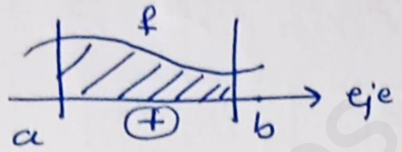
Cálculo de Áreas con integrales

Si f CONTINUA en $[a,b]$ y f NO CAMBIA DE SIGNO en $[a,b] \subset \mathrm{Dom}\, f$ $\Rightarrow$

El área limitada por f, el eje X entre las rectas $x=a$ y $x=b$ será

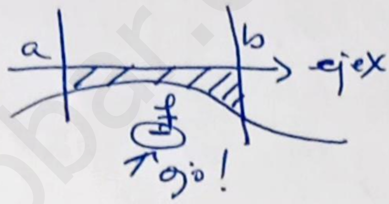
- si f está por encima del eje X

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{positiva}$$



- si f está por debajo del eje X

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{positiva}$$



Para evitar esto $A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$ (valor absoluto)

(ponemos valor absoluto y así no tenemos ni que dibujarla ni saber si está por encima o por debajo)

¿Cómo saber que NO cambia de signo? $\Rightarrow$ Bolzano

si $f(a)\cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.q. $f(c) = 0$ (cambio de signo)

$\Rightarrow$ Basta con calcular los PUNTOS DE CORTE de f en $[a,b]$

$\boxed{1}$ Ejemplo Área limitada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ y el eje X SIN DIBUJAR

1º Calculamos puntos de corte: $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$; $x=0$ $\quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} < \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

f tiene 3 y sólo 3 puntos de corte

f corta al eje X en $x=0$, $x=1$, $x=2$, así que por Bolzano f NO cambia de signo ANTES de 0, ni entre 0 y 1, ni entre 1 y 2 (de lo contrario tendríamos más ptos de corte)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ Ptos de corte $x=0,\ x=1,\ x=2$ (2)

El área limitada por f será $\underbrace{\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|}_{A_1} + \underbrace{\left|\int_1^2 f(x)\,dx\right|}_{A_2}$

2° Calculo su primitiva

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

3° Calculo cada área

$$A_1 = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{4} - 1 + 1\right| = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$A_2 = \left|\int_1^2 f(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\right| = \left|\frac{16}{4} - 8 + 4 - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}\ u^2 \text{ de medida}$$

NOTA

Si por error hubiésemos hecho $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ porque la zona donde es − contrarrestaría a la + viendo el dibujo

pero NO tenemos que dibujar

RESUMEN

Para calcular áreas limitadas por 1 función y el eje X sin DIBUJAR:
- 1° buscar ptos de corte
- 2° calcular primitiva
- 3° dividir el problema entre los ptos de corte (que serán los límites de integración)

Si tuviésemos, por ejemplo, 5 ptos de corte, −7, −3, 1, 2, 5

$$A = \left|\int_{-7}^{-3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-3}^{1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{5} f(x)\,dx\right|$$

Calcular el área limitada por 1 función y el eje X en una región determinada

SIN DIBUJAR

En este caso, el problema nos dirá algo así: calcula el área de la región limitada por f, el eje x y las rectas $x=a$, $x=b$

1º buscamos ptos. de corte en $[a,b]$
2º calculamos la primitiva
3º dividimos el cálculo del área entre los ptos a, ptos de corte de f en $[a,b]$ y b

Ejemplo Calcula el área encerrada por la función $f(x)=x\,Ln\,x$ y las rectas $x=\frac{1}{2}$, $x=4$

* $Dom\,f=(0,+\infty)$ $[\frac{1}{2},4]\subset Dom\,f$, no hay problema

1º Pto de corte de f en $[\frac{1}{2},4]$

$$x\,Ln\,x=0 \iff \begin{cases} x=0 \notin Dom\,f \text{ y no está en } [\frac{1}{2},4] & \text{NO VALE} \\ Ln\,x=0 \iff x=1\in[\frac{1}{2},4] & \text{Sí} \end{cases}$$

2º Primitiva $F(x)=\int x\,Ln\,x\,dx \underset{ALPES}{=} \frac{x^2}{2}Ln\,x-\int\frac{x}{2}dx =$

$$\left[\begin{array}{c|c} u=Ln\,x & dv=x\,dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right]$$

$$=\frac{x^2}{2}Ln\,x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\boxed{\frac{x^2}{2}Ln\,x-\frac{x^2}{4}}$$

3º Área dividida entre $\frac{1}{2}$, 1, 4 → extremo del intervalo

($\frac{1}{2}$ → extremo del intervalo; 1 → pto de corte)

$$A=\left|\int_{1/2}^{1}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{1}^{4}f(x)\,dx\right|=A_1+A_2$$

pasos

para A_1: $\left[\frac{x^2}{2}Ln\,x-\frac{x^2}{4}\right]_{1/2}^{1}=\frac{1}{2}\underbrace{Ln\,1}_{=0}-\frac{1}{4}-\left(\frac{(1/2)^2}{2}Ln\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^2}{4}\right)=$

4

$= 0 - \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{2} Ln\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(-Ln2) + \frac{1}{16} =$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}Ln2 + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}Ln2 + \frac{-4+1}{16} = \frac{1}{8}Ln2 + \frac{-3}{16}$

$\Rightarrow A_1 = \left|\frac{1}{8}Ln2 - \frac{3}{16}\right| = \frac{3}{16} - \frac{Ln2}{8}$

• Calculamos $A_2 = \left|\int_1^4 f(x)\,dx\right|$

$\left[\frac{x^2}{2}Lnx - \frac{x^2}{4}\right]_1^4 = \frac{16}{2}Ln4 - \frac{16}{4} - (\underbrace{\frac{1}{2}Ln1}_{=0} - \frac{1}{4}) =$

$= 8 \cdot 2\,Ln2 - 4 + \frac{1}{4} = 16\,Ln2 + \frac{-16+1}{4} = 16Ln2 - \frac{15}{4}$ (es +)

$A_2 = 16Ln2 - \frac{15}{4}$

Entonces $A = A_1 + A_2 = \frac{3}{16} - \underbrace{\frac{Ln2}{8} + 16\,Ln2}_{} - \frac{15}{4} =$

$= \frac{-1+128}{8}Ln2 + \frac{3-60}{16} = \boxed{\frac{127}{8}Ln2 - \frac{57}{16}}$

Más ejercicios similares (que no fáciles)

SIN DIBUJAR

$\boxed{2}$ Andalucía ORD 2020 Ej 2 (con parámetro)

Calcular $a>0$ sabiendo que el área limitada por $f(x) = xe^{3x}$ el eje de abscisas y $x=a$, es igual a $\frac{1}{9}$

Solución

calculamos área determinada por $f(x) = xe^{3x}$, $x=a$

1° Ptos de corte : $xe^{3x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ único pto de corte

como $e^{3x} > 0$ (y $\neq 0$) $\forall x \in \mathbb{R}$

(por tanto los límites de integración serán 0 y a (con $a>0$))

2° Cálculo de la primitiva $F(x) = \int f(x)dx = \int x e^{3x} dx =$

$$\int x e^{3x}\,dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ALPES} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{array}\right]$$

3º Área: $A = \left|\int_0^a f(x)\,dx\right| = |F(a) - F(0)| =$

$$= \left|\frac{e^{3a}}{3}\left(a - \frac{1}{3}\right) - \underbrace{\left(\frac{e^0}{3}\left(0 - \frac{1}{3}\right)\right)}_{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}\right| = \left|\frac{e^{3a}}{3}\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}\right|$$

Como $A = \frac{1}{9} \Rightarrow \left|\underbrace{\frac{e^{3a}}{3}\left(a - \frac{1}{3}\right)}_{\text{esto tiene q. ser 0}} + \frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{3a}}{3}\left(a - \dfrac{1}{3}\right) = 0$ $\Rightarrow a - \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \dfrac{1}{3}}$

Como $e^{3a} > 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$ y por tanto $\neq 0$

---

3 Asturias ORD 2020 Ej: bloque 2B aptdo a)

Sea $f(x) = 4 - x^2$ calcula el área limitada por f y el eje de abscisas (eje X) sin dibujar

1º ptos de corte $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$

$x = 2$, $x = -2$ únicos ptos de corte

2º cálculo primitiva

$$F(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

3º) Área $= A = \left|\int_{-2}^{2} f(x)\,dx\right| = |F(2) - F(-2)| =$

entre -2 y 2 NO puede cambiar de signo p.q. no hay más ptos de corte

$$A = \left| 4\cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) \right| =$$

$$= \left| 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} \right| = \left| 16 - \frac{16}{3} \right| = \left| \frac{48-16}{3} \right| = \boxed{\frac{32}{3}} \text{ u}^2 \text{ de medida}$$

$\boxed{4}$ Baleares 2021 ORD. Ej 4

$$f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$$

Calcula área determinada por $f(x)$ y las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$ y el eje X

nos dan $[a,b] = [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

1° Ptos de corte : $\frac{-x}{4-x^2} = 0$

$4-x^2 = (2+x)(2-x)$

$x = -2 < \sqrt{5}$ No entra en nuestro intervalo

$x = 2 < \sqrt{5} \simeq 2'24$ Tampoco está en nuestro intervalo $[\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

$\Rightarrow$ Si $x \in [\sqrt{5}, \sqrt{6}] \Rightarrow 4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ que tampoco $\in [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

$\Rightarrow f(x)$ no tiene ptos de corte en $[\sqrt{5}, \sqrt{6}]$ por tanto no cambia de signo en ese intervalo

$$A = \left| \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4-x^2}\, dx \right| = \left| F(\sqrt{6}) - F(\sqrt{5}) \right|$$

2° Calculamos primitiva

$$F(x) = \int \frac{-x}{4-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x\, dx}{4-x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|4-x^2|$$

$t = 4 - x^2$

$dt = -2x\,dx$

3° Calculamos área :

$$F(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln|4-(\sqrt{6})^2| = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$F(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \ln|4-(\sqrt{5})^2| = \frac{1}{2} \ln|-1| = 0$$

$$\boxed{A = \frac{\ln 2}{2}}$$

Área comprendida entre 2 funciones (Nunca necesita dibujo)

1º Siempre calcularemos los ptos de corte de f y g i.e. las soluciones de la ecuación $f-g=0$ por ejemplo: $c_1, c_2, \ldots$

Si nos piden además q. sea en un intervalo $x=a, x=b$ tomaremos a y b como límites de integración y las soluciones de $f-g=0$ que estén entre a y b

2º Calcularemos $F(x)=\int f-g$ (la primitiva)

3º El área pedida será

en el caso de $a < c_1, c_2, \ldots < b$

(aquí se cogen sólo las soluciones entre a y b) $A = \left|\int_a^{c_1} f-g\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f-g\right| + \cdots + \left|\int_{c_n}^{b} f-g\right|$

Si no nos diesen intervalo $\Rightarrow A = \left|\int_{c_1}^{c_2} f-g\right| + \left|\int_{c_2}^{c_3} f-g\right| + \cdots$ (aquí se cogen todas las soluciones)

[5] Se ve mejor con un ejemplo

Sean $f(x) = 6x-x^2$ y $g(x) = x^2-2x$

calcular el área comprendida entre f y g

1º Ptos de corte $f-g=0 \Leftrightarrow 6x-x^2-x^2+2x=0$

$-2x^2+8x=0$; $-2x(x-4)=0 <$ $x=0$, $x=4$ únicos ptos de corte

los límites de integración serán por tanto $x=0$ y $x=4$

2º Primitiva

$$F(x) = \int f-g = \int(-2x^2+8x)\,dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} =$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$$

3º Área $= \left|\int_0^4 f-g\right| = \left|\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_0^4\right| =$

$|F(4) - F(0)| = \boxed{\frac{4^3}{3}}\, u^2$ de medida

$F(4) = -\frac{2}{3}4^3 + 4\cdot 4^2 = \frac{1}{3}4^3$

$F(0) = 0$

6 Andalucía 2018 EXT. B2 (cayerente)

a) Calcula el pto. de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=-2ex$; $f(x)=e^{-2x}$

c) Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, $y=-2ex$ y el eje de ordenadas (i.e. el eje Y $\equiv \boxed{x=0}$)

a) x_0 tq. $y-y_0=m(x-x_0)$ $m=-2e=f'(x_0)$

$f'(x)=-2e^{-2x} \Rightarrow f'(x_0)=-2e^{-2x_0}=-2e \Rightarrow$

$f(-\frac{1}{2})=e$

$\boxed{x_0=-\frac{1}{2}}$ Pto buscado es $\boxed{(-\frac{1}{2},e)}$

b) Área entre $f(x)=e^{-2x}$, $g(x)=-2ex$

1° ptos de corte como g es la recta tangente a f en el pto $x=-\frac{1}{2}$ no hay mas ptos de corte (la recta tangente y la gráfica sólo se cortan en el pto. de tangencia)

los límites de integración serán $x=-\frac{1}{2}$ y el otro que me daba el ejercicio (ejeY) $x=0$

2° Calculo primitiva de $f-g=\boxed{e^{-2x}+2ex}$

$$F(x)=\int(e^{-2x}+2ex)dx=\boxed{-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2}$$

3° Calculo el área pedida $A=\left|\int_0^{-1/2} f-g\right|=\left|F(-\frac{1}{2})-F(0)\right|$

$$=\left|-\frac{e}{2}+\frac{e}{4}+\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{e}{4}+\frac{1}{2}\right| \underset{\uparrow}{=} \boxed{\frac{e}{4}-\frac{1}{2}}$$

$-\frac{e}{4}+\frac{1}{2}<0$

$\boxed{7}$ Andalucía 2017 ORD A2

Calcula el área delimitada por $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$

1° Ptos de corte : $x^2-(-x^2+4x)=2x^2+4x=2x(x+2)=f-g$

$$2x(x+2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

los límites de integración serán $x=-2$ y $x=0$

2° Primitiva de f-g

$$F(x)=\int f-g=\int(2x^2+4x)\,dx=\boxed{\frac{2x^3}{3}+2x^2}$$

3° Cálculo área

$$A=|F(-2)-F(0)|=\boxed{\frac{8}{3}}\ u^2 \text{ de medida}$$

$F(0)=0$

$$F(-2)=\frac{2(-2)^3}{3}+2(-2)^2=\frac{8}{3}$$

$\boxed{8}$ Asturias 2021 ORD 2A aptdo b)

Sean las parábolas $y=x^2-2x+3$ para $a=1$, $b=1$

$y=ax^2+b$

calcular el área del recinto limitado por ambas y el eje Y (el eje Y es la recta $x=0$)

Ptos de corte y límites de integración

$$f-g=x^2-2x+3-(x^2+1)=\boxed{-2x+2}$$

$-2x+2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$ Pto de corte (no hay más)

el otro límite de integración es el eje de ordenadas i.e. $x=0$

Cálculo primitiva de f-g

$$F(x)=\int f-g=\int(-2x+2)\,dx=-x^2+2x$$

Cálculo del área $A=\left|\int_0^1 f-g\right|=F(1)-F(0)=\boxed{1}\ u^2$ de medida

Cálculo del área entre una función a trozos (incluidas las funciones valor absoluto) (sin dibujar) y otra función continua (sin dibujar)

Si nos dan $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq a \\ f_2(x) & \text{si } a < x \leq b \\ \vdots & \\ \text{etc.} & \end{cases}$

y una función continua $g(x)$ el problema se puede dividir con facilidad en el cálculo por separado de las áreas (tantos trozos como tenga f)

Así iríamos haciendo:

1° calculo de A_1 = área delimitada por f_1 y g en las condiciones que marque el ejercicio)

2° Calculamos A_2 = área delimitada por f_2 y g en las condiciones del ejercicio

⋮

y así seguir con cada trozo.

Al final, sumas las áreas

$\boxed{9}$ $\boxed{\text{Ejemplo}}$ Andalucía 2018 ORD A.2.

$f(x) = 6x - x^2$; $g(x) = |x^2 - 2x|$

Calcular el área limitada por f y g

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x^2 - 2x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

⊕ ⊖ ⊕

0 2

$x = -1 \rightarrow |(-1)^2 - 2(-1)| = |1+2| = 3$

$x = 1 \rightarrow |1^2 - 2\cdot 1| = |1-2| = |-1| = 1$

$x = 2 \rightarrow |4-4| = 0$

$x = 3 \rightarrow |9-6| = |3| = 3$

Entonces $g(x)$ queda así:

$$g(x) = \begin{cases} x^2-2x = g_1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2+2x = g_2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-2x = g_3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 6x - x^2$$

$$(g_1 = g_3)$$

El problema se divide en 3

A_1 = área comprendida entre f y g_1 en el int. $(-\infty, 0]$

A_2 = área comprendida entre f y g_2 en el int. $[0,2]$

A_3 = área comprendida entre f y g_3 en el intervalo $[2,+\infty)$

$A = A_1 + A_2 + A_3$

Ptos de corte 1º) de $g_1 = g_3$ con f

$x^2-2x = 6x-x^2 \iff 2x^2-8x=0 \iff 2x(x-4)=0$ Aquí No hay área p.q. $\int_0^0 f-g=0$

$x=0$ (1er intervalo) $(-\infty,0]$

$x=4$ (en el 3er intervalo $[2,+\infty)$) los límites de integ. serían 2 y 4

2) Ptos de corte de g_2 con f en $[0,2]$

$-x^2+2x = 6x-x^2 \iff -4x=0 \iff x=0$ que sí está en $[0,2]$

los límites de integración serían 0 y 2

Primitivas $F_1(x) = \int g_1 - f = F_3(x) = \int g_3 - f =$

$$= \int (2x^2-8x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} = \boxed{\frac{2}{3}x^3 - 4x^2}$$

$$F_2(x) = \int g_2 - f = \int -4x\,dx = \frac{-4x^2}{2} = \boxed{-2x^2}$$

Áreas $A_1 = 0$ $\quad (A_1 = |\int_0^0 f-g_1| = 0)$

$$A_2 = \left|\int_0^2 g_2 - f\right| = |F_2(2) - F_2(0)| = |-2\cdot 4 - 0| = |-8| = \boxed{8u^2} \text{ de medida}$$

$$A_3 = \left|\int_2^4 g_3 - f\right| = |F_3(4) - F_3(2)| = \left|\frac{2}{3}4^3 - 4\cdot 4^2 - \frac{2}{3}2^3 + 4\cdot 2^2\right|$$

$$= \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3} \simeq \boxed{10'6\ u^2} \text{ de medida}$$

Entonces $A = 0 + 8 + \frac{32}{3} = 18'\hat{6}\ u^2$ de medida

10 Andalucía 2020 EXT Ej. 6

$f(x) = |x| \qquad g(x) = x^2 - 2$

Área que determinan

$$f(x) = \begin{cases} -x = f_1 & \text{si } x \leq 0 \\ x = f_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos dividir el problema en 2

A_1 = área delimitada por f_1 y g en $(-\infty, 0]$

A_2 = área delimitada por f_2 y g en $[0, +\infty)$

Ptos de corte y límites de integración

1º) $f_1 - g = -x - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

restringido al intervalo $(-\infty, 0]$

como $1 \notin (-\infty, 0]$ no vale, -2 sí

los límites de integración serían $x = 0$ (del intervalo)

y $x = -2$ (del pto de corte)

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{0} f_1 - g \right|$$

2º) $f_2 - g = x - x^2 + 2 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$

restringido al intervalo $[0, +\infty)$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

como $-1 \notin [0, +\infty)$ no vale, en cambio $2 \in [0, +\infty)$

los límites de integración serían:

$x = 0$ (del intervalo) y $x = 2$ (del pto de corte)

$$A_2 = \left| \int_{0}^{2} f_2 - g \right|$$

Cálculo de primitivas

$F_1(x) = \int f_1 - g = \int -x - x^2 + 2 = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x$

$F_2(x) = \int f_2 - g = \int x - x^2 + 2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x$

Calculamos las áreas

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{0} f_1 - g \right| = \left| F_1(0) - F_1(-2) \right|$$

$$A_2 = \left| \int_{0}^{2} f_2 - g \right| = \left| F_2(2) - F_2(0) \right|$$

$$F_1(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$F_2(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$\begin{cases} F_1(0) = 0 \\ F_1(-2) = -\frac{-8}{3} - \frac{4}{2} - 4 = \frac{8}{3} - 2 - 4 = \frac{8}{3} - 6 = \frac{8-18}{3} = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

$$A_1 = \left| 0 - \left(-\frac{10}{3}\right) \right| = \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} F_2(2) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{-8+18}{3} = \frac{10}{3} \\ F_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$A_2 = \left| \frac{10}{3} - 0 \right| = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \boxed{\frac{20}{3}\, u^2} \text{ de medida}$$

En todos los demás casos (más de 2 funciones) o recintos muy especiales es necesario hacer el dibujo