Control Probabilidad y Estadística

Nombre:……….Nº……

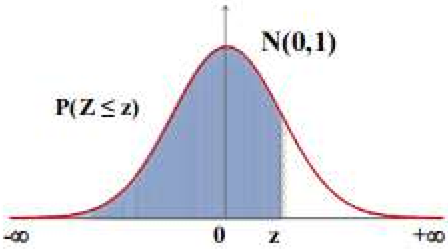
1. La velocidad de los vehículos en la autopista de Coruña a Ferrol sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ =12 km/h. Se sabe que el 79,15% de los vehículos sobrepasan en algún momento la velocidad de 130 km/h.
   a. Calcula la media de esta distribución.
   b. ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que sobrepasan la velocidad máxima permitida?
   c. La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?
   d. Se calcula que esta autopista tiene un tráfico de 76.000 coches diarios ¿Cuál es la recaudación diaria que esperan obtener la DGT por este tipo de sanción?

2. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80%
   a. Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?
   b. Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?
   c. ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

3. En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

4.
   a. Calcula la probabilidad de la diferencia de sucesos $P(A-B)$.
   b. Demuestra que dos sucesos son independientes $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$
   c. El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcula la probabilidad de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria *Z* , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor *z* .

$\boxed{1}$ X = "velocidad media autopista Coruña-Ferrol"

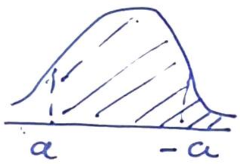
$X \in \mathcal{N}(\mu, 12)$

$X' = \dfrac{X-\mu}{12}$ tipificada $\in \mathcal{N}(0,1)$

a) $P(X>130) = 0'7915$

$\| $

$P\left(X' > \dfrac{130-\mu}{12}\right) = P\left(X' < -\dfrac{130-\mu}{12}\right) = P\left(X' < \dfrac{-130+\mu}{12}\right)$



para $\begin{cases} z_1 = 0'81 \Rightarrow P(X' < z_1) = 0'7910 \text{ corto} \\ z_2 = 0'82 \Rightarrow P(X' < z_2) = 0'7939 \text{ se pasa} \end{cases}$

promedio $\dfrac{z_1+z_2}{2} = 0'815$

$P(X' < 0'815) \simeq 0'7915$

$\dfrac{-130+\mu}{12} = 0'815 \Rightarrow \mu = 0'815 \cdot 12 + 130 = \boxed{139'78 \; \frac{km}{h}}$

μ = velocid. media

b) $P(X>120) = P\left(X' > \dfrac{120-139'78}{12}\right) = P(X' > -1'648\overline{3}) \simeq$

$P(X' > -1'65) = P(X' < 1'65) = 0'9505 = \boxed{95'05\%}$

c) $P(120 < X < 150) = P\left(\dfrac{120-139'78}{12} < X' < \dfrac{150-139'78}{12}\right)$

$= P(-1'648\overline{3} < X' < 0'851\overline{6}) \simeq P(-1'65 < X' < 0'85)$

$= P(X' < 0'85) - P(X' < -1'65) = P(X' < 0'85) - P(X' > 1'65)$

$= P(X' < 0'85) - (1 - P(X' < 1'65)) =$

$= P(X' < 0'85) + P(X' < 1'65) - 1 = 0'8023 + 0'9505 - 1 =$

$= 0'7528 = \boxed{75'28\%}$

d) $76.000 \cdot 0'7528 \cdot 100 = \boxed{5{,}721.280 \text{ €/ diarios}}$

(p.2)

2 a) $\left.\begin{array}{l} n=100 \\ p=0'8 \end{array}\right\}$ $P(X>75)=P(X=76)+\dots+P(X=100)$

inviable $\Rightarrow$ aproximamos a una normal

$X \in Bi(100, 0'8)$

$\left.\begin{array}{l} \mu = n\cdot p = 100\cdot 0'8 = 80 > 5 \\ n\cdot q = 100 \cdot 0'2 = 20 > 5 \end{array}\right\}$ es una buena aproximación puede hacerse

$Z \in \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $\qquad \mu = n\cdot p = \boxed{80}$

$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{80\cdot 0'2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$

$X \approx Z \in \mathcal{N}(80, 4)$

$P(X>75) \underset{\text{YATES}}{\simeq} P(Z > 75'5) = P\left(Z' > \frac{75'5-80}{4}\right) =$

(*) [como pasamos de binomial (V.A. discreta) a normal (V.A. continua) $\Rightarrow$ hay que usar corrección de YATES o continuidad

NO | SI

75 | 76 77 ... 100

$\to$ 75'5]

$= P(Z' > -1'125) = P(Z' < 1'125) \simeq P(Z' < 1'13) = 0'8708$

tipificar

La tabla sólo recoge hasta las centésimas

$= \boxed{87'08\ \%}$

b) $n=225 \Rightarrow \mu = 225\cdot 0'8 = \boxed{180}$; $\sigma = \sqrt{180\cdot 0'2} = \sqrt{36} = \boxed{6}$

$P(170 \le X \le 190)$

$X \in Bi(225, 0'8) \underset{\text{YATES}}{\sim} Z \in \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

NO | SI | NO

... 169 | 170 171 ... 190 | 191 ...

169'5 $\qquad$ 190'5

$\sim P(169'5 < Z < 190'5) =$

$= P\left(\frac{169'5-180}{6} < Z' < \frac{190'5-180}{6}\right) = P(-1'75 < Z' < 1'75)$

$= P(Z' < 1'75) - P(Z' < -1'75) = P(Z' < 1'75) - P(Z' > 1'75)$

$= P(Z' < 1'75) - (1 - P(Z' < 1'75)) = 2P(Z' < 1'75) - 1 = 0'9198$

$= \boxed{91'98\%}$

$\boxed{3}$

$\boxed{\begin{matrix} 2B \\ 4N \end{matrix}} \rightarrow$ 1 bola

- $B_1 \; \left(\frac{2}{6}\right) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 3B \\ 4N \end{matrix}} \rightarrow$ 2ª bola
  - $B_2 \rightarrow \frac{3}{7}$
  - $N_2 \rightarrow \frac{4}{7}$
- $N_1 \; \left(\frac{4}{6}\right) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 2B \\ 3N \end{matrix}} \rightarrow$ 2ª bola
  - $B_2 \rightarrow \frac{2}{5}$
  - $N_2 \rightarrow \frac{3}{5}$

P3

$P(B_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(N_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(B_2 / B_1) = \frac{3}{7}$; $P(N_2 / B_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6}$; etc.

a) "Dos bolas ~~mismo~~ distinto color" $= \{B_1 N_2, N_1 B_2\}$

$$P(2 \neq \text{color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) =$$

son sucesos disjuntos o incompatibles

$$P(B_1 \cap N_2) = P(N_2 / B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6}$$

$$P(N_1 \cap B_2) = P(B_2 / N_1) \cdot P(N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}$$

$$P(2 \neq \text{color}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \simeq 0'4571 = \boxed{45'71\%}$$

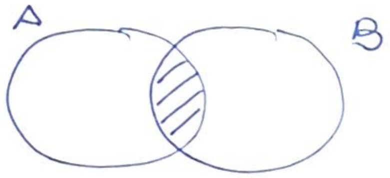
b) $$P(N_1 / B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2 \cap N_1)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2/N_1)\, P(N_1)}{P(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}}{0'40952} \simeq 0'6512 = \boxed{65'12\%}$$

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \simeq$$

$$\simeq 0'40952 \simeq \boxed{40'95\%}$$

4 a)



$A - B = A \cap \overline{B}$

$A = (A - B) \underset{disj}{\cup} (A \cap B)$

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = \boxed{P(A) - P(A \cap B)}$

b) A y B indep $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Demostración

"$\Rightarrow$" Supongamos A y B indep. $\Rightarrow$ $P(A/B) = P(A)$
$P(B/A) = P(B)$

por definición $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$

$\underset{\text{hipótesis}}{=} \boxed{P(A) \cdot P(B)}$ cqd

"$\Leftarrow$" Supongamos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A/B) =: \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\text{hipótesis}}{=} \dfrac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$

$P(B/A) =: \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \underset{\text{hipót.}}{=} \dfrac{P(A) P(B)}{P(A)} = P(B)$

$\Rightarrow$ son indep.
c.q.d.

c)

C 0'4

R 0'35

$P(C) = 0'4$; $P(R) = 0'35$

$P(C \cap R) = 0'21$

$P(\text{Sólo rosas}) = P(R \cap \overline{C})$

$P(\text{Sólo camelias}) = P(C \cap \overline{R})$

$P(R \cap \overline{C}) \underset{a)}{=} P(R) - P(R \cap C) = 0'35 - 0'21 = \boxed{0'14}$

$P(C \cap \overline{R}) \underset{a)}{=} P(C) - P(C \cap R) = 0'4 - 0'21 = \boxed{0'19}$

$\Rightarrow P(\text{ó camelias ó rosas}) = 0'14 + 0'19 = 0'33 = \boxed{33\%}$

Dist. puntuación

1 a) 0'75
b) 0'75
c) 0'75
d) 0'25

2 a) 1
b) 1
c) 0'5

3 a) 1'25
b) 1'25

4 a) 0'8
b) 0'8
c) 0'9