ \boxed{y = 4} \end{array} \quad 0'5$$

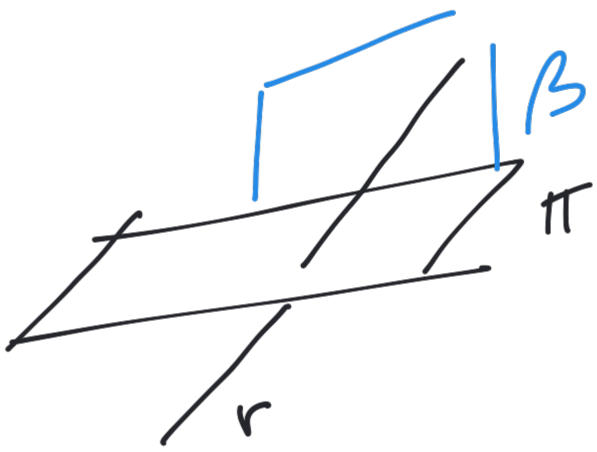
3) $r: \frac{x-1}{-1} = y = \frac{z}{2} \Rightarrow \quad x-1=-y \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x+y=1 \\ 2y-z=0 \end{matrix}}$ 0'25
$\quad 2y=z \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2y-z-1-z-1+2(x-1) =$$
$$= 2x-2+2y-2z-2=0$$

$\Rightarrow 2x+2y-2z-4=0 \Rightarrow \boxed{x+y-z-2=0}$ 0'25

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow |M| = -2-1+1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{RANGO } M = 3$$

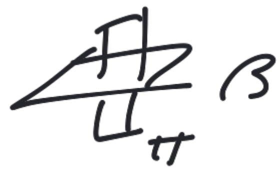
$\Rightarrow$ RANGO M = RANGO M* $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO SOLUCIÓN ÚNICA, CÓRTANSE NUN PUNTO. 0'25 b)



$$\beta \left\{ \begin{array}{l} \perp \pi \\ r \subset \beta \end{array} \right.$$

0'25

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \beta \left\{ \begin{array}{l} P_r\,(1,0,0) \\ \vec{v}_\pi\,(1,1,-1) \\ \vec{v}_r\,(-1,1,2) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-1,2)$$

0'25

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z + D = 0 \\ 3 + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \boxed{3x - y + 2z - 3 = 0}$$

0'25

4)

a) $A(1,2,-3)$, $B(1,5,0)$, $C(5,6,-1)$, $D(4,-1,3)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right|$$

$\vec{AB}(0, 3, 3)$

$\vec{AC}(4, 4, 2)$ $\Rightarrow$ 0'25

$\vec{AD}(3, -3, 6)$

$$\left|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 18 - 36 - 72$$

$$= -150 + 18 = -126 \Rightarrow$$ 0'25

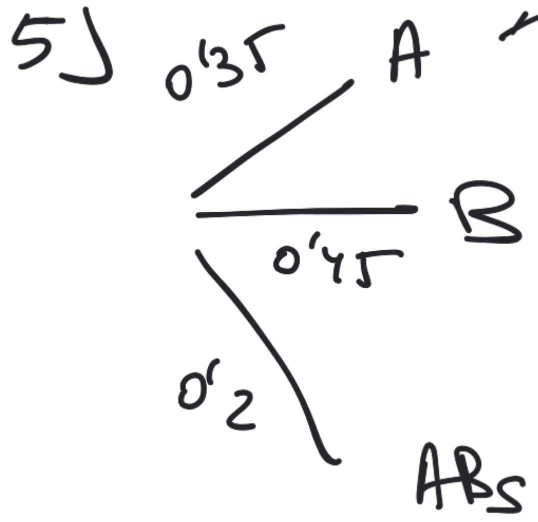
$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\left|-126\right| = \frac{126}{6} = 21 \text{ unid}^3$$ 0'25

b) $$\text{Area} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 12^2 + 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 144 + 144} = \frac{18}{2} = 9 \text{ unid}^2$$ 0'25

0'25

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-6, 12, -12)$$ 0'25

5)



$P(S/A) = 0'2$

$P(S/B) = 0'3$ 0'4

$P(S/Abs) = ?$

$P(S \cap Abs) = 0'03 \Rightarrow P(S/Abs) = \dfrac{P(S \cap Abs)}{P(Abs)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(S/Abs) = \dfrac{0'03}{0'2} = \dfrac{3/100}{2/10} = \dfrac{3 \cdot \cancel{10}}{2 \cdot \cancel{100}} = \dfrac{3}{20} = 0'15$ 0'4

a) $P(S) = 0'35 \cdot 0'2 + 0'45 \cdot 0'3 + 0'2 \cdot 0'15 = 0'235$ 0'2

b) $P(B/\bar{S}) = \dfrac{P(B \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \dfrac{0'45 \cdot 0'7}{1 - 0'235} = \underline{\underline{0'41176}}$

0'5 0'5